



UNIVERSIDADE SÃO JUDAS TADEU

**FACULDADE DE TECNOLOGIA E
CIENCIAS EXATAS**

**Aulas de laboratório: Construção de
Modelos de Programação Linear**

Prof. Dr. Fernando Mori
prof.fmori@usjt.br



Material disponível em:

<http://sites.google.com/site/fmoripro/>

Índice

Titulo	Página
Introdução e Exemplos Protótipos	5
Uso do Lindo em Programação Linear	25
Problemas Gerais	42
Problemas de Produção	59
Análise de Sensibilidade	77
Problemas de Mistura	89
Problemas de Transporte	109
Problemas de Programação Inteira	126
Construção de Modelos de PL	154

Construção de Modelos de Programação Linear

Introdução

- A programação linear usa um modelo matemático para descrever problemas. O adjetivo linear significa que todas as funções matemáticas nesse modelo são necessariamente lineares. A palavra programação, nesse caso, não se refere a programação de computador, ela é essencialmente um sinônimo para planejamento. Portanto a programação linear envolve o planejamento de atividades para obter um resultado ótimo, isto é, um resultado que atinja o melhor objetivo especificado(de acordo com o modelo matemático) entre todas as alternativas viáveis.

Exemplos Protótipos

- Veremos a seguir alguns exemplos de construção de modelos em que são discutidos todos os passos intermediários na confecção de um modelo de P.L.

Exemplo 1:

Função objetivo a ser maximizada:

$$\text{Lucro} = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{Restrições} \left\{ \begin{array}{l} \text{técnicas} \left\{ \begin{array}{l} 4x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ 6x_1 - x_2 \geq 20 \end{array} \right. \\ \text{de não negatividade} \left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

As variáveis controladas ou de decisão são x_1 e x_2 . A função objetivo ou eficiência mede o desempenho do sistema, no caso a capacidade de gerar lucro para cada solução apresentada. O objetivo é maximizar o lucro.

Roteiro:

1) Quais as variáveis de decisão?

Devemos explicitar as decisões que devem ser tomadas e representar essas possíveis decisões através de variáveis chamadas de variáveis de decisão.

Se o problema é programação de produção, as variáveis de decisão são as quantidades a produzir no período; se for um problema de programação de investimento, as variáveis vão representar as decisões de investimento.

2) Qual o objetivo?

Devemos identificar o objetivo da tomada de decisão. Eles aparecem geralmente na forma de maximização de lucros ou receitas, minimização de custo, perdas.

A função objetivo é a expressão que calcula o valor do objetivo (lucro, custo, receita, etc.) em função das variáveis de decisão.

3) Quais as restrições?

Cada restrição imposta na descrição dos sistema deve ser expressa como uma relação linear (igualdade ou desigualdade) montadas com as variáveis de decisão.

Exemplo 2:

1) Certa empresa fabrica dois produtos P_1 e P_2 . O lucro unitário do produto P_1 é 1000 unidades monetárias e o lucro unitário de P_2 é 1800 unidades monetárias. A empresa precisa de 20 horas para fabricar uma unidade de P_1 e de 30 horas para fabricar uma unidade de P_2 . O tempo anual de produção disponível para isso é 1200 horas. A demanda esperada para cada produto é de 40 unidades anuais para P_1 e 30 unidades anuais para P_2 .

Qual é o plano de produção para que a empresa maximize seu lucro nesses itens? Construir o modelo de programação linear.

Solução:

- Variáveis de decisão

Quais as quantidades anuais que devem ser produzidas de P_1 e P_2 ?

As variáveis de decisão serão x_1 e x_2

$x_1 \rightarrow$ quantidade anual a produzir de P_1

$x_2 \rightarrow$ quantidade anual a produzir de P_2

- Qual o objetivo?

O objetivo é maximizar o lucro que pode ser calculado:

Lucro devido a P_1 : $1000 \cdot x_1$ (lucro por unidade de P_1 x quantidade produzida de P_1).

Lucro devido a P_2 : $1800 \cdot x_2$

Lucro total : $L = 1000 \cdot x_1 + 1800 \cdot x_2$

- Quais as restrições?
- Disponibilidade de horas para produção: 1200
- Horas ocupadas com P_1 : $20 x_1$ (uso por unidade \times quantidade produzida)
- Horas ocupadas com P_2 : $30 x_2$ (uso por unidade \times quantidade produzida)
- Total em horas ocupadas na produção: $20x_1 + 30x_2$
disp.: 1.200 horas
- Restrição: $20x_1 + 30x_2 \leq 1200$
- Disponibilidade de mercado para os produtos:
 - a) para P_1 : 40 unidades
 - b) quantidade a produzir de P_1 : x_1
- Restrição: $x_1 \leq 40$

- Disponibilidade para P_2 : 30 unidades
- Quantidade a produzir de P_2 : x_2
- Restrição: $x_2 \leq 30$

- Resumo do modelo:

$$\max L = 1.000 x_1 + 1.800 x_2 .$$

- Sujeito:
$$\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 \leq 1200 \\ x_1 \leq 40 \\ x_2 \leq 30 \end{cases}$$

- Restrições de não negatividade:
$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3) Para uma boa alimentação, o corpo necessita de vitaminas e proteínas. A necessidade mínima de vitaminas é 32 unidades por dia e a de proteínas de 36 unidades por dia. Uma pessoa tem disponível carne e ovos para se alimentar. Cada unidade de carne tem 4 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas. Cada unidade de ovo contém 8 unidades de vitaminas e 6 unidades de proteínas.

Qual a quantidade diária de carne e ovo que deve ser consumida para suprir as necessidades de vitaminas e proteínas com o menor custo possível? Cada unidade de carne custa 3 unidades monetárias e cada unidade de ovo custa 2,5 unidades monetárias.

Solução:

a) Quais as variáveis de decisão?

Devemos decidir as quantidades de carne e ovos que a pessoa deve consumir.

$x_1 \rightarrow$ quantidade de carne a consumir no dia

$x_2 \rightarrow$ quantidade de ovos a consumir no dia

b) Qual o objetivo?

O objetivo é minimizar o custo que pode ser calculado:

. custo da carne: $3.x_1$

. custo dos ovos : $2,5.x_2$

. custo total: $C = 3.x_1 + 2,5 .x_2$

Objetivo: minimizar $C = 3.x_1 + 2,5.x_2$

c) Restrições:

- Necessidade mínima de vitaminas: 32 unidades
.vitamina de carne: $4x_1 \rightarrow$ (quant.por unidade \times unidades de carne a consumir).
.vitamina de ovos: $8x_2 \rightarrow$ (quant. por unidade \times unidades de ovos a consumir).
Total de vitaminas: $4x_1 + 8x_2$
- Necessidade mínima: 32
Restrição: $4x_1 + 8x_2 \geq 32$
- Necessidade mínima de proteína: 36 unidades
.proteína de carne: $6x_1 \rightarrow$ (quant.por unidade \times unidades de carne a consumir).
.proteína de ovos: $6x_2 \rightarrow$ (quant.por unidade \times unidades de ovos a consumir).
Restrição: $6x_1 + 6x_2 \geq 36$

- Resumo do modelo:

$$\min C = 3x_1 + 2,5x_2$$

$$\text{-Restrição: } \begin{cases} 4x_1 + 8x_2 \geq 32 \\ 6x_1 + 6x_2 \geq 36 \end{cases}$$

$$\text{-Restrições de não negatividade: } \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4) Certa empresa fabrica 2 produtos P_1 e P_2 . O lucro por unidade de P_1 é de 100 u.m. e o lucro unitário de P_2 é 150 u.m. A empresa necessita de 2 horas para fabricar uma unidade de P_1 e 3 horas para fabricar uma unidade de P_2 . O tempo mensal disponível para essas atividades é de 120 horas. As demandas esperadas para os 2 produtos levaram a empresa a decidir que os montantes produzidos de P_1 e P_2 não devem ultrapassar 40 unidades de P_1 e 30 unidades de P_2 por mês. Construa o modelo de produção mensal com o objetivo de maximizar o lucro.

a) Variáveis de decisão

$x_1 \rightarrow$ quantidade a produzir de P_1

$x_2 \rightarrow$ quantidade a produzir de P_2

b) Qual o objetivo?

maximizar lucro:

-lucro de $P_1 = 100 x_1$

-lucro de $P_2 = 150 x_2$

$$\max L = 100 x_1 + 150 x_2$$

c) Restrições

Horas para $P_1 = 2. x_1$

Horas para $P_2 = 3. x_2$

Horas disponíveis: 120

$$2x_1 + 3x_2 \leq 120$$

Limite para $P_1 = x_1 \leq 40$

Limite para $P_2 = x_2 \leq 30$

d) Modelo:

$$\max L = 100 x_1 + 150 x_2$$

$$\text{Restrições: } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 120 \\ x_1 \leq 40 \\ x_2 \leq 30 \end{cases}$$

$$\text{Restrições de não negatividade: } \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5) Um vendedor de frutas pode transportar 800 caixas de frutas para sua região de vendas. Ele necessita transportar 200 caixas de laranjas a 20 u.m. de lucro por caixa, pelo menos 100 caixas de pêssegos a 10 u.m. de lucro por caixa e no máximo 200 caixas de tangerinas a 30 u.m. de lucro por caixa. De que forma deverá ele carregar o caminhão para obter o lucro máximo? Construa o modelo do problema.

a) Variáveis de decisão

$x_1 \rightarrow$ quantidade de caixas de pêssegos

$x_2 \rightarrow$ quantidade de caixas de tangerinas

quantidade de caixas de laranja é fixa em 200 caixas a
lucro de 20 u.m. Sobra espaço para 600 caixas.

b) Qual o objetivo?

maximizar lucro:

-lucro de pêssegos = $10 \cdot x_1$

-lucro de tangerinas = $30 \cdot x_2$

-lucro de laranjas = $200 \cdot 20 = 4000$

$$\max L = 100x_1 + 30x_2 + 4000$$

c) Restrições

Cabem no caminhão 600 caixas.

$$x_1 + x_2 \leq 600$$

Caixas de pêssegos: $x_1 \geq 100$

Caixas de tangerinas: $x_2 \leq 200$

d) Modelo:

$$\max L = 10 x_1 + 30 x_2 + 4000$$

$$\text{Restrições: } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 600 \\ x_1 \geq 100 \\ x_2 \leq 200 \end{cases}$$

$$\text{Restrições de não negatividade: } \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

USO DO LINDO EM PROGRAMAÇÃO LINEAR

Uso do Lindo em Programação Linear

O Lindo (Linear, Interactive and Discrete Optmizer) é um software desenvolvido pela Lindo Systems Inc. de Chicago, Illinois, EUA, para a resolução de modelos de programação linear, quadrática ou inteira. Ele roda no ambiente Windows e está disponível nas seguintes versões:

Versão	Limites Máximos		Observações
	# Linhas	# Colunas	
Demonstração *	150	300	Cópia em uso
Super	500	1.000	
Hiper	2.000	4.000	
Industrial	8.000	16.000	
Extended	32.000	100.000	

Existem atualmente centenas de pacotes para Programação Linear, e dentre os diversos disponíveis, os listados a seguir são os mais conhecidos e utilizados:

Software	Fornecedor	Capacidade	
		Restrições (Linhas)	Variáveis (Colunas)
Lindo/Lingo	Lindo	32.000	100.000
MPSX	IBM	16 milhões	2 bilhões
CPLEX	CPLEX	50.000	100.000
OSL	IBM	16 milhões	2 bilhões
Solver-Excel	Microsoft	100	200
Solver Premium	Frontline	Sem limite	1.000

Considere o Modelo:

Maximizar Lucro = $30ST + 40 LX$

Sujeito a:

$$ST \leq 24$$

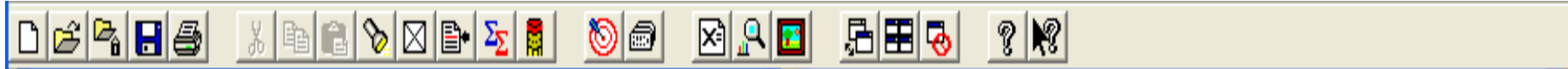
$$LX \leq 16$$

$$ST + 2LX \leq 40$$

Accionando o Lindo e Entrando com Dados

Para acionar o software Lindo, basta clicar no ícone correspondente no Windows,. A primeira tela fornecida tem o formato da figura a seguir e, para entrar com os dados, basta ir digitando-os conforme foi feito na própria figura.

Entrada de Dados no Lindo



! Exemplo 1

Max $30st + 40Lx$

st

st < 24

Lx < 16

St + 2Lx < 40

End

Observe que:

- Podemos iniciar a digitação de cada linha qualquer coluna.
- Utilizamos o sinal $<$ para \leq

Os significados das outras informações são:

Linha	Significado
! Exemplo do Capítulo 1	Trata-se de uma linha de comentário, pois inicia-se com !
Max	Comando que solicita maximizar uma função (outra opção seria Min).
St	Subject to – que significa “sujeito a”. Informa que a seguir temos o conjunto de restrições.
End	Informa o fim dos dados.

Salvando os Dados

Para salvar os dados em um arquivo em disco, faça:

- Clique em *File* no Menu Principal
- Clique em *Save as*
- Selecione o diretório e escolha um nome adequado (por exemplo: radio.ltx)
- Clique em *OK*.

Executando o Exemplo

Para executar, faça:

- Clique em *Solve* no Menu Principal
- Clique em *Solve*

Existe uma opção mais simples: basta clicar no ícone *Solve*

Após isto, aparece uma tela perguntando se se deseja efetuar a análise de sensibilidade (Do Range (sensitivity) analysis?). No momento responda negativamente. A seguir aparece a tela que contém um resumo do resultado alcançado ou informações de alerta caso o modelo apresente algum problema. Após analisá-la, clique em *Close*.

LINDO Solver Status

Optmizer Status

Status:	Optimal
Iterations:	1
Infeasibility:	0
Objective:	1040
Best IP:	N/A
IP Bound:	N/A
Branches:	N/A
Elapsed Time:	00:00:02

Update Interval:

Interrupter Solver

Close

Visualizando a Tela de Resultados

Após a etapa acima o Lindo apresenta, de maneira superposta, tanto a tela de entrada de dados como a tela de resultados. Para ativar uma ou outra, basta clicar em qualquer ponto de uma delas. Eventualmente, quando uma das telas estiver ocupando todo o espaço disponível, somente veremos uma delas. Para visualizar a outra, faça:

- Clique em *Window* no Menu Principal
- Clique em *Send to Back*

Existe ainda outras opções interessantes para acessar as visualizações do Lindo, tais como:

- Em cascata (cascade)
- Uma ao lado da outra (tile)

Analizando o Resultado

Após a execução de um modelo sem erros, o Lindo apresenta o quadro de resultados mostrado a seguir:

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 1

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 1040.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
ST	24.000000	0.000000
LX	8.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	10.000000
3)	8.000000	0.000000
4)	0.000000	20.000000

NO. ITERATIONS = 1

Para o quadro anterior temos:

- **LP OPTIMUM FOUND AT STEP 1:**

Significa que o algoritmo simplex utilizado pelo programa encontrou a solução ótima no primeiro passo (um passo corresponde a um vértice do método simplex).

- **OBJECTIVE FUNCTION VALUE:**

1) 1040.000

Indica o valor ótimo encontrado para a Função Objetivo (no caso temos Lucro= R\$1.040,00)

- | VARIABLE | VALUE | REDUCED COST |
|-----------------|--------------|---------------------|
|-----------------|--------------|---------------------|

ST	24.000000	0.000000
----	-----------	----------

LX	8.000000	0.000000
----	----------	----------

Temos aqui uma pequena tabela que apresenta os valores ótimos das variáveis básicas. Portanto, a solução ótima foi (Value):

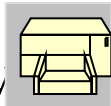
ST = 24 LX = 8

Solicitando Impressão de Resultados

Para imprimir os resultados de um modelo, efetue (tendo a tela de resultados ativada):

- Clique em *File* no menu Principal
- Clique em *Print*

Ou simplesmente clique no ícone

Importante: Você pode observar que é possível  digitar no texto da tela de resultados. Isto é muito conveniente, pois torna possível:

- Incluir qualquer informação que melhor identifique o trabalho.
- Copiar e colar os dados de entrada do modelo.

