LÓGICA EI
Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Universidade do Minho

Departamento de Matemática

2019/2020

Observação 165: As fórmulas do Cálculo de Predicados são construídas a partir das fórmulas atómicas (símbolos de relação "aplicados" a termos) e, por esta razão, as fórmulas atómicas desempenham papel semelhante ao das variáveis proposicionais no Cálculo Proposicional. Contudo, ao passo que no Cálculo Proposicional podemos atribuir "diretamente" um valor lógico a uma variável proposicional, a atribuição de valores lógicos às fórmulas atómicas é mais complexa.

Para atribuirmos valores lógicos a fórmulas atómicas, em particular, será necessário fixar previamente a interpretação dos termos. Tal requer que indiquemos qual o universo de objetos (domínio de discurso) pretendido para a denotação dos termos (por exemplo, números naturais, conjuntos, etc.), bem como a interpretação pretendida quer para os símbolos de função do tipo de linguagem em questão (por exemplo, para indicar que tomando $\mathbb{N}_0$ por universo, o símbolo de função binário $+$ denotará a operação de adição) quer para as variáveis de primeira ordem. Para a interpretação das fórmulas atómicas, será ainda necessário fixar a interpretação dos símbolos de relação como relações entre objetos do domínio de discurso.

A indicação de qual o domínio de discurso pretendido e de quais as interpretações que deverão ser dadas aos diversos símbolos será efetuada através daquilo que designaremos por estrutura para um tipo de linguagem. A interpretação de variáveis de primeira ordem será feita no contexto de um domínio de discurso, através daquilo a que chamaremos atribuições numa estrutura.

Um par (estrutura, atribuição) permitirá fixar o valor lógico de qualquer fórmula e, portanto, pode ser pensado como uma valoração, uma vez que estes pares desempenharão papel idêntico ao das valorações do Cálculo Proposicional.

Definição 166: Seja L um tipo de linguagem. Uma *estrutura de tipo* L, abreviadamente designada por L-*estrutura*, é um par $(D, \overline{})$ t.q.:

a) D é um conjunto não vazio, chamado o *domínio da estrutura*;

b) $\overline{}$ é uma função, chamada a *função interpretação da estrutura*, t.q.:

- a cada constante c de L faz corresponder um elemento de D, notado por $\overline{c}$;
- a cada símbolo de função f de L, de aridade $n \geq 1$, faz corresponder uma função de tipo $D^n \longrightarrow D$, notada por $\overline{f}$;
- a cada símbolo de relação R de L, de aridade n, faz corresponder uma relação n-ária em D (i.e. um subconjunto de D^n), notada por $\overline{R}$.

Para cada símbolo de função ou relação s de L, $\overline{s}$ é chamada a *interpretação* de s na estrutura.

Notação 167: Habitualmente, usaremos a letra E (possivelmente indexada) para denotar estruturas. Dada uma estrutura E, a notação $dom(E)$ denotará o domínio de E.

Exemplo 168:

a) Seja $E_{Arit} = (\mathbb{N}_0, \overline{})$, onde:

- $\overline{0}$ é o número *zero*;
- $\overline{s}$ é a função *sucessor* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*, $\begin{array}{rccc} \overline{s}: & \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & n & \mapsto & n+1 \end{array}$;
- $\overline{+}$ é a função *adição* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*, $\begin{array}{rccc} \overline{+}: & \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & (m,n) & \mapsto & m+n \end{array}$;
- $\overline{\times}$ é a função *multiplicação* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*,
  $\begin{array}{rccc} \overline{\times}: & \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & (m,n) & \mapsto & m \times n \end{array}$;
- $\overline{=}$ é a relação de *igualdade* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*,
  $\overline{=} = \{(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : m = n\}$;
- $\overline{<}$ é a relação *menor do que* em $\mathbb{N}_0$, *i.e.*,
  $\overline{<} = \{(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : m < n\}$.

Então, E_{Arit} é uma L_{Arit}-estrutura. Designaremos, por vezes, esta estrutura por *estrutura standard* para o tipo de linguagem L_{Arit}.

b) O par $E_0 = (\{a, b\}, \overline{})$, onde:

- $\overline{0} = a$;
- $\overline{s}$ é a função $\begin{array}{ccc} \{a, b\} & \longrightarrow & \{a, b\} \\ x & \mapsto & x \end{array}$;
- $\overline{+}$ é a função $\begin{array}{ccc} \{a, b\} \times \{a, b\} & \longrightarrow & \{a, b\} \\ (x, y) & \mapsto & b \end{array}$;
- $\overline{\times}$ é a função $\begin{array}{ccc} \{a, b\} \times \{a, b\} & \longrightarrow & \{a, b\} \\ (x, y) & \mapsto & \begin{cases} a & \text{se } x = y \\ b & \text{se } x \neq y \end{cases} \end{array}$;
- $\overline{=} = \{(a, a), (b, b)\}$;
- $\overline{<} = \{(a, b)\}$,

é também uma L_{Arit}-estrutura.

Existem $2 \times 4 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16$ L_{Arit}-estruturas cujo domínio é $\{a, b\}$. (Porquê?)

