ANÁLISE
Cap. 3 – Cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$

Dep. Matemática UMinho

Março 2020

3. Cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$

Extremos Locais

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $a \in U$ e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que

- $f(a)$ é um mínimo local, ou a é um minimizante local de f, se existir uma bola $B(a, \varepsilon)$ tal que

$$f(x) \geq f(a), \qquad \forall x \in B(a, \varepsilon);$$

- $f(a)$ é um máximo local, ou a é um maximizante local de f, se existir uma bola $B(a, \varepsilon)$ tal que

$$f(x) \leq f(a), \qquad \forall x \in B(a, \varepsilon);$$

- $f(a)$ é um extremo local, ou a é um extremante local de f, se a for um minimizante ou um maximizante local de f.

Exemplo

- O ponto $a = (0,0)$ é um minimizante local da função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + y^2$.

  De facto $f(a) = 0$ e, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, tem-se

  $$f(x,y) = x^2 + y^2 > 0 = f(a)\,.$$

  Isto é, a é um minimizante de f e $f(a) = 0$ é um mínimo da função.

Teste das 1.as derivadas

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

- [Ponto crítico] $a \in U$ é um **ponto crítico** de f se

$$\nabla f(a) = \mathbf{0}$$

  [Teste das 1.as derivadas]

  Se $a \in U$ é um extremante local de f então é um ponto crítico de f.

- [Ponto de sela] $a \in U$ é um **ponto de sela** de f se a é ponto crítico mas não é extremante local de f.

Observações

- O teste das 1.as derivadas estabelece que os únicos candidatos a pontos extremantes de uma função de classe C^1 são os pontos do seu domínio onde se anulam todas as derivadas parciais de primeira ordem da função, simultaneamente.

- É possível definir e estudar pontos críticos em funções que não sejam de classe C^1, mas esse estudo está fora do âmbito desta UC.

Exemplo

- A função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 - y^2$ tem um ponto crítico mas não tem extremantes.

De facto, $\nabla f(x,y) = (2x, -2y)$ pelo que

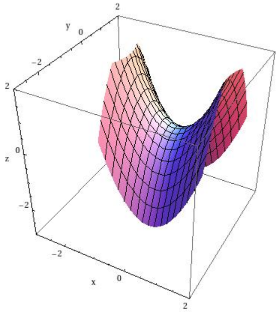
$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)\,.$$

Seja $a = (0,0)$. Observe-se que $f(a) = 0$. Para os pontos sobre o eixo do x tem-se $y = 0$ e

$$f(x,y) = f(x,0) = x^2 > 0 = f(a), \quad x \neq 0\,.$$

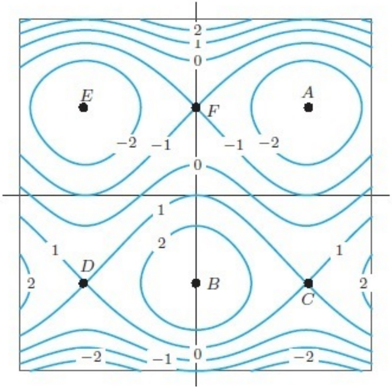
Por outro lado, para os pontos sobre o eixo dos y, tem-se $x = 0$ e

$$f(x,y) = f(0,y) = -y^2 < 0 = f(a), \quad y \neq 0\,.$$



Assim, qualquer $B(a,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, contém pontos onde f assume valores superiores a $f(a)$ e outros pontos onde f assume valores inferiores a $f(a)$. Logo a, embora seja ponto crítico de f, não é um extremante da função.

Extremos vs curvas de nível



- Curvas de nível fechadas sugerem pontos de extremo (A, B, E);
- Curvas de nível que se cruzam sugerem pontos de sela (C, D, F)

Teste das 2.as derivadas

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em $B(a, \varepsilon)$.

- Define-se a matriz Hessiana de f em a por

$$Hf(a) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(a) & \dots & f_{x_1x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(a) & \dots & f_{x_nx_n}(a) \end{pmatrix}$$

  onde $f_{x_ix_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

- Hf é uma matriz
  - quadrada de dimensão n;
  - simétrica, pois pelo Teorema de Schwarz $f_{x_ix_j}(a) = f_{x_jx_i}(a)$.

- [Teste das 2.^{as} derivadas] (para extremantes locais)

  Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ e $a \in U$ um ponto crítico de f. Então

  - se $Hf(a)$ é definida positiva, a é um minimizante local de f;
  - se $Hf(a)$ é definida negativa, a é um maximizante local de f.

