

LÓGICA EI

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Universidade do Minho

Departamento de Matemática

2019/2020

Definição 45: Os *valores lógicos* do CP são 1 e 0. Estes valores são habitualmente chamados *verdadeiro* e *falso*, respetivamente, sendo também notados por **V** e **F**, respetivamente.

Definição 46: Uma função $v : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \{0, 1\}$ é uma *valoração* quando satisfaz as seguintes condições:

- a) $v(\perp) = 0$;
- b) $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;
- c) $v(\varphi \wedge \psi) = \text{mínimo}(v(\varphi), v(\psi))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;
- d) $v(\varphi \vee \psi) = \text{máximo}(v(\varphi), v(\psi))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;
- e) $v(\varphi \rightarrow \psi) = 0$ sse $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;
- f) $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = v(\psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Proposição 47: Sejam v uma valoração e φ, ψ fórmulas do CP. Então,

- 1 se $v(\varphi) = 1$, então $v(\neg\varphi) = 0$ e se $v(\varphi) = 0$, então $v(\neg\varphi) = 1$;
- 2 se $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$, então $v(\varphi \wedge \psi) = 1$, $v(\varphi \vee \psi) = 1$, $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ e $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$;
- 3 se $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$, então $v(\varphi \wedge \psi) = 0$, $v(\varphi \vee \psi) = 1$, $v(\varphi \rightarrow \psi) = 0$ e $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 0$;
- 4 se $v(\varphi) = 0$ e $v(\psi) = 1$, então $v(\varphi \wedge \psi) = 0$, $v(\varphi \vee \psi) = 1$, $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ e $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 0$;
- 5 se $v(\varphi) = 0$ e $v(\psi) = 0$, então $v(\varphi \wedge \psi) = 0$, $v(\varphi \vee \psi) = 0$, $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ e $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$.

Dem.: Imediata, a partir da definição de valoração. □

Proposição 48: Seja $f : \mathcal{V}^{CP} \longrightarrow \{0, 1\}$ uma função. Então, existe uma e uma só valoração v t.q. $v(p) = f(p)$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$.

Dem.: Consequência imediata do Princípio de recursão estrutural para fórmulas do CP. □

Definição 49: O *valor lógico de uma fórmula φ para uma valoração v* é $v(\varphi)$.

Exemplo 50: Sejam v_1 a única valoração t.q. $v_1(p) = 0$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$, e v_2 a única valoração t.q.

$$v_2(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in \{p_0, p_2\} \\ 0 & \text{se } p \in \mathcal{V}^{CP} - \{p_0, p_2\} \end{cases} .$$

Sejam ainda $\varphi = (p_1 \vee p_2) \rightarrow (p_1 \wedge p_2)$ e $\psi = \neg p_1 \leftrightarrow (p_1 \rightarrow \perp)$. Então:

a) por definição de valoração,

$$v_1(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{se } v_1(p_1 \vee p_2) = 1 \text{ e } v_1(p_1 \wedge p_2) = 0 \\ 1 & \text{se } v_1(p_1 \vee p_2) = 0 \text{ ou } v_1(p_1 \wedge p_2) = 1 \end{cases} .$$

Assim, como

$v_1(p_1 \vee p_2) = \text{máximo}(v_1(p_1), v_1(p_2)) = \text{máximo}(0, 0) = 0$, segue que $v_1(\varphi) = 1$.

(Exercício: verifique que $v_2(\varphi) = 0$.)

b) por definição de valoração,

$$v_1(\psi) = \begin{cases} 1 & \text{se } v_1(\neg p_1) = v_1(p_1 \rightarrow \perp) \\ 0 & \text{se } v_1(\neg p_1) \neq v_1(p_1 \rightarrow \perp) \end{cases}.$$

Assim, como $v_1(\neg p_1) = 1 - v_1(p_1) = 1$ e $v_1(p_1 \rightarrow \perp) = 1$, segue que $v_1(\psi) = 1$.

(Exercício: verifique que $v_2(\psi) = 1$; em particular, observe que v_2 e v_1 atribuem o mesmo valor lógico à única variável proposicional que ocorre em ψ .)

Proposição 51: Sejam v_1 e v_2 valorações e seja φ uma fórmula do CP. Se, para todo $p \in \text{var}(\varphi)$, $v_1(p) = v_2(p)$, então $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.

Dem.: Por indução estrutural em fórmulas do CP.

Seja $P(\varphi)$ a propriedade:

para todo $p \in \text{var}(\varphi)$, $v_1(p) = v_2(p) \Rightarrow v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.

- a) $P(\perp)$ é verdadeira, pois $v_1(\perp) = 0 = v_2(\perp)$, por definição de valoração.
- b) Suponhamos que p' é uma variável proposicional e que, para todo $p \in \text{var}(p')$, $v_1(p) = v_2(p)$. Assim, como $p' \in \text{var}(p')$, temos $v_1(p') = v_2(p')$. Deste modo, para qualquer $p' \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p')$ é verdadeira.

c) Mostremos que $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$ implicam $P(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$.