Alterando os Dados e Executando Novamente

Para alterar os dados, basta acessar a tela de dados (utilize os mesmos procedimentos mostrados anteriormente no item *Visualizando a Tela de Resultados*). Para executar novamente, basta clicar no ícone ***Solve***, conforme mostrado anteriormente em *Executando o Exemplo*. Esteja atento para o fato de que o Lindo vai colocar a nova solução, na tela de resultados, logo após a solução anterior. Ou seja, a tela de resultados contém todas as operações efetuadas. Eventualmente isto pode confundir e pode ser conveniente apagar a solução anterior. Para tanto, efetue:

- Clique no ícone da tela de resultados.



Abrindo Outros Modelos

Para abrir qualquer outro modelo do Lindo, faça:

- Clique em *Open* no Menu Principal
- Selecione o diretório e o arquivo desejado
- Clique em *OK*.



Exercícios de Programação Linear

- Construção de Modelos

Exercícios Práticos

- Os exercícios a seguir devem ser resolvidos com o auxílio do LINDO.

1. Problemas Gerais

1) Uma rede de televisão local tem o seguinte problema: foi descoberto que o programa “A” com 20 minutos de música e 1 minuto de propaganda chama a atenção de 30.000 telespectadores, enquanto o programa “B”, com 10 minutos de música e 1 minuto de propaganda chama a atenção de 10.000 telespectadores. No decorrer de uma semana, o patrocinador insiste no uso de no mínimo, 5 minutos para sua propaganda e que não há verba para mais de 80 minutos de música. Quantas vezes por semana cada programa deve ser levado ao ar para obter o número máximo de telespectadores? Construa o modelo do sistema.

2) Uma empresa fabrica 2 modelos de cintos de couro. O modelo M_1 , de melhor qualidade, requer o dobro do tempo de fabricação em relação ao modelo M_2 . Se todos os cintos fossem do modelo M_2 , a empresa poderia produzir 1.000 unidades por dia. A disponibilidade de couro permite fabricar 800 cintos de ambos os modelos por dia. Os cintos empregam fivelas diferentes, cuja disponibilidade diária é de 400 para M_1 e 700 para M_2 . Os lucros unitários são de \$4,00 para M_1 e \$3,00 para M_2 . Qual o programa ótimo de produção que maximiza o lucro total diário da empresa? Construa, o modelo do sistema descrito.

3) Uma empresa, após um processo de racionalização de produção, ficou com disponibilidade de 3 recursos produtivos, R_1, R_2 e R_3 . Um estudo sobre o uso desses recursos indicou a possibilidade de se fabricar 2 produtos P1 e P2. Levantando os custos e consultando o departamento de vendas sobre o preço de colocação no mercado, verificou-se que P1 daria um lucro de \$120,00 por unidade e P2, \$150,00 por unidade. O departamento de produção forneceu a seguinte tabela de uso de recursos.

Produto	Recurso R_1 por unidade	Recurso R_2 por unidade	Recurso R_3 por unidade
P1	2	3	5
P2	4	2	3
Disponibilidade de recursos/mês	100	90	120

Que produção mensal de P1 e P2 traz o maior lucro para a empresa? Construa o modelo do sistema.

4) Um fazendeiro está estudando a divisão de sua propriedade nas seguintes atividades produtivas:

A (Arrendamento) – Destinar certa quantidade de alqueires para a plantação de cana-de-açúcar, a uma usina local, que se encarrega da atividade e paga pelo aluguel da terra \$300,00 por alqueire por ano.

P (Pecuária) – Usar outra parte para criação de gado de corte. A recuperação das pastagens requer adubação (100kg/Alq.) e irrigação (100.000 l. de água/Alq.) por ano. O lucro estimado nessa atividade é de \$400,00 por alqueire por ano.

S (Plantio de Soja) – Usar uma terceira parte para o plantio de soja. Essa cultura requer 200kg por alqueire de adubos e 200.000 l de água/Alq. para irrigação por ano. O lucro estimado nessa atividade é de \$500,00/alqueire no ano.

Disponibilidade de recursos por ano:

12.750.000 l. de água

14.000 kg de adubo

100 alqueires de terra.

Quantos alqueires deverá destinar a cada atividade para proporcionar o melhor retorno? Construa o modelo de decisão.

- 5) O departamento de marketing de uma empresa estuda a forma mais econômica de aumentar em 30% as vendas de seus dois produtos P1 e P2. As alternativas são:
- a) Investir em um programa institucional com outras empresas do mesmo ramo. Esse programa requer um investimento mínimo de \$3.000,00 e deve proporcionar um aumento de 3% nas vendas de cada produto, para cada \$1.000,00 investidos.
 - b) Investir diretamente na divulgação dos produtos. Cada \$1.000,00 investidos em P1 retornam um aumento de 4% nas vendas, enquanto que para P2 o retorno é de 10%.
- A empresa dispõe de \$10.000,00 para esse empreendimento. Quanto deverá destinar a cada atividade? Construa o modelo do sistema descrito.

6) (Mistura) Uma liga especial constituída de ferro, carvão, silício e níquel pode ser obtida usando a mistura desses minerais puros além de 2 tipos de materiais recuperados:

➤ Material Recuperado 1 – MR1 – Composição:

ferro – 60% Custo por kg: \$0,20

carvão – 20%

silício – 20%

➤ Material Recuperado 2 – MR2 – Composição:

ferro – 70% Custo por kg: \$0,25

carvão – 20%

silício – 5%

níquel – 5%

A liga deve ter a seguinte composição final:

Matéria-prima	% mínima	% máxima
Ferro	60	65
Carvão	15	20
Silício	15	20
Níquel	5	8

O custo dos materiais puros são (por kg): ferro:\$0,30; carvão:\$0,20; silício:\$0,28; níquel:\$0,50. Qual deverá ser a composição da mistura em termos dos materiais disponíveis, com menor custo por kg? Construa o modelo de decisão.

7)(Transporte) Uma rede de depósitos de material de construção tem 4 lojas que devem ser abastecidas com 50m^3 (loja1), 80m^3 (loja2), 40m^3 (loja3) e 100m^3 (loja4) de areia grossa. Essa areia pode ser carregada em 3 portos P1, P2 e P3 cujas distâncias às lojas estão no quadro (em km):

	L1	L2	L3	L4
P1	30	20	24	18
P2	12	36	30	24
P3	8	15	25	20

O caminhão pode transportar 10m^3 por viagem. Os portos tem areia para suprir qualquer demanda. Estabelecer um plano de transporte que minimize a distância total percorrida entre os portos e as lojas e supra as necessidades das lojas. Construa o modelo linear do problema.

8) A indústria Alumilâminas S/A iniciou suas operações em janeiro/2001 e já vem conquistando espaço no mercado de laminados brasileiro, tendo contratos fechados de fornecimento para todos os 3 tipos diferentes de lâminas de alumínio que fabrica: espessuras finas, média e grossa. Toda a produção da companhia é realizada em duas fábricas, uma localizada em São Paulo e a outra no Rio de Janeiro. Segundo os contratos fechados, a empresa precisa entregar 16 toneladas de lâminas finas, 6 toneladas média e 28 toneladas de grossas. Devido à qualidade dos produtos da empresa, há uma demanda extra para cada tipo de lâminas.

A fábrica de São Paulo tem custo de produção diária de R\$100.000,00 para uma capacidade produtiva de 8 toneladas de lâminas finas, 1 tonelada de lâminas médias e 2 toneladas de lâminas grossas por dia. O custo de produção diário da fábrica do Rio de Janeiro é de R\$200.000,00 para uma produção de 2 toneladas de lâminas finas, 1 tonelada de lâminas médias e 7 toneladas de lâminas grossas. Quantos dias cada uma das fábricas deverá operar para atender aos pedidos ao menor custo possível?

9) A empresa de logística Deixa Comigo S/A tem duas frotas de caminhões para realizar transportes de cargas para terceiros. A primeira frota é composta por caminhões médios e a segunda por caminhões gigantes, ambas com condições especiais para transportar sementes e grãos prontos para o consumo, como arroz e feijão. A primeira frota tem capacidade de peso de 70.000 quilogramas e um limite de volume de 30.000 pés cúbicos, enquanto a segunda pode transportar até 90.000 quilogramas e acomodar 40.000 pés cúbicos de volume. O próximo contrato de transporte refere-se a uma entrega de 100.000 quilogramas de sementes e 85.000 quilogramas de grãos, sendo que a empresa pode

aceitar levar tudo ou somente uma parte da carga, deixando o restante para outra transportadora entregar. O volume ocupado pelas sementes é de 0,4 pés cúbico por quilograma, e o volume dos grãos é de 0,2 pés cúbico por quilograma. Sabendo que o lucro para transportar as sementes é de R\$0,12 por quilograma e o lucro para transportar os grãos é de R\$0,35 por quilograma, descubra, quantos quilogramas de sementes e quantos quilogramas de grãos a Deixa Comigo S/A deve transportar para maximizar o seu lucro.

10) Suponha que uma pequena fábrica faz dois produtos P1 e P2, vendendo toda a produção que venha a ser realizada. Cada produto necessita de um tempo de fabricação em cada uma das três seções de trabalho: A, B e C, tal como apresentado na tabela a seguir:

Tabela 1:

- Necessidades de tempo de fabricação para produzir uma unidade de cada produto em cada seção de trabalho.

Produto	Tempo de fabricação (em horas)		
	Seção de trabalho A	Seção de trabalho B	Seção de trabalho C
P1	3	1,5	5
P2	3	3	3

A quantidade fixa de horas por semana disponíveis em cada seção de trabalho é apresentada na Tabela 2:

- Limites de capacidade de fabricação

Seção de trabalho	Homens/hora por semana
A	210
B	180
C	330

Determine quantas unidades dos produtos P1 e P2 devem ser fabricadas de maneira a maximizar o Lucro da empresa, sabendo que o lucro unitário proporcionado pelo produto P1 é de 2 unidades monetárias e o proporcionado pelo produto P2 é de 3 unidades monetárias.

2. Problemas de Produção

11) A indústria Bonecas Sinistras S/A produz 2 tipos de boneca: a Vampiresca e a Lobimulher. O processo de montagem para cada uma destas bonecas requer duas pessoas. Os tempos de montagem são os seguintes:

Modelo	Montador 1	Montador 2
Vampiresca	6 minutos	2 minutos
Lobimulher	3 minutos	4 minutos
Máximo de horas disponíveis	8	8

A política da companhia é a de balancear toda a mão de obra em todos os processos de montagem. Na verdade, a gerência deseja programar o trabalho de modo que nenhum montador tenha mais de 30 minutos de trabalho por dia do que o outro.

Isto quer dizer que, num período regular de oito horas, os dois montadores deverão ter um mínimo de 7 horas e meia de trabalho. Considerando que o mercado está disposto a comprar toda a produção de Bonecas Sinistras S/A e que a firma tem um lucro de R\$2,00 por cada Vampiresca e R\$1,00 por cada Lobimulher, quantas unidades de cada boneca devem ser produzidas por dia de modo a maximizar o lucro ?

- 12) A Cat Without Fat S/A é uma empresa fabricante de comida enlatada para gatos, cujo principal diferencial competitivo é o baixo nível de gordura assegurado nas embalagens. Para fabricar o enlatado, a empresa utiliza uma mistura de frango – que contém 75% de carne, 25% de gordura e custa R\$3,00 o quilo – e peixe que contém 90% de carne, 10% gordura e custa R\$5,00 o quilo. A companhia deseja saber qual é a melhor combinação de frango e peixe que deve utilizar, a fim de preparar uma comida para gatos com, no máximo, 15% de gordura ao menor custo possível por quilo.
- Modele o problema. Dica: as variáveis de decisão deste problema representam os percentuais de frango e peixe utilizados para preparar o enlatado, devendo, portanto ter valores entre 0 e 1 (ou entre 0 e 100%).

13) Duas fábricas produzem 3 diferentes tipos de papel. A companhia que controla as fábricas tem um contrato para produzir 16 toneladas de papel fino, 6 toneladas de papel médio e 28 toneladas de papel grosso. Existe uma demanda para cada tipo de espessura. O custo de produção na primeira fábrica é de 1.000u.m. e o da segunda fábrica é de 2.000u.m. por dia. A primeira fábrica produz 8 toneladas de papel fino, 1 tonelada de médio e 2 toneladas de grosso por dia, enquanto a segunda fábrica produz 2 toneladas de papel fino, 1 tonelada de médio e 7 toneladas de grosso. Quantos dias cada fábrica deverá operar para suprir os pedidos mais economicamente?

14) Uma companhia de transporte tem dois tipos de caminhões: o tipo **A**, que têm 2m^3 de espaço refrigerado e 3m^3 de espaço não refrigerado; o tipo **B** que tem 2m^3 de espaço refrigerado e 1m^3 de não refrigerado. O cliente quer transportar um produto que necessitará de 16m^3 de área refrigerada e 12m^3 de área não refrigerada. A companhia calcula em 1.100 litros o combustível para uma viagem com o caminhão **A** e 750 litros para o caminhão **B**. Quantos caminhões de cada tipo deverão ser usados no transporte do produto, com o menor consumo de combustível.

15) Uma companhia fabrica dois produtos P1 e P2 que utilizam os mesmos recursos produtivos: matéria-prima, forja e polimento. Cada unidade de P1 exige 4 horas de forjaria, 2 horas de polimento e utiliza 100 unidade de matéria-prima. Cada unidade de P2 requer 2 horas de forjaria, 3 horas de polimento e 200 unidade de matéria-prima. O preço de venda de P1 é 1.900u.m. e o de P2 é 2.100u.m. Toda produção tem mercado garantido. As disponibilidades são de: 20h. de forja; 10h. de polimento e 500 unidades de matéria-prima, por dia.

- a) Determinar as quantidades a produzir de P1 e P2 que otimizem a receita diária dos produtos.
- b) Suponha que os custos dos insumos sejam:
 - . Matéria-prima = 1u.m. por unidade
 - . Forjaria = 150 u.m. por hora
 - . Polimento = 100 u.m. por hora

Qual o plano de produção que maximiza o lucro diário?

16) Um sitiante está planejando sua estratégia de plantio para o próximo ano. Por informações obtidas nos órgãos governamentais, sabe que as culturas de trigo, arroz e milho serão as mais rentáveis na próxima safra. Por experiência, sabe que a produtividade de sua terra para as culturas desejadas é a constante na tabela abaixo:

Cultura	Produtividade kg/m ²	Lucro centavos/kg
Trigo	0,20	10,80
Arroz	0,30	4,20
Milho	0,40	2,03

Por falta de um local de armazenamento próprio, a produção máxima, em toneladas, está limitada a 60. A área cultivável do sitio é de 200.000m². Para atender as demandas de seu próprio sitio, é imperativo que se plante 400 m² de trigo, 800m² de arroz e 10.000m² de milho. Determine as áreas a serem plantadas de forma a maximizar o lucro.

17) Dos muitos produtos feitos pela Flecha S/A apenas os produtos P1, P2 , P3 e P4 passam pelas seções S1, S2, S3 e S4. As necessidades por unidade do produto em horas e o lucro em u.m.

Secção /Produto	S1	S2	S3	S4	Lucro p/unidade
P1	0,5	2,0	0,5	3,0	8,00
P2	1,0	1,0	0,5	1,0	9,00
P3	1,0	1,0	1,0	2,0	7,00
P4	0,5	1,0	1,0	3,0	6,00

A capacidade disponível em horas nas secções e as necessidades mínimas de venda dos produtos são:

Secção	Capacidades (horas)	Produto	Venda Mínima (unidade)
S1	1800	P1	100
S2	2800	P2	600
S3	3000	P3	500
S4	6000	P4	400

Determinar o número de produtos P1, P2, P3 e P4 que devem ser feitos para que o lucro seja máximo.

18) A água para suprir a demanda de uma cidade vem de 3 reservatórios. A necessidade total de água para a população é de 30.000 litros/hora. O reservatório R1 sendo o maior, fornecerá uma quantidade igual ou superior à média das quantidades fornecidas pelos dois outros. O reservatório R3 fornecerá no mínimo 5.000 litros/hora. O custo da tonelada de água fornecida pelo reservatório R1 é de 5u.m., pelo R2 é de 10u.m. e pelo R3 é de 8u.m. Quantos litros cada reservatório deverá fornecer para termos o custo mínimo? Qual é este custo?