Um pouco de Álgebra Linear

Seja $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

1. A matriz Q diz-se

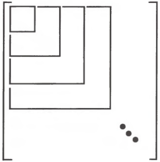
   - definida positiva se $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0,\ x^T Q x > 0$
   - definida negativa se $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0,\ x^T Q x < 0$

2. Se Q é uma matriz real e simétrica então possui n valores próprios reais: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (não necessariamente distintos). Neste caso,

   - Q é uma matriz
     - definida positiva se todos os $\lambda_i > 0$;
     - definida negativa se todos os $\lambda_i < 0$;
     - indefinida se existem valores próprios com sinais diferentes.
   - existe uma base de $\mathbb{R}^n$ na qual Q é uma matriz diagonal: $B^{-1}QB = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ e

$$\det Q = \lambda_1 \ldots \lambda_n$$

3. Sendo Q uma matriz real e simétrica, considerem-se os determinantes das n submatrizes quadradas de Q ao longo da diagonal (menores principais):



- Q é definida positiva se e só se todos estes determinantes forem positivos

- Q é definida negativa se e só se os determinantes de ordem par forem positivos e os de ordem ímpar negativos.

- [Critério dos menores principais]

  Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^3$ e $a \in U$ um ponto crítico de f. Então

  - se todos os menores principais de $Hf(a)$ são positivos, a é um minimizante local de f;
  - se os menores principais de ordem par de $Hf(a)$ são positivos e os de ordem ímpar negativos, a é um maximizante local de f;
  - se todos os menores principais de $Hf(a)$ são não nulos mas a matriz não é definida positiva ou definida negativa, f tem um ponto de sela em a;
  - se algum dos menores principais for nulo, nada se pode concluir sobre a natureza de a.

Exemplo

- A função $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$ tem um minimizante em $a = (0, 0, 0)$.

  De facto, um único ponto crítico de f é determinado pela solução do sistema de três equações com três incógnitas

  $$\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (2x + y, x + 2y, 2z) = (0, 0, 0)$$

  cuja solução é $a = (0, 0, 0)$.
  Por outro lado, a matriz Hessiana de f é a matriz (constante)

  $$Hf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = Hf(a)$$

  e todos os seus menores principais são positivos, já que

  $$M_1 = 2 > 0, \quad M2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0, \qquad M_3 = \det Hf(a) = 6 > 0\,.$$

  Então, pelo critério dos menores principais, conclui-se que f tem um mínimo em $f(a)$.

Teste das 2.as derivadas:: caso $n = 2$

Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^3$ em $B(a, \varepsilon)$.

- A matriz Hessiana de f em a é

$$Hf(a) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a) & f_{xy}(a) \\ f_{yx}(a) & f_{yy}(a) \end{pmatrix}$$

- Há dois menores principais:
  - $M_2 = \det Hf(a) = f_{xx}(a)f_{yy}(a) - \left[f_{xy}(a)\right]^2$
  - $M_1 = f_{xx}(a)$

- [Critério dos menores principais] (caso $n = 2$)

  Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^3$ numa vizinhança de $a \in U$ e

$$\det Hf(a) = f_{xx}(a)f_{yy}(a) - \left[f_{xy}(a)\right]^2.$$

  Suponhamos que $a \in U$ é um ponto crítico de f.

  - se $\det Hf(a) > 0$ e
    - $f_{xx}(a) > 0$ então a é um minimizante local de f;
    - $f_{xx}(a) < 0$ então a é um maximizante local de f;
  - se $\det Hf(a) < 0$ então f tem um ponto de sela em a;
  - se $\det Hf(a) = 0$ nada se pode concluir.

Exemplo

- Determine e classifique os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = 12x^2 + 8y^3 - 24xy$.

  Aqui $\nabla f(x,y) = (24x - 24y, 24y^2 - 24x)$ e

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ x^2 - x = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x \\ x(x-1) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 1 \\ x = 1 \end{array} \right. ,$$

  isto é, f tem dois pontos críticos, sejam

$$A = (0,0) \text{ e } B = (1,1)\,.$$

  Agora há que estudar a natureza de cada um destes pontos críticos recorrendo à matriz hessiana de f.
  A matriz hessiana de f é

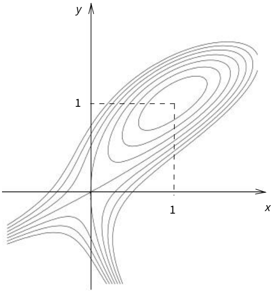
$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 24 & -24 \\ -24 & 48\,y \end{pmatrix}$$

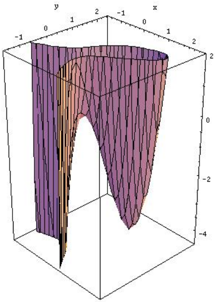
pelo que

$$Hf(A) = \begin{pmatrix} 24 & -24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Hf(B) = \begin{pmatrix} 24 & -24 \\ -24 & 48 \end{pmatrix}.$$

Uma vez que $\det Hf(A) = -24^2 < 0$ conclui-se que A é um ponto de sela.

