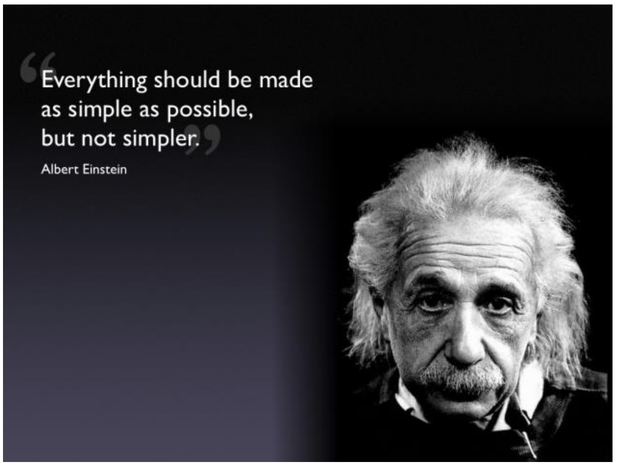
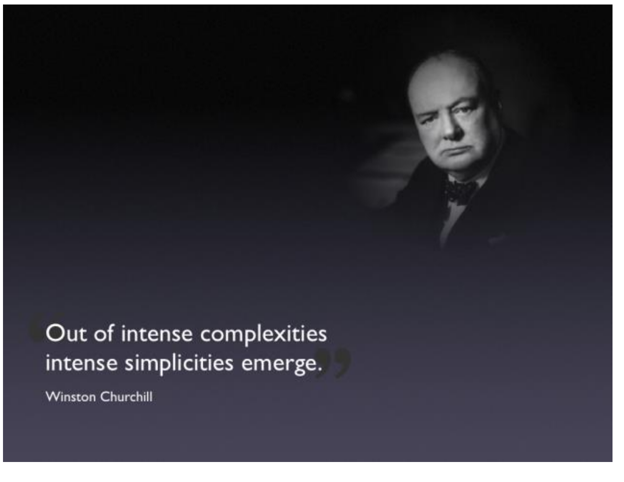
ESTATÍSTICA E LITERACIA



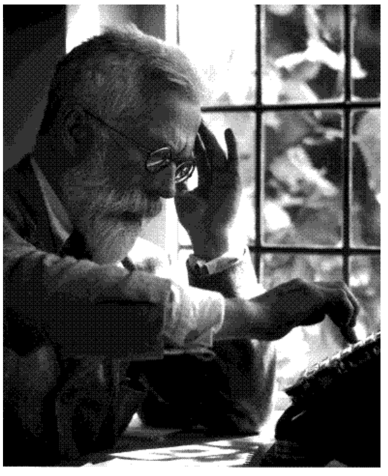
Profª Ana Cristina Braga

ESTATÍSTICA E LITERACIA



Profª Ana Cristina Braga

ESTATÍSTICA E LITERACIA



Quando consultam um estatístico pedindo a análise de dados recolhidos sem o seu aconselhamento prévio, pretendem um diagnóstico, mas em geral só já é possível fazer uma AUTÓPSIA.

Ronald Aylmer Fisher

Profª Ana Cristina Braga

INTERVALOS DE CONFIANÇA

INTERVALOS DE CONFIANÇA

- Estabelecer um intervalo de confiança para o parâmetro θ .

$$P(\hat{\theta}_I < \theta < \hat{\theta}_S) = 1 - \alpha$$

- Determinar os dois limites que definem o intervalo,

$$\hat{\theta}_I < \theta < \hat{\theta}_S$$

limites que dependem da distribuição amostral de θ e são, respectivamente, os limites inferior e superior do intervalo.

