Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Álgebra Linear EI

MIEINF

Maria Irene Falcão :: Maria Joana Soares

2020/2021

1. MATRIZES

1.1 Conceitos básicos

Definição:

① Uma matriz é um quadro de números dispostos em m linhas e n colunas.

② Os $m \times n$ elementos contidos na matriz são chamados os elementos da matriz e representam-se entre parênteses curvos ou retos.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Definição:

① Uma matriz com m linhas e n colunas diz-se de ordem m por n e escreve-se $m \times n$.

② Uma matriz diz-se real (complexa) se todos os seus elementos são números reais (complexos).

③ O conjunto das matrizes reais (complexas) de ordem $m \times n$ denota-se por $\mathbb{R}^{m\times n}$ ($\mathbb{C}^{m\times n}$).

Exemplo: A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

é uma matriz real de ordem 3×4, i.e., $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.

Genericamente, uma matriz A de ordem $m \times n$ pode escrever-se como

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ou, abreviadamente $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ou ainda (dependendo do contexto) $A = (a_{ij})$.

O elemento a_{ij} está na posição (linha i, coluna j) da matriz A.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{3} & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & \boxed{6} & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} a_{12} = \boxed{3} \\ \\ a_{33} = \boxed{6} \end{array}$$

- Qual a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$ tal que $a_{ij} = i + j$?

Definição: Seja A uma matriz de ordem $m \times n$.

① Se $m \neq n$, A diz-se uma matriz retangular.

② Se $m = n$, A diz-se uma matriz quadrada (de ordem n).

③ Se $m = 1$, A diz-se uma matriz linha.

④ Se $n = 1$, A diz-se uma matriz coluna.

Exemplo: As matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ \pi & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

A matriz A é uma matriz retangular de ordem 3×2, a matriz B é uma matriz quadrada de ordem 3×3 (ou simplesmente de ordem 3) e a matriz $\boldsymbol{x}$ é uma matriz linha.[1]

[1] As matrizes linha ou coluna são usualmente representadas por letras minúsculas a negrito, e os seus elementos são identificados usando apenas um índice.

Definição: Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem n.

① A diagonal principal de A (ou os elementos diagonais de A ou a diagonal de A) são os elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

② A diagonal secundária de A são os elementos $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & -1 & 0 \\ -2 & \boxed{5} & 4 \\ 1 & 1 & \boxed{6} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & \boxed{0} \\ -2 & \boxed{5} & 4 \\ \boxed{1} & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Diagonal principal Diagonal secundária:

Definição: Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ diz-se

① **diagonal** se todos os elementos fora da diagonal são nulos, i.e.,

$$i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

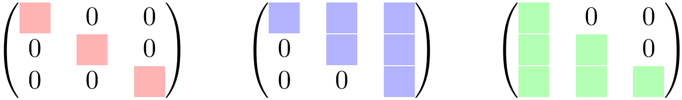
② **triangular superior** se todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, i.e.,

$$i > j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

③ **triangular inferior** se todos os elementos acima da diagonal são nulos, i.e.,

$$i < j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

Exemplo:



Matriz diagonal — Triangular superior — Triangular inferior

Definição:

① Uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero chama-se matriz nula. A matriz nula de ordem $m \times n$ é representada por $\mathbf{0}_{m\times n}$ ou simplesmente $\mathbf{0}$.

② Uma matriz diagonal de ordem n cujos elementos são todos iguais a 1 chama-se matriz identidade e representa-se por I_n ou simplesmente I.

$$\mathbf{0}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definição: Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes da mesma ordem. Diz-se que A é igual a B, se e só se

$$a_{ij} = b_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

$A = B$

1.2 Operações com matrizes

Soma de matrizes

Se duas matrizes têm a mesma ordem, a sua soma é a matriz que se obtém adicionando os elementos homólogos das matrizes dadas.

Exemplo:

$$+ \qquad\qquad 1+2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Definição: Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ duas matrizes de ordem $m \times n$. A **soma de A e B** é uma matriz $C = (c_{ij})$, cujos elementos são dados por

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

$$C = A + B$$

Definição: Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ duas matrizes de ordem $m \times n$. $A - B$ significa $A + (-B)$ sendo $-B = (-b_{ij})$.

Teorema: **Propriedades da adição de matrizes**

Sejam A, B e C matrizes de ordem $m \times n$. Então:

① $A + B = B + A$. *Comutatividade*

② $(A + B) + C = A + (B + C)$. *Associatividade*

③ $A + \mathbf{0} = A$. *Elemento neutro*

④ $A + (-A) = \mathbf{0}$. *Elemento simétrico*

Demonstração: Ao cuidado dos alunos

Multiplicação escalar

Definição: Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem $m \times n$ e α um número (ou escalar). O produto de α por A é a matriz $C = (c_{ij})$ cujos elementos são dados por

$$c_{ij} = \alpha\, a_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n. \qquad \boxed{C = \alpha\, A}$$

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad 4A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ 0 & 12 & -4 \end{pmatrix}.$$

Teorema: Propriedades da multiplicação escalar

Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$ e α e β escalares.

① $(\alpha\,\beta)A = \alpha(\beta\,A)$. *Associatividade mista*

② $(\alpha + \beta)A = \alpha\,A + \beta\,A$. *Distributividade - adição escalares*

③ $\alpha(A + B) = \alpha\,A + \alpha\,B$. *Distributividade - adição matrizes*

④ $1\,A = A$. *Elemento identidade*

⑤ $0\,A = \mathbf{0}$. *Elemento absorvente*

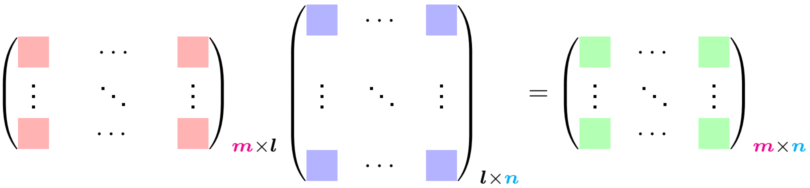
Demonstração: Ao cuidado dos alunos.

Multiplicação de duas matrizes

Definição: Sejam $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem $m \times l$ e $B = (b_{ij})$ uma matriz de ordem $l \times n$. O produto de A por B é a matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m \times n$ cujos elementos são dados por

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{il}b_{lj} \\ &= \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

$$\boxed{C = AB}$$



Exemplos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{1\times 3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}_{1\times 1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{1\times 3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}_{1\times 1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{1\times 3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}_{1\times 2}$$

Exemplos (continuação)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{4\times 3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 5} =$$

$$\begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & 1 & \square & 2 & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

Teorema: Propriedades da multiplicação de matrizes

Sejam A, B e C matrizes e α um número. Então:

1. $(AB)C = A(BC)$. *Associatividade*
2. $A(B + C) = AB + AC$. *Distributividade à direita*
3. $(A + B)C = AC + BC$. *Distributividade à esquerda*
4. $\alpha(AB) = (\alpha\, A)B = A(\alpha\, B)$ *Associatividade mista*
5. $AI = IA = A$ *Elemento identidade*
6. $A\mathbf{0} = \mathbf{0}A = \mathbf{0}$ *Elemento absorvente*

Demonstração: Ao cuidado dos alunos.

Exemplo: Se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

tem-se que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AC \qquad \text{e} \qquad BA = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

donde se conclui:

- $AB \neq BA$;
- $AB = \mathbf{0}$ e $A \neq \mathbf{0}$ e $B \neq \mathbf{0}$;
- $A \neq \mathbf{0}$ e $AB = AC$, com $B \neq C$.

1.3 Inversa de uma matriz

Definição: Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Diz-se que A é uma matriz invertível,[2] se existir uma matriz X, de ordem n, tal que

$$X\,A = A\,X = I_n.$$

A matriz X diz-se inversa de A.

Teorema: *Se A for invertível, a sua inversa é única.*

Demonstração: Suponhamos que X e Y são inversas de A, i.e., $X\,A = A\,X = I_n$ e $Y\,A = A\,Y = I_n$. Como

$$Y\,A\,X = Y(A\,X) = Y\,I_n = Y$$

$$Y\,A\,X = (Y\,A)X = I_n\,X = X,$$

conclui-se que $X = Y$.