Suponhamos que, para todo $p \in \text{var}(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, $v_1(p) = v_2(p)$.

Então, como $\text{var}(\varphi_i) \subseteq \text{var}(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$,

$v_1(p) = v_2(p)$, para todo $p \in \text{var}(\varphi_i)$ ($i \in \{1, 2\}$) e, aplicando as hipóteses de indução $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$, segue que

$v_1(\varphi_i) = v_2(\varphi_i)$ ($i \in \{1, 2\}$).

Assim, $v_1(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \text{mínimo}(v_1(\varphi_1), v_1(\varphi_2)) =$

$\text{mínimo}(v_2(\varphi_1), v_2(\varphi_2)) = v_2(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, e, portanto, $P(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ é verdadeira.

d) Exercício: demonstrar as restantes condições necessárias à aplicação do Princípio de indução estrutural para fórmulas do CP. \square

Definição 52:

- 1 Uma fórmula φ é uma *tautologia* quando, para qualquer valoração v , $v(\varphi) = 1$.
- 2 Uma fórmula φ é uma *contradição* quando, para qualquer valoração v , $v(\varphi) = 0$.

Notação 53: A notação $\models \varphi$ significará que φ é uma tautologia e a notação $\not\models \varphi$ significará que φ não é uma tautologia.

Exemplo 54:

- 1** A fórmula $\psi = \neg p_1 \leftrightarrow (p_1 \rightarrow \perp)$ do exemplo anterior é uma tautologia. De facto, dada uma valoração v arbitrária, sabemos que $v(p_1) = 0$ ou $v(p_1) = 1$, e:
- (a) caso $v(p_1) = 0$, então $v(\neg p_1) = 1$ e $v(p_1 \rightarrow \perp) = 1$, donde $v(\psi) = 1$.
 - (b) caso $v(p_1) = 1$, então $v(\neg p_1) = 0$ e $v(p_1 \rightarrow \perp) = 0$, donde $v(\psi) = 1$.
- 2** Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \wedge \neg \varphi$ é uma contradição. De facto, dada uma valoração v arbitrária, sabemos que $v(\varphi) = 0$ ou $v(\varphi) = 1$, e:
- (a) caso $v(\varphi) = 0$, então $v(\varphi \wedge \neg \varphi) = \text{mínimo}(0, v(\neg \varphi)) = 0$.
 - (b) caso $v(\varphi) = 1$, então $v(\neg \varphi) = 0$ e $v(\varphi \wedge \neg \varphi) = \text{mínimo}(v(\varphi), 0) = 0$.
- 3** As fórmulas $p_0, \neg p_0, p_0 \vee p_1, p_0 \wedge p_1, p_0 \rightarrow p_1, p_0 \leftrightarrow p_1$ não são tautologias nem são contradições. (Porquê?)

Proposição 55: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,

- 1 φ é tautologia se e só se $\neg\varphi$ é contradição;
- 2 φ é contradição se e só se $\neg\varphi$ é tautologia.

Dem.: Exercício. □

Observação 56: Sabendo que φ não é uma tautologia, não podemos concluir que φ é uma contradição e, analogamente, sabendo que φ não é uma contradição, não podemos concluir que φ é uma tautologia. Tenha-se em atenção que existem fórmulas que não são tautologias, nem são contradições (como vimos no exemplo anterior).

Observação 57: Pela Proposição 51, para decidir se uma fórmula φ é uma tautologia, basta calcular o valor lógico de φ para $2^{\#var(\varphi)}$ valorações (o número de atribuições, possíveis, às variáveis proposicionais de φ), o que pode ser descrito através de uma *tabela de verdade*, como se segue. Introduzimos: uma coluna para cada variável proposicional de φ ; uma coluna para φ ; e colunas (auxiliares) para cada uma das restantes subfórmulas de φ . Introduzimos linhas para cada uma das atribuições, possíveis, de valores de verdade às variáveis proposicionais de φ (i.e., sequências de 0's e 1's de comprimento igual ao número de variáveis proposicionais em φ). Preenchemos as colunas respeitantes às variáveis proposicionais com essas atribuições. Nas restantes posições pos_{ij} da tabela, escrevemos o valor lógico da fórmula respeitante à coluna j , para uma valoração que satisfaz as atribuições às variáveis proposicionais na linha i .

Exemplo 58: Seja φ a fórmula $(\neg p_1 \rightarrow \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \rightarrow p_1)$. Da tabela de verdade para φ , apresentada de seguida, podemos concluir que φ é uma tautologia, uma vez que φ assume o valor lógico 1, para todas as possíveis atribuições de valores de verdade às variáveis proposicionais de φ .

p_1	p_2	$\neg p_1$	$\neg p_2$	$\neg p_1 \rightarrow \neg p_2$	$p_2 \rightarrow p_1$	$(\neg p_1 \rightarrow \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \rightarrow p_1)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Tabela de verdade de $(\neg p_1 \rightarrow \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \rightarrow p_1)$.

Teorema 59 (Generalização): Sejam p uma variável proposicional e sejam φ e ψ fórmulas do CP. Se φ é uma tautologia, então $\varphi[\psi/p]$ é também uma tautologia.

