Álgebra Linear

Universidade do Minho
Escola de Ciências
Departamento de Matemática

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Teste 1 - $\boxed{\text{A}}$

5 novembro 2019 Duração: 2 horas

Nome: ______________________________ Número: ________

Grupo I

Responda às questões deste grupo nos espaços indicados, **sem** *apresentar os seus cálculos.*

1. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) A característica da matriz A é: 3.

b) $A^2 - 2I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 6 \\ -4 & 1 & 6 \\ -4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

c) A matriz A é equivalente por linhas à matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$? Sim.

d) O valor de x para o qual a matriz $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -6 \\ -2 & -1 & x \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ é a inversa de A é: 3.

2. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) $\det A = 4$.

b) O complemento algébrico do elemento 2 é: -5.

c) O elemento na posição $(2,1)$ de A^{-1} é: $-\frac{5}{4}$.

d) Se $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ é tal que $\det B = -\frac{1}{4}$, então $\det(-\frac{1}{2}ABA^T) - \det(AB)^{-1} = \frac{3}{4}$.

3. Seja $A \in \mathbb{R}^{5\times 4}$ uma matriz em escada. Considere as seguintes afirmações:

a) O sistema $Ax = 0$ não pode ter solução única.

b) O sistema $A^T x = b$ nunca é possível e determinado, seja qual for $b \in \mathbb{R}^{4\times 1}$.

c) Se u e v são soluções do sistema homogéneo cuja matriz é A, então $2u + 3v$ também é solução desse sistema.

d) A última linha de A é nula.

As afirmações verdadeiras são: **b)**, **c)** e **d)**.

(continua no verso)

4. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

a) $\det A = -3(a-1)(b-1)$ $(\det A = -3ab + 3a + 3b - 3)$

b) A matriz A é invertível se e só se $a \neq 1$ e $b \neq 1$.

c) Para $a = 3$ e $b = 2$, a primeira coluna da matriz inversa de A é $\begin{pmatrix} 7/6 \\ -1/3 \\ -1/6 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

Grupo II

Responda às questões deste grupo numa folha de teste, apresentando os seus cálculos.

1. Considere o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ -2x + y + \alpha z = -2 \\ -x + 4z = \beta \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

a) Classifique-o, em função dos valores dos parâmetros α e β, quanto à existência e unicidade de solução.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & \alpha & -2 \\ -1 & 0 & 4 & \beta \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4+\alpha & 4 \\ 0 & -1 & 6 & \beta+3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4+\alpha & 4 \\ 0 & 0 & 2-\alpha & \beta-1 \end{array}\right).$$

Então:

- Para $\alpha \neq 2$, o sistema é possível e determinado (seja qual for o valor de β)
- Para $\alpha = 2$ e $\beta \neq 1$, o sistema é impossível;
- Para $\alpha = 2$ e $\beta = 1$, o sistema é possível e simplesmente indeterminado.

b) No(s) caso(s) em que o sistema é indeterminado, indique duas das suas soluções.
O sistema é indeterminado para $\alpha = 2$ e $\beta = 1$; tem-se, nesse caso um sistema equivalente ao seguinte

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ -y + 6z = 4 \end{cases}$$

Mas

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ -y + 6z = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 4 - 6z + 2z = 3 \\ y = -4 + 6z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4z - 1 \\ y = 6z - 4, z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

As soluções do sistema são todos os ternos da forma $(4k-1, 6k-4, k)$, com $k \in \mathbb{R}$; duas das suas soluções são, por exemplo, $(-1, -4, 0)$ e $(3, 2, 1)$.

c) Determine os valores de α e β para os quais o sistema admite $(1,0,1)$ como solução.
O terno $(1,0,1)$ é solução do sistema se e só se

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & \alpha \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Tem-se

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & \alpha \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -2+\alpha \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow -2+\alpha = -2 \text{ e } \beta = 3 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ e } \beta = 3.$$

2. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostre que:

a) $\alpha(A+A^T)$ é uma matriz simétrica, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$;
Uma matriz X é simétrica se e só se $X^T = X$. Temos

$$(\alpha(A+A^T))^T = \alpha(A+A^T)^T = \alpha(A^T+(A^T)^T) = \alpha(A^T+A) = \alpha(A+A^T)$$

Logo, $\alpha(A+A^T)$ é simétrica.

b) $\alpha(A-A^T)$ é uma matriz antissimétrica, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$;
Uma matriz X é antissimétrica se e só se $X^T = -X$. Temos

$$(\alpha(A-A^T))^T = \alpha(A-A^T)^T = \alpha(A^T-(A^T)^T) = \alpha(A^T-A) = -\alpha(-A^T+A) = -\alpha(A-A^T).$$

Logo, $\alpha(A-A^T)$ é simétrica.

c) A pode ser escrita, de forma única, como $A = S+T$, onde S é uma matriz simétrica e T é uma matriz antissimétrica.

$$A + A^T + (A-A^T) = 2A \Rightarrow A = \underbrace{\frac{1}{2}(A+A^T)}_{S} + \underbrace{\frac{1}{2}(A-A^T)}_{T}.$$

A matriz $S = \frac{1}{2}(A+A^T)$ é simétrica e a matriz $T = \frac{1}{2}(A-A^T)$ é antissimétrica (de acordo com o provado nas alíneas anteriores) e tem-se $A = S+T$, o que mostra que A se pode escrever como soma de uma matriz simétrica com uma matriz antissimétrica.
Vejamos, agora, que a decomposição de A como soma de uma matriz simétrica com uma matriz antissimétrica é única.
Sejam S, S' matrizes simétricas e T, T' matrizes antissimétricas tais que $A = S+T$ e $A = S'+T'$.
Então, tem-se

$$A = S+T \text{ e } A = S'+T' \Rightarrow S+T = S'+T' \Rightarrow S-S' = T'-T.$$

Mas, sendo S e S' simétricas, tem-se que $S-S'$ é simétrica (ver demonstração abaixo) e sendo T e T' antissimétricas, tem-se que $T'-T$ é antissimétrica (ver demonstração abaixo). Por outro lado, tem-se que a única matriz simultaneamente simétrica e antissimétrica é a matriz nula (exercício das aulas). Logo, temos $S-S' = O$ e $T'-T = O$, de onde se segue que $S = S'$ e $T = T'$, como queríamos mostrar.

- Mostrar que, sendo S e S' simétricas, então $S - S'$ é simétrica.

  Como S e S' são simétricas, tem-se $S^T = S$ e $S'^T = S'$. Então $(S - S')^T = S^T - S'^T = S - S'$, o que mostra que $S - S'$ é simétrica.

- Mostrar que, sendo T e T' antissimétricas, então $T' - T$ é antissimétrica.

  Sendo T e T' duas matrizes antissimétricas, tem-se $T^T = -T$ e $T'^T = -T'$.
  Então $(T' - T)^T = T'^T - T^T = -T' - (-T) = -(T' - T)$, o que mostra que $T' - T$ é antissimétrica.

- Mostrar que a única matriz simultaneamente simétrica e antissimétrica é a matriz nula.

  X simétrica e antissimétrica $\Rightarrow X^T = X$ e $X^T = -X \Rightarrow X = -X \Rightarrow 2X = O \Rightarrow X = O$.

Cotação: $\boxed{\textbf{I}}$ - **1.** 3 valores; **2.** 3.5 valores ; **3.** 3 valores; **4.** 3.5 valores; $\boxed{\textbf{II}}$ - **1.** 4 valores; **2.** 3 valores.