A inversa de uma matriz A é denotada por A^{-1}.

[2] ou regular ou não singular

Exemplo: As matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

satisfazem

$$X\,A = A\,X = I_3.$$

Assim, $X = A^{-1}$ (e $A = X^{-1}$), i.e., as matrizes A e X são invertíveis.

A matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

não é invertível (Verifique!).

Teorema: *Sejam A e B matrizes de ordem n, invertíveis. Então,*

① *A^{-1} é invertível, sendo $(A^{-1})^{-1} = A$.*

② *AB é invertível, sendo $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Demonstração:

① Imediato, por definição de inversa.

② Pretende-se mostrar que $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$. Como

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

e

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I,$$

o resultado fica provado.

1.4 Transposta e conjugada de uma matriz

Definição: Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, a matriz cujas colunas são as linhas de A pela ordem correspondente, diz-se a matriz transposta de A e representa-se por A^T.

A matriz $B = A^T$ é de ordem $n \times m$ e os seus elementos são dados por

$$b_{ij} = a_{ji}, \qquad i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, m.$$

$B = A^T$

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Teorema: *Sejam, A e B matrizes e α um número. Se as operações indicadas estiverem definidas então,*

① $(A^T)^T = A$,

② $(A+B)^T = A^T + B^T$,

③ $(\alpha\, A)^T = \alpha\, A^T$,

④ $(A\, B)^T = B^T\, A^T$,

⑤ *Se A é invertível, então A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

Demonstração:

①+②+③ Ao cuidado dos alunos.

④ Se $A = (a_{ij})_{m\times l}$ e $B = (b_{ij})_{l\times n}$ então $(AB)^T = (c_{ij})_{n\times m}$ e $B^T A^T = (d_{ij})_{n\times m}$. Além disso,

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = c_{ij}.$$

⑤ $(A^{-1})^T A^T \underset{④}{=} (AA^{-1})^T = I^T = I$. Analogamente, $A^T (A^{-1})^T = I$.

Definição: Seja A uma matriz quadrada.

- A diz-se simétrica se e só se $A^T = A$, i.e., $a_{ij} = a_{ji}$.
- A diz-se antissimétrica se e só se $A^T = -A$, i.e., $a_{ij} = -a_{ji}$.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 6 & 4 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

simétrica — não simétrica — não antissimétrica — antissimétrica

Definição: Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. A matriz obtida de A substituindo cada elemento pelo seu conjugado diz-se a matriz conjugada de A e representa-se por $\overline{A}$.

A matriz $B = \overline{A}$ é de ordem $m \times n$ e os seus elementos são dados por

$$b_{ij} = \overline{a_{ij}}, \qquad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

$$\boxed{B = \overline{A}}$$

Exemplo:

Se $\quad A = \begin{pmatrix} 1+2i & i & 3 \\ -i & 1-i & 4 \end{pmatrix} \quad$ então $\quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1-2i & -i & 3 \\ i & 1+i & 4 \end{pmatrix}$

Teorema: *Sejam A, B e C matrizes e α um número. Se as operações indicadas estiverem definidas, então*

① $\overline{\overline{A}} = A$,

② $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$,

③ $\overline{\alpha\, A} = \overline{\alpha}\,\overline{A}$,

④ $\overline{A\,C} = \overline{A}\,\overline{C}$,

⑤ *Se A é invertível, então $\overline{A}$ é invertível e $(\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$.*

Demonstração: Ao cuidado dos alunos.

Definição: Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. A transposta da matriz conjugada de A diz-se a **matriz transconjugada de A** e representa-se por A^*.

A matriz $B = A^*$ é de ordem $n \times m$ e os seus elementos são dados por

$$b_{ij} = \overline{a_{ji}}, \qquad i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, m.$$

$$\boxed{B = A^*}$$

Exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 1+2i & i & 3 \\ -i & 1-i & 4 \end{pmatrix}$ então $A^* = \begin{pmatrix} 1-2i & i \\ -i & 1+i \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Teorema: *Sejam, A e B matrizes e α um número. Se as operações indicadas estiverem definidas, então*

① $(A^*)^* = A$,

② $(A + B)^* = A^* + B^*$,

③ $(\alpha\, A)^* = \overline{\alpha}\, A^*$,

④ $(A\, B)^* = B^*\, A^*$,

⑤ *Se A é invertível, então A^* é invertível e $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

Demonstração: Consequência imediata dos dois teoremas anteriores.

Definição: Seja A uma matriz quadrada.

- A diz-se hermiteana ou hermítica se e só se $A^* = A$, i.e., $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$.
- A diz-se anti-hermiteana ou anti-hermítica se e só se $A^* = -A$, i.e., $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2-i & 3+i \\ 2+i & 6 & 4 \\ 3-i & 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2-i & 3+i \\ -2-i & 0 & 4 \\ -3+i & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

hermítica — anti-hermítica

1.5 Produto de matrizes fracionadas em blocos

Suponhamos que duas matrizes A e B estão “fracionadas” em blocos

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2r} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ \hline B_{21} & B_{22} & \ldots & B_{2t} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rt} \end{array}\right),$$

e que:

- o número de “colunas de blocos” de A é igual ao número de “linhas de blocos” de B
- os blocos que formam cada linha de blocos têm todos o mesmo número de linhas
- os blocos que formam cada coluna de blocos têm todos o mesmo número de colunas
- o número de colunas de cada bloco A_{ik} é igual ao número de linhas de cada bloco B_{kj}.

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2r} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{ir} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline A_{s1} & A_{s2} & \ldots & A_{sr} \end{array}\right), \; B = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1j} & \ldots & B_{1t} \\ \hline B_{21} & B_{22} & \ldots & B_{2j} & \ldots & B_{2t} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hline B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rj} & \cdots & B_{rt} \end{array}\right)$$

O produto AB pode formar-se combinando os blocos exatamente da mesma forma como combinamos os escalares no produto usual.
Isto é, o bloco na posição (i, j) de AB é obtido usando a fórmula

$$A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{ir}B_{rj}.$$

Exemplo: Se A e B são as matrizes

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} C & I \\ \hline I & \mathbf{0} \end{array}\right),$$

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & \mathbf{0} \\ \hline C & C \end{array}\right),$$

então:

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} C & I \\ \hline I & \mathbf{0} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I & \mathbf{0} \\ \hline C & C \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 2C & C \\ \hline I & \mathbf{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 6 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Consideremos o produto de duas matrizes $A_{m\times p}$ e $B_{p\times n}$.

Fracionemos A nos m blocos que são as suas linhas $\ell_1(A)$, $\ell_2(A),\ldots,\ell_m(A)$, e consideremos B como um só bloco. Tem-se:

$$AB = \left(\begin{array}{c} \ell_1(A) \\ \hline \ell_2(A) \\ \hline \vdots \\ \hline \ell_m(A) \end{array}\right) B = \left(\begin{array}{c} \ell_1(A)\,B \\ \hline \ell_2(A)\,B \\ \hline \vdots \\ \hline \ell_m(A)\,B \end{array}\right).$$

Se designarmos por $\ell_1(AB),\ldots,\ell_m(AB)$ as m linhas de AB, vemos que

$$\ell_i(AB) = \ell_i(A)\,B,\ i = 1,\ldots,m,$$

ou seja, tem-se:

Para obtermos uma determinada linha i do produto AB, teremos apenas de multiplicar a linha i da matriz A pela matriz B, não sendo necessário calcular toda a matriz AB.

Se designarmos por $c_1(B), \ldots, c_n(B)$ as colunas da matriz B, tem-se

$$AB = A\big(c_1(B) \mid c_2(B) | \cdots \mid c_n(B)\big) = \big(Ac_1(B) \mid Ac_2(B) \mid \cdots \mid Ac_n(B)\big)$$

ou seja, tem-se:

$$c_j(AB) = A\, c_j(B), \; j = 1, \ldots, n.$$

Assim:

Para obtermos uma dada coluna j da matriz produto AB, bastará multiplicar A pela coluna j de B.