Dem.: Qualquer que seja a valoração v , demonstra-se, por indução estrutural na fórmula φ , que a valoração v' definida, a partir de v e de ψ , do seguinte modo

$$v'(p') = \begin{cases} v(\psi) & \text{se } p' = p \\ v(p') & \text{se } p' \in \mathcal{V}^{CP} - \{p\} \end{cases}$$

é tal que $v'(\varphi) = v(\varphi[\psi/p])$. Portanto, se φ é uma tautologia, $v'(\varphi) = 1$ e, pela igualdade anterior, $v(\varphi[\psi/p]) = 1$. Assim, qualquer que seja a valoração v , $v(\varphi[\psi/p]) = 1$, *i.e.*, $\varphi[\psi/p]$ é uma tautologia. \square

Exemplo 60: A fórmula $p_0 \vee \neg p_0$ é uma tautologia. Logo, para qualquer fórmula ψ , a fórmula $(p_0 \vee \neg p_0)[\psi/p_0] = \psi \vee \neg \psi$ é ainda uma tautologia.

Definição 61: Uma fórmula φ diz-se *logicamente equivalente* a uma fórmula ψ (notação: $\varphi \Leftrightarrow \psi$) quando a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo 62: Para toda a fórmula φ , $\neg\varphi \Leftrightarrow (\varphi \rightarrow \perp)$. A demonstração deste resultado pode ser sintetizada numa *tabela de verdade*, como se segue:

φ	$\neg\varphi$	$\varphi \rightarrow \perp$	$\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \perp)$
1	0	0	1
0	1	1	1

Tabela de verdade de $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \perp)$.

Na primeira linha da tabela, é demonstrado que o valor lógico de $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \perp)$ é 1 para qualquer valoração para a qual φ assumo o valor lógico 1. Na segunda linha da tabela, é demonstrado que o valor lógico de $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \perp)$ é 1 para qualquer valoração para a qual φ assumo o valor lógico 0.

Proposição 63: A relação de equivalência lógica satisfaz as seguintes propriedades:

- 1 para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \Leftrightarrow \varphi$ (*reflexividade*);
- 2 para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\varphi \Leftrightarrow \psi$, então $\psi \Leftrightarrow \varphi$ (*simetria*);
- 3 para todo $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, se $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e $\psi \Leftrightarrow \sigma$, então $\varphi \Leftrightarrow \sigma$ (*transitividade*).

Dem.: Para mostrar 1, temos que mostrar que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, a fórmula $\varphi \leftrightarrow \varphi$ é uma tautologia. De facto, dado $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, para qualquer valoração v , $v(\varphi) = v(\varphi)$, donde, pela definição de valoração, $v(\varphi \leftrightarrow \varphi) = 1$, e, consequentemente, $\varphi \leftrightarrow \varphi$ é uma tautologia. (Exercício: mostrar 2 e 3.) □

Corolário 64: A relação de equivalência lógica é uma relação de equivalência em \mathcal{F}^{CP} .

Dem.: Imediata, a partir da proposição anterior. □

Proposição 65: As seguintes equivalências lógicas são válidas.

$$(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma) \qquad (\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$$

(associatividade)

$$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi \qquad \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$$

(comutatividade)

$$\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi \qquad \varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$$

(idempotência)

$$\varphi \vee \perp \Leftrightarrow \varphi \qquad \varphi \wedge \top \Leftrightarrow \varphi$$

(elemento neutro)

$$\varphi \vee \top \Leftrightarrow \top \qquad \varphi \wedge \perp \Leftrightarrow \perp$$

(elemento absorvente)

$$\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma) \quad \varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$$

(distributividade)

$$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi \quad \neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$$

(leis de De Morgan)

$$\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$$

(lei da dupla negação)

$$\varphi \Leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \quad \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$$

$$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \rightarrow \psi \quad \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

$$\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \perp \quad \perp \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$$

(expressão de um conetivo em termos de outros conetivos)

Dem.: Exercício.

Notação 66: Uma vez que a conjunção é uma operação associativa, utilizaremos a notação $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ (com $n \in \mathbb{N}$) para representar qualquer associação, através da conjunção, das fórmulas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ duas a duas. Analogamente, e uma vez que a disjunção é também uma operação associativa, utilizaremos a notação $\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$ para representar qualquer associação, através da disjunção, das fórmulas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ duas a duas. Em ambos os casos, quando $n = 1$, as notações anteriores representam simplesmente a fórmula φ_1 .