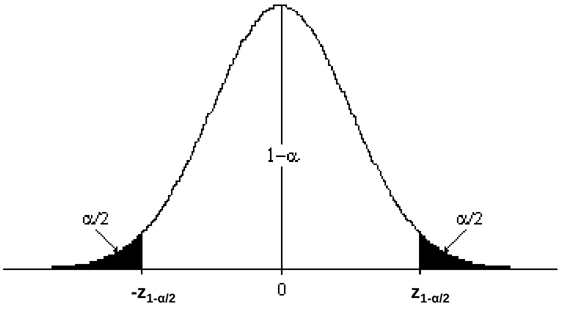
INTERVALO DE CONFIANÇA

- A média de uma amostra possui uma distribuição, σ^2 conhecido.

$$\mu_{\bar{x}} = \mu \qquad \sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma^2 / n \qquad Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} < Z < z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

INTERVALO DE CONFIANÇA



INTERVALO DE CONFIANÇA

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

INTERVALO DE CONFIANÇA: MÉDIA

- σ^2 conhecido

$$\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

EXEMPLO 1

- Suponha que era conhecido que a média e o desvio padrão das alturas dos rapazes com 20 anos era $\mu = 170\ cm, \sigma = 10\ cm$
- Considere que foram recolhidas 5 amostras de 25 rapazes, tendo sido observadas as seguintes médias

Amostra	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Média (*cm*)	172	168	171	165	172

SOLUÇÃO 1

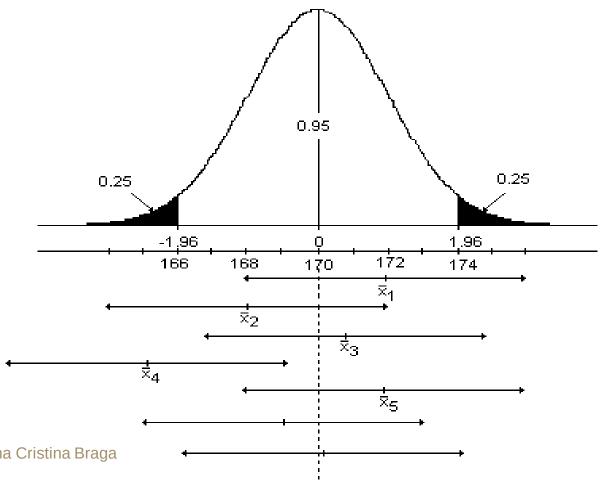
- Intervalo de Confiança de 95%

$$\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} - 1.96\frac{10}{\sqrt{25}} < \mu < \bar{x} + 1.96\frac{10}{\sqrt{25}}$$

$$\bar{x} \pm 4cm$$

SOLUÇÃO 1



EXEMPLO 2

- O peso ao nascer é uma das variáveis mais importantes na avaliação do bem-estar de um recém nascido.
- Suponha que o valor do desvio padrão para os bebés de sexo masculino é 562 gramas. Num determinado centro de saúde, uma amostra de 19 recém nascidos apresentou uma média 3222 gramas.
- Construa um intervalo de confiança de 95% para média do peso dos bebés.

