## 0. Preliminares

**0.1** Prove, de duas formas diferentes, que, para todo o número natural $n \geq 2$, $2n \leq n^2$.

**0.2** Prove por indução que, para todo o número natural $n > 4$, $n^2 < 2^n$. Note como é útil provar simultaneamente $2n + 1 < n^2$.

**0.3** Para $n \in \mathbb{N}$, seja $P(n)$ a propriedade: $2^n < n!$.

**a)** Mostre que: para $k \in \mathbb{N}$ e $k > 3$, se $P(k)$ é verdadeira, $P(k+1)$ também é verdadeira.

**b)** Indique, justificando, quais os naturais $n$ para os quais $P(n)$ é verdadeira.

**0.4** Prove que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$.

**0.5** Prove que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$:

**a)** $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2i = n^2 + n$; **b)** $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2$.

**0.6** Seja $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ a função definida recursivamente por $f(0) = 1$ e $f(n+1) = 2f(n)$, para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

**a)** Calcule $f(1)$ e $f(2)$.

**b)** Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $f(n) = 2^n$.

**0.7** Seja $s : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ a função definida por $s(1) = 2$ e $s(n+1) = \frac{2}{s(n)}$.

**a)** Determine $s(1), s(2)$ e $s(3)$.

**b)** Determine o contradomínio de $s$. Prove a sua afirmação por indução.

**0.8** Seja $A$ o alfabeto $\{0, 1\}$. Os elementos de $A$ dizem-se as *letras* de $A$. Uma *palavra* em $A$ é uma sequência finita de letras de $A$. O conjunto de todas as palavras em $A$ representa-se por $A^*$. Uma *linguagem* em $A$ é um subconjunto de $A^*$.

**a)** Quantas palavras em $A$ existem com comprimento $\leq 3$?

**b)** Quantas linguagens em $A$ existem com um número de elementos $\leq 3$?

**c)** Dadas duas palavras $u = a_1 \cdots a_n$ e $v = b_1 \cdots b_m$ em $A$, a *concatenação* de $u$ e $v$, denotada $uv$, é a palavra em $A$ $a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m$. Seja $w$ a palavra 0110. Quantos pares de palavras $u$, $v$ existem tais que $uv = w$?

**0.9** O conjunto $\mathbb{N}_0$ pode ser definido indutivamente pelas regras: (1) $0 \in \mathbb{N}_0$. (2) Se $n \in \mathbb{N}_0$ então $n+1 \in \mathbb{N}_0$. Apresente definições indutivas de cada um dos conjuntos que se seguem:

**a)** Conjunto dos naturais múltiplos de 5.

**b)** Conjunto dos números inteiros.

**c)** Conjunto das palavras no alfabeto $A = \{0, 1\}$ cujo comprimento é ímpar.

**d)** Conjunto das palavras no alfabeto $A = \{a, b\}$ que têm um número par de ocorrências do símbolo $a$.

## 1. Sintaxe do Cálculo Proposicional

**1.1** De entre as seguintes palavras sobre o alfabeto do Cálculo Proposicional, indique, justificando, aquelas que pertencem ao conjunto $\mathcal{F}^{CP}$:

**a)** $(\neg (p_1 \vee p_2))$. **b)** $((p_0 \wedge \neg p_0) \rightarrow \perp)$.

**c)** $((\neg p_5) \rightarrow (\neg p_6))$. **d)** $(\perp)$.

**e)** $((p_3 \wedge p_1) \vee ($. **f)** $(((p_9 \rightarrow ((p_3 \vee (\neg p_8)) \wedge p_{12})) \leftrightarrow (\neg p_4)) \rightarrow (p_7 \vee \perp)))$.

**1.2** Para cada uma das seguintes fórmulas $\varphi$ do Cálculo Proposicional:

**i)** $p_{2015}$. **ii)** $\neg \perp \vee \perp$. **iii)** $p_0 \rightarrow (\neg p_0 \rightarrow \neg p_1)$:

**a)** Calcule $\varphi[p_2/p_0]$, $\varphi[p_0 \wedge p_1/p_1]$ e $\varphi[p_{2016}/p_{2015}]$.

**b)** Indique o conjunto das suas subfórmulas.

**1.3** Defina por recursão estrutural as seguintes funções (na alínea **c)** $BIN = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$):

**a)** $p : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que $p(\varphi) =$ número de ocorrências de parêntesis em $\varphi$.

**b)** $v : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que $v(\varphi) =$ número de ocorrências de vars. proposicionais em $\varphi$.