Teorema 67 (Substituição): Sejam $p \in \mathcal{V}^{CP}$ e $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$. Então, $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ se e só se para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

Dem.:

- i) Suponhamos que para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$. Então, em particular, teremos que $p[\varphi_1/p] \Leftrightarrow p[\varphi_2/p]$, *i.e.*, por definição de substituição, $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$.

ii) Suponhamos agora que $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$. Vamos demonstrar, por indução estrutural em fórmulas do CP, que para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $P(\psi)$, onde $P(\psi)$ é a propriedade: $\psi[\varphi_1/p] \Leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

a) Por definição de substituição, $\perp [\varphi_1/p] = \perp = \perp [\varphi_2/p]$. Assim, como a relação \Leftrightarrow é reflexiva, $\perp \Leftrightarrow \perp$, ou equivalentemente $\perp [\varphi_1/p] \Leftrightarrow \perp [\varphi_2/p]$, e, portanto, $P(\perp)$ é verdadeira.

b) Seja $p' \in \mathcal{V}^{CP}$. Consideremos dois casos.

b.1) Caso $p' = p$. Então, por definição de substituição, $p'[\varphi_1/p] = \varphi_1$ e $p'[\varphi_2/p] = \varphi_2$. Assim, como por hipótese $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$, segue que $p'[\varphi_1/p] \Leftrightarrow p'[\varphi_2/p]$,

b.2) Caso $p' \neq p$. Então, por definição de substituição, $p'[\varphi_1/p] = p'$ e $p'[\varphi_2/p] = p'$. Assim, tal como em a), por \Leftrightarrow ser reflexiva, $p'[\varphi_1/p] \Leftrightarrow p'[\varphi_2/p]$.

Assim, para qualquer $p' \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p')$ é verdadeira.

c) Seja ψ_1 uma fórmula e suponhamos $P(\psi_1)$ (H.I.), tendo em vista mostrar que $P(\neg\psi_1)$ é verdadeira, ou, dito por outras palavras, pretende-se mostrar que $(\neg\psi_1)[\varphi_1/p] \leftrightarrow (\neg\psi_1)[\varphi_2/p]$ é uma tautologia.

Seja v uma valoração. Então:

$$\begin{aligned}
 & v((\neg\psi_1)[\varphi_1/p]) \\
 = & v(\neg\psi_1[\varphi_1/p]) \quad (\text{definição de substituição}) \\
 = & 1 - v(\psi_1[\varphi_1/p]) \quad (\text{definição de valoração}) \\
 = & 1 - v(\psi_1[\varphi_2/p]) \quad (*) \\
 = & v(\neg\psi_1[\varphi_2/p]) \quad (\text{definição de valoração}) \\
 = & v((\neg\psi_1)[\varphi_2/p]) \quad (\text{definição de substituição}).
 \end{aligned}$$

onde a igualdade assinalada com (*) é consequência da HI, pois da HI, por definição de \Leftrightarrow , segue que $\psi_1[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi_1[\varphi_2/p]$ é uma tautologia, donde, para toda a valoração v , $v(\psi_1[\varphi_1/p]) = v(\psi_1[\varphi_2/p])$.

Assim sendo, $v((\neg\psi_1)[\varphi_1/p] \leftrightarrow (\neg\psi_2)[\varphi_2/p]) = 1$ e, portanto, a fórmula $(\neg\psi_1)[\varphi_1/p] \leftrightarrow (\neg\psi_2)[\varphi_2/p]$ é uma tautologia.

- d) Para completar a prova, falta mostrar que, para $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$, se $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2)$, então $P(\psi_1 \Box \psi_2)$. (Exercício.)



Exemplo 68: Sejam φ e ψ fórmulas. Então,

$$\begin{array}{ccc} (1) & & (2) \\ \neg(\neg\varphi \wedge \psi) & \Leftrightarrow & \neg\neg\varphi \vee \neg\psi \Leftrightarrow \varphi \vee \neg\psi. \end{array}$$

Justificações

- (1) Lei de De Morgan.
- (2) Dada uma variável proposicional $p \notin \text{var}(\psi)$ (que existe sempre, pois o número de variáveis proposicionais que ocorrem em φ é finito), pelo Teorema da Substituição, como $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$, $(p \vee \psi)[\neg\neg\varphi/p] \Leftrightarrow (p \vee \psi)[\varphi/p]$ e assim, uma vez que $(p \vee \psi)[\neg\neg\varphi/p] = \neg\neg\varphi \vee \psi$ e $(p \vee \psi)[\varphi/p] = \varphi \vee \psi$, segue-se que $\neg\neg\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \varphi \vee \psi$.

Donde, como \Leftrightarrow é transitiva, podemos concluir a equivalência lógica entre a primeira fórmula e a última fórmula.

Definição 69: Seja $X \subseteq \{\perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ um conjunto de conectivos. X diz-se *completo* quando, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e todos os conectivos de ψ estão em X .

Proposição 70: Os conjuntos de conetivos $\{\rightarrow, \neg\}$, $\{\rightarrow, \perp\}$, $\{\wedge, \neg\}$ e $\{\vee, \neg\}$ são completos.

