ANÁLISE
Cap. 3 – Cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$

Dep. Matemática UMinho

Março 2020

3. Cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$

3.4 Funções vetoriais diferenciáveis

- Função diferenciável
- Matriz Jacobiana

3.4 Funções vetoriais diferenciáveis

Função diferenciável

- [Função diferenciável]

  A função vetorial $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ é diferenciável em $a \in D$, se existir uma aplicação linear

  $$L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

  tal que
  $$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - L(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0\,.$$

  - A esta aplicação linear, que se existir é única, chama-se diferencial de f em a e denota-se por $df(a)$.
  - A função vetorial f diz-se diferenciável em D se for diferenciável em todo o $a \in D$.

- [Teorema] A função vetorial $f = (f_1, \cdots, f_k)$ é diferenciável em $a \in D$ se e só se cada uma das suas funções componentes, f_i, $i = 1, \ldots, k$, for diferenciável em a.

- [Teorema] Se $f = (f_1, \ldots, f_k)$ é diferenciável em $a \in D$ então a sua diferencial é a aplicação linear

$$df(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

definida para cada $v = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ por

$$df(a)(v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Matriz Jacobiana

- A matriz de $df(a)$ relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^k$ chama-se matriz jacobiana de f em a e denota-se por $Jf(a)$, isto é

$$Jf(a) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

  - A matriz Jacobiana de f em a é a matriz $k \times n$ das primeiras derivadas de f;
  - Cada linha de $Jf(a)$ corresponde ao vetor gradiente de f_i em a.

Exercício

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a função definida por

$$f(x,y) = (y + e^{x+y},\ x + xy^2,\ \mathrm{sen}(x+y))\,.$$

Determine

(a) as funções componentes;

(b) o vetor gradiente de cada uma das funções componentes;

(c) a matriz jacobiana de f;

(d) a lei da transformação linear $df(0,0)$;

(e) $df(0,0)(1,1)$.

2. Determine a matriz jacobiana das funções
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = (x,y)$;
   (b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y) = (xe^y + \cos y,\ x,\ x + e^y)$.

3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x,y) = (2x^2,\ 3y,\ 2xy)\,.$$

   (a) Calcule a matriz jacobiana de f.
   (b) Justifique que a função f é diferenciável e calcule a sua diferencial no ponto $(1,1)$.
   (c) Determine $df(1,1)(2,3)$.