**c)** $b : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathcal{P}(BIN)$ tal que $b(\varphi) = \{\Box \in BIN : \Box \text{ ocorre em } \varphi\}$.

**d)** $\_[\perp /p_7] : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathcal{F}^{CP}$ (recorde que $\varphi[\perp /p_7]$ representa o resultado de substituir em $\varphi$ todas as ocorrências de $p_7$ por $\perp$).

**1.4** Considere de novo as funções definidas no exercício anterior. Prove, por indução estrutural, que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$:

**a)** $v(\varphi) \geq \#var(\varphi)$. **b)** $p(\varphi) \geq \#b(\varphi)$.

**c)** $v(\varphi) \geq v(\varphi[\perp /p_7])$. **d)** $b(\varphi) = b(\varphi[\perp /p_7])$.

**e)** se $b(\varphi) \neq \emptyset$ então $p(\varphi) > 0$. **f)** se $p_7 \notin var(\varphi)$ então $\varphi[\perp /p_7] = \varphi$.

**1.5** Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. O *tamanho* de $\varphi$, denotado por $|\varphi|$, define-se por recursão do seguinte modo:

(i) $|p| = 1$, para cada variável proposicional $p$; (ii) $|\perp| = 1$; (iii) $|\neg\varphi| = 1 + |\varphi|$;
(iv) $|\varphi \Box \psi| = 1 + |\varphi| + |\psi|$, para cada conetivo binário $\Box$.

**a)** Qual das fórmulas $\neg\neg\neg p_0$ ou $(p_1 \wedge p_2) \vee (p_3 \wedge p_4)$ tem maior tamanho?

**b)** Dê exemplo de fórmulas $\varphi$ e $\psi$, com 3 subfórmulas, tais que $|\varphi| = 3$ e $|\psi| > 3$.

**c)** Mostre que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $|\varphi| \geq \#subf(\varphi)$.

**1.6** Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. A *complexidade lógica* de $\varphi$, denotada por $cl(\varphi)$, define-se por recursão do seguinte modo:

(i) $cl(p) = 0$, para cada variável proposicional $p$; (ii) $cl(\perp) = 0$; (iii) $cl(\neg\varphi) = 1 + cl(\varphi)$;
(iv) $cl(\varphi \Box \psi) = 1 + max(cl(\varphi), cl(\psi))$, para cada conetivo binário $\Box$.

**a)** Qual das fórmulas $\neg\neg\neg p$ ou $(p_1 \wedge p_2) \vee (p_3 \wedge p_4)$ tem maior complexidade lógica?

**b)** Mostre que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $cl(\varphi) < |\varphi|$.

## 2. Semântica do Cálculo Proposicional

**2.1** Sejam $v_1$ e $v_2$ as únicas valorações tais que

$$v_1(p) = \begin{cases} 0 & \text{se } p \in \{p_0, p_1\} \\ 1 & \text{se } p \in \mathcal{V}^{CP} - \{p_0, p_1\} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad v_2(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in \{p_1, p_3\} \\ 0 & \text{se } p \in \mathcal{V}^{CP} - \{p_1, p_3\} \end{cases}.$$

Calcule os valores lógicos das fórmulas seguintes para as valorações $v_1$ e $v_2$:

$$\varphi_1 = (p_2 \vee (\neg p_1 \wedge p_3)), \quad \varphi_2 = (p_2 \vee p_0) \wedge \neg(p_2 \wedge p_0), \quad \varphi_3 = (p_1 \to ((p_5 \leftrightarrow p_3) \vee \perp)).$$

**2.2** Considere as fórmulas,

$$\varphi_1 = \neg p_3 \wedge (\neg p_1 \vee p_2), \quad \varphi_2 = (\neg p_3 \vee \neg p_1) \leftrightarrow (p_1 \to p_2), \quad \varphi_3 = \neg p_3 \to (p_1 \wedge \neg p_2).$$

**a)** Para cada um dos conjuntos $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ e $\{\varphi_2, \varphi_3\}$, dê exemplo de uma valoração que atribua o valor lógico 1 a todos os seus elementos.