Dem.: Vamos demonstrar que $\{\rightarrow, \neg\}$ é um conjunto completo de conetivos. (A demonstração de que os outros conjuntos de conetivos mencionados são completos é deixada como exercício.) Para tal, comecemos por definir, por recursão estrutural em fórmulas, a função $f : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathcal{F}^{CP}$ como a única função t.q.:

- a) $f(\perp) = \neg(p_0 \rightarrow p_0)$;
- b) $f(p) = p$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;
- c) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;
- d) $f(\varphi \rightarrow \psi) = f(\varphi) \rightarrow f(\psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;
- e) $f(\varphi \vee \psi) = \neg f(\varphi) \rightarrow f(\psi)$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;
- f) $f(\varphi \wedge \psi) = \neg(f(\varphi) \rightarrow \neg f(\psi))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;
- g) $f(\varphi \leftrightarrow \psi) = \neg((f(\varphi) \rightarrow f(\psi)) \rightarrow \neg(f(\psi) \rightarrow f(\varphi)))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Lema: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \Leftrightarrow f(\varphi)$ e os conectivos de $f(\varphi)$ estão no conjunto $\{\rightarrow, \neg\}$.

Dem.: Por indução estrutural em φ . Exercício.

Do lema anterior concluímos de imediato que $\{\rightarrow, \neg\}$ é um conjunto completo de conectivos, pois, para toda a fórmula φ , existe uma fórmula ψ —a fórmula $f(\varphi)$ — tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e os conectivos de ψ estão no conjunto $\{\rightarrow, \neg\}$. \square

Exemplo 71: Da demonstração da proposição anterior, podemos concluir que a fórmula

$f((\neg p_1 \wedge p_2) \rightarrow \perp) = \neg(\neg p_1 \rightarrow \neg p_2) \rightarrow \neg(p_0 \rightarrow p_0)$ é logicamente equivalente a $(\neg p_1 \wedge p_2) \rightarrow \perp$ e os seus conectivos estão no conjunto $\{\rightarrow, \neg\}$.

Definição 72: As variáveis proposicionais e as negações de variáveis proposicionais são chamadas *literais*.

Definição 73: Fórmulas do CP das formas

$$\text{i) } (l_{11} \vee \dots \vee l_{1m_1}) \wedge \dots \wedge (l_{n1} \vee \dots \vee l_{nm_n})$$

$$\text{ii) } (l_{11} \wedge \dots \wedge l_{1m_1}) \vee \dots \vee (l_{n1} \wedge \dots \wedge l_{nm_n})$$

em que os l_{ij} são literais e n , bem como os m_i , pertencem a \mathbb{N} , serão designadas por *formas normais conjuntivas* (FNC) e *formas normais disjuntivas* (FND), respetivamente.

Exemplo 74:

- a) Todo o literal l é simultaneamente uma forma normal conjuntiva e disjuntiva (na definição de formas normais, basta tomar $n = 1$, $m_1 = 1$ e $l_{11} = l$).
- b) A fórmula $p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_0$ é uma FNC (faça-se $n = 3$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 1$, $l_{11} = p_1$, $l_{21} = \neg p_2$ e $l_{31} = \neg p_0$) e é também uma FND (faça-se $n = 1$, $m_1 = 3$, $l_{11} = p_1$, $l_{12} = \neg p_2$ e $l_{13} = \neg p_0$). Também a fórmula $p_1 \vee p_2$ é, em simultâneo, uma FND e uma FNC. Mais geralmente, conjunções de literais e disjunções de literais são, em simultâneo, formas normais conjuntivas e disjuntivas.
- c) A fórmula $(p_1 \vee p_0) \wedge (p_0 \vee \neg p_1)$ é uma FNC, mas não é uma FND.
- d) A fórmula $\neg(p_1 \vee p_0)$ não é nem uma FNC nem uma FND.

Proposição 75: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe uma forma normal conjuntiva φ^c tal que $\varphi \Leftrightarrow \varphi^c$ e existe uma forma normal disjuntiva φ^d tal que $\varphi \Leftrightarrow \varphi^d$.

Dem.: Dada uma fórmula φ , uma forma normal conjuntiva e uma forma normal disjuntiva logicamente equivalentes a φ podem ser obtidas através das seguintes transformações:

1. Eliminar equivalências, implicações e ocorrências do absurdo, utilizando as equivalências lógicas

$$\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \Leftrightarrow (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1), \quad \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \Leftrightarrow \neg \varphi_1 \vee \varphi_2 \text{ e } \perp \Leftrightarrow \varphi_1 \wedge \neg \varphi_1.$$

2. Mover negações que se encontrem fora de conjunções ou disjunções para dentro delas, utilizando as leis de De Morgan.
3. Eliminar duplas negações.
4. Aplicar a distributividade entre a conjunção e a disjunção. □

Exemplo 76: Seja $\varphi = ((\neg p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3) \wedge p_0$. Então:

i)

$$\begin{aligned}
 & \varphi \\
 \Leftrightarrow & ((\neg p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3) \wedge p_0 \\
 \Leftrightarrow & (\neg(\neg p_1 \vee p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\
 \Leftrightarrow & ((\neg\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\
 \Leftrightarrow & ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\
 \Leftrightarrow & (p_1 \vee p_3) \wedge (\neg p_2 \vee p_3) \wedge p_0
 \end{aligned}$$

e a última fórmula é uma FNC;

ii)

$$\begin{aligned}
 & \varphi \\
 \Leftrightarrow & ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \quad \text{por i)} \\
 \Leftrightarrow & (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_0) \vee (p_3 \wedge p_0),
 \end{aligned}$$

sendo a última fórmula uma FND.