Notação: Sendo A uma determinada matriz $m \times n$, usaremos a notação $\boldsymbol{a}_j$ (a letra minúscula correspondente à letra usada para a matriz, em negrito, indexada por j) para designar a sua j-ésima coluna. Assim,

$$A = (\boldsymbol{a}_1 \; \boldsymbol{a}_2 \; \cdots \; \boldsymbol{a}_n)$$

será o fracionamento de A nas suas colunas (por simplicidade, dispensaremos o uso dos traços indicadores da partição).

Uma exceção à regra referida é o caso da matriz identidade de ordem n, cujas colunas são, geralmente, designadas por $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, isto é,

$$I_n = (\boldsymbol{e}_1 \ \boldsymbol{e}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{e}_n)\,.$$

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Então o produto $A\boldsymbol{c}$ pode ser obtido do seguinte modo, usando o fracionamento de A nas suas n colunas e o fracionamento de $\boldsymbol{c}$ nas suas linhas (cada uma apenas com um elemento):

$$A\,\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n.$$

Nota: Na última igualdade usou-se o seguinte resultado: sendo $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ e $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha)_{1\times 1}$, tem-se $\boldsymbol{u}\boldsymbol{\alpha} = \alpha\boldsymbol{u}$.

1.6 Operações elementares sobre as linhas/colunas de uma matriz

Definição: Uma operação elementar sobre uma linha (coluna) de uma matriz A é uma operação de um dos seguintes tipos:

OL$_1$ (OC$_1$): Troca de duas linhas (colunas).

$$L_i \leftrightarrow L_j \qquad (C_i \leftrightarrow C_j)$$

OL$_2$ (OC$_2$): Multiplicação de uma linha (coluna) por um número diferente de zero.

$$L_i \leftarrow \alpha L_i \qquad (C_i \leftarrow \alpha C_i)\ ,\ \alpha \neq 0.$$

OL$_3$ (OC$_3$): Substituição de uma linha (coluna) pela sua soma com um múltiplo de outra linha (coluna).

$$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$$
$$(C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j)$$

Exemplos

① $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_3]{\mathbf{OL_1}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1]{\mathbf{OL_3}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to$

$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1]{\mathbf{OL_3}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_2]{\mathbf{OL_3}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$

② $A \xrightarrow[C_1 \leftrightarrow C_2]{\mathbf{OC_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1]{\mathbf{OC_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1]{\mathbf{OC_3}}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 6 \\ 2 & -5 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_2 \leftarrow -\frac{1}{5} C_2]{\mathbf{OC_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 \leftarrow C_3 + 6C_2]{\mathbf{OC_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = C$

Definição: Diz-se que A é uma matriz equivalente por linhas (por colunas) a uma matriz B, se esta matriz se pode obter a partir de A, através de um número finito de operações elementares sobre as linhas (colunas) de A. Neste caso, usa-se a notação

$$A \xrightarrow[linhas]{} B \qquad (A \xrightarrow[colunas]{} B)$$

Exemplo: Relativamente às matrizes A, B e C do exemplo anterior, tem-se

$$A \xrightarrow[linhas]{} B \quad \text{e} \quad A \xrightarrow[colunas]{} C$$

Facilmente se prova que (resultados análogos para colunas):

① $A \xrightarrow[linhas]{} A$

② Se $A \xrightarrow[linhas]{} B$ então $B \xrightarrow[linhas]{} A$

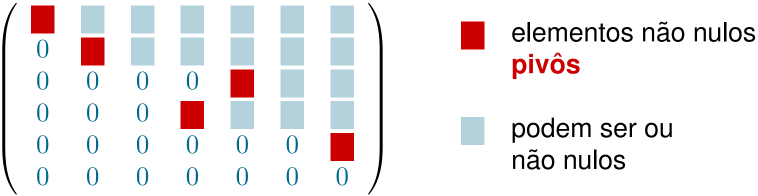
③ Se $A \xrightarrow[linhas]{} B$ e $B \xrightarrow[linhas]{} C$ então $A \xrightarrow[linhas]{} C$

Definição: O elemento a_{ik} de uma matriz $A = (a_{ij})$ diz-se um pivô se é o primeiro elemento não nulo da sua linha, i.e.,

$$a_{ik} \neq 0 \quad \text{e} \quad a_{ij} = 0,\ j = 1\ldots,k-1.$$

Uma linha nula não tem pivô.

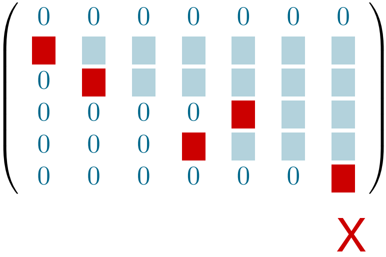
Exemplo:

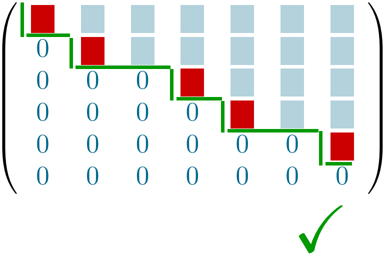


Definição: Diz-se que uma matriz $m \times n$ é uma **matriz em escada** ou tem a **forma em escada**, se:

1. Não há linhas totalmente nulas seguidas de linhas não nulas.
2. Se o pivô da linha i estiver na coluna k, então todos os elementos abaixo da posição i, nas colunas $1, \ldots, k$ são nulos.

Exemplo:





Teorema: *Toda a matriz A de ordem $m \times n$ é equivalente por linhas a uma matriz em escada.*

Processo de redução de uma matriz A à forma em escada

Passo 1: Se A é a matriz nula ou uma matriz linha, então A está na forma em escada e o processo termina.

Passo 2: Por troca de linhas, se necessário, construímos uma matriz B cuja primeira linha tem um pivô b_{1k}[3] com índice de coluna mínimo.

$$A \xrightarrow{\mathbf{OL_1}} B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ 0 & \cdots & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ 0 & \cdots & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \end{pmatrix} \\ \qquad\quad\;\; \uparrow \\ \qquad\quad\;\; k \end{array}$$

[3] Note-se que tal pivô existe, dado que estamos a supor $A \neq \mathbf{0}$.

Passo 3: Adicionando múltiplos convenientes da linha 1 às linhas $2, \ldots, m$, anulamos todos os elementos da coluna k, situados abaixo da posição 1.

$$B \xrightarrow[L_i \leftarrow L_i - \frac{b_{ik}}{b_{1k}} L_1]{\mathbf{OL_3}} C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \color{red}\blacksquare & \color{teal}\blacksquare & \cdots & \color{teal}\blacksquare \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \end{pmatrix}$$

Passo 4: "Repetir" o processo, considerando as linhas $2, \ldots, m$.

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \color{red}\blacksquare & \color{teal}\blacksquare & \cdots & \color{teal}\blacksquare \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \end{pmatrix}$$

Exemplo: Reduzir a matriz A à forma em escada.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Passo 1: A não é uma matriz nula nem uma matriz linha.

Passo 2:

$$A \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{\mathbf{OL_1}} B = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Passo 3:

$$B \xrightarrow[\substack{L_4 \leftrightarrow L_4 - L_1 \\ L_5 \leftrightarrow L_5 - 2L_1}]{\mathbf{OL_3}} C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Passo 4: Vamos repetir o processo, considerando as linhas 2 a 5 da matriz C.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A'}$$

Passo 1': A' não é uma matriz nula nem uma matriz linha.

Passo 2':

$$A \xrightarrow[linhas]{} B' = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Passo 3':

$$B' \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2]{\mathbf{OL_3}} C' = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Passo 4': Vamos repetir o processo, considerando as linhas 3 a 5 da matriz C'.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A''}$$

Passo 1": A'' não é uma matriz nula nem uma matriz linha.

Passo 2":

$$A \xrightarrow[linhas]{} C' \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{\mathbf{OL_1}} B'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Passo 3'':

$$C'' = B'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Passo 4': Vamos repetir o processo, considerando a linhas 4 e 5 da matriz C''.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A'''

Passo 1''': A''' é uma matriz nula, logo C'' é uma matriz em escada, equivalente por linhas à matriz A.

Definição: Seja A uma matriz de ordem $m \times n$ e seja E uma matriz em escada, equivalente por linhas a A. Chama-se **característica de A** ao número de linhas não nulas (número de pivôs) de E e denota-se por $\mathrm{car}(A)$.