**b)** Mostre que não existem valorações que, em simultâneo, atribuam o valor lógico 1 a $\varphi_1$ e $\varphi_3$.

**2.3** Seja $v$ uma valoração. Quais das seguintes proposições são verdadeiras?

**a)** $v((p_3 \to p_2) \to p_1) = 0$ e $v(p_2) = 0$ é uma condição suficiente para $v(p_3) = 0$.

**b)** Uma condição necessária para $v(p_1 \to (p_2 \to p_3)) = 0$ é $v(p_1) = 1$ e $v(p_3) = 0$.

**c)** Uma condição necessária e suficiente para $v(p_1 \wedge \neg p_3) = 1$ é $v((p_3 \to (p_1 \to p_3)) = 1$.

**2.4** De entre as seguintes fórmulas, indique as tautologias e as contradições.

**a)** $(p_1 \to \perp) \vee p_1$.

**b)** $(p_1 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_1)$.

**c)** $\neg(p_1 \wedge p_2) \to (p_1 \vee p_2)$.

**d)** $(p_1 \vee \neg p_1) \to (p_1 \wedge \neg p_1)$.

**2.5** Das seguintes proposições, indique as verdadeiras. Justifique.

**a)** $\models \varphi \wedge \psi$ se e só se $\models \varphi$ e $\models \psi$.

**b)** Se $\models \varphi \vee \psi$, então $\models \varphi$ ou $\models \psi$.

**c)** Se $\models \varphi$ ou $\models \psi$, então $\models \varphi \vee \psi$.

**d)** Se $\models \varphi \leftrightarrow \psi$ e $\not\models \psi$, então $\not\models \varphi$.

**2.6** Seja $\varphi = (\neg p_2 \to \perp) \wedge p_1$.

**a)** Dê exemplo de uma valoração $v$ tal que:

**i)** $v(\varphi) = v(\varphi[p_0 \wedge p_3/p_2])$;

**ii)** $v(\varphi) \neq v(\varphi[p_0 \wedge p_3/p_2])$.

**b)** Seja $\psi$ uma fórmula. Indique uma condição suficiente para que uma valoração $v$ satisfaça $v(\varphi) = v(\varphi[\psi/p_2])$. A condição que indicou é necessária?

**2.7** Considere o conjunto $\mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$ das fórmulas cujos conetivos estão no conjunto $\{\vee, \wedge\}$.

**a)** Enuncie o teorema de indução estrutural para $\mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$.

**b)** Seja $v$ a valoração que a cada variável proposicional atribui o valor lógico 0. Mostre que $v(\varphi) = 0$ para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$.

**c)** Existem tautologias no conjunto $\mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$? Justifique.

**2.8** Para cada uma das seguintes fórmulas, encontre uma fórmula que lhe seja logicamente equivalente e que envolva apenas conetivos no conjunto $\{\neg, \vee\}$.

**a)** $(p_0 \wedge p_2) \to p_3$.

**b)** $p_1 \vee (p_2 \to \perp)$.

**c)** $\neg p_4 \leftrightarrow p_2$.

**d)** $(p_1 \vee p_2) \to \neg(p_1 \wedge \perp)$.

**2.9** Defina, por recursão estrutural em fórmulas, uma função $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}_{\{\neg,\vee\}}$ que a cada fórmula $\varphi$ faça corresponder uma fórmula $f(\varphi)$ logicamente equivalente a $\varphi$.

**2.10** Investigue se os conjuntos de conetivos $\{\vee, \wedge\}$ e $\{\neg, \vee, \wedge\}$ são ou não completos.

**2.11** Calcule formas normais conjuntivas e disjuntivas logicamente equivalentes a cada uma das seguintes fórmulas:

**a)** $\neg p_0$.

**b)** $p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3)$.

**c)** $(p_1 \vee p_0) \vee \neg(p_2 \vee p_0)$.

**d)** $(p_1 \to \perp)$.

**e)** $(p_1 \vee p_0) \wedge (p_2 \vee (p_1 \wedge p_0))$.

**f)** $(p_1 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_1)$.

**2.12** Considere que $\varphi$ e $\psi$ são fórmulas cujo conjunto de variáveis é $\{p_1, p_2\}$ e $\{p_1, p_2, p_3\}$, respetivamente, e que têm as seguintes tabelas de verdade:

| $p_1$ | $p_2$ | $\varphi$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

e

| $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $\psi$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |

Determine FND's e FNC's logicamente equivalentes a cada uma das fórmulas.

**2.13** Será que existem outros conetivos binários para além de $\wedge$, $\vee$, $\to$, e $\leftrightarrow$? Para responder a esta questão, adotemos esta definição: um conetivo binário $\diamond$ é determinado pela sua função de verdade $v_\diamond : \{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\}$.