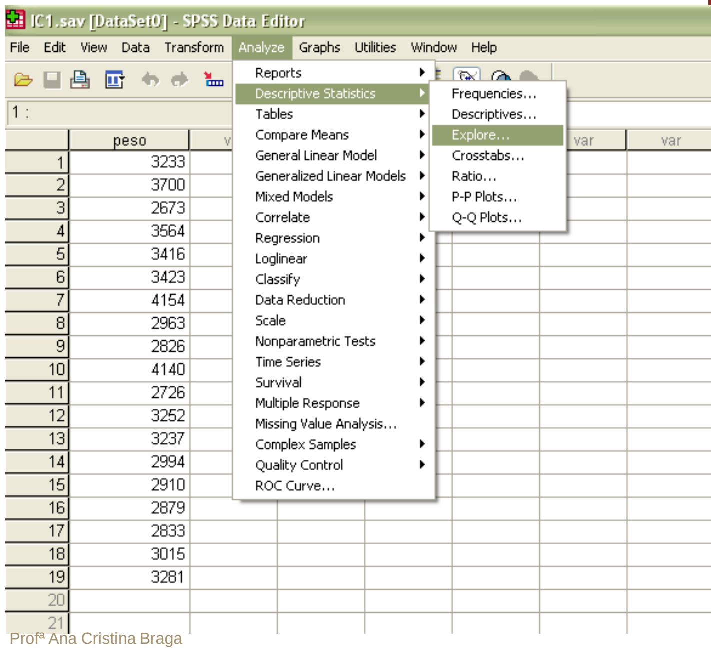
SOLUÇÃO 2

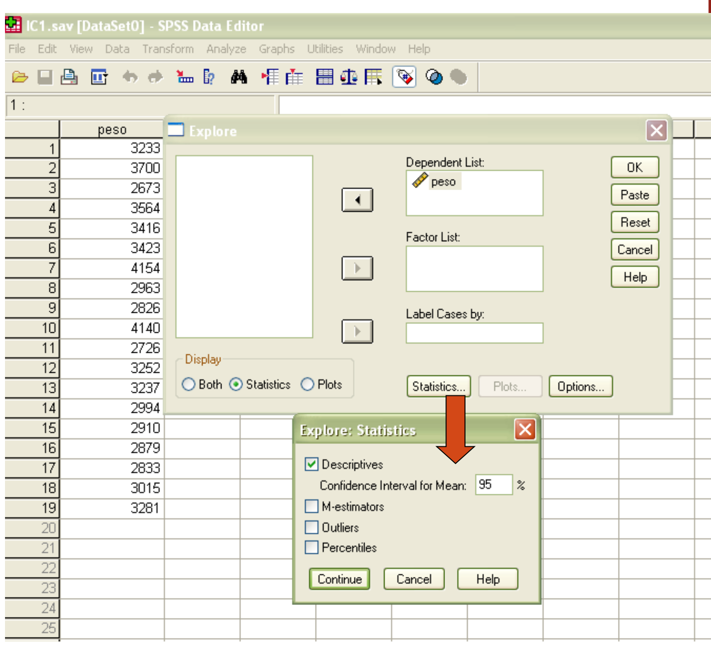
$$\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

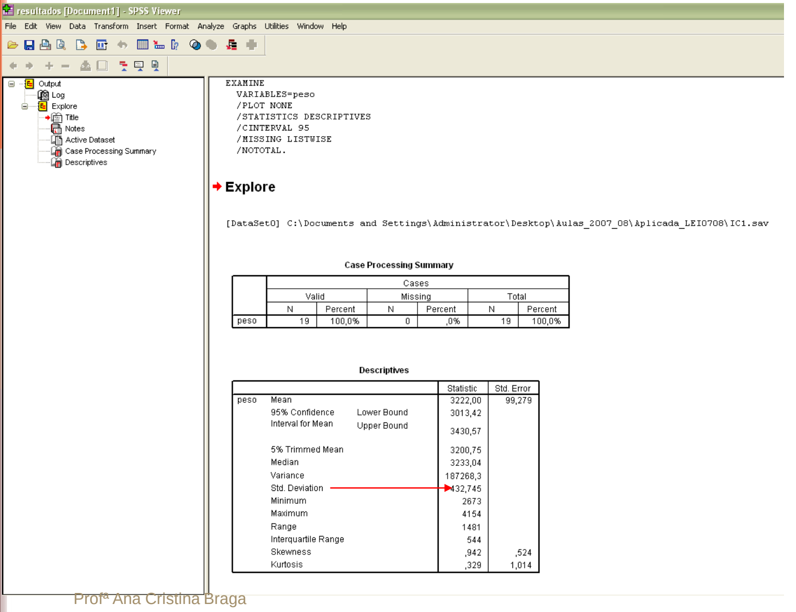
$$3222 - 1.96\frac{562}{\sqrt{19}} < \mu < 3222 + 1.96\frac{562}{\sqrt{19}}$$

$$3222 \pm 253g$$

$$2969 < \mu < 3475$$


IC1.sav [DataSet0] - SPSS Data Editor
File Edit View Data Transform Analyze Graphs Utilities Window Help
Reports
Descriptive Statistics
Tables
Compare Means
General Linear Model
Generalized Linear Models
Mixed Models
Correlate
Regression
Loglinear
Classify
Data Reduction
Scale
Nonparametric Tests
Time Series
Survival
Multiple Response
Missing Value Analysis...
Complex Samples
Quality Control
ROC Curve...
Frequencies...
Descriptives...
Explore...
Crosstabs...
Ratio...
P-P Plots...
Q-Q Plots...
peso
3233
3700
2673
3564
3416
3423
4154
2963
2826
4140
2726
3252
3237
2994
2910
2879
2833
3015
3281