Observação 77: Consideremos de novo a Proposição 75 e a sua demonstração. Uma demonstração alternativa, que permite obter uma FND e uma FNC logicamente equivalentes a uma dada fórmula φ , pode ser feita com recurso à tabela de verdade de φ . Em particular, vejamos como obter uma FND φ^d , logicamente equivalente a φ , a partir da tabela de verdade de φ .

- Se φ é uma contradição ou uma tautologia, basta tomar, respetivamente, uma FND que seja uma contradição e uma FND que seja uma tautologia; por exemplo, tome-se, respetivamente, $\varphi^d = p_0 \wedge \neg p_0$ e $\varphi^d = p_0 \vee \neg p_0$.
- Doutro modo, sem perda de generalidade, suponhamos, que p_1, p_2, \dots, p_n são as variáveis proposicionais que ocorrem em φ^1 . A tabela de verdade de φ terá 2^n linhas e pode ser representada da seguinte forma:

p_1	p_2	\cdots	p_{n-1}	p_n	φ
1	1	\cdots	1	1	b_1
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots
$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	\cdots	$a_{i,n-1}$	$a_{i,n}$	b_i
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots
0	0	\cdots	0	0	b_{2^n}

onde, para cada $i \in \{1, \dots, 2^n\}$, $b_i = v_i(\varphi)$ para toda a valoração v_i tal que $v_i(p_j) = a_{i,j}$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$.

Para cada $i \in \{1, \dots, 2^n\}$ tal que $b_i = 1$ seja

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} p_j & \text{se } a_{i,j} = 1 \\ \neg p_j & \text{se } a_{i,j} = 0 \end{cases} \quad (\text{para todo } j \in \{1, \dots, n\})$$

e seja $\beta_i = \alpha_{i,1} \wedge \alpha_{i,2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i,n}$.

Finalmente, suponhamos que i_1, i_2, \dots, i_k são as linhas para as quais $b_{i_r} = 1$, e tome-se $\varphi^d = \beta_{i_1} \vee \beta_{i_2} \vee \cdots \vee \beta_{i_k}$.

Prova-se que φ^d assim definida, de facto, é uma FND e é logicamente equivalente a φ . (Exercício.)

Exemplo 78: Consideremos a fórmula

$\varphi = ((p_3 \rightarrow p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \perp)) \wedge p_2$. Denotemos por ψ a subfórmula $(p_3 \rightarrow p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \perp)$ de φ . A tabela de verdade de φ é:

p_1	p_2	p_3	\perp	$\neg p_1$	$p_3 \rightarrow p_1$	$\neg p_1 \leftrightarrow \perp$	ψ	φ
1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	1	0

As linhas para as quais φ tem valor lógico 1 são a 1ª, a 2ª e a 6ª.

Portanto, uma FND logicamente equivalente a φ é:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3).$$

Definição 79: Seja v uma valoração.

- 1 Dizemos que v *satisfaz uma fórmula do CP* φ , e escrevemos $v \models \varphi$, quando $v(\varphi) = 1$. Quando v *não satisfaz* φ (i.e., quando $v(\varphi) = 0$, escrevemos $v \not\models \varphi$).
- 2 Dizemos que v *satisfaz um conjunto de fórmulas do CP* Γ , e escrevemos $v \models \Gamma$, quando v satisfaz todas as fórmulas de Γ . Quando v *não satisfaz* Γ (i.e., quando existe $\varphi \in \Gamma$ t.q. $v \not\models \varphi$ ou, equivalentemente, quando existe $\varphi \in \Gamma$ t.q. $v(\varphi) = 0$) escrevemos $v \not\models \Gamma$.

Exemplo 80: Seja v_0 a valoração que atribui o valor lógico 0 a todas as variáveis proposicionais.

- 1 $v_0 \models p_1 \leftrightarrow p_2$ e $v_0 \models \neg p_1 \wedge \neg p_2$;
- 2 $v_0 \not\models p_1 \vee p_2$ e $v_0 \not\models p_1 \leftrightarrow \neg p_2$;
- 3 $v_0 \models \{p_1 \leftrightarrow p_2, \neg p_1 \wedge \neg p_2\}$ (por 1);
- 4 $v_0 \not\models \{p_1 \leftrightarrow p_2, p_1 \vee p_2\}$ (v_0 não satisfaz a 2ª fórmula);
- 5 $v_0 \not\models \{\neg p_1 \wedge \neg p_2, p_1 \leftrightarrow \neg p_2\}$ (v_0 não satisfaz a 2ª fórmula).

Observação 81: Dado que no conjunto vazio não há qualquer fórmula, tem-se, trivialmente, que, para toda a valoração v , $v \models \emptyset$.

Definição 82: Seja Γ um conjunto de fórmulas do CP.

- 1 Γ diz-se um conjunto (*semanticamente*) *consistente* ou *satisfazível* quando existe alguma valoração que satisfaz Γ .
- 2 Γ diz-se um conjunto (*semanticamente*) *inconsistente* ou *insatisfazível* quando não há valorações que satisfaçam Γ .