**a)** Quantos conetivos binários existem?

**b)** Para cada $v_\diamond : \{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\}$, escreva $v_\diamond$ como uma tabela de verdade e traduza essa tabela de verdade como uma FND.

**c)** Conclua que $\{\neg, \wedge, \vee\}$ permaneceria um conjunto completo de conetivos, mesmo se tivéssemos adoptado no Cálculo Proposicional outros conetivos binários.

**2.14** De entre os seguintes conjuntos de fórmulas, indique os que são consistentes e os que são inconsistentes.

**a)** $\{p_0 \wedge p_2, p_1 \rightarrow \neg p_3, p_1 \vee p_2\}$. **b)** $\{p_0 \vee \neg p_1, p_1, p_0 \leftrightarrow (p_2 \vee p_3)\}$.

**c)** $\mathcal{F}^{CP}$. **d)** $\mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$.

**2.15** Sejam $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}^{CP}$ . Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

**a)** Se $\Gamma \cup \Delta$ é consistente, então $\Gamma$ e $\Delta$ são conjuntos consistentes.

**b)** Se $\Gamma$ e $\Delta$ são conjuntos consistentes, então $\Gamma \cup \Delta$ é consistente.

**c)** Se $\Gamma$ é consistente e $\varphi \in \Gamma$, então $\neg\varphi \notin \Gamma$.

**d)** Se $\Gamma$ contém uma contradição, então $\Gamma$ é inconsistente.

**2.16** Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

**a)** $p_3 \vee p_0, \neg p_0 \models p_3$. **b)** $p_0 \vee \neg p_1, p_1 \vee p_2 \models p_0 \vee p_2$.

**c)** $\neg p_2 \rightarrow (p_1 \vee p_3), \neg p_2 \models \neg p_1$. **d)** para todo $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, $\neg\psi,\ \psi \rightarrow \sigma \models \sigma \vee \varphi$.

**2.17** Sejam $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma$ um conjunto de fórmulas. Demonstre que:

**a)** $\varphi \vee \psi, \neg\varphi \vee \sigma \models \psi \vee \sigma$. **b)** $\models \varphi \rightarrow \psi$ se e só se $\varphi \models \psi$.

**c)** $\Gamma \models \varphi \vee \psi$ se e só se $\Gamma, \neg\varphi \models \psi$. **d)** $\Gamma$ é inconsistente se e só se $\Gamma \models \perp$.

**2.18** Considere as seguintes afirmações:

- Se a porta do cofre foi arrombada, então: o inspetor Heitor desvenda o crime ou o segurança Bragança é culpado.
- O segurança Bragança não é culpado se e só se: a porta do cofre não foi arrombada e o inspetor Heitor desvenda o crime.
- Não é verdade que: o segurança Bragança não é culpado ou a porta do cofre foi arrombada.

**a)** Exprima as afirmações anteriores através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar as frases atómicas.

**b)** Admitindo que todas as afirmações são verdadeiras, podemos concluir que o inspetor Heitor desvenda o crime? Justifique.

**2.19** O Carlos, o João e o Manuel, suspeitos de um crime, fizeram os seguintes depoimentos, respetivamente:

- O João é culpado, mas o Manuel é inocente.
- Se o Carlos é culpado, o Manuel também o é.
- Eu estou inocente, mas um dos outros dois é culpado.

**a)** Os três depoimentos são consistentes?

**b)** Algum dos depoimentos é consequência dos outros dois?

**c)** Supondo os três réus inocentes, quem mentiu?

**d)** Supondo que todos disseram a verdade, quem é culpado?

**e)** Supondo que os inocentes disseram a verdade e que os culpados mentiram, quem é culpado?

## 3. Dedução Natural para o Cálculo Proposicional

**3.1** **a)** Indique uma derivação em DNP cuja conclusão seja $p_0 \wedge p_1$ e cuja única hipótese não cancelada seja $p_1 \wedge p_0$.

**b)** Indique duas derivações distintas em DNP de conclusão $p_0 \to (p_1 \to (p_0 \vee p_1))$ e sem hipóteses por cancelar.

**c)** Indique as subderivações de cada uma das derivações que apresentou em **a)** e em **b)**.

**3.2** Sejam $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$. Encontre demonstrações em DNP das fórmulas abaixo indicadas.