IC1.sav [DataSet0] - SPSS Data Editor
File Edit View Data Transform Analyze Graphs Utilities Window Help
Explore
Dependent List:
peso
Factor List:
Label Cases by:
OK
Paste
Reset
Cancel
Help
Display
Both Statistics Plots
Statistics...
Plots...
Options...
Explore: Statistics
Descriptives
Confidence Interval for Mean: 95 %
M-estimators
Outliers
Percentiles
Continue
Cancel
Help



resultados [Document1] - SPSS Viewer

File Edit View Data Transform Insert Format Analyze Graphs Utilities Window Help

Output
Log
Explore
Title
Notes
Active Dataset
Case Processing Summary
Descriptives

```
EXAMINE
  VARIABLES=peso
  /PLOT NONE
  /STATISTICS DESCRIPTIVES
  /CINTERVAL 95
  /MISSING LISTWISE
  /NOTOTAL.
```

Explore

```
[DataSet0] C:\Documents and Settings\Administrator\Desktop\Aulas_2007_08\Aplicada_LEI0708\IC1.sav
```

Case Processing Summary

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
peso	19	100,0%	0	,0%	19	100,0%

Descriptives

			Statistic	Std. Error
peso	Mean		3222,00	99,279
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	3013,42	
		Upper Bound	3430,57	
	5% Trimmed Mean		3200,75	
	Median		3233,04	
	Variance		187268,3	
	Std. Deviation		432,745	
	Minimum		2673	
	Maximum		4154	
	Range		1481	
	Interquartile Range		544	
	Skewness		,942	,524
	Kurtosis		,329	1,014

INTERVALO DE CONFIANÇA: MÉDIA

- σ^2 desconhecido, n<30

$$T = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \qquad P\left(-t_{\alpha/2,n-1} < T < t_{\alpha/2,n-1}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-t_{\alpha/2,n-1} < \frac{\bar{x}-\mu}{s/n} < t_{\alpha/2,n-1}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{x} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

INTERVALO DE CONFIANÇA: MÉDIA

- σ^2 desconhecido, n<30

$$\bar{x} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

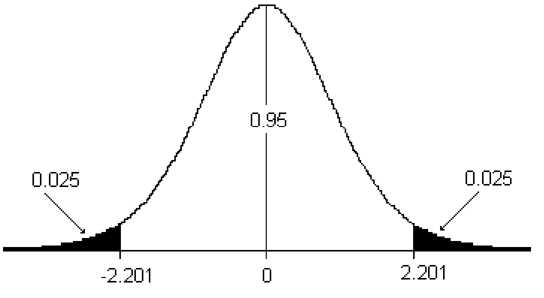
$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

EXEMPLO 3

- Numa universidade, uma amostra de 12 estudantes foi selecionada.
- O comprimento médio da mão encontrado foi de 19.92 cm com um desvio padrão de 0.17cm.
- Construa um intervalo de confiança de 95% para o verdadeiro valor do comprimento médio.

SOLUÇÃO 3

- *t*-Student, com 11 graus de liberdade



SOLUÇÃO 3

$$19.92 - 2.201\,\frac{0.17}{\sqrt{12}} < \mu < 19.92 + 2.201\,\frac{0.17}{\sqrt{12}}$$

$$19.92 \pm 0.108$$

$$19.812 < \mu < 20.028$$

INTERVALO DE CONFIANÇA DIFERENÇA DE MÉDIAS

- $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ médias de amostras aleatórias independentes, de dimensão n_1, n_2
- Populações normais com médias μ_1 e μ_2 e variância comum desconhecida σ^2

$$T = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

INTERVALO DE CONFIANÇA DIFERENÇA DE MÉDIAS

$$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2$$
$$< (\overline{x}_1 - \overline{x}_2) + t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) \pm t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

EXEMPLO 5

- Pretende-se testar duas formulações alimentares no crescimento de frangos de aviário. Os frangos, distribuídos por dois pavilhões A e B, foram alimentados durante cinco semanas com a respetiva ração. No fim do período de crescimento, foram selecionadas duas amostras.