Por outro lado, $\det Hf(B) = 576 > 0$ e $f_{xx}(B) = 24 > 0$ pelo que B é um minimizante de f .





- O ponto $(0, 0)$ é ponto de sela.
- O ponto $(1, 1)$ é ponto minimizante local.

Extremos condicionados

- [Problema] Pretende-se determinar os extremos da função

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

quando as variáveis independentes estão sujeitas a algumas restrições.

Diz-se

- Extremos condicionados ou
- Extremos relativos

Métodos:

- Redução de dimensão
- Multiplicadores de Lagrange

Vocabulário

Sejam $B, U \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$.
Considere-se a estrutura de nível $k = 0$ da função[1] g:

$$\Sigma = \{x \in B \; : \; g(x) = 0\} \, .$$

- [Extremante relativo]

  Um ponto $a \in (U \cap \Sigma)$ diz-se um **extremante de f relativo**, ou condicionado, à condição $g(x) = 0$ se é um extremante da restrição de f ao conjunto Σ, $\left. f \right|_{\Sigma}$;
  e, nesse caso, $f(a)$ diz-se um extremo de f relativo à condição $g(x) = 0$.

[1] Caso se tenha $g(x) = k$ pode-se definir $G(x) = g(x) - k$ e considerar $G(x) = 0$.

Observação

- Um ponto a em que f tem um extremante relativo a uma condição $g(x) = 0$ não é necessariamente um extremante local da função f e também não é necessariamente um ponto crítico de f.

- [Teorema de Weierstrass]

  Se f é uma função contínua e Σ é um conjunto limitado e fechado então $f\big|_{\Sigma}$ atinge um máximo e um mínimo.

Redução de dimensão: exemplo

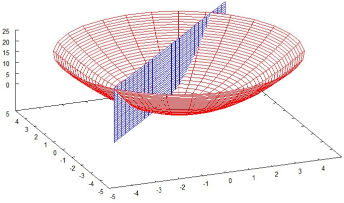
- Determinar os extremantes de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeita à restrição
$$y = x + 1.$$

  - Sejam $g(x,y) = y - x - 1$ e
$$\Sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + 1\}$$

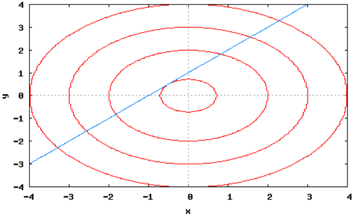
  - Então
$$f\big|_{\Sigma}(x,y) = f(x,x+1) = x^2 + (x+1)^2 = 2x^2 + 2x + 1 = h(x).$$

$$\dots$$

- $x = -\dfrac{1}{2}$ é ponto crítico de h.
- $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ é ponto crítico de $f\big|_{\Sigma}$.



Gráficos de $z = x^2 + y^2$ e $y = x + 1$.



Algumas curvas de nível de f e restrição $y = x + 1$.

Multiplicadores de Lagrange

Sejam $B, U \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções de classe $\mathcal{C}^1$.

- Considere-se a estrutura de nível da função g:

$$\Sigma = \{x \in B \ : \ g(x) = 0\}.$$

- Suponha-se que $\nabla g(x) \neq \mathbf{0}$, $x \in \Sigma$.
    - Se $a \in (U \cap \Sigma)$ é um extremante local de f relativo à condição $g(x) = 0$ então existe um número real $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(a) = \lambda \, \nabla g(a).$$

    - O número λ é chamado multiplicador de Lagrange.
    - O ponto $a \in \Sigma$ diz-se ponto crítico de $f\big|_{\Sigma}$.
- Se, para algum $x \in \Sigma$, $\nabla g(x) = \mathbf{0}$, então este x é também um possível extremante.

[Método dos multiplicadores de Lagrange:: algoritmo]

Para determinar os extremantes da função $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sujeitos à restrição $\Sigma : g(x) = 0$, há que

1. determinar os possíveis valores de $x \in \Sigma$ para os quais $\nabla g(x) = \mathbf{0}$
2. determinar x (e $\lambda \in \mathbb{R}$) resolvendo o sistema de $n + 1$ equações

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

3. calcular o valor de f em todos os valores encontrados nos passos anteriores.