Definição 169: Seja E uma L-estrutura. Uma função $a : \mathcal{V} \longrightarrow dom(E)$ (do conjunto $\mathcal{V}$ das variáveis de primeira ordem para o domínio de E) diz-se uma *atribuição* em E.

Exemplo 170: As funções $\begin{array}{rccc} a_0 : \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ x & \mapsto & 0 \end{array}$ e $\begin{array}{rccc} a^{ind} : \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ x_i & \mapsto & i \end{array}$ são atribuições em E_{Arit}.

Definição 171: O *valor de um L-termo t numa L-estrutura* $E = (D, \overline{})$ *para uma atribuição a* em E é notado por $t[a]_E$ ou, simplesmente, por $t[a]$ (quando é claro qual a estrutura que deve ser considerada), e é o elemento de D definido, por recursão estrutural em L-termos, do seguinte modo:

a) $x[a] = a(x)$, para todo $x \in \mathcal{V}$;

b) $c[a] = \overline{c}$, para todo $c \in \mathcal{C}$;

c) $f(t_1, ..., t_n)[a] = \overline{f}(t_1[a], ..., t_n[a])$ para todo $f \in \mathcal{F}$ de aridade $n \geq 1$ e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$.

Exemplo 172: Seja t o L_{Arit}-termo $s(0) \times (x_0 + x_2)$.

1. O valor de t para a atribuição a^{ind}, na L_{Arit}-estrutura E_{Arit}, é

$$\begin{array}{rl} & (s(0) \times (x_0 + x_2))[a^{ind}] \\ = & s(0)[a^{ind}] \times (x_0 + x_2)[a^{ind}] \\ = & (0[a^{ind}] + 1) \times (x_0[a^{ind}] + x_2[a^{ind}]) \\ = & (0 + 1) \times (0 + 2) \\ = & 2 \end{array}$$

2. Já para a atribuição a_0 (do exemplo anterior), o valor de t é 0 (porquê?).

3. Considere-se agora a L_{Arit}-estrutura E_0 do Exemplo 168 e considere-se a seguinte atribuição nesta estrutura:

$$\begin{array}{rcl} a' : \mathcal{V} & \longrightarrow & \{a, b\} \\ x & \mapsto & b \end{array}$$

O valor de t em E_0 para a' é:

$$\begin{array}{rl} & (s(0) \times (x_0 + x_2))[a'] \\ = & \overline{\times}(s(0)[a'], (x_0 + x_2)[a']) \\ = & \overline{\times}(\overline{s}(0[a']), \overline{+}(x_0[a'], x_2[a'])) \\ = & \overline{\times}(\overline{s}(a), \overline{+}(b, b)) \\ = & \overline{\times}(a, b) \\ = & b \end{array}$$

Proposição 173: Seja t um L-termo e sejam a_1 e a_2 duas atribuições numa L-estrutura $E = (D, \overline{})$. Se $a_1(x) = a_2(x)$, para todo $x \in VAR(t)$, então $t[a_1] = t[a_2]$.

Dem.: Por indução estrutural em t. A prova está organizada por casos, consoante *a forma* de t.

a) Caso t seja uma variável. Então, $t \in VAR(t)$. Logo, por hipótese, $a_1(t) = a_2(t)$ **(∗)**. Assim,

$$t[a_1] \overset{\textbf{(1)}}{=} a_1(t) \overset{\textbf{(*)}}{=} a_2(t) \overset{\textbf{(1)}}{=} t[a_2].$$

Justificações	
(1)	Definição de valor de um termo para uma atribuição.

b) Caso t seja uma constante. Então,

$$t[a_1] \overset{\textbf{(1)}}{=} \overline{t} \overset{\textbf{(1)}}{=} t[a_2].$$

Justificações	
(1)	Definição de valor de um termo para uma atribuição.

c) Caso $t = f(t_1, ..., t_n)$, com $f \in \mathcal{F}$ de aridade $n \geq 1$ e $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$. Então,

$$\begin{array}{cl} & t[a_1] \\ = & f(t_1, ..., t_n)[a_1] \\ \overset{(1)}{=} & \overline{f}(t_1[a_1], ..., t_n[a_1]) \\ \overset{(2)}{=} & \overline{f}(t_1[a_2], ..., t_n[a_2]) \\ \overset{(1)}{=} & f(t_1, ..., t_n)[a_2] \\ = & t[a_2]. \end{array}$$

Justificações

(1) Definição de valor de um termo para uma atribuição.
(2) Para $1 \leq i \leq n$, como $VAR(t_i) \subseteq VAR(t)$, da hipótese segue-se que: $a_1(x) = a_2(x)$, para todo $x \in VAR(t_i)$. Logo, por H.I., para todo $1 \leq i \leq n$, $t_i[a_1] = t_i[a_2]$.