Grupo	n	Média (g)	Desvio Padrão (g)
Pav. A	16	1623,7500	192,7131
Pav. B	10	1588,0000	167,1194

SOLUÇÃO 5

- *t*-Student

$$s_p^2 = \frac{(16-1)(192.7131)^2 + (10-1)(167.1194)^2}{16+10-2}$$

$$s_p^2 = 33684.7970$$

$$t_{0.025,24} = 2.06$$

$$(1623.75 - 1588.00) \pm (2.06)(183.5342)\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{10}}$$

$$35.75 \pm 152.4091$$

$$-116.6591 < \mu_1 - \mu_2 < 188.1591$$

INTERVALO DE CONFIANÇA DIFERENÇA DE MÉDIAS

- $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ médias de amostras aleatórias independentes
- Populações normais com médias μ_1 e μ_2 e variâncias desconhecidas e diferentes

INTERVALO DE CONFIANÇA DIFERENÇA DE MÉDIAS

$$n_1 = n_2 = n$$

$$n_1 + n_2 - 2 = 2(n-1)$$

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) \pm t_{\alpha/2,2(n-1)} \sqrt{\frac{s_1^2}{n} + \frac{s_2^2}{n}}$$

$$n_1 \neq n_2$$

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) \pm t_{\alpha/2,\nu} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

$$\nu = \frac{\left(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}}$$

INTERVALO DE CONFIANÇA DIFERENÇA DE MÉDIAS

- Amostras emparelhadas

$$\mu_d = (\mu_1 - \mu_2)$$

$$\bar{d} - t_{\alpha/2,n-1}\left(\frac{s_d}{\sqrt{n}}\right) < \mu_d < \bar{d} + t_{\alpha/2,n-1}\left(\frac{s_d}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\bar{d} \pm t_{\alpha/2,n-1}\left(\frac{s_d}{\sqrt{n}}\right)$$

EXEMPLO 6

- Uma amostra de dez trabalhadores de uma fábrica onde existe a manipulação de dioxinas foi seleccionada aleatoriamente.
- Nestes trabalhadores foi determinada a concentração (em ppm, partes por milhão) de dioxinas no plasma e no tecido gordo.
- Construa um intervalo de confiança para a diferença entre as concentrações de dioxina no plasma e no tecido gordo.

EXEMPLO 6

Trabalhador	Plasma	Tecido Gordo
1	2.5	4.9
2	3.5	6.9
3	1.8	4.2
4	4.7	4.4
5	7.2	7.7
6	4.1	2.5
7	3.0	5.5
8	3.3	2.9
9	3.1	5.9
10	2.5	2.3