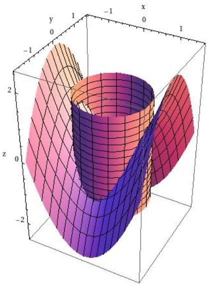
Observação

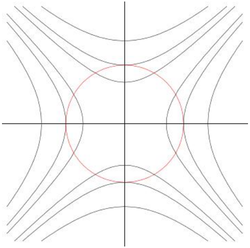
- Tal como no teste da 1.ª derivada para a determinação de extremos sem restrições, as soluções do sistema $\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x), \quad g(x) = 0$ são candidatas a pontos extremantes.
    - Se f é contínua e Σ é limitado e fechado há a garantia de que existem extremos (pelo menos um máximo e pelo menos um mínimo) — Teorema de Weierstrass.
    - Caso f não seja contínua ou Σ não limitado ou não fechado há que estudar o comportamento da função em torno de cada ponto crítico.
- A condição $\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)$ significa que os vetores gradientes são paralelos.

Exemplo

- Determinar os extremantes de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 - y^2$ sujeita à condição

$$x^2 + y^2 = 1.$$





Considere-se uma função auxiliar g definida em $\mathbb{R}^2$ por $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ e a sua curva de nível zero

$$\Sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 = 0\}.$$

As funções f e g são funções de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Note-se que $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$ nunca se anula em Σ (pois só se anula em $(0,0)$). Assim, os extremantes de $f\big|_{\Sigma}$ estarão entre as soluções (x,y) do sistema de 3 equações a 3 incógnitas

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \, \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ -2y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-\lambda) = 0 \\ y(1+\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y(1+\lambda) = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda = 1 \\ y(1+\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y(1+\lambda) = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda = 1 \\ y = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = -1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = -1 \\ y = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda = 1 \\ y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda = 1 \\ y = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Isto é, os candidatos a extremantes são os pontos

$$A = (0, 1), \quad B = (0, -1), \quad C = (1, 0), \quad D = (-1, 0)\,.$$

Observe-se que, como f é contínua e Σ é um conjunto limitado e fechado, pelo Teorema de Weierstrass há a garantia de que f tem máximo e mínimo em Σ . Podemos então encontrá-los por simples comparação do valor da função nestes quatro pontos. Ora

$$f(A) = f(B) = -1 \quad \text{e} \quad f(C) = f(D) = 1\,.$$

Assim, os minimizantes de $f\big|_{\Sigma}$ são $A = (0, 1)$ e $B = (0, -1)$ enquanto os maximizantes são $C = (1, 0)$ e $D = (-1, 0)$.

Caso de k restrições

- Havendo várias restrições

$$g_i(x) = 0, \qquad i = 1, \dots, k$$

há que

1. determinar os possíveis valores de x, pertencentes simultaneamente a todas as restrições, para os quais $\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_k(x)$ não são linearmente independentes;
2. resolver o sistema de $n + k$ equações

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda_1 \nabla g_1(x) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(x) \\ g_1(x) = 0 \\ \qquad \vdots \\ g_k(x) = 0 \end{cases}$$

Os valores obtidos nestes dois passos são candidatos a pontos extremantes.

Observação

- O método dos multiplicadores de Lagrange é equivalente ao teste das 1.^{as} derivadas para extremos livres.

- Tal como no caso de extremos livres, existe um teste das 2.^{as} derivadas para extremos condicionados.

[Teste das 2.^{as} derivadas] (extremos condicionados)

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de classe $\mathcal{C}^2$. Seja $a \in U$, $g(a) = 0$ e Σ a superfície de nível 0 de g. Suponha-se que $\nabla g(a) \neq 0$ e que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$.
Seja $\overline{H}$ a matriz hessiana da função auxiliar $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda\, g(x)$.
Então se

- $\overline{H}(a, \lambda)$ é definida positiva, a é um minimizante local de f;

- $\overline{H}(a, \lambda)$ é definida negativa, a é um maximizante local de f.

Extremos globais

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que

- $f(a)$ é um mínimo global, ou a é um minimizante global de f, se

$$f(x) \geq f(a), \qquad \forall x \in D;$$

- $f(a)$ é um máximo global, ou a é um maximizante global de f, se

$$f(x) \leq f(a), \qquad \forall x \in D;$$

- $f(a)$ é um extremo global, ou a é um extremante global de f, se a for um minimizante ou um maximizante global de f.