□

Notação 174: Sejam a uma atribuição numa L-estrutura E, $d \in dom(E)$ e x uma variável. Escrevemos $a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}$ para a atribuição $a' : \mathcal{V} \longrightarrow dom(E)$ em E definida por:

$$\text{para todo } \; y \in \mathcal{V}, \quad a'(y) = \begin{cases} d \;\; \text{se} \;\; y = x \\ \\ a(y) \;\; \text{se} \;\; y \neq x \end{cases} .$$

Exemplo 175: $a^{ind}\begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ denota a atribuição em L_{Arit} definida por

$$\text{para todo } \; i \in \mathbb{N}_0, \quad a^{ind}\begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix}(x_i) = \begin{cases} 1 \;\; \text{se} \;\; i = 0 \\ \\ i \;\; \text{se} \;\; i \neq 0 \end{cases} .$$

Exemplo 176: Verifique que
$(x_0 + 0)[a^{ind}\begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix}] = 1 = (x_0 + 0)[s(0)/x_0][a^{ind}]$. De facto, esta igualdade é um caso particular da proposição seguinte, que fornece uma alternativa para o cálculo do valor de um termo que resulta de uma substituição.

Proposição 177: Sejam t_0 e t_1 L-termos e seja a uma atribuição numa L-estrutura. Então, $t_0[t_1/x][a] = t_0[a\begin{pmatrix} x \\ t_1[a] \end{pmatrix}]$.

Dem.: Por indução estrutural em t_0. (Exercício.) $\square$

Definição 178: O *valor lógico de uma L-fórmula* φ *numa L-estrutura* $E = (D, \overline{\ })$ *para uma atribuição* a em E, é notado por $\varphi[a]_E$ ou, simplesmente, por $\varphi[a]$ (quando é claro qual a estrutura que deve ser considerada) e é o elemento do conjunto dos valores lógicos $\{0, 1\}$ definido, por recursão em φ, do seguinte modo:

a) $\perp [a] = 0$;

b) $R(t_1, ..., t_n)[a] = 1$ sse $(t_1[a], ..., t_n[a]) \in \overline{R}$, para todo o símbolo de relação R de aridade n e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$;

c) $(\neg\varphi_1)[a] = 1 - \varphi_1[a]$, para todo $\varphi_1 \in \mathcal{F}_L$;

d) $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)[a] = min(\varphi_1[a], \varphi_2[a])$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_L$;

e) $(\varphi_1 \vee \varphi_2)[a] = max(\varphi_1[a], \varphi_2[a])$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_L$;

f) $(\varphi_1 \to \varphi_2)[a] = 0$ sse $\varphi_1[a] = 1$ e $\varphi_2[a] = 0$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_L$;

g) $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)[a] = 1$ sse $\varphi_1[a] = \varphi_2[a]$, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_L$;

h) $(\exists x \varphi_1)[a] = máximo\{\varphi_1[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}] : d \in D\}$, para todo $x \in \mathcal{V}, \varphi_1 \in \mathcal{F}_L$;

i) $(\forall x \varphi_1)[a] = mínimo\{\varphi_1[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}] : d \in D\}$, para todo $x \in \mathcal{V}, \varphi_1 \in \mathcal{F}_L$.

Proposição 179: Para quaisquer L-estrutura E, atribuição a em E, L-fórmula φ e variável x,

a) $(\exists x\varphi)[a] = 1$ sse existe $d \in dom(E)$ t.q. $\varphi[a\left(\begin{array}{c} x \\ d \end{array}\right)] = 1$;

b) $(\exists x\varphi)[a] = 0$ sse para todo $d \in dom(E)$, $\varphi[a\left(\begin{array}{c} x \\ d \end{array}\right)] = 0$;

c) $(\forall x\varphi)[a] = 1$ sse para todo $d \in dom(E)$, $\varphi[a\left(\begin{array}{c} x \\ d \end{array}\right)] = 1$;

d) $(\forall x\varphi)[a] = 0$ sse existe $d \in dom(E)$, $\varphi[a\left(\begin{array}{c} x \\ d \end{array}\right)] = 0$.

Dem.: Imediata, tendo em atenção as propriedades de *máximo* e de *mínimo*. □

Exemplo 180: Consideremos a estrutura L_{Arit} e as atribuições em E_{Arit} a^{ind} e a_0 definidas no Exemplo 170.

1. Para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_0 = s(0) < x_2$, tem-se:

   i) $\varphi_0[a^{ind}] = 1$, dado que $s(0)[a^{ind}] = 1, x_2[a^{ind}] = 2$ e $(1,2) \in \overline{<}$ (pois 1 é menor que 2);

   ii) $\varphi_0[a_0] = 0$, dado que $s(0)[a_0] = 1, x_2[a_0] = 0$ e $(1,0) \notin \overline{<}$ (pois 1 não é menor que 0);

2 Para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_1 = \exists x_2(s(0) < x_2)$ tem-se:

i) $\varphi_1[a^{ind}] = 1$, pois existe $n \in \mathbb{N}_0$ t.q. $s(0) < x_2[a^{ind}\begin{pmatrix} x_2 \\ n \end{pmatrix}] = 1$ (como $s(0)[a^{ind}\begin{pmatrix} x_2 \\ n \end{pmatrix}] = 1$, basta tomar $n > 1$);

ii) $\varphi_1[a_0] = 1$, pois existe $n \in \mathbb{N}_0$ t.q. $s(0) < x_2[a_0\begin{pmatrix} x_2 \\ n \end{pmatrix}] = 1$ (também neste caso se tem $s(0)[a_0\begin{pmatrix} x_2 \\ n \end{pmatrix}] = 1$, pelo que, basta tomar $n > 1$);

3. Para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_2 = \exists x_2 \neg(s(0) < x_2)$ tem-se também o valor lógico 1, quer para a^{ind} quer para a_0 (porquê?);

4. Já para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_3 = \forall x_2 (s(0) < x_2)$ tem-se valor lógico 0 para ambas as atribuições (de facto, a afirmação "para todo $n \in \mathbb{N}_0, 1 < n$" é falsa).