19) A companhia Betontex segue a política de produzir aqueles produtos que dão lucratividade e tenham custo fixos. Contudo sempre se levou em conta o atendimento da necessidade mínima semanal para os artigos A1, A2, A3 e A4 que é:

Artigo	A1	A2	A3	A4
Unidades	25	30	30	25

As necessidades da produção e o tempo disponível para a próxima semana são:

Secção	A1 (horas/ unidade)	A2 (horas/ unidade)	A3 (horas/ unidade)	A4 (horas/ unidade)	Tempo Disponível Semanal/horas
S1	0,25	0,20	0,15	0,25	400
S2	0,30	0,40	0,50	0,30	1000
S3	0,25	0,30	0,25	0,30	500
S4	0,25	0,25	0,25	0,25	500
Lucro/ unidade	10,50	9,00	8,00	10,00	

Atualmente a produção semanal, considerando as necessidades mínimas de venda é:

Artigo	A1	A2	A3	A4
Unidades	1533	30	30	25

OBS: o artigo produzido pela empresa pode ser apresentado em meia unidade.

- a) O esquema de produção atual é ótimo?
- b) Que tipo de recomendação você daria a Betontex ?

20) Um show de meia hora na televisão deve apresentar um comediante, um mágico e uma cantora, incluindo no mínimo três e no máximo seis minutos para os comerciais. O comediante exige que seu tempo de apresentação seja no mínimo o dobro da cantora. O produtor do show estabelece que a soma dos tempos do comediante e da cantora não seja inferior ao tempo de apresentação do mágico.

Sabendo que o comediante, o mágico e a cantora custam ao produtor respectivamente 50, 30 e 20u.m. por minuto e que os comerciais nada custam, determinar o tempo de apresentação de cada artista, de modo que o custo do programa seja mínimo.

21) Uma empresa do ramo de madeiras produz madeira tipo compensado e madeira serrada comum e seus recursos são 40m^3 de pinho e 80m^3 de canela. A madeira serrada dá um lucro de R\$5,00 por m^3 e a madeira compensada um lucro de R\$0,70 por m^2 . Para produzir uma mistura comerciável de 1 metro cúbico de madeira serrada são requeridos 1 m^3 de pinho e 3 m^3 de canela. Para produzir 100m^2 de madeira compensada são requeridos 3m^3 de pinho e 5m^3 de canela. Compromissos de venda exigem que sejam produzidos pelo menos 5m^3 de madeira serrada e 900 m^2 de madeira compensada. Qual é o esquema de produção que maximiza o lucro?

22) Uma indústria de refrigerantes pode fabricá-los de 3 tipos: A, B e C vendidos em garrafas de 2 litros, 3 litros e 5 litros respectivamente. Deve atender a uma demanda de 8000 litros diários. O refrigerante tipo A contém 3 unidades de suco natural por garrafa e os B e C somente uma unidade por garrafa. Exige-se ao menos 10.000 unidades de suco natural na produção diária. Sabe-se ainda que o refrigerante tipo A tem um consumo muito superior ao refrigerante tipo B, mais precisamente, supera em 6.000 ou mais garrafas diárias o dobro do consumo de B. Quantas garrafas de cada refrigerante devemos fabricar diariamente se o custo por garrafa A fabricada é de 21u.m. por garrafa B de 3u.m. e por garrafa C 6u.m., para obter o custo mínimo de produção?

23) Uma empresa produz 4 diferentes modelos de um certo produto P1, P2, P3 e P4. Deseja-se estabelecer a programação diária que maximiza o lucro e atenda as limitações de recursos. A empresa tem a sua disposição 8 horas máquinas. 250m^2 de espaço para armazenagem e 230kg de matéria-prima. Sabe-se que para as máquinas a taxa de produção é de 15, 10, 20 e 25 peças/hora respectivamente para P1, P2, P3 e P4. Com relação ao armazenamento temos uma necessidade de espaço de 1,50; 2,00; 3,00 e $2,50\text{m}^2/\text{unidade}$ respectivamente de P1, P2, P3 e P4. O consumo de matéria-prima é de 1,50; 2,00; 1,50 e 3,0kg/unidade de P1, P2, P3 e P4 respectivamente. A quantidade diária do produto P4 deve ser de pelo menos 10 unidades segundo informações do departamento de marketing. O lucro obtido por unidade de P1, P2, P3 e P4 são respectivamente 4,50; 5,00; 3,50 e 3,00u.m.

3. Análise de Sensibilidade

Analise de Sensibilidade

Uma das hipóteses dos problemas de programação linear é a consideração de certeza nos coeficientes da função objetivo.

No mundo real, quase nunca temos certeza destes valores, e portanto devemos saber o quanto a solução otimizada está dependente de uma determinada constante ou coeficiente.

Na análise de sensibilidade queremos responder basicamente a 3 perguntas:

1. Qual o efeito de uma mudança em um dos coeficientes da função objetivo sobre a resposta do problema?
2. Qual o efeito de uma mudança numa constante de uma restrição?
3. Qual o efeito de uma mudança em um dos coeficientes de uma restrição?

O estudo da análise de sensibilidade estabelece limites inferiores e superiores para todos os coeficientes da função objetivo e para todas as constantes das restrições.

Vamos estudar um pouco da análise de sensibilidade através do relatório do LINDO, usando para isso o exemplo a seguir.

24)A empresa W vende 4 tipos de produtos. Os recursos necessários para produzir uma unidade de cada produto e o preço de venda estão dados na tabela a seguir. A demanda do mercado é exatamente 950 unidades.

	Produto1	Produto2	Produto3	Produto4
Matéria Prima	2	3	4	7
Horas de Trabalho	3	4	5	6
Preço de venda	4	6	7	8

Atualmente 4600 unidades de matéria prima e 5000 horas de trabalho estão disponíveis. Os mercado tem uma demanda de no mínimo 400 unidades do produto 4. Resolva o problema que maximize o lucro da empresa.

Usaremos este problema para explorar o relatório de análise de sensibilidade do LINDO.

1) Objective Function Coef. Ranges

Esta parte do relatório indica o quanto podemos alterar os coeficientes da função objetivo sem alterar a solução ótima. Assim olhando na coluna variable, escolhemos, por exemplo, o coeficiente de X3 que na função objetivo tem o valor 7. Olhando na linha correspondente vemos que seu allowable increase é 1 e o seu allowable decrease é 0,5 o que significa que se alterarmos o coeficiente de X3 para qualquer valor entre 6 e 7,5, o ponto ótimo encontrado para X1, X2, X3 e X4 permanecerão os mesmos. A alteração apenas ocorre no valor da função objetivo.

OBJ COEFFICIENT RANGES			
VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	4.000000	1.000000	INFINITY
X2	6.000000	0.666667	0.500000
X3	7.000000	1.000000	0.500000
X4	8.000000	2.000000	INFINITY

É importante observar que a variação no coeficiente deve ser feita uma de cada vez, ou seja se alterarmos o coeficiente de X3 conforme mencionado acima, os outros coeficientes devem permanecer os mesmos. Se alterarmos o coeficiente de X1, então são os demais que devem permanecer os mesmos.

Observe que temos algumas situações em que o allowable decrease foi infinito, neste caso podemos diminuir o coeficiente de quanto quisermos que não haverá alteração na solução ótima do problema.

2) Custo reduzido (Reduced Cost)

O custo reduzido nos dá informação sobre como devemos variar o coeficiente da função objetivo de tal forma que uma solução nula, e que portanto não fazia parte da solução ótima passe a fazer parte da solução. O custo reduzido será diferente de zero apenas para os casos em que a solução ótima para uma das variáveis seja nula.

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	1.000000
X2	400.000000	0.000000
X3	150.000000	0.000000
X4	400.000000	0.000000

Considere o custo reduzido de X1 que é 1. Isto implica que se aumentarmos o coeficiente de X1 na função objetivo de uma unidade, haverá uma nova solução ótima na qual o valor de X1 será diferente de zero. Se aumentarmos o coeficiente de X1 na função objetivo de por mais que 1 então qualquer solução ótima terá solução com X1 não nula.

3) Right Hand Side Ranges (RHS)

ROW	RIGHTHAND SIDE RANGES		
	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	950.000000	50.000000	100.000000
3	400.000000	37.500000	125.000000
4	4600.000000	250.000000	150.000000
5	5000.000000	INFINITY	250.000000

Esta parte do relatório se refere ao lado direito das restrições. Os numeros da coluna Row, se referem as restrições na linha em que foram escritas. A finalidade deste relatório é nos dizer de quanto uma restrição pode ser alterada de forma que ainda possamos encontrar uma solução para o problema. Assim se alterarmos o valor de uma restrição alteramos o valor do ponto ótimo, mas a partir de um certo intervalo pode não haver mais solução ótima para o problema. É para isso que serve este relatório.

Considere a primeira restrição. O lado direito desta restrição é 950. Se tivermos a seguinte variação:

$$850 = 950 - 100 \leq \text{RHS da linha 2} \leq 950 + 50 = 1000$$

Este é intervalo em que a restrição da linha 2 pode ser alterada de forma que uma solução ótima ainda possa ser encontrada. Observe que neste caso também a variação deve ser feita em uma restrição de cada vez, mantendo as outras com seus valores originais.

4) Shadow Prices ou Dual Prices

O Preço Sombra (Dual Price) de uma restrição é a quantidade que aumenta o valor ótimo da função objetivo se correspondentemente aumentarmos de 1 unidade o valor direito da restrição considerada.

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	3.000000
3)	0.000000	-2.000000
4)	0.000000	1.000000
5)	250.000000	0.000000

Assim, o Dual Price é 3 para a restrição na linha 2. Isto implica que cada aumento unitário na demanda total aumenta o lucro (valor da função objetivo) em 3 unidades monetárias.

O Dual Price de -2 para a restrição da linha 3 implica que cada aumento unitário na necessidade do produto 4 irá diminuir o lucro de 2 unidades monetárias.

O Dual Price de 1 para a restrição da linha 4 implica que cada 1 unidade de matéria prima a mais na restrição aumenta o lucro de 1 unidade.

Observe que o Dual Price é diferente de zero apenas na restrição em que o Slack (folga) for nulo. Assim na restrição da linha 5 temos um Dual Price nulo, o que significa que por haver folga na restrição, um aumento de uma unidade na restrição não altera o valor da função objetivo (lucro).

5) SLACK (Folgas)

O Slack exprime a folga na restrição no ponto ótimo do problema.

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	3.000000
3)	0.000000	-2.000000
4)	0.000000	1.000000
5)	250.000000	0.000000

No nosso caso, apenas a restrição da linha 5 apresenta folga de 250. isto significa que no ponto ótimo para uma restrição igual a 5000 unidades há uma folga de 250. Portanto poderíamos colocar um novo valor para esta restrição de $5000 - 250 = 4750$, que isso não altera em nada a resposta de nosso problema.

Observe que o Dual Price é nulo quando o Slack é não nulo. Isto porque apenas quando temos folga é que podemos alterar o valor de uma restrição sem alterar o ponto ótimo.

25) Determinado produto químico pode ser comprado de 3 fornecedores X, Y e Z, o primeiro enviando seus produtos em tambores de 3 toneladas, o produto de Y e Z sendo vendidos em tambores de 1 tonelada cada. Necessita-se pelo menos 10 toneladas por semana deste produto. Este material é usado na obtenção de um subproduto, do qual necessitamos semanalmente de 12 unidades no mínimo. Sabe-se que os produtos comprados dos fornecedores X e Y somente nos fornecem 1 unidade do subproduto em questão por tambor, porém o produto fornecido por Z nos possibilita obter 2 unidades do subproduto por tambor.

Contratos assumidos em anos anteriores exigem que as quantidades compradas semanalmente dos fornecedores X e Z somem ao menos 8 tambores semanais, e isto deve ser respeitado sob pena de multa contratual. Os custos por tambor adquiridos dos fornecedores X, Y e Z são 5, 2 e 4u.m. respectivamente. Quantos tambores devemos adquirir de cada fornecedor a fim de minimizar o custo, satisfazendo os requisitos?

Se um dos valores para a quantidade de tambores for nula para o problema em questão, especificar de quanto devemos alterar o custo do correspondente tambor para que ele seja incluído no pedido. Calcular o ponto ótimo para essa nova situação.

26) Uma pequena fábrica de papel toalha manufatura três tipos de produtos A, B e C. A fábrica recebe o papel em grandes rolos. O papel é cortado, dobrado e empacotado. Dada a pequena escala da fábrica, o mercado absorverá qualquer produção a um preço constante. O lucro unitário de cada produto é respectivamente R\$1,00; R\$1,50 e R\$2,00. O quadro abaixo identifica o tempo requerido para operação (em horas) em cada seção da fábrica, bem como a quantidade de máquinas disponíveis, que trabalham 40 horas por semana(cada máquina). Planeje a produção semanal da fábrica.

Verifique se existe ociosidade das máquinas disponíveis e proponha uma quantidade adequada para a resolução do problema.

Se algum produto não for produzido no ponto ótimo, especificar de quanto deve ser alterado o lucro deste produto para que ele também seja produzido.

Seção	Produto A	Produto B	Produto C	Máquinas Disponíveis
Corte	8	5	2	3
Dobra	5	10	4	10
Empacotamento	0,7	1	2	2

27) O Problema do Atleta Indeciso

Um jovem atleta sente-se atraído pela prática de dois esportes: natação e ciclismo. Sabe por experiência que:

A natação exige um gasto em mensalidade do clube e deslocamento até a piscina que pode ser expresso em um custo médio de R\$3,00 por seção de treinamento de duas horas.

O ciclismo, mais simples, acaba custando cerca de R\$2,00 pelo mesmo tempo de prática.

O orçamento do rapaz dispõe de R\$70,00 para seu treinamento. Seus afazeres de aluno de graduação na universidade lhe dão liberdade de empregar, no máximo, 18 horas mensais e 80.000 calorias para os esforços físicos.

Cada seção de natação consome 1.500 calorias, enquanto cada etapa ciclística despende 1.000 calorias. Considerando que o rapaz goste igualmente de ambos os esportes o problema consiste em planejar seu treinamento de forma a maximizar o número de seções de treinamento. Verifique se existem folgas nas restrições que permitam ao atleta otimizar os recursos disponíveis.

4. Problemas de Mistura

- 28) Uma empresa industrial fabrica três produtos p_1 , p_2 e p_3 , com lucro unitário de, respectivamente, R\$2,00, R\$3,00 e R\$4,00. O gerente de produção identificou as seguintes restrições no processo produtivo:
- a) A capacidade produtiva total é de 30 unidades por mês.
 - b) Por utilizar material radioativo, a empresa recebe uma autorização do governo federal para importar apenas uma quantidade fixa de 60kg. deste material, o qual deve ser plenamente utilizado durante o mês por razões de segurança.
 - c) As quantidades necessárias do material radioativo para fabricação dos produtos p_1 , p_2 e p_3 são de, respectivamente, 2kg, 1kg e 3kg.
- Encontre o nível de produção ótimo.

29) A Nitroglicerina S/A esta desenvolvendo um novo aditivo para gasolina de avião. O aditivo é uma mistura de três ingredientes líquidos: A, B e C. Para que haja um desempenho adequado, o montante (total) de aditivo (montante do ingrediente A + montante do ingrediente B + montante do ingrediente C) deve ser de, pelo menos, 10 decilitros por gasolina. Entretanto, por razões de segurança, o montante de aditivo não deve exceder 15 decilitros por litro de gasolina. A mistura dos três ingredientes é crítica. No mínimo um decilitro do ingrediente A deve ser usado para cada decilitro do ingrediente B. O montante utilizado do ingrediente C deve ser maior ou igual à metade do montante utilizado do ingrediente A.

Encontre a mistura dos três produtos com custo mínimo por litro de gasolina de avião, sabendo que o custo por decilitro dos ingredientes A, B e C é de R\$0,10, R\$.0,03 e R\$0,09 respectivamente.

30) A motorbike S/A produz os modelos das motos C250, C750 e C1000. A, B e C são os três componentes que entram no processo produtivo, cuja oferta diária é pequena para limitar a produção. Os suprimentos diários dos componentes A, B e C são respectivamente de 400kg, 200kg e 300kg. Embora os componentes B e C possam não ser utilizados ao dia, todos os componentes A existentes devem ser utilizados ao dia por razões de segurança.