SOLUÇÃO 5

- *t*-Student

$$\bar{d} = -1.1500$$

$$s_d = 1.7335$$

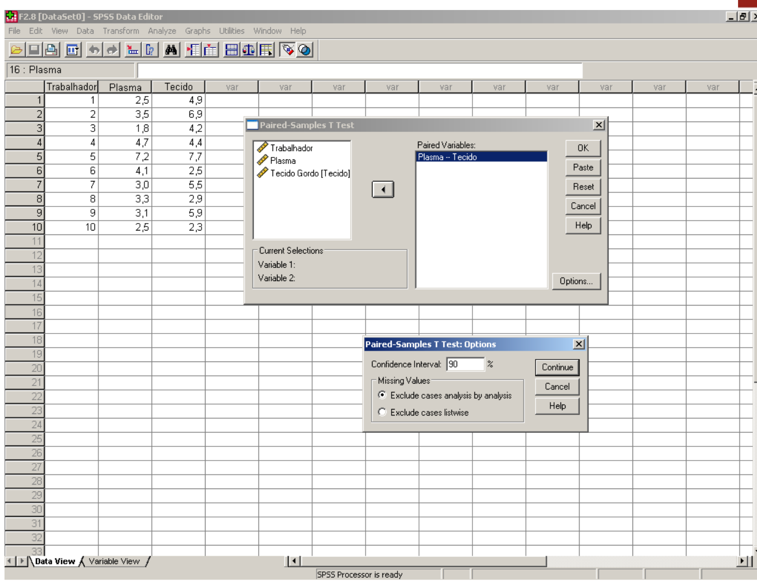
$$t_{0.025,9} = 2.262$$

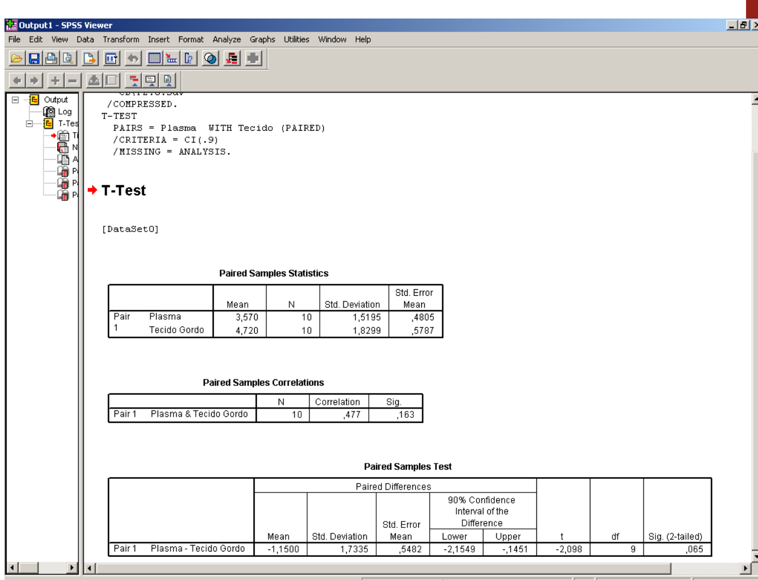
$$-1.1500 - 2.262\frac{1.7335}{\sqrt{10}} < \mu_d < -1.1500 + 2.262\frac{1.7335}{\sqrt{10}}$$

$$-1.1500 \pm 2.262\frac{1.7335}{\sqrt{10}}$$

$$-1.1500 \pm 1.2400$$

$$-2.3900 < \mu_d < 0.0900$$


F2.8 [DataSet0] - SPSS Data Editor
File Edit View Data Transform Analyze Graphs Utilities Window Help
16 : Plasma
Trabalhador Plasma Tecido
1 1 2,5 4,9
2 2 3,5 6,9
3 3 1,8 4,2
4 4 4,7 4,4
5 5 7,2 7,7
6 6 4,1 2,5
7 7 3,0 5,5
8 8 3,3 2,9
9 9 3,1 5,9
10 10 2,5 2,3
Paired-Samples T Test
Trabalhador
Plasma
Tecido Gordo [Tecido]
Paired Variables:
Plasma -- Tecido
OK
Paste
Reset
Cancel
Help
Current Selections
Variable 1:
Variable 2:
Options...
Paired-Samples T Test: Options
Confidence Interval: 90 %
Missing Values
Exclude cases analysis by analysis
Exclude cases listwise
Continue
Cancel
Help
Data View
Variable View
SPSS Processor is ready


Output1 - SPSS Viewer
File Edit View Data Transform Insert Format Analyze Graphs Utilities Window Help
/COMPRESSED.
T-TEST
PAIRS = Plasma WITH Tecido (PAIRED)
/CRITERIA = CI(.9)
/MISSING = ANALYSIS.
T-Test
[DataSet0]
Paired Samples Statistics
Mean N Std. Deviation Std. Error Mean
Pair 1 Plasma 3,570 10 1,5195 ,4805
Tecido Gordo 4,720 10 1,8299 ,5787
Paired Samples Correlations
N Correlation Sig.
Pair 1 Plasma & Tecido Gordo 10 ,477 ,163
Paired Samples Test
Paired Differences
Mean Std. Deviation Std. Error Mean 90% Confidence Interval of the Difference Lower Upper t df Sig. (2-tailed)
Pair 1 Plasma - Tecido Gordo -1,1500 1,7335 ,5482 -2,1549 -,1451 -2,098 9 ,065
SPSS Processor is ready