Exemplo 181: Consideremos agora a L_{Arit}-estrutura E_0 do Exemplo 168 e as atribuições a' e a'' em E_0 t.q., para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $a'(x_i) = b$ e $a''(x_i) = a$ sse i é par.

1. Para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_0 = s(0) < x_2$ (considerada no exemplo anterior), tem-se:

   i) $\varphi_0[a'] = 1$, dado que $s(0)[a'] = a, x_2[a'] = b$ e $(a, b) \in \overline{<}$;

   ii) $\varphi_0[a''] = 0$, dado que $s(0)[a''] = a, x_2[a'] = a$ e $(a, a) \notin \overline{<}$;

2. Para a L_{Arit}-fórmula $\varphi_1 = \exists x_2 (s(0) < x_2)$ o valor lógico é 1 para ambas as atribuições (porquê?).

3. Verifique que as fórmulas φ_2 e φ_3 do exemplo anterior recebem valores lógicos 1 e 0, respetivamente, para ambas as atribuições.

Definição 182: Sejam E uma L-estrutura e a uma atribuição em a. *Em E, dizemos que a satisfaz uma L-fórmula φ*, escrevendo $E \models \varphi[a]$, quando $\varphi[a]_E = 1$. Escrevemos $E \not\models \varphi[a]$ quando a não satisfaz φ.

Proposição 183: Sejam E uma L-estrutura e a uma atribuição em E. Então:

a) $E \models \exists x\varphi[a]$ sse existe $d \in dom(E)$ t.q. $E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}]$;

b) $E \models \forall x\varphi[a]$ sse $E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}]$, para todo $d \in dom(E)$;

c) $E \not\models \exists x\varphi[a]$ sse $E \not\models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}]$, para todo $d \in dom(E)$;

d) $E \not\models \forall x\varphi[a]$ sse existe $d \in dom(E)$ t.q. $E \not\models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}]$.

Dem.: Consequência imediata da definição de satisfação e da Proposição 179. Por exemplo:

$$
\begin{array}{lll}
 & E \not\models \exists x \varphi[a] & \\
\text{sse} & \exists x \varphi[a]_E = 0 & \text{(por definição de } \not\models) \\
\text{sse} & \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}]_E = 0, \text{ para todo } d \in dom(E) & \text{(Proposição 179 b))} \\
\text{sse} & E \not\models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in dom(E) & \text{(por definição de } \not\models).
\end{array}
$$

$\square$

Proposição 184: Seja φ uma L-fórmula e sejam a_1 e a_2 atribuições numa L-estrutura E. Se $a_1(x) = a_2(x)$, para todo $x \in LIV(\varphi)$, então $E \models \varphi[a_1]$ sse $E \models \varphi[a_2]$.

Dem.: Por indução estrutural em φ. (Exercício.) □

Proposição 185: Sejam φ uma L-fórmula, $E = (D, \overline{})$ uma L-estrutura, a uma atribuição em E e x uma variável substituível sem captura de variáveis por um L-termo t em φ. Então,

$$E \models \varphi[t/x][a] \text{ sse } E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}].$$

Dem.: A demonstração segue por indução estrutural em φ. Consideremos alguns dos casos.

1) Caso $\varphi = \perp$. Então, $\varphi[t/x] = \perp$ e ambos os lados da equivalência são falsos.

2) Caso $\varphi = R(t_1, ..., t_n)$, com $R \in \mathcal{R}$, de aridade $n \geq 1$, e $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$. Então:

$$
\begin{array}{rl}
 & E \models R(t_1, ..., t_n)[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}] \\
\overset{(1)}{\text{sse}} & (t_1[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}], ..., t_n[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}]) \in \overline{R} \\
\overset{(2)}{\text{sse}} & (t_1[t/x][a], ..., t_n[t/x][a]) \in \overline{R} \\
\overset{(1)}{\text{sse}} & E \models R(t_1[t/x], ..., t_n[t/x])[a] \\
\overset{(3)}{\text{sse}} & E \models R(t_1, ..., t_n)[t/x][a].
\end{array}
$$

Justificações

(1) Definição de satisfação.

(2) Pela Proposição 177, $t_i[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}] = [t/x]t_i[a]$., para todo $1 \leq i \leq n$

(3) Definição de substituição.

3) Caso $\varphi = \forall y \varphi_1$.

3.a) Subcaso $y = x$. Entao, $E \models \varphi[t/x][a] \overset{\textbf{(1)}}{\text{sse}} E \models \varphi[a] \overset{\textbf{(2)}}{\text{sse}}$ $E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}]$.

Justificações

(1) Definição de substituição.
(2) Pela proposição anterior, uma vez que, como $x \notin LIV(\varphi)$, as duas atribuições coincidem no valor das variáveis com ocorrências livres em φ.

