LÓGICA EI
Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Universidade do Minho

Departamento de Matemática

2019/2020

Observação 94: O sistema formal de demonstrações que estudaremos nesta secção será notado por DNP e designado por *Dedução Natural Proposicional*.

Observação 95: O sistema DNP constitui uma certa formalização da noção de *demonstração* para as fórmulas do Cálculo Proposicional, num estilo conhecido como *dedução natural*. As demonstrações permitirão uma abordagem alternativa à relação de consequência semântica (definida à custa do conceito de valoração) e, em particular, permitirão identificar as tautologias com as fórmulas para as quais podem ser construídas demonstrações.

Exemplo 96: Demonstrações em DNP serão construídas usando um certo conjunto de regras (chamadas *regras de inferência*), que codificam raciocínios elementares utilizados habitualmente na elaboração de demonstrações matemáticas.
Um raciocínio elementar que usamos frequentemente na construção de demonstrações é o seguinte: de φ e $\varphi \to \psi$ podemos concluir ψ.
Representaremos este raciocínio do seguinte modo:

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$$

Esta regra é habitualmente conhecida por *modus ponens*, embora no formalismo DNP adotemos um nome diferente para esta regra, como veremos adiante.

Um outro raciocínio elementar é o seguinte: se assumindo φ por hipótese podemos concluir ψ, então podemos concluir $\varphi \to \psi$. Este raciocínio será representado do seguinte modo:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \cancel{\varphi} \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi}$$

Neste raciocínio, φ é uma *hipótese temporária* usada para concluir ψ.

A notação $\cancel{\varphi}$ reflete o facto de que a conclusão $\varphi \to \psi$ *não depende* da hipótese temporária φ. Nesta representação, a notação $\vdots$ simboliza a possibilidade de podermos concluir ψ a partir de φ.

Notação 97: O conceito de demonstração em DNP será formalizado adiante, através de uma definição indutiva. As demonstrações corresponderão a certas *árvores finitas de fórmulas*, onde uma fórmula φ que ocorra como *folha* poderá estar *cortada*, o que será notado por $\not\varphi$ ou por $[\varphi]$. Na apresentação das regras de inferência de *DNP*, usaremos a notação

$$\begin{array}{c} \not\varphi \\ \vdots \\ \psi \end{array}$$

para representar uma árvore de fórmulas cuja *raiz* é ψ e cujas eventuais ocorrrências da fórmula φ como folha estão necessariamente cortadas.

Definição 98: As *regras de inferência* do sistema formal DNP são apresentadas de seguida. Cada regra origina uma regra na definição indutiva do *conjunto das derivações* (Definição 100). As regras de inferência recebem derivações (uma ou mais) e produzem uma nova derivação.

Regras de **I***ntrodução* *Regras de* **E***liminação*

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\to I \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array}\quad \begin{array}{c}\vdots\\ \varphi \to \psi\end{array}}{\psi}\to E$$

Numa regra de inferência, as fórmulas imediatamente acima do *traço de inferência* serão chamadas as *premissas* da regra e a fórmula abaixo do traço de inferência é chamada a *conclusão* da regra de inferência.

Regras de **I***ntrodução*   *Regras de* **E***liminação*

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots & & \vdots\\ \varphi & & \psi\end{matrix}}{\varphi\wedge\psi}\;\wedge I \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\wedge\psi\end{matrix}}{\varphi}\;\wedge_1 E \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\wedge\psi\end{matrix}}{\psi}\;\wedge_2 E$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi}\;\neg I \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots & & \vdots\\ \varphi & & \neg\varphi\end{matrix}}{\bot}\;\neg E$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\end{matrix}}{\varphi\vee\psi}\;\vee_1 I \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \psi\end{matrix}}{\varphi\vee\psi}\;\vee_2 I \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix} & & \cancel{\varphi} & & \cancel{\psi}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \varphi\vee\psi & & \sigma & & \sigma\end{matrix}}{\sigma}\;\vee E$$