A tabela a seguir apresenta o lucro unitário e as quantidades dos componentes para produzir cada modelo de motocicleta:

Motocicleta		Componentes		
Modelo	Lucro unitário	A	B	C
C250	R\$140,00	2	1	1
C750	R\$300,00	8	1	0
C1000	R\$400,00	2	4	1

Encontre a programação de produção diária ótima.

Se aumentarmos a quantidade de material B em 50 Kg, de quanto aumenta o lucro?

31) A Opinião Popular S/A é uma empresa especializada em avaliar a reação de consumidores a novos produtos, serviços e/ou campanhas de publicidade. Um cliente pediu à empresa para providenciar informações sobre a reação de consumidores para um produto recentemente lançado. O contrato do cliente necessita que sejam feitas entrevistas pessoais de porta em porta, respeitando as seguintes condições:

- 1) Entrevistar pelo menos 400 famílias com crianças.
- 2) Entrevistar pelo menos 200 famílias sem crianças.
- 3) A quantidade de famílias entrevistadas durante a noite deve ser, pelo menos, tão grande quanto o número de entrevistados durante o dia.
- 4) O total de entrevistados deve ser, pelo menos, 1.000 famílias.

Baseando-se em entrevistas realizadas anteriormente, os custos das entrevistas são os seguintes:

Família	Custo da Entrevista	
	Dia	Noite
Criança	\$10	\$12
Sem criança	\$8	\$10

Para minimizar os custos das entrevistas, quantas entrevistas em cada tipo de família devem ser realizadas em cada um dos horários (dia e noite), atendendo às restrições impostas?

Se quiséssemos entrevistar, ao invés de 1000, 1050 famílias. De quanto aumentaria nosso custo?

32) A Verificação Total S/A inspeciona cápsulas de remédio passando-as sobre uma mesa com iluminação especial, onde um inspetor verifica visualmente a existência de cápsulas quebradas ou parcialmente avariadas. Atualmente, qualquer um dos três inspetores pode ser alocado para o serviço de inspeção visual. Os inspetores, porém, diferem na precisão e no tempo de inspeção, além de receberem valores diferentes pelo serviço. As diferenças são as seguintes:

Inspetor	Velocidade (unidade por hora)	Precisão (percentual)	Valor por hora trabalhada
Pedro	300	98	\$ 5,90
João	200	99	\$ 5,20
Marcel	350	96	\$ 5,50

Operando num período de 8 horas, a empresa precisa de pelo menos 2.000 cápsulas inspecionadas com não mais do que 2% de erro nesta inspeção. Além disso, por causa do fator fadiga do processo de inspeção, nenhum inspetor pode trabalhar mais do que 4 horas por dia. Quantas horas cada inspetor deve trabalhar no processo de inspeção durante um dia de 8 horas de trabalho para minimizar os custos da inspeção? Qual volume será inspecionado por dia e qual será o custo de inspeção por dia?

Se ao invés de um período de 8 horas quisessemos um período de 10 horas de trabalho, mantendo as demais condições inalteradas. De quanto aumentaria nosso custo?

33) Para produzir 3 tipos de telefones celulares, a fábrica da Motorela utiliza três processos diferentes: o de montagem dos aparelhos, configuração e verificação. Para a fabricação do celular Multi Tics, é necessária 0,1 hora de montagem, 0,2 hora de configuração e 0,1 de verificação. O aparelho mais popular, Star Tic Tac, requer 0,3 hora de montagem, 0,1 hora de configuração e 0,1 hora de verificação. Já o moderno Vulcão necessita de 0,4 hora de montagem, 0,1 hora para configuração e em virtude de seu circuito de última geração, não necessita de verificação. Devido a uma imposição do governo de economia de energia, a fábrica não pode consumir mais do que 50.000kw/mês de energia, o que significa, de acordo com os cálculos técnicos da empresa, que eles poderão dispor de 290h/mês na linha de montagem, 250h/mês na linha de configuração e 110h/mês na linha de verificação.

Sabe-se ainda que o lucro por unidade dos produtos Multi Tics, Star Tic Tac e Vulcano são de R\$.100, R\$.210 e R\$.250, respectivamente; e que empresa operadora do sistema de telefonia celular adquire todos os celulares produzidos pela Motorela.

Pede-se: o número de celulares de cada modelo a ser produzido mensalmente para que a empresa maximize seus lucros. Sabe-se ainda que o presidente da Motorela exige que os três modelos sejam produzidos e quer lucrar pelo menos R\$25.200/mês com o modelo Star Tic Tac. Para incentivar o crescimento de seus produtos mais modernos, o presidente também exige que a produção do modelo Vulcano seja pelo menos o dobro do modelo Star Tic Tac.

34) Na tabela abaixo fornecemos as necessidades alimentares semanais de um certo animal. Que mistura destas rações satisfaz os requisitos alimentares a um custo mínimo para o proprietário?

Ração	Proteínas (Unidades/kg)	Carboidratos (Unidades/kg)	Custo (R\$/kg)
A	25	55	R\$3,00
B	25	20	R\$2,00
C	45	10	R\$4,00
D	35	35	R\$3,00
E	25	20	R\$3,00
Mínimo (Unidades)	200	250	

35)Um fazendeiro dispõe de 200 hectares cultiváveis para milho e/ou soja. Os dados são os seguintes:

Atividade	Milho	Soja	Disponível
Espaço	1	1	200
Preparo do terreno	R\$500	R\$700	R\$200.000
Mão de obra (homens/dia)	15	18	20.000
Lucro	R\$900	R\$1.300	

Qual deve ser a alocação da terra para os vários tipos de cultura de maneira a maximizar os lucros?

Existe sobra nos recursos disponíveis alocados pelo fazendeiro. Proponha valores que otimizem esta disponibilidade.

36) Considere o fundo de investimento que tem as seguintes opções de compras de ações:

Empresa	Categoria	Lucratividade
E1	A	10%
E2	A	15%
E3	B	5%
E4	C	20%
E5	A	12%
E6	B	15%
E7	A	10%
E8	C	5%
E9	B	5%
E10	C	10%

As restrições governamentais a fundos de investimentos estabelecem que nenhum investimento isolado pode ultrapassar 15% do capital total do fundo. Além disso, o total de investimento por categoria não pode ultrapassar 40%.

Construir o modelo de programação linear e encontrar os investimentos que maximizam a lucratividade composta do fundo.

37) Problema de Dosagem em Formulação de Petróleo: Uma refinaria de petróleo deseja encontrar na maneira ótima de cumprir um contrato de fornecimento de gasolina de aviação e gasolina comum. Segundo este contrato, deve-se fornecer diariamente um mínimo de 1.000 barris de gasolina de aviação e 2.000 barris de gasolina comum. A unidade que se responsabilizará pela entrega tem uma capacidade máxima de produção de 10.000 barris por dia, indistintamente. As gasolinas devem ser transportadas até seus depósitos, cujas distâncias da unidade são de 10 milhas e 30 milhas, respectivamente. A capacidade máxima de transporte da refinaria é de 186.000 barris x milha. Sabendo-se que a gasolina de aviação dá um lucro de R\$1,00 e a comum R\$2,00, pede-se o esquema de produção que maximiza o lucro da refinaria com relação ao citado contrato.

38) Problema de Alocação de Recursos: Um fundo de investimentos tem até R\$.300.000,00 para aplicar em duas ações. A empresa D é diversificada (tem 40% do seu capital aplicado em cerveja e o restante aplicado em refrigerantes) e espera-se que forneça bonificações de 12%. A empresa N não é diversificada (produz apenas cerveja) e espera-se que distribua bonificações de 20%. Para este investimento, considerando a legislação governamental aplicável, o fundo está sujeito às seguintes restrições:

- a) O investimento na empresa diversificada pode atingir R\$270.000,00.
- b) O investimento na empresa não diversificada pode atingir R\$150.000,00.
- c) O investimento em cada produto (cerveja ou refrigerante) pode atingir R\$180.000,00.

Pede-se: Qual é o esquema de investimento que maximiza o lucro?

39) Problema de Carga de Forno em Siderurgia: Uma empresa siderúrgica produz um tipo de aço a partir de aço puro misturado com adições metálicas e recebeu um pedido de uma peça de 400kg. Sabe-se que o custo por quilo de aço puro é de R\$5,00 e o das adições R\$3,00 e que os estoques são de 400kg e 800kg, respectivamente. Na carga do forno para a produção da liga desejada, a relação de adições para aço puro deve estar entre 25% e 35%. Qual é o esquema de produção de custo mínimo?

40) Problema de Formulação de Petróleo: Uma empresa adquire petróleo para produzir gasolina comum, gasolina especial e óleo diesel. Ela necessita manter em seus tanques, no início de cada semana, um estoque mínimo de produtos. A tabela abaixo mostra, para uma determinada semana, as composições, disponibilidades e estoques mínimos. Qual é o esquema de produção de custo mínimo?

	Petróleo A	Petróleo B	Estoque mínimo
Gas. Comum	10%	60%	200 barris
Gas. Especial	20%	30%	50 barris
Óleo Diesel	70%	10%	100 barris
Disponibilidade	200 Barris	300 Barris	
Custo	R\$10,00	R\$15,00	

41) Mistura : Uma empresa de mineração deseja cumprir um contrato de fornecimento de 4 milhões de toneladas por ano do minério Sinter Feed e, para tanto, conta com os seguintes minérios (a tabela abaixo mostra a composição percentual e o custo/tonelada de cada minério):

	M1	M2
Fe	66%	64%
Si	1,5%	3,7%
Custo	5,60	3,30

O minério a ser produzido por este blending deve conter no mínimo 65% de Ferro e no máximo 3% de Silício. Qual é o blending a custo mínimo?

5. Problemas de Transporte

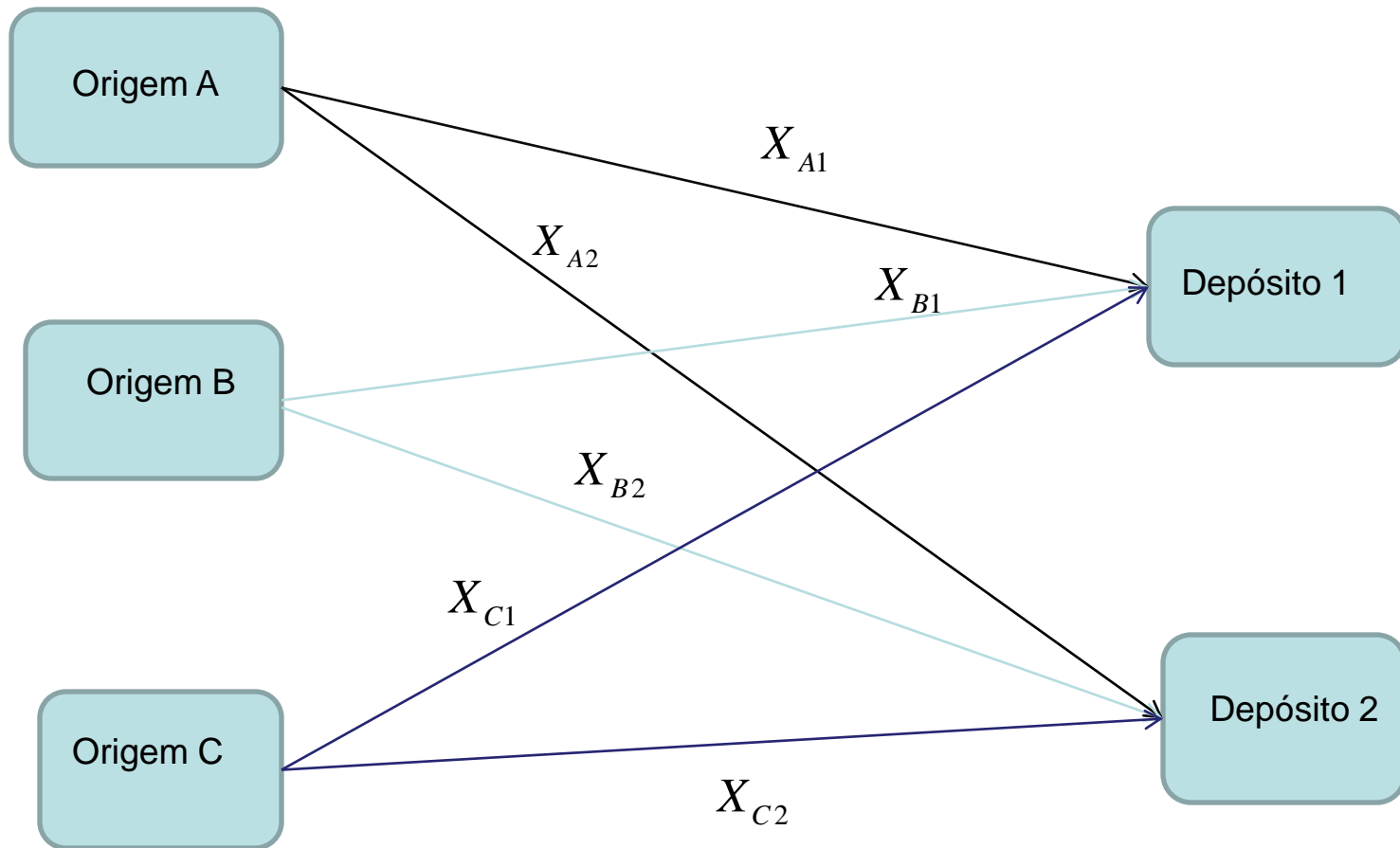
42) (Transporte) Em uma mineração deseja-se minimizar a utilização de caminhões que efetuam o transporte de estéril entre as lavras (de onde se retira o estéril) e os depósitos de estéril (onde se armazena o estéril). A tabela abaixo fornece as distâncias envolvidas (valores em metros):

Origem (Frente de Lavra)	Destino (Depósito de Estéril)	
	1	2
A	300	400
B	600	700
C	800	300

As necessidades de transporte das frentes-de-lavra para a próxima semana são (valores em toneladas):

Origem (Frente de Lavra)	Necessidade de Transporte	
	Mínimo	Máximo
A	20.000	40.000
B	40.000	60.000
C	45.000	60.000

A capacidade máxima de recebimento dos depósitos 1 e 2 são respectivamente, 50.000 e 60.000 toneladas. Sabendo-se que cada viagem de caminhão transporta 100 toneladas, pede-se o esquema de transporte que minimiza a distância total percorrida.



43) (Mistura) Um fabricante de fertilizante deseja produzir 1.000kg do produto a custo mínimo. Para tanto conta com as seguintes matérias primas:

Mat.Prima	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
Custo	12	16	8	26	16	8	11	19

No produto obtido, as quantidades de Nitrogênio (N), Fósforo (P) e Potássio (K) devem ficar acima dos seguintes limites mínimos (valores em kg):

Nutriente	N	P	K
Mínimo	75	30	15

A composição fracionária de seus produtos é mostrada abaixo:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
N	0,02	0,03	0	0,17	0	0,02	0,04	0,05
P	0	0	0,02	0,05	0	0,01	0,01	0,03
K	0	0	0	0	0,06	0,01	0,04	0,03

44) (Transporte) A prefeitura da cidade colocou coletores de lixo em alguns pontos da cidade, onde os lixeiros devem esvaziar seus carrinhos, após enchê-los na limpeza das ruas. São seis lixeiros com carrinhos e três coletores. A prefeitura calculou a distância média da área de atuação de cada lixeiro para cada coletor. Deseja estabelecer um plano que esclareça onde os lixeiros devem esvaziar seus carrinhos, para que todos os coletores se encham de maneira uniforme e os lixeiros percorram a menor distância total no dia. Os lixeiros esvaziam cinco vezes seus carrinhos por dia. A prefeitura, após estabelecer quantas vezes e em quais coletores isto deve ser feito, deixa a seu critério a escolha do coletor em cada vez, desde que cumpra o programa diário.

A distância média de cada região para cada coletor está na tabela:

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
C_1	200	300	500	400	250	300
C_2	100	150	200	300	150	180
C_3	120	200	50	180	220	100

Qual o plano da Prefeitura?