3.b) Subcaso $y \neq x$. Então, $y \notin VAR(t)$ (de outra forma x não seria substituível sem captura de variáveis por t em φ). Assim,

$$E \models (\forall y \varphi_1)[t/x][a]$$

(1) sse $E \models \forall y(\varphi_1[t/x])[a]$

(2) sse $E \models \varphi_1[t/x][a\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix}]$, para todo $d \in dom(E)$

(3) sse $E \models \varphi_1[a\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t[a\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix}] \end{pmatrix}]$, para todo $d \in dom(E)$

(4) sse $E \models \varphi_1[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix}]$, para todo $d \in dom(E)$

(2) sse $E \models \forall y \varphi_1[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}]$

Justificações

(1) Definição de substituição.
(2) Proposição 183.
(3) Hipótese de indução.
(4) Como $y \neq x$, $a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}$ e, da Proposição 173, por $y \notin VAR(t)$, $t[a] = t[a\begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix}]$.

4) Restantes casos: exercício.

Definição 186: Uma L-fórmula φ é *válida* numa L-estrutura E (notação: $E \models \varphi$) quando, para toda a atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$. Utilizamos a notação $E \not\models \varphi$ quando φ não é válida em E, *i.e.*, quando existe uma atribuição a em E tal que $E \not\models \varphi[a]$.

Exemplo 187: Consideremos a estrutura E_{Arit}.

1. A fórmula $x_0 = x_0$ é válida em E_{Arit}; de facto, para qualquer atribuição a em E_{Arit}, tem-se $E_{Arit} \models x_0 = x_0[a]$, uma vez que $x_0[a] = a(x_0)$ e $(a(x_0), a(x_0)) \in \equiv$ ($a(x_0)$ e $a(x_0)$ são naturais iguais).

2. A fórmula $x_0 = x_1$ não é válida em E_{Arit}; por exemplo, para a atribuição a^{ind} tem-se $x_0[a^{ind}] = 0$, $x_1[a^{ind}] = 1$ e $(0, 1) \notin \equiv$, pelo que $E_{Arit} \not\models x_0 = x_1[a^{ind}]$.

3. A fórmula $\neg(x_0 = x_1)$ não é válida em E_{Arit}; por exemplo, para a atribuição a_0 que atribui 0 a todas as variáveis tem-se $x_0[a_0] = 0$, $x_1[a_0] = 0$ e $(0,0) \in \equiv$, pelo que $E_{Arit} \models x_0 = x_1[a_0]$ e, consequentemente, $E_{Arit} \not\models \neg(x_0 = x_1)[a_0]$.

4. A fórmula $x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1)$ é válida em E_{Arit} (para qualquer atribuição a em E_{Arit}, a afirmação "$(a(x_0), a(x_1)) \in \equiv$ ou $(a(x_0), a(x_1)) \notin \equiv$" é verdadeira).

5. A fórmula $\exists x_0 \neg(x_0 = x_1)$ é válida em E_{Arit} (para toda a atribuição a em E_{Arit} a afirmação "existe $n \in \mathbb{N}_0$, $n \neq a(x_1)$" é verdadeira (tome-se, por exemplo, $n = a(x_1) + 1$)) e a fórmula $\forall x_1 \exists x_0 \neg(x_0 = x_1)$ é também válida em E_{Arit} (porquê?).

Proposição 188: Seja E uma L-estrutura. Se φ é uma L-sentença, então $E \models \varphi$ sse para alguma atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$.

Dem.: Se $E \models \varphi$, é imediato que $E \models \varphi[a]$ para alguma atribuição a, pois $E \models \varphi$ significa que $E \models \varphi[a]$ para toda a atribuição a. Admitamos agora que $E \models \varphi[a]$ para alguma atribuição a. Tomemos uma atribuição a' arbitrária em E. (Queremos provar que $E \models \varphi[a']$.) Como φ é uma L-sentença e portanto $LIV(\varphi) = \emptyset$, tem-se trivialmente que $a(x) = a'(x)$ para todo $x \in LIV(\varphi)$. Assim, atendendo à Proposição 184 e a que $E \models \varphi[a]$, conclui-se $E \models \varphi[a']$. $\square$

Definição 189: Uma L-fórmula φ é *(universalmente) válida* (notação: $\models \varphi$) quando é válida em toda a L-estrutura. Utilizamos a notação $\not\models \varphi$ quando φ *não é (universalmente) válida*, *i.e.*, quando existe uma L-estrutura E tal que $E \not\models \varphi$.

Observação 190: Uma L-fórmula φ não é universalmente válida quando existe alguma L-estrutura que não valida φ, ou seja, quando existe alguma L-estrutra E e alguma atribuição a em E t.q. $E \not\models \varphi[a]$.

Exemplo 191:

1. A L_{Arit}-fórmula $x_0 = x_1$ não é universalmente válida. Como vimos no exemplo anterior, esta fórmula não é válida na estrutura E_{Arit}.

2. No exemplo anterior, vimos que a fórmula $x_0 = x_0$ é válida na estrutura E_{Arit}. No entanto, esta fórmula não é válida em todas as L_{Arit}-estruturas. Por exemplo, se considerarmos uma L_{Arit}-estrutura $E_1 = (\{a, b\}, {}^{-})$ em que $\equiv$ seja a relação $\{(a, a)\}$, E_1 não valida $x_0 = x_0$, pois considerando uma atribuição a' em E_1 t.q. $a'(x_0) = b$ teremos $E_1 \not\models x_0 = x_0[a']$, uma vez que o par $(x_0[a'], x_0[a'])$, que é igual ao par (b, b), não pertence à relação $\equiv$.