Exemplo:

$$\mathrm{car}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{car}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Observação: Pode provar-se que se duas matrizes em escada E_1 e E_2 são equivalente por linhas a uma dada matriz A, então E_1 e E_2 têm necessariamente o mesmo numero de linhas não nulas.

Se A é uma matriz de ordem $m \times n$, então $\mathrm{car}(A) \leq m$ e $\mathrm{car}(A) \leq n$.

Exercício: Qual é a característica das seguintes matrizes 3×3?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definição: Diz-se que uma matriz $m \times n$ é uma **matriz em escada reduzida** ou que tem a **forma em escada reduzida**, se:

1. A matriz é uma matriz em escada.
2. Os pivôs são todos 1.
3. Os pivôs são os únicos elementos não nulos das suas colunas.

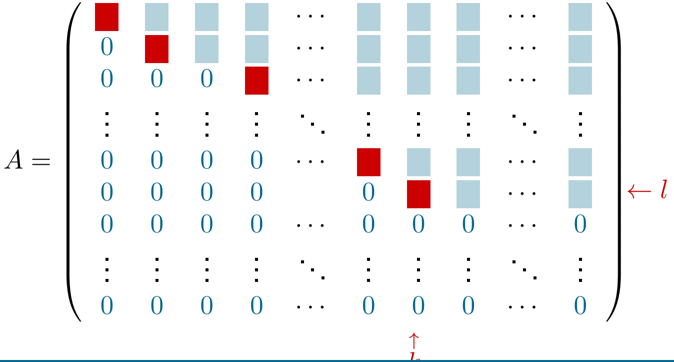
Exemplos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

X X X ✓

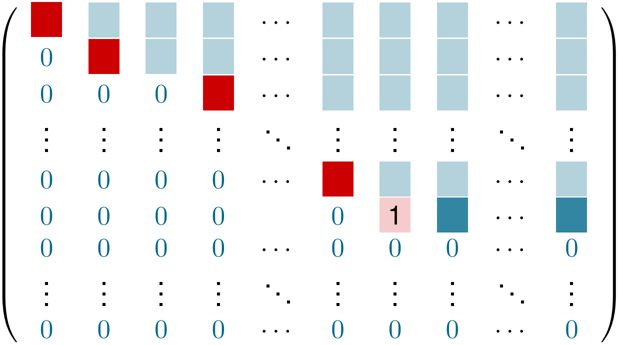
Teorema: *Toda a matriz A de ordem $m \times n$ é equivalente por linhas a uma única matriz em escada reduzida.*

Processo de redução de uma matriz em escada, não nula, à forma em escada reduzida



Passo 1: Seja l a última linha não nula da matriz em escada A e seja a_{lk} o seu pivô. Se $a_{lk} \neq 1$, multiplicar a linha l por $\frac{1}{a_{lk}}$ (para que o pivô a_{lk} seja =1). Se $l = 1$, o processo termina.

$$A \xrightarrow[L_l \leftarrow \frac{1}{a_{lk}} L_l]{\mathbf{OL_2}} B =$$



Passo 2: Adicionando múltiplos convenientes da linha l às linhas $1, \ldots, l-1$, anulamos todos os elementos da coluna k, situados acima da posição l.

$$B \xrightarrow[L_i \leftarrow L_i - a_{ik} L_l]{\mathbf{OL_3}} C = \begin{pmatrix} & & & & \cdots & & 0 & & \cdots & \\ 0 & & & & \cdots & & 0 & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & & \cdots & & 0 & & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Passo 3: "Repetir" o processo, considerando as linhas $1, \dots, l-1$.

.

$$\begin{pmatrix}
\blacksquare & \square & \square & \square & \cdots & \square & 0 & \square & \cdots & \square \\
0 & \blacksquare & \square & \square & \cdots & \square & 0 & \square & \cdots & \square \\
0 & 0 & 0 & \blacksquare & \cdots & \square & 0 & \square & \cdots & \square \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \blacksquare & 0 & \square & \cdots & \square \\
0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

Exemplo: Reduzir a matriz (em escada) à forma em escada reduzida

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 4 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A \xrightarrow[L_3\leftarrow\frac{1}{3}L_3]{\mathbf{OL_2}} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 4 & 6\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2\leftarrow L_2-6L_3\\ L_1\leftarrow L_1-L_3}]{\mathbf{OL_3}} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[L_2\leftarrow\frac{1}{1}L_2]{\mathbf{OL_2}} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[L_1\leftarrow L_1+L_2]{\mathbf{OL_3}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

2. SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

2.1 Introdução

Sistema de m equações lineares:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. .$$

x_j - incógnita

a_{ij} - coeficientes da incógnitas x_j

b_i - termo independente

- Se $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, o sistema diz-se homogéneo.
- Uma solução do sistema é um n-uplo ordenado de números que é solução das m equações do sistema.
- Um sistema diz-se
    1. impossível se não tem solução.
    2. possível e determinado se tem uma única solução.
    3. possível e indeterminado se tem mais do que uma solução.[4]

Obs: Um sistema homogéneo é sempre possível. (Porquê?)

[4] Pode mostrar-se que, se um sistema de equações lineares tem mais do que uma solução, então tem uma infinidade de soluções.

Exemplos

① $(1,1)$ é a única solução do sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

② O sistema homogéneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

tem uma infinidade de soluções.

① O sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

é impossível.

2.2 Método de Eliminação de Gauss

Definição: Dois sistemas de equações lineares dizem-se **equivalentes** se tiverem o mesmo conjunto de soluções.

Exemplos

1. Os sistemas

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

são equivalentes.

2. Os sistemas

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

não são equivalentes.

Operações elementares sobre as equações de um sistema

OE1: Troca da ordem de duas equações.

OE2: Multiplicação de uma equação por um número diferente de zero.

OE3: Soma de uma equação com um múltiplo de outra equação.

Teorema: *Se, sobre as equações de um sistema, efetuarmos um número finito de operações elementares, obtemos um sistema equivalente ao inicial.*

Sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. .$$

Forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Notação abreviada: $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$,

$A = (a_{ij})$ matriz simples do sistema,

$\boldsymbol{x} = (x_i)$ matriz das incógnitas,

$\boldsymbol{b} = (b_i)$ matriz dos termos independentes.

Matriz ampliada do sistema:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$$(A \ \ \boldsymbol{b}) \qquad\qquad (A \mid \boldsymbol{b})$$

Exemplo:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

matriz simples   matriz ampliada

Teorema: *O n-uplo $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sse a a matriz coluna $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ satisfaz $A\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{b}$.*

Demonstração: $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sse

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{array}\right. .$$

o que equivale a dizer

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \text{ou } A\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{b}.$$

Neste contexto, faz sentido considerar a solução do sistema, não como o n-uplo $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, mas sim como a matriz coluna $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ tal que $A\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{b}$.

Neste curso, referir-nos-emos às soluções de sistemas, quer na forma de n-uplos ordenados, quer na forma de matrizes coluna, conforme seja mais conveniente.

Exemplo: Considere novamente o sistema cuja matriz ampliada é

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

► $(-1,0,0,3)$ e $(1,1,0,0)$ são duas das soluções do sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \underset{\checkmark}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underset{\checkmark}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

► $(1,1,1,1)$ e $(0,0,0,0)$ não são soluções do sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underset{\mathsf{X}}{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underset{\mathsf{X}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Teorema: *Se* $(A \mid \boldsymbol{b}) \xrightarrow[linhas]{} (A' \mid \boldsymbol{b}')$ *então os sistemas*

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \text{e} \qquad A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$$

são equivalentes.

Exemplo:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[linhas]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, os seguintes sistemas são equivalentes

$$\left\{ \begin{aligned} x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 2 \end{aligned} \right. \qquad \text{e} \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 3 \\ -3x_3 &= -6 \end{aligned} \right.$$

Resolução de sistemas pelo Método de Eliminação de Gauss

▷ Transformar $(A \mid \boldsymbol{b})$ numa matriz equivalente em forma de escada.

Exemplo: $\begin{cases} y - 4z = 2 \\ x - y = -1 \\ -x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_3]{\mathbf{OL_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + L_1]{\mathbf{OL_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2]{\mathbf{OL_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Termina assim o processo de eliminação.