45)(Transporte) Uma firma distribuidora de alimentos programou para a próxima semana 100 viagens que deverão ser realizadas por empresas contratadas. São seis locais diferentes que receberão as mercadorias, conforme exposto na Tabela 1. As empresas que prestam esse serviço são quatro, e tem preços diferentes para as viagens, devido à localização, possibilidade de viagens de retorno etc. Os orçamentos e as disponibilidades das empresas prestadoras de serviço estão na Tabela 2. Estabelecer um plano de contratação dessas empresas, com o menor custo total possível.

Tabela 1

	<i>Locais de entrega</i>					
	1	2	3	4	5	6
<i>Quantidade necessária</i>	20	12	15	10	18	25

Tabela 2

<i>Transpor-tadora</i>	<i>Locais</i>						<i>Disponibi- lidades</i>
	1	2	3	4	5	6	
A	100	120	105	90	105	110	30
B	80	100	110	100	100	110	40
C	90	105	90	100	80	105	25
D	120	130	110	100	95	105	20

46) (Transporte) Um laboratório de manipulação que presta serviços de entrega para idosos possui duas filiais e fornece o serviço a seis bairros diferentes. Tendo em vista que atualmente a demanda é superior à capacidade de entrega da companhia, a mesma gostaria de saber a quais clientes atender, a partir de cada filial, de maneira a minimizar o seu custo de entrega. As capacidades das filiais, as demandas dos bairros e os custos unitários de entrega estão evidenciados na tabela a seguir:

	<i>Bairro 1</i>	<i>Bairro 2</i>	<i>Bairro 3</i>	<i>Bairro 4</i>	<i>Bairro 5</i>	<i>Bairro 6</i>	<i>Capacidade</i>
Filial 1	7,00	9,00	1,00	12,00	7,00	4,00	2500
Filial 2	4,00	5,00	12,00	1,00	3,00	8,00	2000
Demanda	1400	1560	400	150	870	620	

Resolva este problema propondo um planejamento adequado das entregas a um custo mínimo e que obedeça as restrições do problema.

47) (Transporte) A organização não-governamental Criança Renascer está organizando a festa dos aniversariantes deste mês. Para isto, ela começa a pesquisar o preço dos doces e salgados com cinco diferentes bufês do Rio de Janeiro. Como a festa será realizada com o dinheiro de doações, ela deseja ter os menores custos possíveis. A tabela a seguir, relaciona os custos de cada item por empresa, bem como as quantidades requeridas para a festa (demanda) e as capacidades de produção de cada empresa, determine quantos doces e salgados a organização deve encomendar a cada empresa (resolva com o auxílio do Lindo).

	Ouriço (1)	Cajuzinho (2)	Brigadeiro (3)	Bolinha de queijo (4)	Risole (5)	Croque- te (6)	Coxinha de galinha (7)	Oferta
Empresa 1	0,080	0,070	0,065	0,080	0,083	0,080	0,083	25.000
Empresa 2	0,075	0,070	0,067	0,060	0,060	0,060	0,060	23.000
Empresa 3	0,045	0,040	0,040	0,027	0,030	0,027	0,030	15.000
Empresa 4	0,050	0,045	0,045	0,040	0,040	0,040	0,045	22.000
Empresa 5	0,060	0,055	0,050	0,055	0,055	0,055	0,060	20.000
Demanda	5.000	4.000	7.000	5.000	4.000	3.500	6.000	

48) (Transporte) A PowerCo tem três usinas elétricas para suprir as necessidades de quatro cidades: Feira de Santana(1), Milagres(2) , Itabuna (3) e Maiquinique (4), sendo suas potências instaladas, respectivamente, de 35 milhões kw/hora; 50 milhões kw/hora e 40 milhões kw/hora. A demanda de energia atinge o pico nas cidades no mesmo momento (19:00h) e é o seguinte (em kw/hora): Feira de Santana, 45milhões; Milagres, 20milhões; Itabuna, 30 milhões e Maiquinique, 30 milhões.

O custo de enviar um milhão de kw/hora de eletricidade de cada usina para uma das cidades está disponível na tabela abaixo:

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Destino 4
Usina 1	R\$8	R\$6	R\$10	R\$9
Usina 2	R\$9	R\$12	R\$13	R\$7
Usina 3	R\$14	R\$9	R\$16	R\$5

Formule como um problema de transporte e resolva-o utilizando o Lindo. Interprete o significado das variáveis e os resultados obtidos.

49)(Transporte) Uma vinícola do sul de Santa Catarina possui três fábricas e três armazéns nos quais os vinhos são envelhecidos. Como as fábricas e os armazéns estão localizados em diferentes locais do estado, a empresa deseja saber quantos tonéis de vinho deve enviar de cada fábrica para cada Armazém de forma a minimizar o seu custo de transporte. As capacidades das fábricas e dos Armazéns (em número de tonéis), bem como os custos de transporte por tonel, estão explicitados na tabela a seguir. Resolva este problema de transporte com o auxílio do Lindo.

		Armazéns			Capacidade das fábricas
		A ₁	A ₂	A ₃	
Fábricas	F ₁	20	16	24	300
	F ₂	10	10	8	500
	F ₃	12	18	10	200
Capacidade dos armazéns		200	400	300	

6. Problemas de Programação Inteira

50) Uma Universidade está planejando comprar uma nova máquina de cópias para sua biblioteca. Três membros do departamento de compras estão analisando qual comprar. Eles estão considerando dois modelos diferentes: Modelo A, uma copiadora de alta velocidade, e Modelo B, uma de baixa velocidade mais barata. Modelo A pode produzir 20000 cópias por dia, e custa \$6000,00. Modelo B pode produzir 10000 cópias por dia, mas custa apenas \$4000,00. Eles gostariam de ter pelo menos seis copiadoras de forma a espalhá-las pela biblioteca. Eles também gostariam de ter pelo menos uma copiadora de alta velocidade. Finalmente as copiadoras juntas devem produzir pelo menos 75000 cópias por dia. O objetivo é determinar a quantidade de copiadoras de cada tipo que satisfazem essas condições a custo mínimo.

51) Um jovem casal, Eve e Steven, querem dividir suas principais tarefas domésticas (compras,cozinhar, lavar roupa e lavar louça) entre eles de modo que cada um tenha duas tarefas, porém o tempo total despendido nessas tarefas domesticas seja o mínimo possível. Suas eficiencias nessas tarefas diferem, os tempos que cada um precisaria para realizar as tarefas são dados a seguir:

(horas)	Compras	Cozinhar	Lavar Louça	Lavar Roupa
Eve	4,5	7,8	3,6	2,9
Steven	4,9	7,2	4,3	3,1

52) Uma empresa de empreendimentos imobiliários está considerando cinco possíveis empreendimentos. A tabela a seguir mostra o lucro estimado a longo prazo que cada projeto geraria, bem como a quantidade de investimento necessária para realizar o empreendimento em unidade de milhões de dólares. Os donos da empresa levantaram \$20 milhões de capital para investimento em tal empreendimento. Eles agora querem selecionar a combinação de empreendimentos que vai maximizar o lucro total estimado a longo prazo, sem investir mais do que \$20 milhões.

	Empreendimento 1	Empreendimento 2	Empreendimento 3	Empreendimento 4	Empreendimento 5
Lucro estimado	1	1,8	1,6	0,8	1,4
Capital necessário	6	12	10	4	8

53) A diretoria de uma empresa está considerando sete grandes investimentos de capital. Cada investimento pode ser feito somente uma vez. Esses investimentos diferem no lucro estimado a longo prazo que eles vão gerar, bem como o volume de capital necessário, conforme ilustrado na tabela (em unidades de milhões de dólares).

O volume de capital disponível para estes investimentos é de \$100 milhões. As oportunidades de investimentos 1 e 2 são mutuamente exclusivas e, da mesma forma, as oportunidades 3 e 4. Além disso nem a oportunidade 3 nem a 4 podem ser empreendidas a menos que uma das duas primeiras oportunidades seja realizada. Não há tais restrições sobre as oportunidades de investimento 5, 6 e 7. O objetivo é selecionar a combinação de investimentos de capital que vai maximizar o lucro total estimado a longo prazo.

	1	2	3	4	5	6	7
Lucro estimado	17	10	15	19	7	13	9
Capital necessário	43	28	34	48	17	32	23

54) O Problema de Alocação de Pessoal

Um hospital trabalha com um atendimento variável em demanda durante as 24 horas do dia.

As necessidades distribuem-se segundo a Tabela:

Turno de Trabalho	Horário	Número mínimo de Enfermeiros
1	08:00 – 12:00	50
2	12:00 – 16:00	60
3	16:00 – 20:00	50
4	20:00 – 00:00	40
5	00:00 – 04:00	30
6	04:00 – 08:00	20

O horário de trabalho de um enfermeiro é de oito horas quando ele entra nos turnos 1,2,3,4,5 e 6.

O enfermeiro que entra no turno 4 recebe uma gratificação de 50% sobre o salário e o enfermeiro que entra no turno 5 trabalha apenas quatro horas.

Elaborar o modelo de programação linear inteira que minimiza o gasto com a mão de obra.

55) *O Problema do Jantar de Nero*

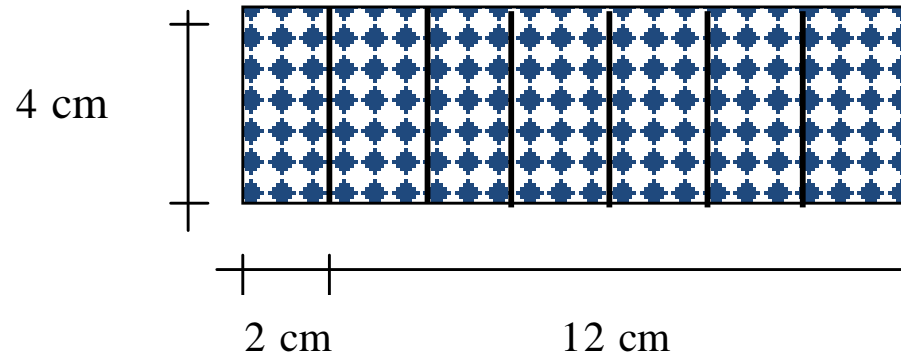
O imperador romano Nero, em um momento, de inspiração, resolveu promover um jantar para eliminar seus “melhores” inimigos. Consultando seu médico de confiança, soube que ele dispunha de dois tipos de venenos, alfa e beta. Tratavam-se de fármacos próprios para serem misturados no molho de carneiro. Havia no estoque da farmácia do facultativo 0,5kg do veneno alfa e 2kg do veneno beta. Para que os convidados não sentissem o gosto do veneno, era indispensável misturar em peso três porções do veneno alfa para porção de beta. Cada 12 gramas de alfa ou 6 de beta eram capazes de sozinhas liquidarem um homem. O efeito do veneno sobre as mulheres era cerca de 50% mais poderoso do que sobre os homens. Nero satisfeito com a informação deu suas ordens ao médico: prepare a mistura mais eficiente e elimine pelo menos 20 homens e 10 mulheres! Elaborar o modelo de programação matemática que maximize o efeito do veneno sobre os inimigos do imperador.

56) *O problema da Otimização de Padrões de Corte*

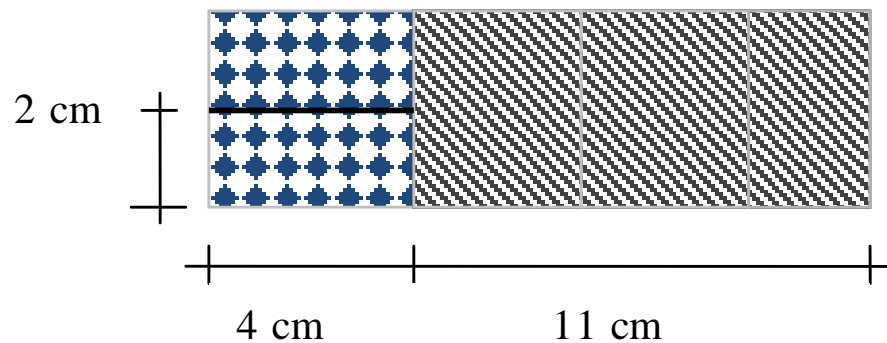
Uma metalúrgica deve entregar uma partida de 2.500 placas retangulares de 2 x 4cm (placas do tipo I) e 1.000 de 4 x 11cm (placas do tipo II). Existem, em estoque, uma tira metálica com 15cm de largura e 20 metros de comprimento e outra com 14cm de largura e 30 metros de comprimento. As tiras com 30 metros de comprimento são cerca de 20% mais caras por quilo do que as de 20 metros, devido a problemas de transporte. São possíveis as seguintes configurações de corte ou padrões de corte nos equipamentos da empresa:

Formular o modelo que permita minimizar a perda de corte.

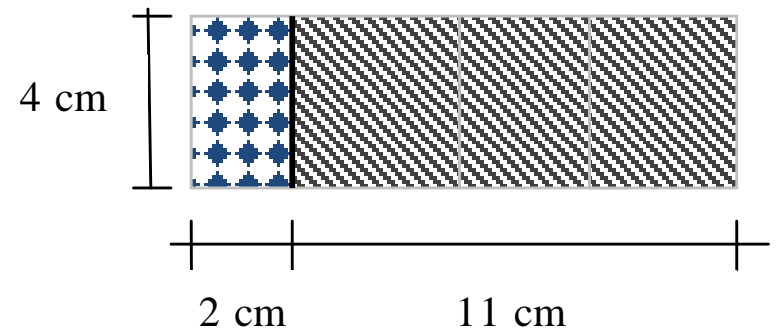
Padrão 1



Padrão 2



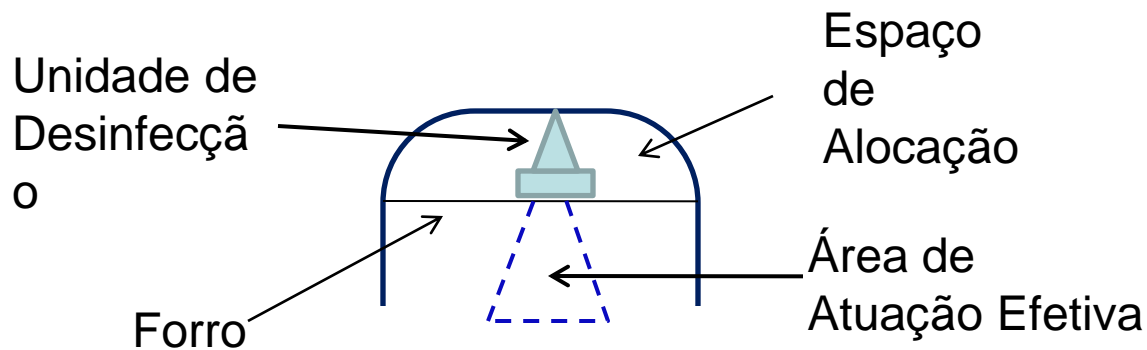
Padrão 3



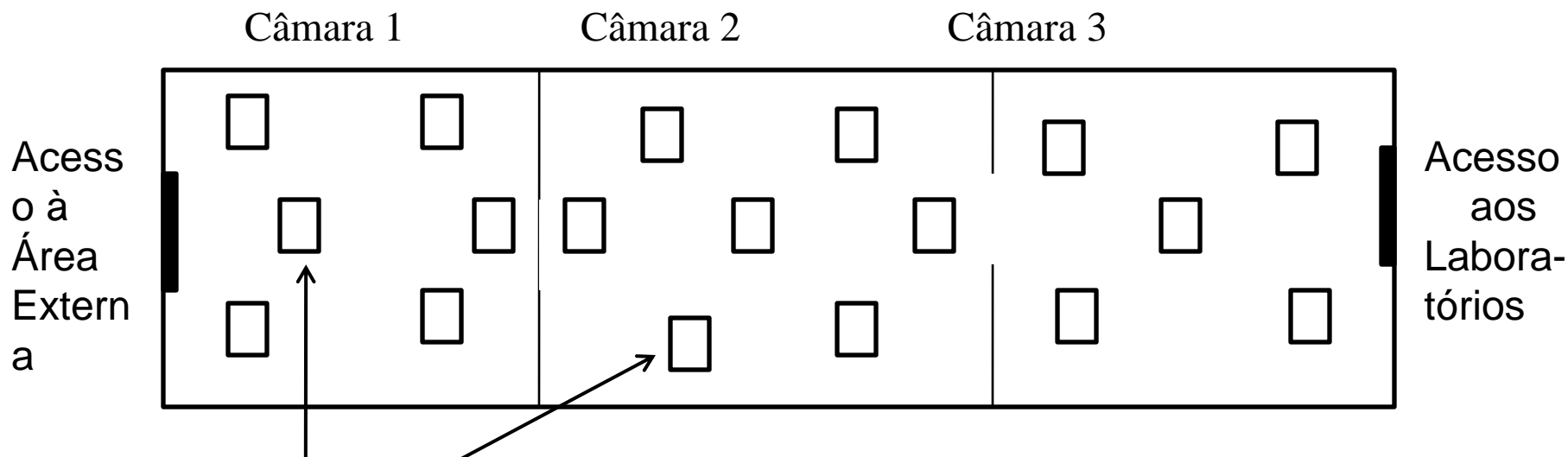
57) O Problema da Câmara de Segurança

Um laboratório biológico está construindo uma sala de desinfecção e segurança para proteger a entrada de suas instalações mais perigosas. A finalidade da sala é isolar agentes biológicos como vírus e bactérias que são manipulados em instalações hermeticamente fechadas, permitindo, contudo, o trânsito dos pesquisadores e demais materiais. A sala é composta de três câmeras visando a aumentar a segurança.

