Análise

1. Considere as funções, de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, que a seguir se definem. Em cada uma delas,

   (a) identifique n e m e indique o tipo de função que lhes corresponde,

   (b) indique o domínio.

   i. $f(x,y) = x^2 + y^2$

   ii. $v(r,h) = \pi r^2 h$

   iii. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

   iv. $g(x,y) = \ln(xy)$

   v. $h(x,y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$

   vi. $t(x,y) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2+y^2-9}}{x}$

   vii. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

   viii. $s(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}}$

   ix. $f(t) = (t, \operatorname{sen} t)$

   x. $g(x,y) = \left(\sqrt[3]{x-2}, \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}, y\right)$

   xi. $h(x,y,z) = \left(\dfrac{x^2}{yz}, \sqrt{y-1}, \sqrt{\dfrac{5-z}{1-x}}\right)$

   xii. $r(t) = \left(\ln t, \dfrac{t}{t-1}, \mathrm{e}^{-t}\right)$

2. Defina algebricamente

   (a) um plano (horizontal) de cota 3.

   (b) uma superfície esférica centrada no ponto de coordenadas $(1,2,3)$ e raio 4.

   (c) uma reta paralela ao eixo das abcissas, de cota 2 e ordenada -1.

3. Esboce uma representação gráfica da função real de variáveis reais, definida por:

   (a) $f : [0,2] \times [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = x$

   (b) $f : [-1,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = y^2$

   (c) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

4. Determine e esboce algumas curvas de nível da função real de variáveis reais, definida por:

   (a) $f(x,y) = x^2 - y^2$ (b) $f(x,y) = 3\left(1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{4}\right)$ (c) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

5. Determine os traços e esboce um diagrama de nível, com três curvas de nível à sua escolha, das superfícies definidas (com x e y variáveis independentes) por:

   (a) $4x^2 + y^2 = 16$

   (b) $x + 2z = 4$

   (c) $z^2 = y^2 + 4$

   (d) $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9}$

   (e) $z = x^2$

   (f) $z = \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9}$

   (g) $z = \mathrm{e}^{1+x^2-y^2}$

   (h) $z = \cos\sqrt{x^2+y^2}$

   (i) $z = |x|$

   (j) $z = \dfrac{1}{x^2+y^2}$

   (k) $z = \dfrac{x^2}{4} + y^2$

   (l) $\dfrac{x^2}{2} + y^2 + \dfrac{z^2}{4} = 1$

   (m) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$

   (n) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

6. Mostre que:

   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} (x+y) = 1$

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

   (c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} = 0$

   (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

   (e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0$, onde $h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

7. Calcule, se existir,

   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (\mathrm{e}^{-x-y} - 1)$

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)$

   (c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x^2+1}$

   (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{\operatorname{sen} y + 2}$

   (e) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,1)} \dfrac{xy+yz+xz}{x^2+y^2+z^2}$

   (f) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy+yz+xz}{x^2+y^2+z^2}$

   (g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{x^2+y^2}$

   (h) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} x^3y$

   (i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\mathrm{e}^{xy}}{x+1}$

   (j) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2+2}$

   (k) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{y^2-x^2}{x-y}$

   (l) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{xy}$

   (m) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$

   (n) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

   (o) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

   (p) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^3y}{x^2+y^2} + x\right)$

   (q) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2}{x^2-y^2}$

   (r) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^5}{x^2+y^4}$

   (s) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{x^2y^2}$

   (t) $\lim_{x\to1} (x^2, \mathrm{e}^x)$

   (u) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{\cos x}{x^2+y^2+1}, \mathrm{e}^{x^2}\right)$

   (v) $\lim_{(x,y,z)\to(-1,1,0)} (x\mathrm{e}^{xz}, x^2yz)$

8. Estude a continuidade das funções, de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, definidas por

   (a) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2-z}$

   (b) $f(x,y) = \left(\mathrm{e}^{-x-y}-1, \dfrac{x}{x^2+1}, x^2+y^2\right)$

   (c) $f(x,y,z) = \left(\ln(x+y^2), \cos\sqrt{3}z\right)$

9. Estude a continuidade da função, real de duas variáveis reais, definida por $h(x,y) = \begin{cases} 1-x, & y \geq 0 \\ -2, & y < 0 \end{cases}$ ao longo da reta definida por $y = 0$.

10. Encontre, se existir, c (constante real) de tal forma que a função f, real de duas variáveis reais, é contínua em todo o seu domínio, quando

    (a) $f(x,y) = \begin{cases} c+y, & x \geq 3 \\ 5-x, & x < 3 \end{cases}$

    (b) $f(x,y) = \begin{cases} c+y, & x \geq 3 \\ 5-y, & x < 3 \end{cases}$

11. Apresente, caso seja possível, um prolongamento contínuo à origem de cada uma das funções definidas por:

    (a) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}$

    (b) $f(x,y) = \dfrac{2(x-1)y^2}{x^2+y^2}$

    (c) $f(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^2+3y^2}$