3. A L_{Arit}-fórmula $\forall x_0(x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1))$ é universalmente válida. De facto, dadas uma qualquer L_{Arit}-estrutura $E = (D, \overline{\ \ })$ e uma qualquer atribuição a em E, tem-se:

$$
\begin{array}{ll}
& E \models \forall x_0(x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1))[a] \\
\text{sse} & E \models (x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1))[a\begin{pmatrix} x_0 \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in D \\
\text{sse} & E \models x_0 = x_1[a\begin{pmatrix} x_0 \\ d \end{pmatrix}] \text{ ou } E \models \neg(x_0 = x_1)[a\begin{pmatrix} x_0 \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in D \\
\text{sse} & (d, a(x_1)) \in \overline{=} \text{ ou } E \not\models x_0 = x_1[a\begin{pmatrix} x_0 \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in D \\
\text{sse} & (d, a(x_1)) \in \overline{=} \text{ ou } (d, a(x_1)) \notin \overline{=}, \text{ para todo } d \in D
\end{array}
$$

e a última afirmação é verdadeira.

Definição 192: Uma L-fórmula φ é *logicamente equivalente* a uma L-fórmula ψ (notação: $\varphi \Leftrightarrow \psi$) quando $\models \varphi \leftrightarrow \psi$, *i.e.*, quando para para toda a L-estrutura E e para toda a atribuição a em E, $E \models \varphi[a]$ sse $E \models \psi[a]$.

Observação 193: As propriedades enunciadas para e equivalência lógica no capítulo anterior, mantêm-se válidas no contexto do Cálculo de Predicados. Por exemplo, $\Leftrightarrow$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{F}_L$.

Proposição 194: Sejam $x, y \in \mathcal{V}$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$. As seguintes afirmações são verdadeiras.

a) $\neg\forall x\varphi \Leftrightarrow \exists x\neg\varphi$

b) $\neg\exists x\varphi \Leftrightarrow \forall x\neg\varphi$

c) $\forall x\varphi \Leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi$

d) $\exists x\varphi \Leftrightarrow \neg\forall x\neg\varphi$

e) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$

f) $\exists x(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$

g) $\models (\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \vee \psi)$,
mas não necessariamente $\models \forall x(\varphi \vee \psi) \to (\forall x\varphi \vee \forall x\psi)$

h) $\models \exists x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)$,
mas não necessariamente $\models (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \wedge \psi)$

i) $\forall x \forall y \varphi \Leftrightarrow \forall y \forall x \varphi$ **j)** $\exists x \exists y \varphi \Leftrightarrow \exists y \exists x \varphi$

k) $\models \exists x \forall y \varphi \rightarrow \forall y \exists x \varphi$,
mas não necessariamente $\models \forall x \exists y \varphi \rightarrow \exists y \forall x \varphi$

l) $Qx\varphi \Leftrightarrow \varphi$ se $x \notin LIV(\varphi)$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$

m) $Qx\varphi \Leftrightarrow Qy\varphi[y/x]$ se $y \notin LIV(\varphi)$ e x é substituível por y em φ, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$

Dem.:

c) Sejam L uma linguagem, E uma L-estrutura e a uma atribuição em E. (Queremos demonstrar que: $E \models \forall x \varphi[a]$ sse $E \models \neg\exists x \neg\varphi[a]$.)

$$
\begin{array}{cl}
 & E \models \forall x \varphi[a] \\
\overset{\textbf{(1)}}{\text{sse}} & E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in dom(E) \\
\overset{\textbf{(2)}}{\text{sse}} & E \not\models \neg\varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in dom(E) \\
\overset{\textbf{(3)}}{\text{sse}} & E \not\models \exists x \neg\varphi[a] \\
\overset{\textbf{(2)}}{\text{sse}} & E \models \neg\exists x \neg\varphi[a]
\end{array}
$$

Justificações

(1) Por (b) da Proposição 183.
(2) Para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$, $E \models \psi[a]$ sse $E \not\models \neg\psi[a]$ (Exercício).
(3) Por (c) da Proposição 183.
(4) Para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$, $E \not\models \psi[a]$ sse $E \models \neg\psi[a]$ (Exercício).

k) Mostremos que $\models \forall x \exists y \varphi \to \exists y \forall x \varphi$ não é necessariamente válida. Seja L uma linguagem contendo um símbolo R de relação, binário. Seja E uma L-estrutura de domínio $\{a, b\}$, onde a interpretação de R é o conjunto $\{(a, b), (b, a)\}$. Então, $E \models \forall x_0 \exists x_1 R(x_0, x_1)$, mas $E \not\models \exists x_1 \forall x_0 R(x_0, x_1)$ (Porquê?). Logo, $E \not\models \forall x_0 \exists x_1 R(x_0, x_1) \to \exists x_1 \forall x_0 R(x_0, x_1)$.

Demonstração das restantes afirmações: exercício.