Exemplo 83:

- a) Como vimos no exemplo anterior, o conjunto de fórmulas $\Delta_1 = \{p_1 \leftrightarrow p_2, \neg p_1 \wedge \neg p_2\}$ é satisfeito pela valoração v_0 desse exemplo e, portanto, Δ_1 é consistente.
- b) O conjunto $\Delta_2 = \{p_1 \leftrightarrow p_2, p_1 \vee p_2\}$, considerado no exemplo anterior, não é satisfeito pela valoração v_0 , mas é satisfeito, por exemplo, pela valoração que atribui valor lógico 1 a qualquer variável proposicional. Logo, Δ_2 é também consistente.
- c) O conjunto $\Delta_3 = \{\neg p_1 \wedge \neg p_2, p_1 \leftrightarrow \neg p_2\}$, considerado no exemplo anterior, é inconsistente.

Dem.: Suponhamos que existe uma valoração v que satisfaz Δ_3 . Então, $v(\neg p_1 \wedge \neg p_2) = 1$, e portanto $v(p_1) = 0$ e $v(p_2) = 0$, e $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 1$. Ora, de $v(p_2) = 0$, segue $v(\neg p_2) = 1$ e daqui e de $v(p_1) = 0$, segue $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 0$, o que contradiz $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 1$. Logo, não podem existir valorações que satisfaçam Δ_3 e, assim, Δ_3 é inconsistente.

Proposição 84: Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas do CP tais que $\Gamma \subseteq \Delta$. Então:

- i) se Δ é consistente, então Γ é consistente;
- ii) se Γ é inconsistente, então Δ é inconsistente.

Dem.: Exercício.



Definição 85: Seja φ uma fórmula do CP e seja Γ um conjunto de fórmulas do CP.

- 1 Dizemos que φ é uma *consequência semântica* de Γ , e escrevemos $\Gamma \models \varphi$, quando, para toda a valoração v , se $v \models \Gamma$, então $v \models \varphi$.
- 2 Escrevemos $\Gamma \not\models \varphi$ quando φ *não é consequência semântica* de Γ , i.e., quando existe alguma valoração v t.q. $v \models \Gamma$ e $v \not\models \varphi$.

Observação 86: Da definição anterior, aplicando as definições de satisfação de uma fórmula e satisfação de um conjunto de fórmulas, segue de imediato que:

- 1 $\Gamma \models \varphi$ se e só se para toda a valoração v , se para todo $\psi \in \Gamma$, $v(\psi) = 1$, então $v(\varphi) = 1$.
- 2 $\Gamma \not\models \varphi$ se e só se existe alguma valoração v tal que, para todo $\psi \in \Gamma$, $v(\psi) = 1$ e $v(\varphi) = 0$.

Exemplo 87:

1 Seja $\Gamma = \{p_1, \neg p_1 \vee p_2\}$. Então:

- (a) $\Gamma \models p_1$. (Se tomarmos uma valoração v tal que $v \models \Gamma$, *i.e.*, uma valoração tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, em particular, temos $v(p_1) = 1$.)
- (b) $\Gamma \models p_2$. (Tomando uma valoração v tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, temos $v(\neg p_1) = 0$ e daqui e de $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, segue $v(p_2) = 1$.)
- (c) $\Gamma \models p_1 \wedge p_2$. (Tomando uma valoração v tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, temos necessariamente $v(p_1) = 1$ e $v(p_2) = 1$ (tal como vimos nos exemplos anteriores) e, por isso, temos $v(p_1 \wedge p_2) = 1$.)
- (d) $\Gamma \not\models p_3$. (Existem valorações v tais que $v \models \Gamma$ e $v(p_3) = 0$. Por exemplo, a valoração que atribui valor lógico 1 a p_1 e p_2 e valor lógico 0 às restantes variáveis proposicionais é uma tal valoração.)
- (e) $\Gamma \not\models \neg p_1 \vee \neg p_2$. (Por exemplo, para a valoração v_1 tal que $v_1(p_i) = 1$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, temos $v_1 \models \Gamma$ e, no entanto, $v_1(\neg p_1 \vee \neg p_2) = 0$.)

(f) $\Gamma \models p_3 \vee \neg p_3$. (Se tomarmos uma valoração v tal que $v \models \Gamma$, temos $v(p_3 \vee \neg p_3)$. De facto, $p_3 \vee \neg p_3$ é uma tautologia e, como tal, o seu valor lógico é 1 para qualquer valoração (em particular, para aquelas valorações que satisfazem Γ).)

2 Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\} \models \psi$. De facto, para qualquer valoração v , se $v(\varphi) = 1$ e $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$, então $v(\psi) = 1$.

3 Já a afirmação “para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\{\varphi \rightarrow \psi\} \models \psi$ ” é falsa. Por exemplo, $\{p_1 \rightarrow p_2\} \not\models p_2$ (uma valoração v tal que $v(p_1) = v(p_2) = 0$ satisfaz $\{p_1 \rightarrow p_2\}$ e não satisfaz p_2).