Regras de **I***ntrodução* *Regras de* **E***liminação*

$$\dfrac{\begin{array}{cc} \cancel{\varphi} & \cancel{\psi} \\ \vdots & \vdots \\ \psi & \varphi \end{array}}{\varphi \leftrightarrow \psi} \; \leftrightarrow I \qquad \dfrac{\begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ \varphi & \varphi \leftrightarrow \psi \end{array}}{\psi} \; \leftrightarrow_1 E \qquad \dfrac{\begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ \psi & \varphi \leftrightarrow \psi \end{array}}{\varphi} \; \leftrightarrow_2 E$$

$$\dfrac{\begin{array}{c} \cancel{\neg\varphi} \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{\varphi} \; (RAA) \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c} \vdots \\ \bot \end{array}}{\varphi} \; (\bot)$$

Uma *aplicação* ou *instância* de uma regra de inferência é uma *substituição das fórmulas da regra (meta-variáveis) por fórmulas do CP*. Chamaremos *inferência* a uma aplicação de uma regra de inferência.

Exemplo 99: Vejamos dois exemplos de inferências $\wedge_1 E$:

$$\frac{p_1 \wedge p_2}{p_1}\ \wedge_1 E \qquad \frac{(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \to \neg p_3)}{p_1 \wedge p_2}\ \wedge_1 E \tag{1}$$

Estas duas inferências podem ser *combinadas* do seguinte modo:

$$\cfrac{\cfrac{(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \to \neg p_3)}{p_1 \wedge p_2}\ \wedge_1 E}{p_1}\ \wedge_1 E \tag{2}$$

Combinando esta construção com uma inferênica $\to I$ podemos obter:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\,(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \to \neg p_3)\,]}{p_1 \wedge p_2}\ \wedge_1 E}{p_1}\ \wedge_1 E}{((p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \to \neg p_3)) \to p_1}\ \to I \tag{3}$$

As duas inferências em (1), assim como as combinações de inferências em (2) e (3), são exemplos de demonstrações no sistema formal DNP.

Definição 100: O *conjunto* $\mathcal{D}^{DNP}$ *das derivações de DNP* é o menor conjunto X, de árvores finitas de fórmulas, com folhas possivelmente cortadas, tal que:

a) para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, a árvore cujo único nodo é φ pertence a X;

b) *X* é *fechado* para cada uma das regras de inferência de DNP; por exemplo, *X* é fechado para as regras $\rightarrow E$ e $\rightarrow I$ quando as seguintes condições são satisfeitas (respetivamente):

i) $\begin{array}{c} D \\ \psi \end{array} \in X \implies \dfrac{\begin{array}{c} \cancel{\varphi} \\ D \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow I \in X$

(onde $\begin{array}{c} D \\ \psi \end{array}$ denota uma derivação (árvore de fórmulas) cuja raiz é ψ

e $\begin{array}{c} \cancel{\varphi} \\ D \\ \psi \end{array}$ denota a árvore de fórmulas obtida de *D* cortando todas as eventuais ocorrências de φ como folha);

ii) $\begin{array}{c} D_1 \\ \varphi \end{array} \in X$ e $\begin{array}{c} D_2 \\ \varphi \to \psi \end{array} \in X \Longrightarrow \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} D_2 \\ \varphi \to \psi \end{array}}{\psi} \to E \end{array} \in X.$

As derivações de DNP são também chamadas *deduções*. No nosso estudo, privilegiaremos a terminologia derivação. A terminologia *demonstração* será reservada para uma classe especial de derivações (ver Definição 104).

Observação 101: O conjunto $\mathcal{D}^{DNP}$ das derivações de DNP admite princípios de indução estrutural e de recursão estrutural. Existe também um conceito natural de *subderivação*. Por exemplo, a derivação (3) tem as seguintes quatro subderivações:

$$(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \to \neg p_3)\,, \qquad \dfrac{(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \to \neg p_3)}{p_1 \wedge p_2}\ \wedge_1 E\,,$$

$$\dfrac{\dfrac{(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \to \neg p_3)}{p_1 \wedge p_2}\ \wedge_1 E}{p_1}\ \wedge_1 E\,, \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\,(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \to \neg p_3)\,]}{p_1 \wedge p_2}\ \wedge_1 E}{p_1}\ \wedge_1 E}{((p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \to \neg p_3)) \to p_1}\ \to I\,.$$

De facto, estas quatro derivações, lidas como uma sequência, constituem uma sequência de formação da derivação (3).

Exemplo 102: Para quaisquer fórmulas do CP φ, ψ e σ, as construções abaixo são exemplos de derivações de DNP.

