Análise

folha 1 2019/20

1. Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ e, nele, dois vetores x e y.
   Usando as propriedades que definem um produto interno em $\mathbb{R}^n$ e a definição $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$,
   (a) verifique que
   $$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \quad \text{(lei do paralelogramo).}$$
   (b) com x e y vetores não nulos, verifique que existe um ângulo θ, compreendido entre 0 e π, tal que
   $$\cos\theta = \frac{x \cdot y}{\|x\|\,\|y\|}.$$

2. Verifique que a função $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$
   (a) é uma distância.
   (b) não permite definir, em $\mathbb{R}^2$, uma norma tal que $d(x,y) = \|x - y\|$.
   Sugestão: Observe que teria de ser $\|x\| = d(x, \mathbf{0}) = 1, \forall x \neq \mathbf{0}$.

3. Verifique que a função $n : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $n(x,y) = |x| + |y|$
   (a) é uma norma.
   (b) não permite definir, em $\mathbb{R}^2$, um produto interno tal que $n(x,y) = \sqrt{(x,y)\cdot(x,y)}$.

4. Seja $\mathcal{S}$ um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Complete o seguinte quadro:

Conjunto $\mathcal{S}$	$\operatorname{int}\mathcal{S}$	$\operatorname{fr}\mathcal{S}$	$\mathcal{S}'$
Qualquer conjunto finito			
Todos os pontos/vetores de coordenadas inteiras			
Todos os pontos/vetores de coordenadas racionais			
$\mathbb{R}^n$			
$\emptyset$			

5. Em cada alínea, determine o interior, a fronteira, a aderência e o derivado de $\mathcal{A}$. Pronuncie-se ainda sobre se $\mathcal{A}$ é um conjunto fechado ou aberto:
   (a) $\mathcal{A} = [0,1] \times [2,3]$ (b) $\mathcal{A} = [0,1] \times]2,3[$ (c) $\mathcal{A} =]0,1[\times]2,3[$

6. Em cada alínea, determine o interior, a fronteira, a aderência e o derivado de $\mathcal{B}$. Pronuncie-se ainda sobre se $\mathcal{B}$ é um conjunto fechado ou aberto:
   (a) $\mathcal{B} = \{-1\} \times [0,1]$
   (b) $\mathcal{B} = ([-1,1] \times]0,3[) \cup \{(4,4)\}$
   (c) $\mathcal{B} = ([0,1] \times [1,2]) \cup ([1,2] \times [2,3])$