$\square$

Definição 195: Chamaremos *instanciação (de variáveis proposicionais com L-fórmulas)* a uma função do tipo $\mathcal{V}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}_L$. Cada instanciação i determina uma função do tipo $\mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}_L$ que satisfaz as seguintes condições[1]:

a) $i(\perp) = \perp$;

b) $i(\neg\varphi) = \neg i(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

c) $i(\varphi \square \psi) = i(\varphi) \square i(\psi)$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

---

(1) - A função determinada por uma instanciação i pode ser vista como uma operação de *substituição simultânea*, onde cada variável proposicional p é substituída por $i(p)$.

Definição 196: Uma L-fórmula ψ é uma *instância* de uma fórmula φ do Cálculo Proposicional quando existe alguma instanciação i tal que $i(\varphi) = \psi$.

Exemplo 197: A L_{Arit}-fórmula $(x_0 = x_1) \to (\exists x_0 (x_0 = 0) \to (x_0 = x_1))$ é uma instância da fórmula $p_0 \to (p_1 \to p_0)$ do Cálculo Proposicional. De facto, considerando-se uma instanciação i tal que $i(p_0)$ é a fórmula $(x_0 = x_1)$ e $i(p_1)$ é a fórmula $\exists x_0 (x_0 = 0)$, tem-se:

$$\begin{array}{rl} & i(p_0 \to (p_1 \to p_0)) \\ = & i(p_0) \to i(p_1 \to p_0) \\ = & (x_0 = x_1) \to (i(p_1) \to i(p_0)) \\ = & (x_0 = x_1) \to (\exists x_0 (x_0 = 0) \to (x_0 = x_1)). \end{array}$$

Mas, esta fórmula L_{Arit}-fórmula é também instância, por exemplo, de $p_0 \to p_1$ e de p_0. Porquê?

Teorema 198 (Teorema da Instanciação): Se φ é uma tautologia do Cálculo Proposicional, então toda a instância de φ é universalmente válida.

Dem.: Suponhamos que φ uma tautologia do Cálculo Proposicional e que ψ é uma L-fórmula que é instância de φ. Seja E uma L-estrutura e a uma atribuição em E. (Queremos demonstrar que $E \models \psi[a]$.) Uma vez que ψ é instância de φ, existe uma instanciação i tal que $i(\varphi) = \psi$. Seja v a valoração do Cálculo Proposicional que satisfaz as seguintes condições:

$$\text{para todo } p \in \mathcal{V}^{CP}, \quad v(p) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad E \models i(p)[a] \\ \\ 0 & \text{se} \quad E \not\models i(p)[a] \end{cases}.$$

Demonstra-se (por indução estrutural em φ) que: $v(\varphi) = 1$ sse $E \models \psi[a]$. Donde, como $v(\varphi) = 1$ (pois φ é uma tautologia), se segue que $E \models \psi[a]$. $\square$

Exemplo 199: Como vimos no exemplo anterior, a L_{Arit}-fórmula $(x_0 = x_1) \to (\exists x_0 (x_0 = 0) \to (x_0 = x_1))$ é instância da tautologia $p_0 \to (p_1 \to p_0)$. Logo, pelo Teorema da Instanciação, podemos concluir que esta L_{Arit}-fórmula é universalmente válida.

Observação 200: Como seria de esperar, nem todas as fórmulas universalmente válidas são instâncias de tautologias. Por exemplo, vimos no Exemplo 191 que a fórmula $\forall x_0(x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1))$ é universalmente válida e esta fórmula não é instância de qualquer tautologia (esta fórmula é apenas instância de variáveis proposicionais, que não são tautologias).

Definição 201: Sejam E uma L-estrutura, a uma atribuição em E e Γ um conjunto de L-fórmulas. Dizemos que o par (E, a) *realiza* Γ ou que (E, a) *satisfaz* Γ quando para todo $\varphi \in \Gamma$, $E \models \varphi[a]$. Diremos que (E, a) é uma *realização* de Γ quando (E, a) realiza Γ.

Exemplo 202: O par (E_{Arit}, a^{ind}) realiza o conjunto de L_{Arit}-fórmulas

$$\{\forall x_0(x_0 \times x_1 = x_0), \forall x_1(x_1 \times s(x_0) = x_1)\},$$

mas não realiza o conjunto de L_{Arit}-fórmulas

$$\{\forall x_0(x_0 \times x_1 = x_0), \forall x_1(x_1 \times s(x_2) = x_1)\}.$$

Definição 203: Um conjunto Γ de L-fórmulas diz-se *realizável* ou *satisfazível* ou *semanticamente consistente* quando existe alguma realização de Γ. Caso contrário, Γ diz-se *irrealizável* ou *insatisfazível* ou *semanticamente inconsistente*.