Conforme figura a seguir:



Perfil



Possíveis Posições de
Alocação das Unidades nas
Câmaras

Planta

A desinfecção é basicamente realizada através de uma sofisticada unidade de irradiação. Como essa unidade é extremamente sensível e o objeto em trânsito pode ter um comportamento inesperado, existe uma probabilidade de falha da atuação de uma unidade isolada de desinfecção. Essa probabilidade varia basicamente em função da câmara em que a unidade esteja localizada. Existem restrições de espaço e peso para a distribuição das unidades de desinfecção no teto das câmaras. Os custos das unidades também variam por câmara devido à variação de temperatura e isolamento de unidade, tudo conforme a tabela a seguir:

Câmara	Espaço (m ³)	Peso	Custo (R\$)	Probabilidade de Falha de Unidade
1	2,5	150	30.000	0,20
2	4,0	130	70.000	0,15
3	3,0	100	40.000	0,30
Limitações	60	1.500	600.000	

Formular o problema de minimizar a probabilidade da ocorrência de um trânsito na sala de desinfecção sem que ocorra uma perfeita desinfecção, considerando-se inaceitável mais que 3% na probabilidade de que uma câmara isolada falhe na desinfecção.

58) O Problema de Carregamento de Aviões

Um avião de transporte possui quatro compartimentos para carga a saber: compartimento frontal, compartimento central, compartimento da cauda e porão de granel. Os três primeiros compartimentos só podem receber carga em container, enquanto o porão recebe material em granel. A tabela resume a capacidade do aparelho:

Compartimento	Peso Máximo (Ton.)	Espaço Máximo ((m ³))
Frontal	5	35
Central	7	55
Da Cauda	6	30
Porão de Granel	7	30

Objetivando o equilíbrio de vôo, é indispensável que a distribuição de carga seja proporcional entre os compartimentos. Para carregar o avião, existem três tipos de containers e duas cargas em granel. Os dois tipos de carga em granel podem ser facilmente transportados conjuntamente, por isso essa carga é aceita em qualquer quantidade.

Carga Tipo	Peso por Container ou (m ³) – (ton.)	Volume por Container (m ³)	Lucro \$/ton.
1 (Container)	0,7	0,5	200
2 (Container)	0,9	1	220
3 (Container)	0,2	0,25	175
4 (granel)	1,2/ m ³	-	235
5 (granel)	1,7/ m ³	-	180

Elaborar o problema de programação linear que otimize a distribuição de carga de forma a maximizar o lucro de vôo cargueiro.

59) O Problema de Auditoria Bancária

Fase 1: Processo normal de auditoria

Um banco deve decidir quantos auditores será necessário contratar em um horizonte de 6 meses de operação a saber: março – agosto. As necessidades do esforço de auditoria são contabilizadas em termos de mão-de-obra de auditores experientes da seguinte forma:

Mês	Necessidade em Homens x Hora
Março	7.000
Abril	8.000
Maio	10.000
Junho	11.000
Julho	7.000
Agosto	11.000

Cada auditor contratado como funcionário do banco, apesar de formado e aprovado em concurso, tem que ser treinado por um mês antes de poder atuar plenamente em sua função. Nesse treinamento são utilizados auditores experientes do próprio banco que, deixando de trabalhar na auditoria normal, dedicam 100 horas para cada auditor a ser treinado. Um auditor trabalha 150 horas por mês. Em 1º de fevereiro o banco dispõe de 60 auditores experientes. O programa de contratação terá início em 1º de março. Sabe-se também que o mercado de trabalho para os auditores está muito instável, de forma que 10% de força de trabalho desses profissionais experientes deixa o banco a cada mês em busca de melhores salários.

Um auditor experiente recebe do banco cerca de R\$2.000,00 por mês enquanto o auditor em treinamento só recebe uma ajuda de custo de R\$150,00. Quando o número de auditores excede as necessidades, a carga de trabalho é reduzida, mas não são feitas demissões devido ao elevado custo do processo de acordo na justiça. Quando isso acontece, novos auditores não são contratados e a evasão normal equilibra a força de trabalho.

Formular o problema objetivando minimizar os custos de operação do sistema de auditoria.

Fase 2: Utilizando o processo de terceirização

Paralelamente ao sistema de contratação formal para auditores existe a possibilidade de obter-se a mão-de-obra para as auditorias via uma empresa de terceirização: *a Burocráticos ao seu Dispor*. Essa organização oferece auditores experientes (possivelmente evadidos do sistema normal) e licenciados pela Câmara dos Auditores Juramentados. Esse profissional custa R\$2.500,00 ao mês e pode ser incluído e retirado da folha a qualquer mês sem qualquer custo de admissão ou demissão. *A Burocráticos* só exige a garantia mínima de um mês de trabalho para o profissional e que ele não trabalhe em treinamentos, até porque a empresa promove o curso para licenciar auditores juramentados como um serviço adicional.

Reformular o problema levando em conta essa nova possibilidade.

Desafio:

Reformule o problema para o caso em que a empresa Burocráticos passe a exigir uma garantia mínima de três meses de emprego para seus auditores e uma indenização proporcional a K vezes o número de meses trabalhado além desses três meses.

60)O Problema do Incêndio Florestal – Ataque Massivo

Uma reserva florestal está em chamas e o governo planeja uma operação fulminante de combate ao fogo para amanhã. O incêndio é de pequenas proporções e está se propagando lentamente, devendo ser extinto em cerca de três horas de operação logo após o amanhecer. Estão sendo mobilizados aviões e helicópteros especializados nesse tipo de operações. As características dos aparelhos constam da Tabela abaixo:

Aparelho	Eficiência no Incêndio (m ² / hora)	Custo (R\$/ hora)	Necessidade em Pessoal
Helicóptero AH-1	15.000	2.000	2 Pilotos
Avião Tanque	40.000	4.000	2 Pilotos – 1 Operador
Avião B67	85.000	10.000	2 Pilotos – 3 Operadores

A área de floresta a ser coberta pelo combate ao fogo é de $3.000.000 \text{ m}^2$, envolvendo a frente de fogo (para paralisação do avanço do dano), áreas já queimadas que necessitam de rescaldo (para proteção de animais e segurança contra recrudescimento) e áreas de acero (proteção preventiva indispensável). Nas bases de apoio são disponíveis 14 pilotos de avião e 10 de helicópteros, bem como 22 operadores especializados em combate aéreo de fogo.

Formular o problema de programação matemática que minimize os custos da operação.

61) O Problema do Sistema de Defesa Antiaérea

Fase 1: Alocação arma x alvo

Um determinado conjunto de armas antiaérea está distribuído de forma a defender uma cidade de um ataque. São n plataformas de mísseis. Sabe-se que d_{ij} é a distância entre a plataforma da arma i e a ameaça j (avião inimigo ou míssil), que o alcance máximo dos mísseis é de r_i que o custo de cada tiro sobre uma ameaça j é de c_{ij} e o valor da neutralização da ameaça é v_j . Em cada ataque, o sistema de defesa deve selecionar, dentre m ameaças, apenas k possíveis alvos.

Elaborar o modelo matemático de alocação arma x alvo que minimiza o custo da defesa.

Fase 2: Consideração da eficácia

Sabe-se que a cada alocação arma x alvo devam ser disparados p_{ij} mísseis para que o alvo seja neutralizado. Sabendo-se que existem m_{ij} mísseis disponíveis em cada plataforma, reformular o problema de minimizar o custo da defesa.

62) O Problema dos Anúncios na Rede de TV

Uma rede de televisão resolveu estabelecer preços compatíveis para o tempo de comercial em certos horários. Existem três horários para a propaganda em promoção na rede: horário nobre noturno (horário 1), horário da tarde em fins de semana (horário 2), horário da tarde em dias da semana (horário 3). O preço de um módulo mínimo de propaganda em cada horário é p_1 , p_2 e p_3 , respectivamente.

A rede vende grandes espaços de tempo dentro da programação, denominados pacotes promocionais. Os anunciantes desejam entrar no programa de pacotes de propaganda promocional porque podem obter, com isso, melhores preços unitários. Um pacote representa um esquema de desconto baseado em economia de escala.

Existem 3 faixas de preços sendo praticadas nos pacotes. A faixa 1, ou de desconto zero, a faixa 2, em que o desconto é de 10 unidades monetárias e a faixa 3, com desconto de 30 unidades monetárias. A tabela que segue resume as regras de programação:

Descontos	Somatório de tempo	Valor do desconto (em unidades monetária)
Faixa 1	Sem exigência	0
Faixa 2	Comprar, no mínimo, f unidades de tempo	10
Faixa 3	Comprar, no mínimo, g unidades de tempo	30

Os anunciantes que competem na disputa do uso da mídia são n e dispõem, cada um deles, de s_n unidades monetárias para investir em propaganda.

Os anunciantes, reunidos em uma associação, desejam estabelecer a melhor estratégia de negociação com a rede, objetivando maximizar, dentro das disponibilidades orçamentárias de cada cliente, o tempo global de utilização da mídia.

Formular o modelo que maximiza o ganho dos anunciantes.

7. Problemas Gerais

63. A *PSC Ltda.* é uma empresa no ramo de produção de acessórios para computador. O diretor Paul Lepore recebeu uma encomenda de 5.000 “drives” de disquetes, 4.500 HDs de 16Gb, 1.000 unidades de CD-ROM e 3.500 gravadores de CD-ROM(CD-RW). Esta entrega deve ser cumprida em um prazo de 12 dias úteis, e a *PSC* não possui nenhum produto em estoque. A tabela abaixo resume requisitos de tempo e de alguns produtos comuns para a confecção dos equipamentos:

	Produto			
	Drive	HD	CD-ROM	CD-RW
Rotor	1	1	1	1
Cabeça de leitura	1	6	1	1
Cabeça de gravação	1	6	-	1
Gabinete de unidade (padrão)	1	1	1	1
Horas de montagem	0,8	1,1	2	2,5
Horas de ajuste/regulagem	0,2	0,5	0,9	2

A *PSC* possui um estoque das seguintes matérias-primas: 13.000 rotores, 40.000 cabeças de leitura, 35.000 cabeças de gravação e 15.000 gabinetes-padrão. Não é possível comprar mais matéria prima. O processo de montagem e regulagem do equipamento é feito manualmente, empregando um funcionário cada. A *PSC* possui 190 funcionários capacitados para a montagem dos equipamentos e 115 funcionários capacitados para a regulagem. Considere que cada funcionário tem uma jornada de 8 horas diárias.

Se a *PSC* preferir, é possível comprar os produtos prontos em uma outra empresa, que possui material suficiente em estoque. A empresa só não produz as unidades de HD desejadas. A tabela a seguir resume os custos de produção e o preço de venda dos produtos por esta empresa (em reais):

	Produto			
	Drive	HD	CD-ROM	CD-RW
Custo de Produção	15,00	200,00	40,00	400,00
Preço para compra	17,00	-	45,00	550,00

Determine um problema de programação linear que minimize o custo da PSC, de maneira a atender ao pedido no tempo previsto (resolva através do Solver).

64. Um determinado cliente procurou uma Corretora de Valores com o objetivo de investir em ações. O gerente de atendimento, após receber o cliente, o entrevista para identificar o seu perfil de risco e apresenta as opções de investimento. No final da entrevista fica claro que o cliente apresenta um perfil de investimento de risco moderado e está decidido a investir em papéis de Bancos. O gerente, então, com o apoio da área de pesquisa da corretora, apresenta uma proposta de investimento que imagina atender às expectativas do cliente. A carteira proposta é constituída por um grupo de ações do setor bancário e aplicações ou créditos, para alavancar a posição de ações, em renda fixa. O retorno e o risco de cada papel estão demonstrados na tabela a seguir:

Papel	Retorno	Risco
Banco A	42,12%	7,69%
Banco B	35,29%	3,99%
Banco C	37,54%	6,12%
Renda Fixa	6,10%	0%

Ao analisar a proposta, o cliente fez as seguintes restrições e observações:

- A participação das ações do Banco A deve ser de, no mínimo, 30%, devido ao seu alto retorno e baixo risco em relação às ações dos outros bancos.
- A participação das ações do Banco B deve ser de, no máximo 15%, devido ao baixo retorno e alto risco, quando comparada às demais.

- A participação da Renda Fixa na carteira deve ser de, no máximo, 10%.
- A taxa máxima suportada de risco é de 7%.

Formule um problema que maximize o retorno da carteira proposta, considerando suas características e as restrições feitas pelo cliente; e resolva-o através do Solver. Observação: para a resolução deste problema considere que as ações são independentes, assim, o risco da carteira será igual à média ponderada dos riscos individuais pelas participações de cada papel na composição da carteira.

65. Uma indústria possui as seguintes opções de investimento em projetos para os próximos quatro anos: expansão da fábrica, expansão do depósito, novas máquinas e pesquisas de novos produtos. Enfrentando limitações anuais de capital, a empresa deve escolher em quais projetos investir para obter o maior retorno possível. O valor presente dos projetos, o capital necessário para cada um deles e a projeção do capital disponível estão ilustrados na tabela abaixo:

Projeto	Valor Presente Estimado	Capital Necessário			
		Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4
Expansão da Fábrica	60.000	15.000	20.000	20.000	15.000
Expansão do Depósito	40.000	10.000	15.000	20.000	5.000
Novas Máquinas	10.000	10.000	0	0	4.000
Pesq. Novos Produtos	37.000	15.000	10.000	10.000	10.000
Capital Disponível		30.000	40.000	30.000	25.000

- a) Determine, utilizando o Solver ou o Lindo, que projetos a companhia deve selecionar para maximizar o valor presente do capital investido. Pista: a decisão deve ser feita para aceitar ou rejeitar cada projeto. Usamos $x = 1$ caso o investimento seja realizado e $x = 0$ caso o investimento não deva ser realizado. Então, todas as variáveis devem ser restringidas com $x \leq 1$, utilizando também o recurso de programação inteira do Excel;
- b) Considere que, devido às turbulências de mercado, a empresa decida que Pesquisas de Novos Produtos é um projeto que não pode deixar de ser realizado, independentemente de seu valor presente estimado. Que mudanças esta informação gera na formulação do problema e no resultado?
- c) Se a companhia conseguir um adicional de \$10.000 para cada um dos quatro anos, o que você recomendaria? Qual a nova solução?

66. A fábrica de produtos revolucionários Wonder World acaba de lançar mais um produto inovador: trata-se do Flat, um spray desamassador instantâneo de roupas. O spray Flat está disponível no mercado em duas embalagens: de bolso (250ml) e tamanho família (1.000ml), ambas com duas opções de formulação: com ou sem perfume. Para fabricar a solução Flat sem perfume é necessária a combinação de três ingredientes: água destilada, álcool e fórmula especial. Para o produto com perfume, um quarto ingrediente – a fragrância – é necessário numa porção de, no mínimo, 5% e, no máximo, 10% por litro de produto. Para garantir a eficácia do produto, a concentração de fórmula especial em cada litro de Flat deve ser de pelo menos 25%, sendo que a quantidade de álcool não pode ultrapassar 30%, nem ser menor do que 10%. A quantidade disponível e os custos dos ingredientes estão evidenciados na Tabela I.