A solução do sistema pode agora obter-se, resolvendo, da última equação para a primeira, e substituindo os valores entretanto determinados em cada uma das equações a resolver - método de substituição.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} -x+2y-3z=4 \\ y-3z=3 \\ -z=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+2y\boldsymbol{-3}=4 \\ y\boldsymbol{-3}=3 \\ \boldsymbol{z=1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+\boldsymbol{12}\boldsymbol{-3}=4 \\ \boldsymbol{y=6} \\ \boldsymbol{z=1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x}=5 \\ \boldsymbol{y=6} \\ \boldsymbol{z=1} \end{cases}$$

Exemplo: $\begin{cases} y - 3z = 3 \\ x - y = -1 \\ -x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_3]{\mathbf{OL_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + L_1]{\mathbf{OL_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2]{\mathbf{OL_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} -x + 2y - 3z = 4 \\ y - 3z = 3 \end{cases}$$

Exemplo: (cont.)

$$\begin{cases} -x + 2y - 3z = 4 \\ y - 3z = 3 \end{cases}$$

z pode ter um valor arbitrário – diz-se por isso variável livre.

$$\begin{cases} -x + 2y - 3z = 4 \\ y - 3z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2(3 + 3z) - 3z = 4 \\ y = 3 + 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 3z \\ y = 3 + 3z \end{cases}$$

O sistema tem uma **infinidade** de soluções:

$$x = 2 + 3\alpha; y = 3 + 3\alpha; z = \alpha; \alpha \in \mathbb{R}$$

– **sistema possível, indeterminado** com grau de indeterminação 1 (número de variáveis livres).

Exemplo: $\begin{cases} y - 3z = 2 \\ x - y = -1 \\ -x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_3]{\mathbf{OL_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + L_1]{\mathbf{OL_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2]{\mathbf{OL_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$0x + 0y + 0z = -1$ $\rightarrow$ Sistema impossível

Exemplo: $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ 5z + 6w = 0 \\ az + 6w = b \\ y + 7z + 8w = 1 \end{cases}$ $\qquad a,\ b \in \mathbb{R}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & a & 6 & b \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_4]{\mathbf{OL_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & a & 6 & b \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{\mathbf{OL_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & a & 6 & b \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - \frac{a}{5} L_3]{\mathbf{OL_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6a}{5} + 6 & b \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[L_4 \leftarrow 5L_4]{\mathbf{OL_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6a + 30 & 5b \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ y + 7z + 8w = 1 \\ 5z + 6w = 0 \\ (-6a + 30)w = 5b \end{cases}$$

a≠5 o sistema tem solução **única** - **sistema possível e determinado**;

$$w = \frac{5b}{-6a+30};\ z = \frac{-b}{-a+5};\ y = \cdots;\ x = \cdots.$$

a=5 dois casos se podem dar:

- b=0

  w pode ter um valor arbitrário; o sistema tem uma **infinidade** de soluções - **sistema possível, indeterminado** com grau de indeterminação 1 (número de variáveis livres).

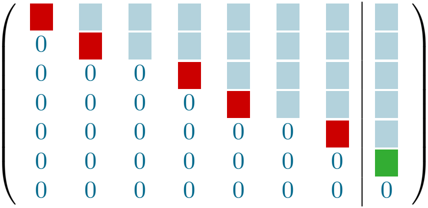
$$z = -\frac{6}{5}w;\ y = 1 + \frac{2}{5}w;\ x = -2 - \frac{6}{5}w;\ w \in \mathbb{R}$$

- b ≠0

  o sistema **não tem** solução - **sistema impossível**.

Teorema: $\operatorname{car}(A \mid b) = \operatorname{car} A$ *ou* $\operatorname{car}(A \mid b) = \operatorname{car} A + 1$.

Demonstração:



Notemos que, se $(A' \mid b')$ é uma matriz em forma de escada equivalente por linhas a $(A \mid b)$, então A' também está em forma de escada.Seja r o número de linhas não nulas de A', i.e.

$$\operatorname{car} A' = r = \operatorname{car} A.$$

Como a matriz $(A' \mid b')$ tem mais uma coluna que a matriz A', no máximo terá mais um pivô (na última coluna). Logo

$$\operatorname{car}(A \mid b) = \operatorname{car} A \quad \text{ou} \quad \operatorname{car}(A \mid b) = \operatorname{car} A + 1.$$

Discussão de um sistema

Consideremos um sistema de m equações lineares em n incógnitas da forma $Ax = b$. Se

$$r = \operatorname{car} A \qquad \text{e} \quad r' = \operatorname{car}(A \mid b),$$

então:

- se $r < r'$ - sistema impossível [SI]
- se $r = r'$ - sistema possível
  - se $r = n$ - sistema possível e determinado [SPD].
  - se $r < n$ - sistema possível e indeterminado [SPI] , com grau de indeterminação $n - r$.

Exemplo: A matriz ampliada do sistema do exemplo anterior, é equivalente à matriz em escada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6a+30 & 5b \end{array}\right)$$

Discussão do sistema:

$$\begin{cases} a \neq 5 \Rightarrow r = r' = n = 4 \Rightarrow \text{possível e determinado} \\ a = 5 \begin{cases} b \neq 0 \Rightarrow r' = 4, r = 3 \Rightarrow \text{impossível} \\ b = 0 \rightarrow r' = r = 3 < n \Rightarrow \text{possível e indeterminado} \\ \qquad \text{grau indeterminação} = n - r = 1 \end{cases} \end{cases}$$

2.3 Método de Gauss-Jordan

▷ Transformar $(A \mid b)$ numa matriz equivalente em forma de escada reduzida.

Exemplo: Retomando o exemplo $\begin{cases} y - 4z = 2 \\ x - y = -1 \\ -x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$

Forma em escada da matriz ampliada: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$

Forma em escada reduzida: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Solução do sistema: $\begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \\ z = 1 \end{cases}$

Teorema: *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. São equivalentes as seguintes afirmações:*

1. *A é invertível.*
2. $\operatorname{car} A = n$.
3. *I_n é a matriz em escada reduzida equivalente a A.*

Aplicação ao cálculo da inversa de uma matriz

A quadrada de ordem n invertível $\Rightarrow \operatorname{car}(A) = n \Rightarrow$ os sistemas $A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{e}_1$, $A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{e}_2, \ldots, A\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{e}_n$ ($\boldsymbol{e}_j \equiv$ coluna j de I_n) têm solução única.
Sejam $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ as soluções desses sistemas ($A\boldsymbol{c}_j = \boldsymbol{e}_j$) e seja

$$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c}_1 \ \boldsymbol{c}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{c}_n).$$

Tem-se

$$AC = A\,(\boldsymbol{c}_1 \ \boldsymbol{c}_2 \cdots \ \boldsymbol{c}_n) = (A\boldsymbol{c}_1 \ A\boldsymbol{c}_2 \cdots \ A\boldsymbol{c}_n) = (\boldsymbol{e}_1 \ \boldsymbol{e}_2 \cdots \ \boldsymbol{e}_n) = I_n.$$

Mas, $AC = I_n \Rightarrow CA = I_n \Rightarrow C = A^{-1}$ (ver folha de exercícios).

$$\Downarrow$$

A coluna j de A^{-1} é a solução do sistema de matriz ampliada $(A|\boldsymbol{e}_j)$.

Todos os sistemas têm a mema matriz simples. Podemos resolvê-los em simultâneo pelo **método de Gauss-Jordan**:

$$(A \mid \boldsymbol{e}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{e}_n) \xrightarrow[linhas]{} (I_n \mid \boldsymbol{c}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{c}_n)$$

$$\boxed{(A \mid I_n) \xrightarrow[linhas]{} (I_n | A^{-1})}$$

Exemplo: Calcular a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. DETERMINANTES

3.1 Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Chama-se determinante de A e representa-se por $\det A$ ou $|A|$ ao número definido do seguinte modo:

1. se $n = 1$, então
$$\det A = a_{11},$$
2. se $n > 1$, então
$$\det A = a_{11} \det M_{11} - a_{12} \det M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det M_{1n},$$
onde M_{1j} denota a matriz de ordem $n-1$ obtida de A retirando-lhe a linha 1 e a coluna j.