1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi \wedge \psi}^{(1)}}{\varphi}\wedge_1 E \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi \wedge \psi}^{(1)}}{\psi}\wedge_2 E \qquad \psi \to (\varphi \to \sigma)}{\varphi \to \sigma}\to E}{\sigma}\to E}{(\varphi \wedge \psi) \to \sigma}\to I^{(1)}$$

2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg\varphi}^{(2)} \qquad \cancel{\neg\neg\varphi}^{(1)}}{\perp}\neg E}{\varphi}RAA^{(2)}}{\neg\neg\varphi \to \varphi}\to I^{(1)}$$

3)

$$\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{(1)}}{\psi \to \varphi} \to I^{(2)}}{\varphi \to (\psi \to \varphi)} \to I^{(1)}$$

Os números naturais que aparecem a anotar inferências e fórmulas cortadas estabelecem uma correspondência, unívoca, entre as fórmulas cortadas e as regras que permitem efetuar esses cortes. Por exemplo, em **3)**, a inferência $\to$ *I* anotada com (1) é utilizada para cortar a única ocorrência como folha de φ, enquanto que a inferência $\to$ *I* anotada com (2) não é utilizada para efetuar qualquer corte.

Definição 103: Numa derivação D: a raiz de D é chamada a *conclusão* de D; as folhas de D são chamadas as *hipóteses* de D; as folhas de D cortadas serão chamadas as *hipóteses canceladas* de D; as folhas de D não cortadas serão chamadas as as *hipóteses não canceladas* de D.

Definição 104: Diremos que D é uma *derivação de uma fórmula* φ *a partir de um conjunto de fórmulas* Γ quando φ é a conclusão de D e o conjunto das hipóteses não canceladas de D é um subconjunto de Γ. Diremos que D é uma *derivação de uma fórmula* φ quando φ é a conclusão de D e todas as hipóteses de D estão canceladas. A uma derivação de φ chamaremos também uma *demonstração* de φ.

Exemplo 105: Sejam φ, ψ e σ fórmulas.

1. Seja D_1 a seguinte derivação de DNP.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{(2)} \qquad \varphi \to \psi}{\psi}\ \to E \qquad \psi \not\to \sigma^{(1)}}{\sigma}\ \to E}{\varphi \to \sigma}\ \to I^{(2)}}{(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)}\ \to I^{(1)}$$

Então:

(1) o conjunto de hipóteses de D_1 é $\{\varphi, \varphi \to \psi, \psi \to \sigma\}$;
(2) o conjunto de hipóteses não canceladas de D_1 é $\{\varphi \to \psi\}$;
(3) a conclusão de D_1 é $(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$;
(4) D_1 é uma derivação de $(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$ a partir de $\{\varphi \to \psi\}$.

2 Seja D_2 a seguinte derivação de DNP.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi \wedge \neg\varphi}^{(1)}}{\varphi}\wedge_1 E \qquad \dfrac{\cancel{\varphi \wedge \neg\varphi}^{(1)}}{\neg\varphi}\wedge_2 E}{\bot}\neg E}{\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)}\neg I^{(1)}$$

Então:

(1) o conjunto de hipóteses de D_2 é $\{\varphi \wedge \neg\varphi\}$;

(2) o conjunto de hipóteses não canceladas de D_2 é vazio;

(3) a conclusão de D_2 é $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$;

(4) D_2 é uma derivação de $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.

Definição 106: Uma fórmula φ diz-se *derivável a partir de* um conjunto de fórmulas Γ ou uma *consequência sintática* de Γ (notação: $\Gamma \vdash \varphi$) quando existe uma derivação de DNP cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é um subconjunto de Γ. Escreveremos $\Gamma \nvdash \varphi$ para denotar que φ não é derivável a partir de Γ.

Definição 107: Uma fórmula φ diz-se um *teorema* de DNP (notação: $\vdash \varphi$) quando existe uma demonstração de φ. Escreveremos $\nvdash \varphi$ para denotar que φ não é teorema de DNP.

Exemplo 108: Atendendo ao exemplo anterior:

1. $\{\varphi \to \psi\} \vdash (\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$ (*i.e.*, $(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$ é derivável a partir de $\{\varphi \to \psi\}$).
2. $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ (*i.e.*, $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ é um teorema de DNP).