INTERVALO DE CONFIANÇA PROPORÇÃO

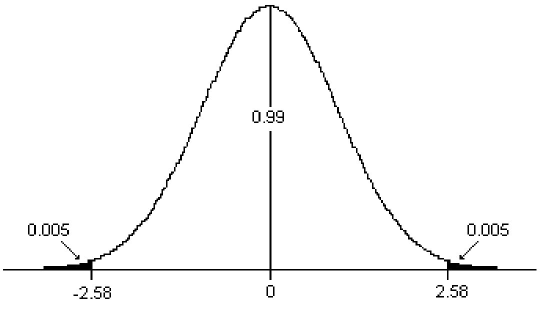
$$z = \frac{p-\pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} \qquad P\left(-z_{1-\alpha/2} < \frac{p-\pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} < z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(p - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \pi < p + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

EXEMPLO 7

- Para determinar a incidência de uma determinada doença genética no Norte de Portugal, foi recolhida uma amostra de gotas de sangue de 500 bebés, nascidos no ano de 1994.
- As análises permitiram detetar 37 bebés portadores da doença.
- Estime um intervalo de confiança de 99% para a proporção de portadores da doença.

SOLUÇÃO 7



SOLUÇÃO 7

$$p = \frac{37}{500} = 0.074$$

$$0.074 \pm 2.58\sqrt{\frac{0.074(1-0.074)}{500}}$$

$$0.074 \pm 0.030$$

$$0.044 < \pi < 0.104$$

Estimativa para a diferença de proporções $\pi_1 - \pi_2$

$$Z = \frac{(p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sigma_{p_1 - p_2}} \sim N(0,1)$$

$$\sigma_{p_1 - p_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

$$p_1 = \frac{x_1}{n_1} \text{ e } p_2 = \frac{x_2}{n_2}$$

$$(p_1 - p_2) - z_{(1-\alpha/2)}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} < \pi_1 - \pi_2 < (p_1 - p_2) + z_{(1-\alpha/2)}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

Exemplo:

- Quando um sinal de limite de velocidade de 50km/h foi colocado numa estrada, numa amostra de 100 veículos, 49 violaram o limite de velocidade. Quando o limite foi aumentado para 60 km/h, duma amostra de 100 veículos, 19 ultrapassaram o novo limite. Encontre um intervalo de confiança de 99% para $\pi_1 - \pi_2$ e interprete o seu resultado.

$$p_1 = \frac{49}{100} = 0{,}49 \text{ e } p_2 = \frac{19}{100} = 0{,}19$$

$$\sigma_{p_1 - p_2} = \sqrt{\frac{0{,}49(1-0{,}49)}{100} + \frac{0{,}19(1-0{,}19)}{100}} = 0{,}0635$$

$$z_{0.995} \overset{tab.5}{=} 2{,}575$$

$$0{,}30 - 0{,}164 < \pi_1 - \pi_2 < 0{,}30 + 0{,}164$$

$$0{,}136 < \pi_1 - \pi_2 < 0{,}464$$

Estimativa para o desvio padrão, σ

1. **Grandes amostras** $n \geq 100$

Se a variável em estudo apresenta uma distribuição Normal então o intervalo de confiança será:

$$\boxed{s_n - z_{1-\alpha/2}.\frac{0,71.s_n}{\sqrt{n}} < \sigma < s_n + z_{1-\alpha/2}.\frac{0,71.s_n}{\sqrt{n}}}$$

2. **Pequenas amostras** $n < 100$

Se a variável em estudo apresenta uma distribuição Normal então o intervalo de confiança será:

$$\boxed{\frac{(n-1)s_{n-1}^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s_{n-1}^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}}$$

Para o desvio padrão poder-se-á escrever:

$$\boxed{\sqrt{\frac{(n-1)s_{n-1}^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)s_{n-1}^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}}}$$

Estimativa para o quociente das variâncias σ_1^2 / σ_2^2

Considerando duas populações, de onde são retiradas as amostras aleatórias, independentes e com distribuições aproximadamente normais, o intervalo de confiança (1-α)100% para o quociente das variâncias será dado por:

$$\boxed{\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2}F_{\alpha/2,n_2-1,n_1-1}}$$

onde $F_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}$ é o valor que localiza uma área de $\alpha/2$ na cauda superior da distribuição F com n_1-1 no numerador e n_2-1 graus de liberdade no denominador e $F_{\alpha/2,n_2-1,n_1-1}$ é o valor que localiza um área de $\alpha/2$ na cauda superior da distribuição F com n_2-1 no numerador e n_1-1 graus de liberdade no denominador.