Distribuição Nadarajah-Haghighi Unitária (UNH)

Andressa Lopez Soares

2025-04-17

Introdução

A distribuição Nadarajah-Haghighi Unitária (UNH) é uma distribuição contínua definida no intervalo unitário $(0, 1)$, proposta como alternativa flexível para modelar proporções e dados limitados. A distribuição é obtida a partir da distribuição Nadarajah-Haghighi original, usando a transformação $Y = exp(-X)$, e é parametrizada por dois parâmetros:

- $\alpha > 0$: parâmetro de forma;
- $\lambda > 0$: parâmetro de escala.

Funções da Distribuição

Seja $Y \sim \text{UNH}(\alpha, \lambda)$. As principais funções associadas a essa distribuição são:

Função de densidade de probabilidade (PDF)

A função de densidade de probabilidade (PDF) da distribuição UNH é dada por:

$$f(y; \alpha, \lambda) = \frac{\alpha\lambda}{y}(1 - \lambda \ln y)^{\alpha-1} \exp\left[1 - (1 - \lambda \ln y)^{\alpha}\right], \quad 0 < y < 1,$$

Função de distribuição acumulada (CDF)

A função de distribuição acumulada (CDF) da distribuição UNH é dada por:

$$F(y; \alpha, \lambda) = \exp\left[1 - (1 - \lambda \ln y)^{\alpha}\right], \quad 0 < y < 1,$$

Função quantílica

A função quantílica da distribuição UNH é obtida a partir de $F(y) = u$, onde $u \sim \text{Uniforme}(0, 1)$, ou seja, $u = \exp\left(1 - (1 - \lambda \log(y))^{\alpha}\right)$. A forma simplificada da função quantílica da UNH é dada por:

$$y = \exp\left(\frac{1}{\lambda}\left(1 - (1 - \ln(u))^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right)$$

A função quantílica para um percentil p é definida como:

$$y_p = \exp\left(\frac{1}{\lambda}\left(1 - (1 - \ln(p))^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right)$$

Geração de números aleatórios

Para gerar uma variável aleatória $Y \sim \mathrm{UNH}(\alpha, \lambda)$, utilizamos o método da inversa da CDF:

$$Y = Q_{\mathrm{UNH}}(U) = \exp\left\{\frac{1}{\lambda}\left[1 - (1 - \ln U)^{1/\alpha}\right]\right\}, \quad U \sim \mathrm{Uniform}(0,1)$$

Estimação via máxima verossimilhança

Suponha que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ seja uma amostra aleatória simples da distribuição NHU. Então, a função de verossimilhança é dada por:

$$L(\lambda, \alpha; \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i; \alpha, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha\lambda}{y_i}\,(1 - \lambda \ln y_i)^{\alpha-1}\,\exp\big[\,1 - (1 - \lambda \ln y_i)^{\alpha}\big].$$

A log-verossimilhança correspondente é

$$\ell(\lambda, \alpha; \mathbf{y}) = \ln L(\lambda, \alpha; \mathbf{y}) = n\ln(\alpha\lambda) - \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i) + (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln\big(1 - \lambda \ln y_i\big) + n - \sum_{i=1}^{n}\big(1 - \lambda \ln y_i\big)^{\alpha}.$$

As equações de pontuação, obtidas impondo $\partial\ell/\partial\alpha = 0$ e $\partial\ell/\partial\lambda = 0$, são:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n} \ln\big(1 - \lambda \ln y_i\big) - \sum_{i=1}^{n}\big(1 - \lambda \ln y_i\big)^{\alpha} \ln\big(1 - \lambda \ln y_i\big) = 0,$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} + (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(y_i)}{1 - \lambda \ln y_i} + \alpha \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i)\,\big(1 - \lambda \ln y_i\big)^{\alpha-1} = 0.$$

Os estimadores de máxima verossimilhança para λ e α não admitem forma fechada e devem ser obtidos por métodos numéricos.

Referência

Shah, Ismail & Iqbal, Brikhna & Akram, Muhammad Farhan & Ali, Sajid & Dey, Sanku. (2021). UNIT NADARAJAH AND HAGHIGHI DISTRIBUTION: PROPERTIES AND APPLICATIONS IN QUALITY CONTROL. Scientia Iranica. 10.24200/SCI.2021.57302.5167.