**a)** $(\varphi \wedge \psi) \to (\varphi \vee \psi)$.

**b)** $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma))$.

**c)** $\varphi \to \varphi$.

**d)** $(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$.

**e)** $\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$.

**f)** $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

**g)** $(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$.

**h)** $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

**3.3** Mostre que:

**a)** $p_0 \to p_1, \neg p_1 \vdash \neg p_0$.

**b)** $p_0 \to p_1, p_1 \to p_2, p_2 \to p_0 \vdash ((p_0 \leftrightarrow p_1) \wedge (p_1 \leftrightarrow p_2)) \wedge (p_0 \leftrightarrow p_2)$.

**c)** $\{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge \neg p_1\}$ é sintaticamente inconsistente.

**3.4** Represente o raciocínio que se segue através de uma relação de consequência sintática e construa uma derivação em DNP que prove a validade dessa relação: O Tiago disse: "Vou almoçar ao McDonald's ou à Pizza Hut". E, acrescentou: "Se comer no McDonald's, fico mal disposto e não vou ao cinema". Nesse dia, a Joana encontrou o Tiago no cinema e conclui: "O Tiago foi almoçar à Pizza Hut".

**3.5** Demonstre as seguintes proposições, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$.

**a)** $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$ se e só se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \psi$.

**b)** $\Gamma \vdash \varphi$ se e só se $\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot$.

**c)** $\Gamma \vdash \bot$ se e só se $\Gamma \vdash p_0 \wedge \neg p_0$.

**d)** Se $\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

**3.6** Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ fórmulas. A fórmula $((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$ é chamada a *Lei de Peirce*. Mostre que a Lei de Peirce é um teorema de DNP. (Sugestão: tenha em atenção a resolução da alínea **d)** do exercício anterior.)

**3.7** Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Mostre que:

**a)** $(p_0 \vee p_1) \to (p_0 \wedge p_1)$ não é um teorema de DNP.

**b)** $p_0 \vee p_1 \nvdash p_0 \wedge p_1$.

**c)** $\{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge p_1\}$ é sintaticamente consistente.

**d)** $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$ se e só se $\Gamma$ é semanticamente inconsistente.

**e)** Se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ e $\varphi$ é uma tautologia, então $\Gamma \vdash \psi$.

(Sugestão: aplique o Teorema da Correção e/ou o Teorema da Completude.)

## 4. Sintaxe do Cálculo de Predicados

**4.1** Escreva as seguintes afirmações como fórmulas para um tipo de linguagem apropriado.

- **a)** Todo aquele que é persistente aprende Lógica.
- **b)** Quem quer vai, quem não quer manda.
- **c)** Nem todos os pássaros voam.
- **d)** Se toda a gente consegue, também o João consegue.
- **e)** Para todo o número natural que é maior do que 6, o seu dobro é maior do que 12.
- **f)** Quaisquer dois conjuntos que têm os mesmos elementos são iguais.
- **g)** Existe um inteiro positivo menor do que qualquer inteiro positivo.
- **h)** Todo o inteiro positivo é menor do que algum inteiro positivo.
- **i)** Não há barbeiro que barbeie precisamente aqueles homens que não se barbeiam a si próprios.

**4.2** Seja $L = (\{0, f, g\}, \{R\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem tal que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(f) = 1$, $\mathcal{N}(g) = 2$, $\mathcal{N}(R) = 2$.

- **a)** Explicite a definição indutiva do conjunto dos termos de tipo $L$.
- **b)** Indique quais das seguintes sequências de símbolos constituem termos de tipo $L$:

  **i)** $0$. **ii)** $f(0)$.
  **iii)** $f(1)$. **iv)** $g(f(x_1, x_0), x_0)$.
  **v)** $g(x_0, f(x_1))$. **vi)** $R(x_0, x_1)$.

- **c)** Calcule o conjunto das variáveis de cada um dos seguintes termos:

  **i)** $0$. **ii)** $g(x_1, f(x_1))$.
  **iii)** $g(x_1, x_2)$. **iv)** $g(x_1, g(x_2, x_3))$.

- **d)** Para cada um dos termos $t$ da alínea anterior, calcule $subt(t)$.
- **e)** Para cada um dos termos $t$ da alínea **c)**, calcule $t[g(x_0, 0)/x_1]$.

**4.3** Seja $L$ o tipo de linguagem definido no exercício 4.2.

- **a)** Enuncie o teorema de indução estrutural para o conjunto $\mathcal{T}_L$.
- **b)** Defina, por recursão estrutural, funções $r, h : \mathcal{T}_L \to \mathbb{N}_0$ que a cada termo $t$ fazem corresponder o número de ocorrências de variáveis em $t$ e o número de ocorrências de símbolos de função em $t$, respetivamente.
- **c)** Dê exemplos de termos $t_1$ e $t_2$ de tipo $L$ tais que $\#\text{VAR}(t_1) = r(t_1)$ e $\#\text{VAR}(t_2) < r(t_2)$.
- **d)** Demonstre que, para todo o termo $t \in \mathcal{T}_L$, $\#\text{VAR}(t) \leq r(t)$.