Tabela I:

Ingredientes	Quantidade Disponível	Custo por litro
Formula especial	70.000 litros	R\$ 3,00
Álcool	55.000 litros	R\$ 0,90
Água Destilada	100.000 litros	R\$ 0,40
Fragrância	30.000 litros	R\$ 1,20

Existem também custos de fabricação. As máquinas, que apresentam uma capacidade ociosa suficiente para suprir a demanda prevista, têm um custo de operação variável igual a R\$1,00 por litro de solução sem perfume. A mão de obra é remunerada por produção, tendo um custo de R\$3,00 por litro de Flat com ou sem perfume fabricado. Cada embalagem para o spray de bolso custa R\$0,40 e a embalagem tamanho família, R\$0,60.

A administração da Wonder World espera que o produto seja um sucesso de vendas. Através de pesquisas de mercado, constatou-se que há uma demanda mensal de 45.000 Flats de bolso sem perfume, 42.000 com perfume, 36.000 Flats tamanho família sem perfume e 30.000 com perfume. Os preços de venda de Flats nas diferentes embalagens e composições são apresentados na *Tabela II*:

Produto	Preço
FLAT – Embalagem de bolso com perfume	R\$ 12,00
FLAT – Embalagem de bolso sem perfume	R\$ 10,00
FLAT – Embalagem família com perfume	R\$ 25,00
FLAT – Embalagem família sem perfume	R\$ 20,00

Formule um problema de programação linear para maximizar os lucros da Wonder World e resolva-o através do Solver.

67. A camisaria da Moda Ltda. Produz quatro tipos diferentes de camisas: baby-look, manga $\frac{3}{4}$, tradicional curta e tradicional comprida. Todos os diferentes tipos de camisas são fabricados utilizando-se três tipos de tecidos, cada uma com diferentes proporções de cada tecido.

A Tabela I mostra o custo e a disponibilidade de cada tipo de tecido.

Tipo de Tecido	Custo por Metro	Disponibilidade Semanal (m)
Brim	\$2,50	4000
Algodão	\$3,25	2000
Tergal	\$4,00	3000

A Tabela II mostra outras informações relevantes do processo de fabricação:

Tipo da Camisa	Metros de Tecido por Camisa	Requisitos Especiais de Tecido	Nº Pedidos de Camisas Contratados	Demanda Total Semanal	Preço de Venda
Baby-look	0,9	Mínimo 80% de Brim	500	600	\$10,80
Manga 3/4	0,95	Mínimo 50% de Brim Máximo 20% de Tergal	280	500	\$15,20
Tradicional Curta	1,0	Mínimo 50% de Algodão Máximo 40% de Tergal	625	800	\$8,00
Tradicional Comprida	1,2	Mínimo 30% de Tergal	150	300	\$12,00

Qual estratégia de produção que deve ser adotada pela empresa para maximizar o seu lucro? (Resolva através do Solver do Excel).

68. A Call Master é uma empresa que fornece serviços de consultoria de “call center” para outras empresas. Ela foi procurada recentemente pela Editora Julho com o seguinte problema: os clientes que ligam para o 0800 da editora estão esperando, em média, de 7 a 15 minutos para serem atendidos. Este tempo de espera é considerado extremamente longo pela empresa, que deseja prover um melhor serviço aos seus clientes, atendendo-os em até 5 minutos. A empresa sabe que a solução para atender aos clientes mais rapidamente é aumentar o número de atendentes por hora, porém ela gostaria de programar o trabalho de forma a torná-lo eficiente ao menor custo de pessoal possível. Sendo assim, o desafio da Call Master é definir qual o número ótimo de atendentes que a Editora Julho deve ter para que o prazo de espera de cada cliente na linha seja de, no máximo, 5 minutos.

A Tabela III apresenta o número de telefonemas esperados por hora. Sabendo que cada turno de trabalho dura 6 horas e o tempo médio de atendimento é de 12 minutos, ajude a Call Master a solucionar o problema da Editora Julho (resolva através do Solver).

Horário	Nº Chamadas
0:00 - 1:00	100
1:00 - 2:00	60
2:00 - 3:00	30
3:00 - 4:00	40
4:00 - 5:00	90
5:00 - 6:00	105
6:00 - 7:00	190
7:00 - 8:00	230
8:00 - 9:00	290
9:00 - 10:00	335
10:00 - 11:00	270
11:00 - 12:00	200

Horário	Nº Chamadas
12:00 - 13:00	310
13:00 - 14:00	370
14:00 - 15:00	402
15:00 - 16:00	450
16:00 - 17:00	400
17:00 - 18:00	411
18:00 - 19:00	360
19:00 - 20:00	315
20:00 - 21:00	285
21:00 - 22:00	250
22:00 - 23:00	200
23:00 - 24:00	150

69. Dr.José Motoserra, o administrador chefe no Hospital Descanse Bastante, tem que determinar um horário para auxiliares de enfermagem trabalhando. O Dr.Motoserra dividiu o dia em 12 períodos de duas horas. O período mais calmo do dia ocorre de 0:00(meia-noite) às 6:00h, que começa à meia-noite e requer um mínimo de 40, 30 e 40 auxiliares, respectivamente. A demanda para auxiliares de enfermagem aumenta continuamente durante os próximos quatro períodos do dia, começando com o período de 6:00 às 8:00h, um mínimo de 60, 60, 70, e 80 auxiliares para estes quatro períodos, respectivamente. Depois de 14:00h a demanda por auxiliares diminui até o anoitecer. Para os cinco períodos de duas horas que começam às 14:00h e terminam à meia-noite, são requeridos 80, 70, 70, 60, e 50 auxiliares, respectivamente.

Cada auxiliar de enfermagem se apresenta ao serviço no começo de um dos períodos relatados e trabalha oito horas sucessivas (o que é requerido no contrato das auxiliares). As auxiliares de enfermagem têm um salário padronizado, mas quando trabalham à noite (entre às 22:00h e 06:00h) ganham adicionais noturnos. Cada duas horas trabalhadas à noite acrescentam ao salário base 25%. Ou seja, uma auxiliar de enfermagem que começa a trabalhar às 16:00h trabalha até meia-noite e ganha 25% a mais do seu salário e uma outra que começa a trabalhar às 22:00h tem 100% a mais de salário. Para evitar que o salário chegasse a dobrar, o administrador chefe determinou que nenhuma auxiliar começasse exatamente às 22:00h. Dr.Motoserra quer determinar um quadro de horário para auxiliares de enfermagem que satisfaça às exigências mínimas do hospital ao longo do dia, minimizando a folha de pagamento do hospital (resolva através do LINDO, assumindo isonomia de salários).

70. A Stoquebom Armazéns e Comércio Ltda. Possui um armazém com capacidade de armazenamento de 300.000 toneladas de grãos. Em cada mês ela pode comprar ou vender trigo, a preços prefixados pelo governo segundo a tabela abaixo:

Mês do Ano	Preço de Venda (R\$/ton.)	Preço de Compra (R\$/ton.)
Janeiro	5	8
Fevereiro	7	9
Março	7	1
Abril	3	4
Maio	4	4
Junho	6	3
Julho	6	4
Agosto	2	2
Setembro	3	6
Outubro	3	5
Novembro	3	4
Dezembro	4	2

As quantidades de compra e venda têm limitações sujeitas às restrições de armazenagem e ao estoque inicial do mês (vendas máximas no mês _{i} = saldo mês _{$(i-1)$}). No início do mês de janeiro a Stoquebom tinha 5.000 toneladas de grãos de trigo. Maximize o lucro da operação nos próximos 12 meses, considerando um custo de 1,5% de corretagem para as operações de compra e venda.

71. A No Bugs S/A é uma empresa de dedetização de insetos. Durante os próximos três meses espera receber o seguinte número de solicitações de dedetizações: 100 chamadas em janeiro; 300 chamadas em fevereiro e 200 chamadas em março. A empresa recebe R\$800,00 para cada dedetização atendida no mesmo mês da chamada. As solicitações podem não ser atendidas no mesmo mês em que são feitas, mas neste caso, se houver um atraso de um mês, será dado um desconto de R\$100,00 por dedetização; e se o atraso for de dois meses, o desconto será de R\$200,00 por dedetização. Cada empregado pode fazer entre 6 e 10 dedetizações por mês. O salário mensal de cada empregado da No Bugs S/A é de R\$4.000,00 por mês. No final do último dezembro, a companhia tinha oito funcionários. Funcionários podem ser contratados no início do mês a um custo de contratação de R\$5.000,00 cada.

Os gastos com demissões, que são feitas sempre no final do mês, são de R\$4.000,00 por funcionário, além do salário.

Supondo que todas as chamadas precisam ser atendidas até o final de março e que a empresa tenha o efetivo de oito pessoas no início de abril, formule um problema de programação linear para maximizar os lucros da No Bugs durante os três meses em questão e resolva-os através do Lindo.

72. A Sunshine Investimentos AS deve determinar a sua estratégia de investimento para os próximos três anos. No presente (ano 0) estão disponíveis R\$150.000,00 reais para investimento. A Sunshine está estudando a aplicação de seus recursos em cinco diferentes tipos de investimento (A, B, C, D e E). O fluxo de caixa, para cada real investido nos cinco tipos de aplicação, é mostrado na tabela abaixo:

	Fluxo de Caixa ao Final do Ano			
Investimento\Ano	0	1	2	3
Investimento A	-R\$1,00	R\$0,50	R\$1,00	R\$0,00
Investimento B	R\$0,00	-R\$1,00	R\$0,50	R\$1,00
Investimento C	-R\$1,00	R\$1,50	R\$0,00	R\$0,00
Investimento D	-R\$1,00	R\$0,00	R\$0,00	R\$1,90
Investimento E	R\$0,00	R\$0,00	-R\$1,00	R\$1,50

A política de diversificação de risco da Sunshine requer que, no máximo R\$75.000,00 sejam investidos em apenas uma aplicação. A Sunshine pode, além destes investimentos, receber juros de 8% a.a mantendo o dinheiro investido em uma aplicação de renda fixa prefixada. Os retornos dos investimentos podem ser imediatamente reinvestidos. Devido a uma política de não endividamento, todos os recursos utilizados devem ser de capital próprio da empresa. Formule o problema de maneira a maximizar o disponível ao final do terceiro ano.

73. A Mercantil Web vende produtos domésticos mediante um catálogo on-line. A empresa precisa de bastante espaço em depósitos para armazenar os produtos. Por enquanto estão sendo feitos planos para aluguel desse espaço para os próximos cinco meses. Quanto de espaço será necessário em cada um destes meses é conhecido. Entretanto, já que essas exigências de espaço são bem distintas, pode ser que seja mais econômico alugar somente o espaço necessário para cada mês, em um regime mensal. No entanto, o custo adicional para alugar espaço para meses adicionais é muito menor que o do primeiro mês, de forma que poderia ser muito mais barato alugar o espaço máximo necessário para todos os cinco meses. Outra opção é uma solução intermediária de alterar o total de espaço alugado (acrescentando-se um novo aluguel e/ou um aluguel provisório) pelo menos uma vez, porém nem todos os meses.

A exigência de espaço e os custos do aluguel para os diversos períodos são os seguintes:

Mês	Espaço Necessário (pés ²)	Período de Aluguel (Meses)	Custo do Aluguel por pé ²
1	30.000	1	US\$ 65
2	20.000	2	US\$100
3	40.000	3	US\$135
4	10.000	4	US\$160
5	50.000	5	US\$190

O objetivo é minimizar o custo total de aluguel para atender às exigências de espaço.

- Formule um modelo de programação linear para esse problema.
- Solucione esse modelo pelo.

74. Edson Cordeiro é o diretor do Centro de Informática da Faculdade Jaboaão. Ele precisa fazer a escala de pessoal do centro de informática. Este abre das 8 horas até a meia-noite. Edson monitorou a utilização desse centro em vários períodos do dia e determinou que o seguinte número de consultores em informática seria necessário:

Período do Dia	Número Mínimo de Consultores Necessários para Estar de Plantão
8 horas/meio-dia	4
Meio-dia/ 16horas	8
16horas/ 20horas	10
20horas/meia-noite	6

Podem ser contratados dois tipos de consultores: em tempo integral e em tempo parcial. Os consultores em tempo integral trabalham por oito horas consecutivas em qualquer um dos seguintes turnos: manhã(8h-16h), tarde (12h-20h) e noite (16h-00h). Os consultores em tempo integral recebem US\$14 por hora.

Já os consultores em tempo parcial podem ser contratados para trabalhar em qualquer um dos turnos indicados na tabela anterior. Estes recebem US\$12 por hora.

Outro requisito é que durante qualquer período deve haver pelo menos dois consultores integrais de plantão para cada consultor de período parcial.

Luis quer determinar quantos consultores em tempo integral e quantos tempo parcial serão necessários em cada turno para atender às condições anteriores a um custo mínimo.

- a) Formule um modelo de programação linear para esse problema.
- b) Solucione esse modelo aplicando o método.

75. A Cia. Medequip produz equipamento de diagnóstico médico de precisão em duas fábricas. As clínicas médicas fizeram pedidos para a produção deste mês. A tabela a seguir mostra qual seria o custo para despachar cada unidade do equipamento de cada fábrica para cada um desses clientes. Também é indicado o número de unidades que será produzido em cada fábrica, bem como o número de unidades destinado a cada cliente.

De \ Para	Custo de Remessa por Unidade			Produção
Fábrica 1	US\$600	US\$800	US\$700	400 unidades
Fábrica 2	US\$400	US\$900	US\$600	500 unidades
Tamanho do pedido	300 unidades	200 unidades	400 unidades	

Agora, é necessário tomar uma decisão em relação ao plano de remessa da mercadoria, ou seja, quantas unidades de cada fábrica para cada cliente.

- a) Formule um modelo de programação linear para o presente problema.
- b) Solucione o modelo.

76. A Universidade de Oxbridge mantém um poderoso mainframe para fins de pesquisa utilizado pelo seu corpo docente, alunos dos cursos de Ph.D. e pesquisadores associados. Durante todo o período de funcionamento, é preciso estar disponível um operador para operar e fazer a manutenção do computador, bem como realizar alguns serviços de programação. Beryl Ingram, a diretora desse centro de computação, supervisiona a operação.

Agora é o início do semestre letivo e Beryl está se deparando com a questão de fazer a escala de seus diversos operadores. Pelo fato de todos os operadores estarem atualmente matriculados na universidade, eles estão disponíveis para trabalho somente durante um período limitado em cada dia da semana, conforme mostra a tabela a seguir:

Operadores	Salário / Hora	Número máximo de horas de Disponibilidade				
		Seg.	Ter.	Qua.	Qui.	Sex.
K.C.	US\$ 10,00/hora	6	0	6	0	6
D.H.	US\$ 10,10/hora	0	6	0	6	0
H.B.	US\$ 9,90/hora	4	8	4	0	4
S.C.	US\$ 9,80/hora	5	5	5	0	5
K.S.	US\$ 10,80/hora	3	0	3	8	0
N.K.	US\$ 11,30/hora	0	0	0	6	2

Há seis operadores (sendo dois estudantes diplomados e quatro ainda no curso). Todos têm salários diferentes em razão da experiência diversa com computadores e em termos de habilidade de programação.

A tabela mostra seus salários juntamente com o número máximo de horas que cada um trabalha por dia. Cada operador tem a garantia de certo número de horas por semana que fará que eles mantenham um conhecimento adequado sobre a operação. O nível é estabelecido arbitrariamente em oito horas por semana para os estudantes não formados (*K.C., D.H., H.B. e S.C.*) e sete horas por semana para os estudantes diplomados (*K.S. e N.K.*).

O centro de computação deve permanecer aberto para operar das 8h até as 22h. de segunda à sexta-feira com exatamente um operador de plantão durante esse período. Aos sábados e domingos o computador deve ser operado por outro pessoal.

Por causa de um orçamento apertado, Beryl tem de minimizar o custo. Ela quer determinar o número de horas que deve atribuir a cada operador em cada dia da semana.

- a) Formule um modelo de programação linear para esse problema.
- b) Solucione esse modelo pelo método Simplex.