Determinante de uma matriz de ordem 2

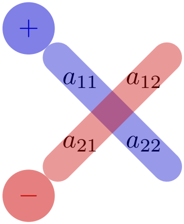
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \det M_{11} - a_{12} \det M_{12}$$

$$M_{11} = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad M_{12} = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- n=2



Exemplos

① $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$

② $\begin{vmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - i \times i = 2$

Determinante de uma matriz de ordem 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

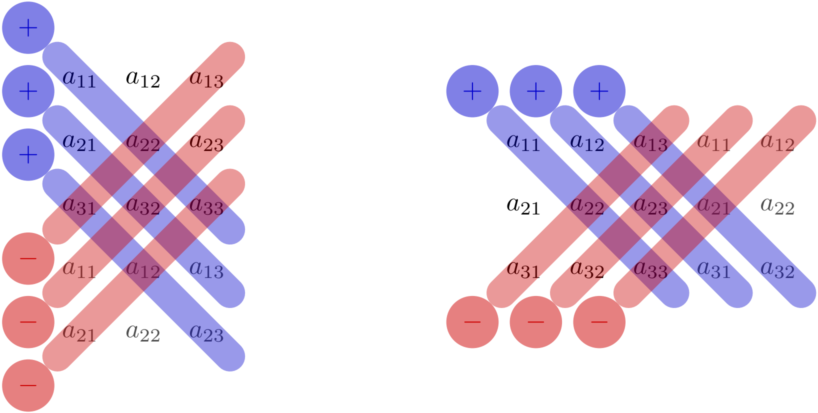
$$\det A = a_{11} \det M_{11} - a_{12} \det M_{12} + a_{13} \det M_{13}$$

$$M_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} M_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad M_{13} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

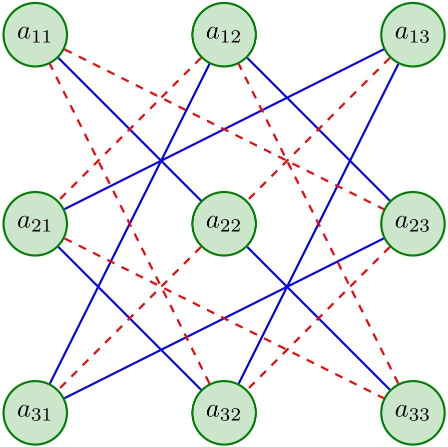
$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

REGRA DE SARRUS



$$
\begin{aligned}
\det A \quad = \quad & a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23} \\
& -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}
\end{aligned}
$$



$$\begin{aligned} \det A \quad = \quad & a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23} \\ & -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}$$

$$= 1 \times 5 \times 9 + 4 \times 8 \times 3 + 7 \times 2 \times 6 - 3 \times 5 \times 7 - 6 \times 8 \times 1 - 9 \times 2 \times 4$$

$$= 45 + 96 + 84 - 105 - 48 - 72 = 0$$

Definição: Seja A uma matriz de ordem n. Chama-se

1. menor do elemento a_{ij} de A ao número $\det M_{ij}$,
2. complemento algébrico do elemento a_{ij} de A e representa-se por A_{ij} ao número
$$(-1)^{i+j} \det M_{ij},$$

onde M_{ij} é a matriz de ordem $n-1$ que se obtém de A retirando-lhe a linha i e a coluna j.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

- menor do elemento a_{23}:
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = 1 \times 8 - 2 \times 7 = -6.$$
- complemento algébrico do elemento a_{23}: $(-1)^{2+3} \times (-6) = 6$

Teorema de Laplace:

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n. Então,

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{\ell+j} a_{\ell j} \, \det M_{\ell j} = \sum_{j=1}^{n} a_{\ell j} A_{\ell j}, , \qquad (1 \leq \ell \leq n).$$

linha ℓ

ou

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \, \det M_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik}, \qquad (1 \leq k \leq n).$$

coluna k

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Primeira coluna:

$$\det A = (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + (-1)^{4+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 + 2 = 4$$

Segunda linha:

$$\det A = 0 + (-1)^{2+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{2+4} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -1 + 5 = 4$$

3.2 PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

Propriedade 1: *Se A tem uma linha (ou coluna) nula, então*

$$\det A = 0$$

consequência imediata do Teorema de Laplace

Propriedade 2: *Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz triangular, então*

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\det I_n = ?$$

Propriedade 3:

$$\det A = \det A^T$$

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 64$$

- Propriedade 3 $\Longrightarrow$ Qualquer propriedade dos determinantes válida para linhas é também válida para colunas.

Propriedade 4:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{k1} & \alpha a_{k2} & \cdots & \alpha a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- Propriedade 4 $\Longrightarrow \quad \det(\alpha A) = \alpha^n \det A$

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 4 \times 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 4 \times 2 \times 8 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 64$$

Propriedade 5:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1}+\beta_{k1} & \cdots & \alpha_{kn}+\beta_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{k1} & \cdots & \beta_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- A Propriedade 5 NÃO significa que $\det(A+B) = \det A + \det B$

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix}$$

Propriedade 6: *Se A tiver duas linhas (ou colunas) iguais, então*

$$\det A = 0$$

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 7 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Propriedade 7: *O determinante de A não se altera se a uma linha (coluna) de A se adicionar um múltiplo de outra linha (coluna) de A.*

emonstração: Sejam $L_1, L_2, \cdots L_n$ as n linhas de A.

$$\begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_k + \alpha L_l \\ \vdots \\ L_l \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} \underset{\boxed{\text{P5}}}{=} \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_k \\ \vdots \\ L_l \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \alpha L_l \\ \vdots \\ L_l \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} \underset{\boxed{\text{P4}}}{=} \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_k \\ \vdots \\ L_l \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} + \alpha \underbrace{\begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_l \\ \vdots \\ L_l \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix}}_{\boxed{\text{P6}}\ 0}$$

Propriedade 8: *O determinante de A muda de sinal quando se trocam entre si duas linhas (colunas)*

Demonstração:

$$\begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_k \\ \vdots \\ L_l \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_l \\ \vdots \\ L_k \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} \underset{\boxed{P7}}{=} \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_k \\ \vdots \\ L_l + L_k \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_l \\ \vdots \\ L_k + L_l \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} \underset{\boxed{P5}}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_k + L_l \\ \vdots \\ L_k + L_l \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix}}_{\boxed{P6}\ 0}$$

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\overset{\boxed{\text{P8}}}{=\!=}} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\overset{\boxed{\text{P7}}}{=\!=}} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} \overset{\boxed{\text{P2}}}{=\!=} -7$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{\overset{\boxed{\text{P7}}}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\boxed{\text{P6}}}{=\!=} 0$$

Método de eliminação de Gauss para o cálculo de determinantes

O método de eliminação de Gauss permite transformar uma matriz A numa matriz em forma de escada E. Sendo a matriz A quadrada, a matriz E é triangular superior.

Processo:

1. Usar operações elementares para transformar A em E.
2. Obter a relação entre $\det A$ e $\det E$, considerando a aplicação das Propriedades 4, 7 e 8.
3. Obter $\det E$ por aplicação da Propriedade 2.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_1}{\overset{\boxed{\text{P7}}}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2}{\overset{\boxed{\text{P7}}}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{\overset{\boxed{\text{P8}}}{=\!=}} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - 4L_3}{\overset{\boxed{\text{P7}}}{=\!=}} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{vmatrix} \overset{\boxed{\text{P2}}}{=\!=} -(-14) = 14$$

Propriedade 9: *Uma matriz é invertível sse* $\det A \neq 0$.

Exemplo: A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ é invertível, uma vez que $\det A = 14 \neq 0$.

Propriedade 10:

$$\det(AB) = \det A \det B$$

- Propriedade 10 $\Longrightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

3.3 APLICAÇÕES DOS DETERMINANTES

▷ Cálculo da inversa

Definição: Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n ($n \geq 2$) e seja A_{ij} o complemento algébrico do elemento a_{ij} de A.