**4.4** Seja $L$ um tipo de linguagem. Mostre que: para todo o termo $t \in \mathcal{T}_L$, $\mathrm{VAR}(t) \subseteq subt(t)$.

**4.5** Seja $L = (\{0, -\}, \{\mathsf{P}, <\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(-) = \mathcal{N}(<) = 2$.

**a)** Dê exemplos de termos de tipo $L$. Justifique.

**b)** Dê exemplos de fórmulas atómicas de tipo $L$. Justifique.

**c)** Justifique que cada uma das seguintes palavras é uma fórmula de tipo $L$.

**i)** $x_2 - 0 < x_1$.

**ii)** $\exists x_0 \forall x_1 (x_1 - x_0 < 0)$.

**iii)** $\forall x_2 (\exists x_0 (x_0 < x_1) \to \exists x_1 (x_2 < x_1 - x_0)) \land \mathsf{P}(x_2)$.

**iv)** $\forall x_0 (x_0 < x_1) \lor \exists x_1 (x_1 < x_0)$.

**d)** Para cada fórmula da alínea anterior, calcule o conjunto das suas subfórmulas.

**e)** Calcule os conjuntos de variáveis livres e de variáveis ligadas de cada uma das fórmulas da alínea c).

**f)** A proposição "Para todo $\varphi \in \mathcal{F}_L$, $\mathrm{LIV}(\varphi) \cap \mathrm{LIG}(\varphi) = \emptyset$" é verdadeira?

**4.6** Para cada uma das fórmulas $\varphi$ do exercício 4.5 c), calcule $\varphi[x_2 - x_0/x_1]$.

**4.7** Considere o tipo de linguagem $L$ do exercício 4.5. Para cada uma das fórmulas $\varphi$ do exercício 4.5 c), indique quais das seguintes proposições são verdadeiras.

**a)** A variável $x_1$ está livre para o termo $0$ em $\varphi$.

**b)** A variável $x_1$ está livre para o termo $x_2$ em $\varphi$.

**c)** A variável $x_2$ está livre para qualquer termo de tipo $L$ em $\varphi$.

**d)** Toda a variável está livre para o termo $x_1 - x_3$ em $\varphi$.

**4.8** Seja $L$ um tipo de linguagem.

**a)** Defina, por recursão estrutural, a função $\mathrm{SUBFA} : \mathcal{F}_L \to \mathcal{P}(\mathcal{F}_L)$ que a cada fórmula $\varphi$ faz corresponder o conjunto das subfórmulas atómicas de $\varphi$.

**b)** Sejam $\varphi$ uma fórmula de tipo $L$ e $x$ uma variável. Demonstre que: se $x \notin \mathrm{LIV}(\psi)$ para todo $\psi \in \mathrm{SUBFA}(\varphi)$, então $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$.

## 5. Semântica do Cálculo de Predicados

**5.1** Considere o tipo de linguagem $L = L_{Arit}$ e a estrutura $E_{Arit} = (\mathbb{N}_0, \overline{\phantom{x}})$ (a estrutura usual de tipo $L$). Sejam $a_1$ e $a_2$ atribuições em $E_{Arit}$ tais que $a_1(x_i) = 0$ e $a_2(x_i) = i$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

**a)** Para cada um dos termos $t$ de tipo $L$ que se seguem, determine $t[a_1]$ e $t[a_2]$, primeiro informalmente, depois formalmente através da definição de valor de termo.

**i)** $0$. **ii)** $x_5$. **iii)** $s(x_2)$.
**iv)** $s(0) + x_3$. **v)** $s(0 \times (x_2 \times x_3))$. **vi)** $(s(0) + x_7) \times s(x_1 + x_2)$.

**b)** Para cada uma das fórmulas $\varphi$ de tipo $L$ que se seguem, calcule $\varphi[a_1]$ e $\varphi[a_2]$, primeiro informalmente, depois formalmente através da definição de valor de fórmula.

**i)** $\perp$. **iii)** $s(x_1) < (x_1 + 0)$. **v)** $(x_1 < x_2) \to (s(x_1) < s(x_2))$.
**ii)** $x_1 = x_2$. **iv)** $\neg(x_1 = x_1)$. **vi)** $(x_1 < x_2) \to ((x_1 + x_3) < (x_2 + x_3))$.