Definição 109: Um conjunto de fórmulas Γ diz-se *sintaticamente inconsistente* quando $\Gamma \vdash \perp$ e diz-se *sintaticamente consistente* no caso contrário (i.e. quando $\Gamma \nvdash \perp$, ou seja, quando não existem derivações de $\perp$ a partir de Γ).

Exemplo 110: O conjunto $\Gamma = \{p_0, p_0 \to \neg p_0\}$ é sintaticamente inconsistente. Uma derivação de $\perp$ a partir de Γ é:

$$\dfrac{p_0 \qquad \dfrac{p_0 \qquad p_0 \to \neg p_0}{\neg p_0}\to E}{\perp}\neg E$$

Proposição 111: Seja Γ um conjunto de fórmulas. As seguintes afirmações são equivalentes:

a) Γ é sintaticamente inconsistente;

b) para alguma fórmula φ, $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$;

c) para toda a fórmula φ, $\Gamma \vdash \varphi$.

Dem.: Por exemplo, é suficiente provar as implicações **a)**$\Rightarrow$**b)**, **b)**$\Rightarrow$**c)** e **c)**$\Rightarrow$**a)**.

a)$\Rightarrow$**b)**: admitindo que Γ é sintaticamente inconsistente, existe uma derivação D de $\perp$ a partir de Γ. Assim, fixando uma (qualquer) fórmula φ, tem-se que

$$D_1 = \cfrac{\begin{matrix} D \\ \perp \end{matrix}}{\varphi}\ (\perp) \qquad\qquad D_2 = \cfrac{\begin{matrix} D \\ \perp \end{matrix}}{\neg\varphi}\ (\perp)$$

são, respetivamente, derivações de φ a partir de Γ (a conclusão de D_1 é φ e as hipóteses não canceladas de D_1 são as mesmas que em D) e de $\neg\varphi$ a partir de Γ (a conclusão de D_2 é $\neg\varphi$ e as hipóteses não canceladas de D_2 são as mesmas que em D). Por conseguinte, $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$. (Exercício: prove as outras duas implicações.) $\square$

Notação 112: Na representação de consequências sintáticas utilizaremos abreviaturas análogas às utilizadas para representação de consequências semânticas. Por exemplo, dadas fórmulas $\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ e dados conjuntos de fórmulas Γ e Δ, a notação $\Gamma, \Delta, \varphi_1, ..., \varphi_n \vdash \varphi$ abrevia $\Gamma \cup \Delta \cup \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi$.

Proposição 113: Para toda a fórmula φ, $\vdash \varphi$ se e só se $\emptyset \vdash \varphi$.

Dem.: Imediata a partir das definições. $\square$

Proposição 114: Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas. Então:

a) se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$;

b) se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \varphi$;

c) se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta, \varphi \vdash \psi$, então $\Delta, \Gamma \vdash \psi$;

d) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$;

e) se $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \psi$.

Dem.:

a) Suponhamos que $\varphi \in \Gamma$. Então, a árvore cuja única fórmula é φ é uma derivação cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\varphi\}$, que é um subconjunto de Γ, pois $\varphi \in \Gamma$. Assim, por definição de consequência sintática, $\Gamma \vdash \varphi$.

b), **c)** e **e)**: Exercício.

d) Suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, *i.e.*, suponhamos que existe uma derivação D de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ. Então,

$$\dfrac{\varphi \qquad \begin{array}{c} D \\ \varphi \to \psi \end{array}}{\psi} \to E$$

é uma derivação de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$, pois: i) ψ é a conclusão desta derivação; e ii) o conjunto Δ de hipóteses não canceladas desta derivação é constituído por φ e pelas hipóteses não canceladas de D, que formam um subconjunto de Γ, sendo portanto Δ um subconjunto de $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

Suponhamos agora que $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, *i.e.*, suponhamos que existe uma derivação *D* de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Então, a derivação

$$\dfrac{\begin{array}{c} \cancel{\varphi}^{(1)} \\ D \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi} \to I^{(1)},$$

é uma derivação de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ, pois: i) $\varphi \to \psi$ é a conclusão desta derivação; e ii) o conjunto Δ de hipóteses não canceladas desta derivação é constituído por todas as hipóteses não canceladas de *D* (um subconjunto de $\Gamma \cup \{\varphi\}$), exceto φ, sendo portanto Δ um subconjunto de Γ.