- Relembremos o Teorema de Weierstrass:

  Sejam D um conjunto limitado e fechado de $\mathbb{R}^n$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.

  Então f assume um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em D.

- Sendo D fechado, $D = \operatorname{int} D \cup \operatorname{fr} D$

  - [int D] é um conjunto aberto: os pontos críticos de f são tais que $\nabla f(a) = 0$.

  - [fr D] os pontos críticos de f podem ser determinados usando o método dos multiplicadores de Lagrange.

Estratégia

- Sendo D um conjunto fechado e limitado, para determinar os extremantes globais de f em D há que

1. determinar todos os pontos críticos de f em int D: $\nabla f(x) = 0$;
2. se fr D for a reunião de várias curvas (ou superfícies, ou...), determinar as suas interseções;
3. determinar os extremantes de f em cada uma das curvas (ou superfícies, ou...) que compõem fr D: método de redução de ordem ou método dos multiplicadores de Lagrange;
4. calcular o valor de f em todos os pontos encontrados;
5. classificar os pontos extremantes (maximizante/minimizante) por comparação dos valores de f.

Exemplo

- Pretende-se conhecer os extremos da função definida por $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ no retângulo

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2\right\}.$$

O conjunto R é limitado e fechado e a função f é contínua em R. Então, pelo teorema de Weierstrass, a função f assume um valor máximo e um valor mínimo em R.

1. O gradiente de f é $\nabla f(x,y) = (2x - 2y, -2x + 2)$ e os pontos críticos da função são as soluções do sistema $\nabla f(x,y) = (0,0)$ ou seja, é o ponto $A = (1,1)$. Tem-se que $A \in R$ e $f(A) = 1$.

2. Para determinar os extremos de f sobre a fronteira de R usa-se o método de redução de ordem pelo que o estudo se reduz ao problema de determinação de extremos de funções reais de uma variável real.

A fronteira de R é constituída por 4 segmentos de reta

$$\begin{array}{llll} L_1: & y=0, x\in[0,3] & \text{e} & f|_{L_1}(x,y)=f(x,0)=x^2 \\ L_2: & x=3, y\in[0,2] & \text{e} & f|_{L_2}(x,y)=f(3,y)=9-4y \\ L_3: & y=2, x\in[0,3] & \text{e} & f|_{L_3}(x,y)=f(x,2)=x^2-4x+4 \\ L_4: & x=0, y\in[0,2] & \text{e} & f|_{L_4}(x,y)=f(0,y)=2y \end{array}$$

Sobre L_1, $0 \leq x \leq 3$ e $f(x,0) = x^2$ é uma função monótona que tem valor mínimo em $x = 0$, $f(0,0) = 0$, e valor máximo em $x = 3$, $f(3,0) = 9$. Os candidatos a extremantes de f são $B = (0,0), C = (3,0)$.

Sobre L_2, $0 \leq y \leq 2$ e $f(3,y) = 9 - 4y$ é uma função decrescente pelo que tem o seu máximo em $y = 0$, $f(3,0) = 9$ e o seu mínimo em $y = 2$, $f(3,2) = 1$. Os candidatos a extremantes de f são $C = (3,0), D = (3,2)$.

Sobre L_3, $0 \leq x \leq 3$ e $f(x,2) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ que tem o seu valor mínimo em $x = 2$, $f(2,2) = 0$ e o seu valor máximo em $x = 0$, $f(0,2) = 4$. Os candidatos a extremantes de f são, então, $E = (2,2), F = (0,2)$.

Por fim, sobre L_4, $0 \leq y \leq 2$ e $f(0,y) = 2y$ é uma função monótona com valor mínimo em $y = 0$, $f(0,0) = 0$ e valor máximo em $y = 2$, $f(0,2) = 4$. Os candidatos a extremantes de f são, então, $B = (0,0), F = (0,2)$.

3. Os valores assumidos por f nos pontos anteriores são, então,

$$f(A) = f(1,1) = 1, \qquad f(B) = f(0,0) = 0, \quad f(C) = f(3,0) = 9,$$
$$f(D) = f(3,2) = 1, \qquad f(E) = f(2,2) = 0, \quad f(F) = f(0,2) = 4\,.$$

4. Observe-se que os pontos de intersecção dos diferentes segmentos de reta que definem a fronteira de R são os pontos B, C, D e F encontrados no Passo 2.

5. Atendendo ao Passo 3., conclui-se que o máximo absoluto de f em R é $f(3,0) = 9$ e que o mínimo absoluto é $f(0,0) = f(2,2) = 0\,.$