77. Joyce e Marvin dirigem uma creche para crianças em idade pré-escolar. Eles estão tentando decidir o que servir no almoço para essas crianças. Eles gostariam de manter custos baixos, mas também precisam atender às necessidades nutricionais das crianças. Eles já decidiram oferecer sanduíches de pasta de amendoim e geléia e alguma combinação de biscoitos integrais, leite e suco de laranja. O conteúdo nutricional de cada alimento e seu custo são dados na tabela a seguir:

Alimento	Calorias	Total de Calorias	Vitamina C (mg)	Proteína (g)	Custo (cent.)
Pão (1 fatia)	10	70	0	3	5
Pasta de amendoim (1 colher sopa)	75	100	0	4	4
Geléia de morango (1 colher sopa)	0	50	3	0	7
Biscoito integral (1 unidade)	20	60	0	1	8
Leite (1 copo)	70	150	2	8	15
Suco (1 copo)	0	100	120	1	35

As necessidades nutricionais são as seguintes: cada criança deve receber entre 400 a 600 calorias. Não mais que 30% do total de calorias deve provir de gorduras. Cada criança deve consumir pelo menos 60mg de vitamina C e 12g de proteína. Além disso, por razões práticas, cada criança precisa exatamente de duas fatias de pão (para fazer o sanduíche), pelo menos o dobro de pasta de amendoim em relação à geléia e ao menos um copo de líquido (leite e/ou suco).

Joyce e Marvin gostariam de selecionar opções de pratos para cada criança a fim de minimizar custos sem deixar de atender às exigências nutricionais anteriores.

- a) Formule um modelo de programação linear para esse problema.
- b) Solucione esse modelo pelo método Simplex.

78. A Philbrik Company tem duas unidades fabris nas costas opostas dos Estados Unidos. Cada uma delas fabrica os mesmos dois produtos e depois os vende para atacadistas dentro de cada metade do país. Os pedidos de atacadistas já foram recebidos para os próximos dois meses (fevereiro e março), nos quais o número de unidades solicitadas é mostrado a seguir. A empresa não é obrigada a atender completamente esses pedidos, mas o fará caso possa atendê-los sem diminuir seus lucros.

Produto	Fábrica 1		Fábrica 2	
	Fevereiro	Março	Fevereiro	Março
1	3.600	6.300	4.900	4.200
2	4.500	5.400	5.100	6.000

Cada fábrica possui 20 dias de produção disponíveis em fevereiro e 23 em março para produzir e embarcar esses produtos. Os estoques são esvaziados no final de janeiro, porém cada fábrica tem capacidade de estoque suficiente para armazenar um total de 1.000 unidades dos dois produtos se for produzida uma quantidade em excesso em fevereiro para venda em março. Em ambas as fábricas o custo de manter estoques dessa maneira é de U\$ 3 por unidade do produto 1 e US\$ 4 por unidade do produto 2.

Cada fábrica emprega os mesmos processos de produção, cada um dos quais pode ser usado para produzir qualquer um dos dois produtos. O custo de produção por unidade produzida é mostrado a seguir para cada processo em cada uma das fábricas.

Produto	Fábrica 1		Fábrica 2	
	Processo 1	Processo 2	Processo 1	Processo 2
1	US\$ 62	US\$ 59	US\$ 61	US\$ 65
2	US\$ 78	US\$ 85	US\$ 89	US\$ 86

A taxa de produção para cada produto (número de unidades produzidas por dia dedicadas a cada produto) também é dada para cada processo em cada fábrica.

Produto	Fábrica 1		Fábrica 2	
	Processo 1	Processo 2	Processo 1	Processo 2
1	100	140	130	110
2	120	150	160	130

A empresa recebe a receita líquida por vendas (preço de venda menos custos normais de remessa) quando uma fábrica vende os produtos para seus próprios clientes (os atacadistas em sua metade do país) é de US\$83 por unidade do produto 1 e US\$112 por unidade do produto 2. Entretanto, também é possível (e ocasionalmente desejável) para uma fábrica fazer uma remessa para a outra metade do país a fim de ajudar a completar as vendas da outra fábrica. Quando isso acontece, há um custo extra de remessa de US\$9 por unidade do produto 1 e US\$7 por unidade do produto 2.

A direção agora precisa determinar quanto de cada produto deve ser fabricado por processo de produção em cada fábrica durante cada mês, bem como quanto cada fábrica vende de cada produto em cada mês e quanto cada fábrica deve remeter de cada produto em cada mês para os clientes da outra fábrica. O objetivo é estabelecer qual plano viável maximizaria o lucro total (receita total de vendas líquidas menos a soma do custo de produção, custos de estoque e custos de remessa extras).

Reciclando Resíduos Sólidos

79. A COMPANHIA SAVE-IT opera em um centro de reciclagem que coleta quatro tipos de resíduos sólidos e os trata de modo que possam ser combinados em um produto vendável. O tratamento e a composição são processos distintos. Podem ser gerados três compostos distintos desse produto (ver 1^a coluna na Tabela I), dependendo do mix dos materiais utilizados. Embora haja alguma flexibilidade no mix de cada composto, padrões de qualidade podem especificar a quantidade mínima ou máxima permitidas para a proporção de um resíduo na composição do produto. Essa proporção é o peso do resíduo expresso na forma de porcentagem do peso total para a composição do produto. Para cada um dos dois compostos mais elevados é especificada uma porcentagem fixa para um dos resíduos. Essas especificações são dadas na Tabela I juntamente com o custo de combinação e o preço de venda para cada composto.

O centro de reciclagem coleta seus resíduos sólidos de fontes regulares e, portanto, normalmente é capaz de manter uma taxa estável de tratamento dos mesmos. A Tabela II fornece as quantidades disponíveis para coleta e o tratamento de cada semana, bem como o custo de tratamento, para cada tipo de resíduo.

A única proprietária da Companhia Save-It Co. é a Green Earth, uma organização dedicada a questões ambientais, de modo que os lucros da Save-It sejam usados para ajudar no suporte às atividades da Green Earth. Ela levantou contribuições e subvenções que chegam a um volume de US\$30 mil por semana, para serem utilizados exclusivamente para cobrir todo o custo de tratamento de resíduos sólidos. A diretoria da Green Earth instruiu a gerência da Save-It para dividir esse dinheiro entre os resíduos de maneira que pelo menos metade da quantidade disponível de cada resíduo seja efetivamente coletada e tratada. Essas restrições adicionais são enumeradas na Tabela II.

Dentro das restrições especificadas nas Tabelas I e II, a gerência quer determinar a quantidade de cada composto a ser produzida e o mix de resíduos exato a serem usados em cada composto. O objetivo é maximizar o lucro líquido semanal (receitas totais por vendas menos o custo total de composição), excluído o custo fixo de tratamento de US\$30.000 por semana que está sendo coberto por contribuições e doações.

Tabela I – Dados de produto da Save-It Co.

Composto	Especificação	Custo de Composição por Libra (peso) (US\$)	Preço de Venda Libra por (peso)(US\$)
A	Resíduo 1: não mais que 30% do total	3,00	8,50
	Resíduo 2: não menos que 40% do total		
	Resíduo 3: não mais que 50% do total		
	Resíduo 4: exatamente 20% do total		
B	Resíduo 1: não mais que 50% do total	2,50	7,00
	Resíduo 2: não menos que 10% do total		
	Resíduo 4: exatamente 10% do total		
C	Resíduo 1: não mais que 70% do total	2,00	5,5

Tabela II – Dados referentes a resíduos sólidos da Save-It Co.

Tipo de Resíduo	Peso em Libras Disponíveis por Semana	Custo do Tratamento por Libra(peso) (US\$)	Restrições Adicionais
1	3.000	3,00	<ol style="list-style-type: none"> Para cada tipo de resíduo pelo menos metade do peso em libras disponível por semana deve ser coletado e tratado. Devem ser usados US\$30.000 por semana para tratamento desses resíduos.
2	2.000	6,00	
3	4.000	4,00	
4	1.000	5,00	

Escala de Pessoal

80. A Union Airways está acrescentando mais vôos de/para seu aeroporto central e, para tanto, precisa contratar mais agentes para o atendimento ao público. Entretanto, não está claro quantas pessoas eles devem contratar. A gerência reconhece a necessidade de controle de custos, embora mantendo, ao mesmo tempo, um nível de serviços satisfatório a seus clientes. Para isso, uma equipe de PO está estudando como programar as escalas desses agentes para fornecer bons serviços aos clientes com o menor custo possível em termos de pessoal.

Tomando como base a nova escala de vôos, foi realizada uma análise do número mínimo de agentes de atendimento ao cliente que precisavam estar de serviço em diferentes horas do dia para fornecer um nível de serviço satisfatório. A coluna mais à direita da tabela a seguir mostra o número de agentes necessários para os períodos dados na primeira coluna.

Os demais campos dessa tabela refletem uma das cláusulas no contrato atual da empresa com o sindicato que representa os agentes de atendimento ao cliente. Essa cláusula diz que cada agente trabalha cinco dias por semana em turnos de oito horas e os turnos autorizados são:

- Turno 1: 6h – 14h
- Turno 2: 8h – 16h
- Turno 3: 12h – 20h
- Turno 4: 16h – 24h
- Turno 5: 22h – 6h

Tabela – Dados para o problema de escala de pessoal da Union Airways

Período do Dia	Períodos Cobertos					Número Mínimo de Agentes Necessário
	Turnos					
	1	2	3	4	5	
6h – 8h	✓					48
8h – 10h	✓	✓				79
10h – 12h	✓	✓				65
12h – 14h	✓	✓	✓			87
14h – 16h		✓	✓			64
16h – 18h			✓	✓		73
18h – 20h			✓	✓		82
20h – 22h				✓		43
22h – 24h				✓	✓	52
Custo diário por agente					✓	15
Custo diário por agente	US\$170	US\$160	US\$175	US\$180	US\$195	199

As marcas de verificação (✓) no corpo da Tabela, indicam os horários cobertos pelos respectivos turnos. Pelo fato de alguns turnos serem menos desejados do que outros, os salários especificados no contrato diferem conforme o turno. Para cada turno, o pagamento diário(incluindo benefícios) para cada agente é mostrado na última linha da tabela. O problema é determinar quantos agentes devem ser alocados para os respectivos turnos diários a fim de minimizar o custo total com pessoal (agentes) tomando como base a última linha da Tabela e, ao mesmo tempo, atendendo (ou ultrapassando) as exigências de nível de serviço dadas na coluna mais à direita.

Distribuição de Mercadorias por meio de uma Rede de Distribuição

81. A Cia de Distribuidora Ltda. fabricará novamente o mesmo produto em duas fábricas diferentes e depois o produto terá de ser despachado para dois depósitos onde qualquer uma das fábricas poderá suprir ambos os depósitos. A rede de distribuição disponível para despachar este produto é mostrada na figura a seguir em que F_1 e F_2 são as duas fábricas, W_1 e W_2 os dois depósitos e DC o centro de distribuição. As quantidades a ser enviadas de F_1 e F_2 estão indicadas à esquerda delas e as quantidades a ser recebidas em W_1 e W_2 se encontram à direita destes. Cada seta representa uma rota viável. Portanto, F_1 pode despachar produtos diretamente para W_1 e possui três rotas possíveis :

$$(F_1 \rightarrow DC \rightarrow W_2, F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow DC \rightarrow W_2 \text{ e } F_1 \rightarrow W_1 \rightarrow W_2)$$

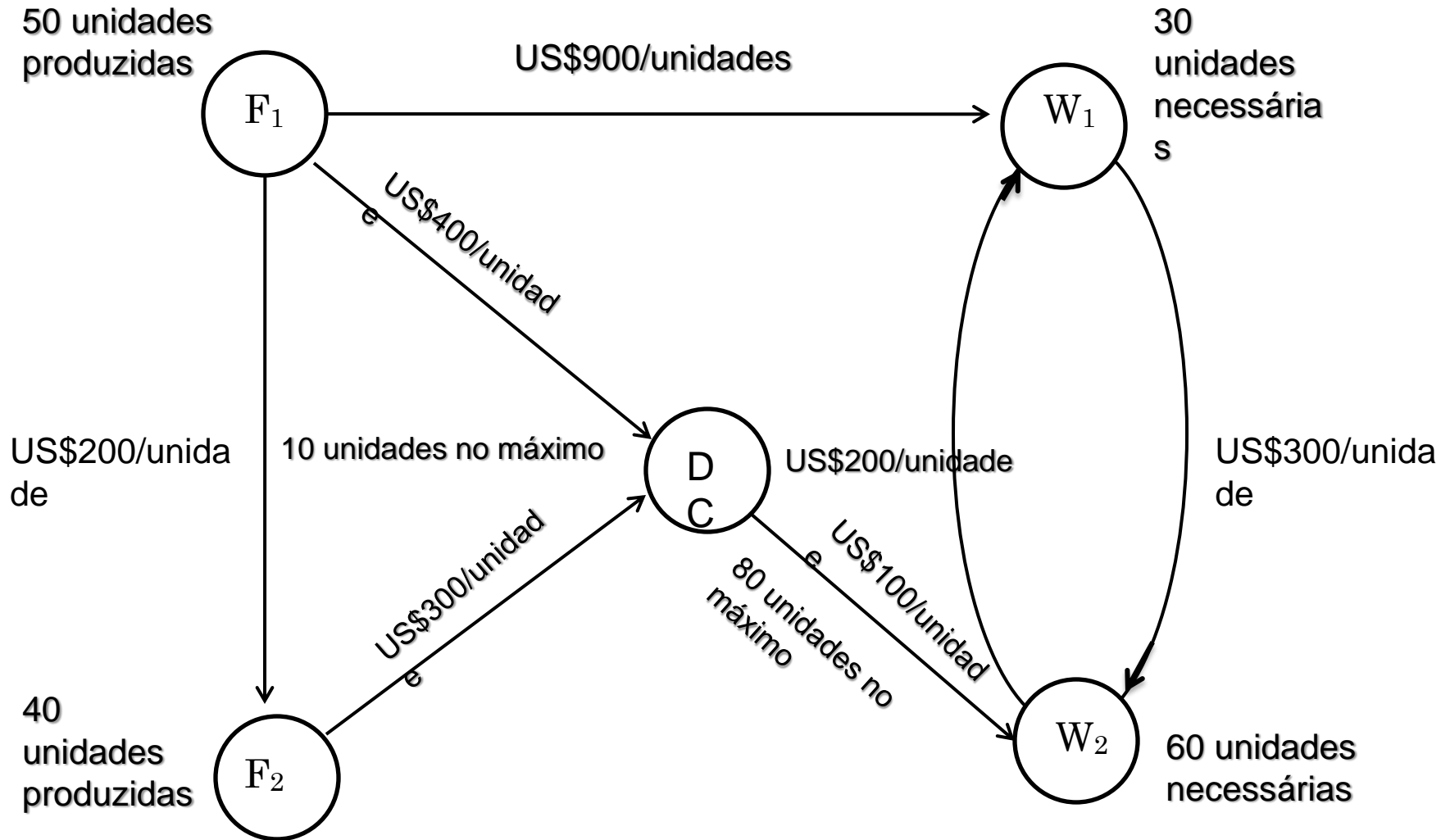
para despachar para W_2 . A fábrica F_2 possui apenas uma rota para W_2 ($F_2 \rightarrow DC \rightarrow W_2$) e outra para W_1 ($F_2 \rightarrow DC \rightarrow W_2 \rightarrow W_1$)

O custo por unidade enviada através de cada rota está indicado próximo à seta. Também indicados próximos a

$F_1 \rightarrow F_2$ e a $DC \rightarrow W_2$ estão as quantidades máximas que podem ser enviadas por essas rotas. As demais rotas possuem capacidade de embarque suficiente para lidar com qualquer volume que essas fábricas consigam enviar.

A decisão a ser tomada diz respeito a quanto enviar por meio de cada uma dessas rotas. O objetivo é de minimizar o custo total de envio.

A rede de distribuição da Cia Distribuidora Ltda.



Bibliografia

1. Introdução a Pesquisa Operacional; F. S. Hillier, G. J. Lieberman; São Paulo, MacGraw-Hill, 2006; 8ed.
2. Pesquisa Operacional; M. Arenales, V. Armentano, R. Morabito, H. Yanasse; Rio de Janeiro, Elsevier Editora, 2007.
3. Pesquisa Operacional; Hamdy A. Taha, São Paulo, Pearson Prentice Hall, 2008, 8ed.
4. Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões: modelagem em Excel; Gerson Lachtermacher; Rio de Janeiro, Elsevier, 2007; 3ed.