**c)** Para cada uma das fórmulas $\varphi$ da alínea anterior, determine

$(\forall x_1 \varphi)[a_1]$ $(\forall x_1 \varphi)[a_2]$ $(\exists x_1 \varphi)[a_1]$ $(\exists x_1 \varphi)[a_2]$

**d)** Indique se alguma das fórmulas da alínea b) é válida na estrutura $E_{Arit}$.

**e)** Se $LIV(\varphi) = \{y_1, \cdots, y_n\}$, a fórmula $\forall y_1 \cdots \forall y_n \, \varphi$ diz-se um *fecho universal* de $\varphi$. Para cada uma das fórmulas $\varphi$ da alínea b), considere $\psi$ um fecho universal de $\varphi$ e diga qual o valor lógico que $E_{Arit}$ determina para $\psi$.

**5.2** Repita o exercício anterior, considerando a estrutura $E = (D, \overline{\phantom{x}})$, de tipo $L$, com $D = \{d_1, d_2\}$, e as atribuições $a_1$ e $a_2$ em $E$ a seguir definidas:

$$\begin{array}{llll}
\overline{0} = d_1 & & \overline{=} \subseteq D^2 & \overline{=} = \{(d_1, d_1), (d_2, d_2)\} \\
\overline{s} : D \to D & \overline{s}(x) = x & \overline{<} \subseteq D^2 & \overline{<} = \{(d_1, d_2)\} \\
\overline{+} : D^2 \to D & \overline{+}(x, y) = d_2 & a_1 : \mathcal{V} \to D & a_1(x) = d_2 \\
\overline{\times} : D^2 \to D & \overline{\times}(x, y) = d_1 \text{ sse } x = y & a_2 : \mathcal{V} \to D & a_2(x_i) = d_2 \text{ sse } i \text{ é par.}
\end{array}$$

**5.3** Seja $L = L_{Arit}$.

**a)** Quantas estruturas de tipo $L$ existem com domínio $\{0\}$? E domínio $\{0, 1, 2\}$?

**b)** Defina uma estrutura de tipo $L$ com domínio $\{0, 1, 2\}$.

**5.4** Seja $L = L_{Arit}$ e sejam $E_1$ e $E_2$ as estruturas usuais de tipo $L$ com domínios $\mathbb{N}_0$ e $\mathbb{Z}$ respectivamente. Para cada $i = 1, 2$, seja $\Gamma_i = \{\varphi \in \mathcal{F}_L | \ \varphi \text{ é válida em } E_i\}$. Mostre que nem $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, nem $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$.

**5.5** Suponha que $L$ tem um símbolo de relação binário $R$. Seja $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, onde

$$\begin{array}{rcl}
\varphi_1 & = & \forall x_0 \, R(x_0, x_0) \\
\varphi_2 & = & \forall x_0 \forall x_1 \, (R(x_0, x_1) \to R(x_1, x_0)) \\
\varphi_3 & = & \forall x_0 \forall x_1 \forall x_2 \, ((R(x_0, x_1) \wedge R(x_1, x_2)) \to R(x_0, x_2))
\end{array}$$

**a)** Seja $E = (D, \overline{\phantom{x}})$ um modelo de $\Gamma$. Caracterize $\overline{R}$.

**b)** Suponha que $L$ tem também duas constantes $c_1$ e $c_2$. Mostre que existem modelos quer de $\Gamma \cup \{\neg R(c_1, c_2)\}$, quer de $\Gamma \cup \{R(c_1, c_2)\}$.

**5.6** Seja $L$ um tipo linguagem com um símbolo de relação binário $=$, seja $D$ um conjunto com $n$ elementos, para algum $n \geq 2$, e seja $\overline{\phantom{x}}$ uma interpretação de $L$ em $D$ que interpreta $=$ como a relação identidade em $D$ e seja $E = (D, \overline{\phantom{x}})$. Diga, justificando, quais das seguintes fórmulas em $L$ são universalmente válidas, válidas em $E$, ou satisfazíveis.

**a)** $x_1 = x_2$. **b)** $x_1 = x_1$. **c)** $\forall x_1\, x_1 = x_2$.
**d)** $\forall x_1\, x_1 = x_1$. **e)** $\exists x_1\, x_1 = x_2$. **f)** $\exists x_1\, x_1 = x_1$.
**g)** $\exists x_1 \exists x_2\, x_1 = x_2$. **h)** $\forall x_1 \exists x_2\, x_1 = x_2$. **i)** $\exists x_1 \forall x_2\, x_1 = x_2$.