Exemplo 204:

a) O conjunto de L_{Arit}-fórmulas $\{\forall x_0(x_0 \times x_1 = x_0), \forall x_1(x_1 \times s(x_0) = x_1)\}$ é realizável (por exemplo, (E_{Arit}, a^{ind}) realiza-o) e o conjunto de L_{Arit}-fórmulas $\{\forall x_0(x_0 \times x_1 = x_0), \forall x_1(x_1 \times s(x_2) = x_1)\}$ também é realizável (Exercício.)

b) O conjunto de L_{Arit}-fórmulas $\{\forall x_0(x_0 = x_0), \neg(0 = 0)\}$, é irrealizável. Se existisse uma realização (E, a) deste conjunto teríamos:

1. $(d, d) \in \overline{=}$, para todo $d \in D$ (dado que $E \models \forall x_0(x_0 = x_0)[a]$);
2. $(\overline{0}, \overline{0}) \notin \overline{=}$ (dado que $E \models \neg(0 = 0)[a]$).

onde $\overline{}$ denota a função interpretação de E. Ora, $\overline{0} \in D$, pelo que de 1. seguiria $(\overline{0}, \overline{0}) \in \overline{=}$, contradizendo 2.

Definição 205: Sejam E uma L-estrutura e Γ um conjunto de L-fórmulas. Dizemos que E é um *modelo* de Γ, escrevendo $E \models \Gamma$, quando para toda a atribuição a em E, (E, a) realiza Γ. Caso contrário, diremos que E *não é modelo* de Γ, escrevendo $E \not\models \Gamma$.

Exemplo 206: E_{Arit} é um modelo do conjunto formado pelas seguintes L-sentenças:

$$\begin{array}{l}
\forall x_0 \neg(0 = s(x_0)); \\
\forall x_0 \forall x_1 ((s(x_0) = s(x_1)) \rightarrow (x_0 = x_1)); \\
\forall x_0 \neg(s(x_0) < 0); \\
\forall x_0 \forall x_1 ((x_0 = s(x_1)) \rightarrow ((x_0 < x_1) \vee (x_0 = x_1))); \\
\forall x_0 (x_0 + 0 = x_0); \\
\forall x_0 \forall x_1 (s(x_0) + x_1 = s(x_0 + x_1)); \\
\forall x_0 (x_0 \times 0 = 0); \\
\forall x_0 \forall x_1 (s(x_0) \times x_1 = (x_0 \times x_1) + x_1).
\end{array}$$

A *axiomática de Peano* para a Aritmética é constituída pelas fórmulas acima descritas, juntamente com um princípio de indução para $\mathbb{N}_0$.

Proposição 207: Sejam Γ um conjunto de L-sentenças, E uma L-estrutura . Então, E é um modelo de Γ sse para alguma atribuição a em E, (E, a) realiza Γ.

Dem.: Exercício. $\square$

Definição 208: Uma L-fórmula φ diz-se uma *consequência semântica* de um conjunto de L-fórmulas Γ (notação: $\Gamma \models \varphi$) quando para toda a L-estrutura E e para toda a atribuição a em E, se (E, a) realiza Γ, então $E \models \varphi[a]$.

Observação 209: Na denotação de consequências semânticas, usaremos simplificações de notação semalhantes às utilizadas no contexto do Cálculo Proposicional. Por exemplo, dadas *L*-fórmulas φ e ψ, $\varphi \models \psi$ abrevia $\{\varphi\} \models \psi$.

Exemplo 210: No contexto da linguagem L_{Arit},

$$\forall x_0 \neg (x_0 = s(x_0)) \models \neg (0 = s(0)).$$

De facto, dada uma L-estrutura $E = (D, \overline{})$ e dada uma atribuição em E tais que $E \models \{\forall x_0 \neg (x_0 = s(x_0))\}[a]$, temos que, para todo o $d \in D$, $(d, \overline{s}(d)) \notin \overline{=}$. Assim, como $\overline{0} \in D$, em particular, temos que $(\overline{0}, \overline{s}(\overline{0})) \notin \overline{=}$ e, consequentemente, $E \models \neg (0 = s(0))[a]$.

Notação 211: Adiante, usaremos a notação $LIV(\Gamma)$, com Γ um conjunto de L-formulas, para representar o conjunto $\bigcup_{\varphi \in \Gamma} LIV(\varphi)$.

Proposição 212: Sejam φ e ψ L-fórmulas, seja Γ um conjunto de L-fórmulas, sejam x e y variáveis e seja t um L-termo.

a) Se $\Gamma \models \forall x \varphi$ e x é substituível por t em φ, então $\Gamma \models \varphi[t/x]$.

b) Se $\Gamma \models \varphi$ e $x \notin LIV(\Gamma)$, então $\Gamma \models \forall x \varphi$.

c) Se $\Gamma \models \varphi[t/x]$ e x é substituível por t em φ, então $\Gamma \models \exists x \varphi$.

d) Se $\Gamma \models \exists x \varphi$, $\Gamma, \varphi \models \psi$, e $x \notin LIV(\Gamma \cup \{\psi\})$, então $\Gamma \models \psi$.

Dem.:

a) Suponhamos que (E, a) satisfaz Γ. (Queremos demonstrar que: $E \models \varphi[t/x][a]$.) Então, pela hipótese, $E \models \forall x\varphi[a]$. Assim, por definição de satisfação,

$$E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}], \text{ para todo } d \in dom(E),$$

e daqui, em particular, $E \models \varphi[a\begin{pmatrix} x \\ t[a] \end{pmatrix}]$, pois $t[a] \in dom(E)$. Logo, como por hipótese x é substituível por t em φ, aplicando a Proposição 185 tem-se que $E \models \varphi[t/x][a]$.

c-d) Exercício.