Chama-se matriz dos complementos algébricos de A, e representa-se por $\hat{A}$, à matriz que se obtém de A substituindo cada elemento a_{ij} pelo seu complemento algébrico A_{ij}, i.e.

$$\hat{A} = (A_{ij}).$$

Chama-se matriz adjunta de A, e representa-se por $\operatorname{adj} A$, à transposta da matriz dos complementos algébricos, i.e.

$$\operatorname{adj} A = \hat{A}^T.$$

Exemplo: Se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

então

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -9 & -2 \end{pmatrix}.$$

Teorema: *Seja A uma matriz invertível. Então,*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

Demonstração: Ver folha de exercícios.

Exemplo: Seja A a matriz do exemplo anterior.
Como $\det A = 9$ (Verifique!), a matriz A é invertível e

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -9 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & 0 & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & -1 & -\frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

▷ REGRA DE CRAMER PARA RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA

Teorema: *Seja $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ um sistema de n equações em n incógnitas. Então,*

① *se* $\det A \neq 0$*, o sistema* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *tem solução única;*

② *se* $\det A \neq 0$*, a solução* $\boldsymbol{x} = (x_i)$ *pode ser obtida de*

$$x_i = \frac{\det A^{(i)}}{\det A}, \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

onde $A^{(i)}$ *denota a matriz que resulta de* A *substituindo a coluna* i *pela matriz coluna* $\boldsymbol{b}$ *dos termos independentes.*

Exemplo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ \quad\quad x_2 + x_3 = -1 \\ \quad -x_1 + x_2 = -1 \end{cases}. \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $\det A = -4, \ \det A^{(1)} = -4, \ \det A^{(2)} = 0, \ \det A^{(3)} = 4$, resulta

$$x_1 = \frac{-4}{-4} = 1, \qquad x_2 = \frac{0}{-4} = 0, \qquad x_3 = \frac{4}{-4} = -1.$$

4. ESPAÇOS VETORIAIS

4.1 O espaço $\mathbb{R}^n$

Seja $n \in \mathbb{N}$. O conjunto dos n-uplos ordenados de números reais, isto é, o conjunto dos elementos da forma

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R}$$

é designado por $\mathbb{R}^n$.

Dois elementos $\boldsymbol{x} = (x_i)$ e $\boldsymbol{y} = (y_i)$ de $\mathbb{R}^n$ dizem-se iguais se e só se as componentes homólogas são iguais, isto é,

$$x_i = y_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Notação:

- o elemento de $\mathbb{R}^n$ cujas componentes são todas iguais a zero representa-se por $\mathbf{0}$.
- Se $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $-\boldsymbol{x}$ representa o elemento de $\mathbb{R}^n$ cujas componentes são os simétricos das componentes homólogas de $\boldsymbol{x}$, isto é, $-\boldsymbol{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

Em $\mathbb{R}^n$ definimos duas operações:

① Adição

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

② Multiplicação por um número real

$$\alpha\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha\, x_1, \alpha\, x_2, \ldots, \alpha\, x_n).$$

Teorema: *Sejam* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ *elementos de* $\mathbb{R}^n$ *e sejam* α, β *números reais. Então*

1. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$.
2. $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$.
3. $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$.
4. $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$.
5. $\alpha\,(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\,\boldsymbol{x}+\alpha\,\boldsymbol{y}$.
6. $(\alpha+\beta)\,\boldsymbol{x}=\alpha\,\boldsymbol{x}+\beta\,\boldsymbol{x}$.
7. $\alpha\,(\beta\,\boldsymbol{x})=(\alpha\,\beta)\,\boldsymbol{x}$.
8. $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

Porque o conjunto $\mathbb{R}^n$ algebrizado com as operações de adição e multiplicação por um número real satisfaz as propriedades listadas no teorema anterior diz-se que $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial real.

Os elementos de $\mathbb{R}^n$ são chamados vetores do espaço $\mathbb{R}^n$.

$\mathbf{0}$ é designado por vetor nulo de $\mathbb{R}^n$.

Os espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ adquirem um significado geométrico quando "identificados" respetivamente, com o conjunto dos vetores de um plano, e com o conjunto dos vetores do espaço ordinário.

4.2 Espaço vetorial - definição

Seja V um conjunto no qual estão definidas duas operações:

① uma que designamos por adição e que associa a cada par $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ de elementos de V, um e um só elemento de V, representado por

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$$

② outra operação, que designamos por multiplicação escalar e que associa a cada número real α e cada elemento $\boldsymbol{u}$ de V, um e um só elemento de V, representado por

$$\alpha \,.\, \boldsymbol{u} \quad \text{ou} \quad \alpha\, \boldsymbol{u}$$

Definição: Diz-se que V é um espaço vetorial real se estas operações satisfazem as seguintes propriedades:

1. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}.$ comutatividade da adição
2. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V,\ \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}.$ associatividade da adição
3. $\exists \mathbf{0}_V \in V\ \forall \boldsymbol{u} \in V : \boldsymbol{u} + \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}.$
   existência de elemento neutro da adição
4. $\forall \boldsymbol{u} \in V \exists \boldsymbol{u}' \in V :\ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}' = \mathbf{0}_V = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}.$
   existência de elemento simétrico da adição
5. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall \boldsymbol{u} \in V,\ (\alpha + \beta)\,\boldsymbol{u} = \alpha\,\boldsymbol{u} + \beta\,\boldsymbol{u}.$
   distributividade da multiplicação escalar relativamente à adição em $\mathbb{R}$
6. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V,\ \alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha\,\boldsymbol{u} + \alpha\,\boldsymbol{v}.$
   distributividade da multiplicação escalar relativamente à adição em V
7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall \boldsymbol{u} \in V,\ (\alpha\,\beta)\,\boldsymbol{u} = \alpha(\beta\,\boldsymbol{u}).$
   associatividade mista da multiplicação escalar
8. $\forall \boldsymbol{u} \in V,\ \mathbf{1}\,.\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}.$

Exemplos

1. O conjunto $\mathbb{R}^{m\times n}$ das matrizes reais de ordem $m \times n$, com as operações usuais de adição de matrizes e de multiplicação por um número, é um espaço vetorial real.

2. O conjunto $\mathcal{P}_n(x)$ dos polinómios, na variável x, com coeficientes reais, de grau inferior ou igual a n, com $n \in \mathbb{N}_0$, isto é,

$$\mathcal{P}_n(x) = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 : \ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\},$$

é um espaço vetorial real para a adição usual de polinómios e multiplicação de um polinómio por um número real.

E o conjunto $\{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 : \ a_i \in \mathbb{R}, \ a_n \neq 0\}$?

Os elementos de um espaço vetorial chamam-se vetores e os elementos de $\mathbb{R}$ são chamados escalares.

Nota: Os espaços vetoriais que definimos são espaços vetoriais reais porque os escalares usados na multiplicação escalar são números reais; existem também espaços vetoriais complexos, quando os escalares forem números complexos (e até espaços em que os escalares pertencem a outros conjuntos que não $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Como, neste curso, consideramos apenas espaços vetoriais reais, quando falarmos em espaço vetorial, tal deverá ser entendido com o significado de espaço vetorial real .

- Os espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n\times 1}$ e $\mathbb{R}^{1\times n}$

$\mathbb{R}^n$

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

$\mathbb{R}^{n\times 1}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

Os espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n\times 1}$ e $\mathbb{R}^{1\times n}$ são “o mesmo”, pelo que não os distinguiremos e falaremos sempre em $\mathbb{R}^n$.

Teorema: *Seja V um espaço vetorial.*

1. *O elemento neutro para a adição é único (representamo-lo por $\mathbf{0}_V$ ou apenas $\mathbf{0}$).*
2. *Para cada $\boldsymbol{v} \in V$, o simétrico de $\boldsymbol{v}$ é único (representamo-lo por $-\boldsymbol{v}$).*
3. *Para quaisquer vetores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ e quaisquer escalares α, β, tem-se*
   - $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \Rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$
   - $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u} \Rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$
   - $\alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}$
   - $0 \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$
   - $(-\alpha)\boldsymbol{v} = \alpha(-\boldsymbol{v}) = -(\alpha \boldsymbol{v})$; *em particular,* $(-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$
   - $\alpha \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = 0$ *ou* $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$
   - $\alpha \boldsymbol{u} = \alpha \boldsymbol{v}, \alpha \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$
   - $\alpha \boldsymbol{v} = \beta \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = \beta$

Demonstração: Como exercício.