**5.7** Seja $L$ um tipo de linguagem e sejam $\varphi, \psi$ fórmulas de tipo $L$. Mostre que:

**a)** $\models (\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \vee \psi)$. **b)** $\not\models \forall x(\varphi \vee \psi) \to (\forall x\varphi \vee \forall x\psi)$.
**c)** $\models \exists x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)$. **d)** $\not\models (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \wedge \psi)$.
**e)** $\models \exists x \forall y \varphi \to \forall y \exists x \varphi$. **f)** $\not\models \forall x \exists y \varphi \to \exists y \forall x \varphi$.

**5.8** Sejam $L$ um tipo de linguagem, $\varphi, \psi$ fórmulas de tipo $L$, $Q \in \{\forall, \exists\}$ e $\square \in \{\vee, \wedge\}$. Mostre que: se $x \notin LIV(\psi)$, então $(Qx\varphi)\square\psi \Leftrightarrow Qx(\varphi\square\psi)$.

**5.9** Seja $L$ um tipo de linguagem.

**a)** Mostre que, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$ tais que $x \notin LIV(\psi)$, se tem:

**i)** $\models (\forall x\varphi \to \psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \to \psi)$. **ii)** $\models (\exists x\varphi \to \psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \to \psi)$.
**iii)** $\models (\psi \to \exists x\varphi) \leftrightarrow \exists x(\psi \to \varphi)$. **iv)** $\models (\psi \to \forall x\varphi) \leftrightarrow \forall x(\psi \to \varphi)$.

**b)** Mostre que, na alínea anterior, a condição $x \notin LIV(\psi)$ é necessária.

**c)** Conclua que, para toda a fórmula $\varphi$ em $L$, $\models \exists x(\varphi \to \forall x\varphi)$.
(Como curiosidade, pense no caso particular de $\varphi$ representar a condição "$x$ é aprovado a Lógica".)

**5.10** Seja $L$ um tipo de linguagem. Uma fórmula $\varphi$ de tipo $L$ diz-se em *forma normal prenexa* se $\varphi$ tem a forma $Q_1 y_1 \cdots Q_n y_n\, \psi$, onde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $y_i \in \mathcal{V}$ e $\psi$ é uma fórmula de tipo $L$ sem ocorrências de quantificadores. Considere $L = L_{Arit}$. Para cada uma das fórmulas $\varphi$ de tipo $L$ a seguir indicadas, encontre outra que seja logicamente equivalente a $\varphi$ e esteja em forma normal prenexa.

**a)** $(\forall x_0\, x_0 = 0) \vee (\exists x_0\, 0 < x_0)$. **b)** $x_0 = 0 \to \exists x_1\, x_0 < x_1$.
**c)** $x_0 < x_1 \to \exists x_0\, s(x_0) < x_1$. **d)** $(\forall x_0 \exists x_1\, x_1 < x_0) \to 0 = s(0)$.

**5.11** Seja $L$ um tipo de linguagem. Mostre que as seguintes afirmações são verdadeiras para todos $\varphi$, $\psi$ e $\sigma$ fórmulas de tipo $L$ e todo $x \in \mathcal{V}$.

(Curiosidade: estas afirmações correspondem a alguns silogismos aristotélicos, cujos nomes medievais estão indicados.)

**a)** Barbara $\forall x(\psi \to \varphi), \forall x(\sigma \to \psi) \models \forall x(\sigma \to \varphi)$.
**b)** Darii $\forall x(\psi \to \varphi), \exists x(\sigma \wedge \psi) \models \exists x(\sigma \wedge \varphi)$.
**c)** Cesare $\forall x(\psi \to \neg\varphi), \forall x(\sigma \to \varphi) \models \forall x(\sigma \to \neg\psi)$.
**d)** Festino $\forall x(\psi \to \neg\varphi), \exists x(\sigma \wedge \varphi) \models \exists x(\sigma \wedge \neg\psi)$.
**e)** Datisi $\forall x(\sigma \to \varphi), \exists x(\sigma \wedge \psi) \models \exists x(\psi \wedge \varphi)$.
**f)** Ferison $\forall x(\sigma \to \neg\varphi), \exists x(\sigma \wedge \psi) \models \exists x(\psi \wedge \neg\varphi)$.