$\square$

Teorema (*Correção*): Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$,

$$\text{se } \Gamma \vdash \varphi, \text{ então } \Gamma \models \varphi.$$

Dem.: Suponhamos $\Gamma \vdash \varphi$, *i.e.*, suponhamos que existe uma derivação D de φ a partir de Γ. Aplicando o lema que se segue, conclui-se de imediato o resultado pretendido.

Lema: Para todo $D \in \mathcal{D}^{DNP}$, se D é uma derivação de φ a partir de Γ, então $\Gamma \models \varphi$.

Dem. do Lema: Por indução estrutural em derivações.

a) Suponhamos que D é uma derivação, de φ a partir de Γ, com um único nodo. Então, o conjunto de hipóteses não canceladas de D é $\{\varphi\}$ e, assim, $\varphi \in \Gamma$. Donde, pela Proposição 91(a), $\Gamma \models \varphi$.

b) Caso D seja uma derivação de φ a partir de Γ da forma

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ D_1\\ \sigma\end{array}}{\psi \to \sigma} \to I,$$

então: $\varphi = \psi \to \sigma$ e D_1 é uma derivação de σ a partir de $\Gamma \cup \{\psi\}$. Assim, aplicando a hipótese de indução relativa à subderivação D_1, $\Gamma, \psi \models \sigma$. Donde, pela Proposição 91(d), $\Gamma \models \psi \to \sigma$.

c) Caso D seja uma derivação de φ a partir de Γ da forma

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \sigma \end{array} \quad \begin{array}{c} D_2 \\ \sigma \to \psi \end{array}}{\psi} \to E,$$

então: $\varphi = \psi$; D_1 é uma derivação de σ a partir de Γ; e D_2 é uma derivação de $\sigma \to \psi$ a partir de Γ. Assim, aplicando as hipóteses de indução relativas às subderivações D_1 e D_2, segue $\Gamma \models \sigma$ e $\Gamma \models \sigma \to \psi$, respetivamente. Daqui, pela Proposição 91(e), conclui-se $\Gamma \models \psi$.

d) Os restantes casos, correspondentes às outras formas possíveis de D, são deixados como exercício.

$\square$

Observação 115: O Teorema da Correção constitui uma ferramenta para provar a não derivabilidade de fórmulas a partir de conjuntos de fórmulas. De facto, do Teorema da Correção segue que

$$\Gamma \not\models \varphi \Longrightarrow \Gamma \nvdash \varphi,$$

o que significa que, para mostrar que não existem derivações em DNP de uma fórmula φ a partir de um conjunto de fórmulas Γ, basta mostar que φ não é consequência semântica de Γ.

Exemplo 116: Seja $\Gamma = \{p_1 \vee p_2, p_1 \to p_0\}$.

1. Em DNP não existem derivações de $p_0 \vee p_1$ a partir de Γ. Se existisse uma tal derivação, pelo Teorema da Correção, teríamos $\Gamma \models p_0 \vee p_1$, mas esta consequência semântica não é válida (tome-se, por exemplo, a valoração que atribui 1 a p_2 e 0 às restantes variáveis proposicionais).
2. De forma análoga, pode mostrar-se que não existem derivações de $\perp$ a partir de Γ (exercício) e, então, concluir que Γ é sintaticamente consistente.

Proposição 117: Γ é sintaticamente consistente sse Γ é semanticamente consistente.

Dem.:
$\Leftarrow$) Consequência do Teorema da Correção. (Porquê?)

$\Rightarrow$) Ver a bibliografia recomendada. $\square$

Teorema 118 (Completude): Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$,

$$\text{se } \Gamma \models \varphi, \text{ então } \Gamma \vdash \varphi.$$

Dem.: Consequência da proposição anterior. (Exercício.) $\square$

Teorema 119 (Adequação): Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma \subset \mathcal{F}^{CP}$,

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ se e só se } \Gamma \models \varphi.$$

Dem.: Imediata, a partir dos teoremas da Correção e da Completude. $\square$

Corolário 120: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, φ é um teorema de DNP se e só se φ é uma tautologia.
Dem.: Exercício. $\square$