Proposição 88: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\models \varphi$ se e só se $\emptyset \models \varphi$.

Dem.: Suponhamos que φ é uma tautologia. Então, para toda a valoração v , $v \models \varphi$ e, assim, de imediato, a implicação

“ $v \models \emptyset \Rightarrow v \models \varphi$ ” é verdadeira, pelo que, $\emptyset \models \varphi$.

Reciprocamente, suponhamos agora que $\emptyset \models \varphi$, *i.e.*, suponhamos que para toda a valoração v ,

$$v \models \emptyset \Rightarrow v \models \varphi.$$

Seja v uma valoração arbitrária. Pretendemos mostrar que $v(\varphi) = 1$. Ora, trivialmente, $v \models \emptyset$ (Observação 81). Assim, da suposição, segue $v \models \varphi$, ou seja, $v(\varphi) = 1$. \square

Observação 89: Se Γ é um conjunto de fórmulas inconsistente, então $\Gamma \models \varphi$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. (Porquê?) Como tal, é possível ter-se $\Gamma \models \varphi$ sem que existam valorações que satisfaçam Γ .

Notação 90: Muitas vezes, no contexto da relação de consequência semântica, usaremos a vírgula para denotar a união de conjuntos e escrevemos uma fórmula para denotar o conjunto singular composto por essa fórmula. Assim, por exemplo, dadas fórmulas $\varphi, \psi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ e conjuntos de fórmulas Γ, Δ , escrevemos:

- a) $\Gamma, \Delta \models \varphi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$;
- b) $\Gamma, \varphi \models \psi$ como abreviatura para $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$;
- c) $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$ como abreviatura para $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \varphi$.

Proposição 91: Sejam φ e ψ fórmulas e sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

- a) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.
- b) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.
- c) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Delta, \Gamma \models \psi$.
- d) $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$.
- e) Se $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

Dem.:

- a) Suponhamos que $\varphi \in \Gamma$. Seja v uma valoração e suponhamos que v satisfaz Γ . Então, da definição de satisfação de conjuntos, sabemos que v atribui valor lógico 1 a todas as fórmulas de Γ . Assim, dado que por hipótese $\varphi \in \Gamma$, temos $v(\varphi) = 1$.

b) Seja v uma valoração. Suponhamos que v satisfaz Δ . Assim, em particular, v satisfaz Γ , pois (por hipótese) $\Gamma \subseteq \Delta$. Donde, pela hipótese de que φ é uma consequência semântica de Γ , segue que $v(\varphi) = 1$.

c) Exercício.

d) \Rightarrow) Seja v uma valoração. Suponhamos que v satisfaz $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Então, por definição de satisfação de conjuntos, v satisfaz Γ e $v(\varphi) = 1$ (*). Assim, como v satisfaz Γ , da hipótese $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ segue que $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ (**). Logo, de (*) e (**), por definição de valoração, $v(\psi) = 1$.

\Leftarrow) Exercício.

e) Seja v uma valoração. Suponhamos que v satisfaz Γ . Então, da hipótese $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$, podemos concluir que $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ (*) e, da hipótese $\Gamma \models \varphi$, podemos concluir que $v(\varphi) = 1$ (**). Logo, de (*) e (**), por definição de valoração, $v(\psi) = 1$. \square

Proposição 92: Sejam $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ fórmulas, onde $n \in \mathbb{N}$. As seguintes proposições são equivalentes:

- i) $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$;
- ii) $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \models \varphi$;
- iii) $\models (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi$.

Dem.: A equivalência entre ii) e iii) é um caso particular de d) da proposição anterior. A equivalência entre i) e ii) pode ser demonstrada a partir da equivalência mais geral: para todo o conjunto Γ de fórmulas,

$$\Gamma, \varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi \text{ se e só se } \Gamma, \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \models \varphi,$$

a qual pode ser demonstrada por indução em n (exercício). A equivalência entre i) e iii) segue, então, por transitividade. □

Proposição 93 (Redução ao absurdo): Seja φ uma fórmula do CP e seja Γ um conjunto de fórmulas do CP. Então: $\Gamma \models \varphi$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.

Dem.:

- \Rightarrow) Tendo em vista uma contradição, suponhamos que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente consistente, *i.e.*, suponhamos que existe uma valoração v que satisfaz $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Então, v satisfaz Γ e $v(\neg\varphi) = 1$, *i.e.*, $v(\varphi) = 0$ (*). Contudo, da hipótese, uma vez que v satisfaz Γ , podemos concluir que $v(\varphi) = 1$, o que é contraditório com (*). Logo, por redução ao absurdo, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é semanticamente inconsistente.
- \Leftarrow) Suponhamos que v satisfaz Γ . Então, $v(\neg\varphi) = 0$, de outra forma teríamos $v(\neg\varphi) = 1$, donde, como v satisfaz Γ , seguiria que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ seria semanticamente consistente, contrariando a hipótese. Logo, $v(\varphi) = 1$. Mostrámos, assim, que toda a valoração que satisfaz Γ também satisfaz φ e, portanto, $\Gamma \models \varphi$. \square