Definição: Um subconjunto não vazio U de um espaço vetorial V é chamado um subespaço vetorial (ou apenas subespaço) de V se

1. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U, \; \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \; \forall \boldsymbol{u} \in U, \; \alpha\, \boldsymbol{u} \in U$.

Exemplos

- O conjunto $\mathcal{S}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.
- O conjunto $\mathcal{S}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Observação: Um subespaço de V é, ele próprio, um espaço vetorial (para as operações nele naturalmente definidas por ser um subconjunto de V).

Definição: Sejam $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ vetores de um espaço vetorial V.
Diz-se que $\boldsymbol{v} \in V$ é **combinação linear** dos vetores $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ se

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n,$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.
Os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ dizem-se coeficientes da combinação linear.

Exemplos

1. O vetor $\boldsymbol{v} = (3, 0)$ de $\mathbb{R}^2$ é combinação linear dos vetores $\boldsymbol{u}_1 = (5, -2)$ e $\boldsymbol{u}_2 = (1, -1)$, uma vez que

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 - 2\,\boldsymbol{u}_2.$$

2. O vetor $\boldsymbol{v} = (3, 0)$ de $\mathbb{R}^2$ não é combinação linear dos vetores $\boldsymbol{u}_1 = (-2, 2)$ e $\boldsymbol{u}_2 = (1, -1)$. (Porquê?)

Teorema: *Se $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ são vetores de um espaço vetorial V, então o conjunto U formado por todas as combinações lineares destes vetores é um subespaço vetorial de V.*

Demonstração:

① U é não vazio, pois $\mathbf{0} = 0\,\boldsymbol{v}_1 + 0\,\boldsymbol{v}_2 + \cdots + 0\,\boldsymbol{v}_n$., i. e. $\mathbf{0} \in U$

② Se $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$, isto é, se $\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n$ e $\boldsymbol{v} = \beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \beta_n \boldsymbol{u}_n$, então

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} &= (\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n) + (\beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \beta_n \boldsymbol{u}_n) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1)\boldsymbol{u}_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\boldsymbol{u}_n. \end{aligned}$$

Logo $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$, porque é combinação linear de $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$.

③ Também

$$\alpha\,\boldsymbol{u} = \alpha(\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n) = (\alpha\,\alpha_1)\,\boldsymbol{u}_1 + \cdots + (\alpha\,\alpha_n)\,\boldsymbol{u}_n$$

pertence a U.

Definição: O subespaço formado por todas as combinações lineares dos vetores $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ chama-se subespaço gerado pelos vetores $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ e denota-se por $\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$, i.e.

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle = \{\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n : \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

Se $U = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$, diz-se que $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ geram U ou são geradores de U.

Exemplos

1. $\langle (1,0) \rangle = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : b = 0\}$
2. $\langle (1,1), (2,3) \rangle = \mathbb{R}^2$
3. $\langle (1,1,1), (1,0,1) \rangle = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = c\}$

O conjunto

$$S = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = 2b + c\}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^3$. Indique um conjunto de geradores deste subespaço.

Teorema: *Sejam $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ e $\boldsymbol{v}$ vetores de um espaço vetorial V. Então, o vetor $\boldsymbol{v}$ é combinação linear de $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ se e só se*

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v} \rangle .$$

Demonstração:

- Suponhamos que $\boldsymbol{v}$ é combinação linear de $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ e mostremos que

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v} \rangle .$$

Sejam

$$U = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle \quad \text{e} \quad U' = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v} \rangle$$

Se $\boldsymbol{x} \in U$ então

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n + 0\,\boldsymbol{v},$$

logo $\boldsymbol{x} \in U'$, i.e. $U \subset U'$.

Se $\boldsymbol{y} \in U'$ então

$$\boldsymbol{y} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n + \alpha_{n+1} \boldsymbol{v}$$

onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$. Como $\boldsymbol{v}$ é combinação linear de $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ então

$$\boldsymbol{v} = \beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \beta_n \boldsymbol{u}_n,$$

com $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$. Donde, substituindo,

$$\boldsymbol{y} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n + \alpha_{n+1}(\beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \beta 2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \beta_n \boldsymbol{u}_n)$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_{n+1}\beta_1)\, \boldsymbol{u}_1 + (\alpha_2 + \alpha_{n+1}\beta_2)\, \boldsymbol{u}_2 + \cdots + (\alpha_n + \alpha_{n+1}\beta_n)\, \boldsymbol{u}_n$$

ou seja $\boldsymbol{y} \in U$, i.e. $U' \subset U$.

Como $U' \subset U$ e $U \subset U'$, conclui-se que $U = U'$.

- Para mostrar que, se $\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v} \rangle$, então $\boldsymbol{v}$ é combinação linear de $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ basta notar que $\boldsymbol{v} \in \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v} \rangle$ (porquê?), donde $\boldsymbol{v} \in \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$, ou seja, $\boldsymbol{v}$ é combinação linear de $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$.

Teorema:

Sejam $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ *vetores de um espaço vetorial* V *e sejam* $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ *vetores obtidos de* $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ *por uma das seguintes operações:*

1. *troca da ordem de dois vetores;*
2. *multiplicação de um dos vetores por um escalar não nulo;*
3. *substituição de um vetor pela sua soma com um múltiplo de outro.*

Tem-se então

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle .$$

Demonstração: ver folha de exercícios.

4.3 Bases e dimensão

Definição: Os vetores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ de um espaço vetorial V dizem-se linearmente independentes se só for possível escrever o vetor nulo como combinação linear de $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ considerando todos os coeficientes iguais a zero, i.e. se tivermos

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Os vetores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ dizem-se linearmente dependentes se não são linearmente independentes.

Exemplos

1. Os vetores de $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{u} = (1, 2)$ e $\boldsymbol{v} = (2, 4)$ são linearmente dependentes.
2. Os vetores de $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{u} = (1, 2, 0)$ e $\boldsymbol{v} = (1, 2, 4)$ são linearmente independentes.
3. Os vetores de $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{u} = (1, 2, 0)$, $\boldsymbol{v} = (1, 2, 4)$ e $\boldsymbol{w} = (1, 0, 0)$ são linearmente independentes.

Teorema: *Os vetores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ ($n \geq 2$) de um espaço vetorial V são linearmente dependentes se e só se (pelo menos) um dos vetores puder ser escrito combinação linear dos restantes.*

Demonstração:

- Sejam $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ linearmente dependentes.

Então pode ter-se

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

com pelo menos um dos coeficientes diferente de zero.

Suponhamos que $\alpha_1 \neq 0$.[5] Então podemos escrever

$$\boldsymbol{v}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \boldsymbol{v}_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \boldsymbol{v}_n.$$

Donde, $\boldsymbol{v}_1$ é combinação linear dos restantes vetores.

[5] A demonstraçao será totalmente análoga se considerarmos outro escalar não nulo.

► Suponhamos agora que um dos vetores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, por exemplo $\boldsymbol{v}_1$, é combinação linear dos restantes, i.e.

$$\boldsymbol{v}_1 = \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n.$$

Vem então

$$\boldsymbol{v}_1 - \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 - \cdots - \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

Tem-se assim uma combinação linear nula com pelo menos um dos coeficientes diferente de zero (o de $\boldsymbol{v}_1$, que vale 1), pelos que os vetores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ são linearmente dependentes.

Exemplos

1. Os vetores de $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{u} = (1, 2)$ e $\boldsymbol{v} = (2, 4)$ são linearmente dependentes, porque $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{u}$.
2. Os vetores de $\mathbb{R}^3$, $u = (1, 2, 0)$, $\boldsymbol{v} = (1, 2, 4)$ e $\boldsymbol{w} = (3, 6, 4)$ são linearmente dependentes, porque $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$.

Teorema: *Se $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ são vetores linearmente independentes de um espaço vetorial V e $\boldsymbol{v}$ não é combinação linear de $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, então $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}$ são linearmente independentes.*

Demonstração:

Consideremos

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n + \alpha_{n+1} \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

e mostremos que terá de ser $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \alpha_{n+1} = 0$.
Se α_{n+1} fosse diferente de zero, poder-se-ia escrever $\boldsymbol{v}$ como combinação linear de $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, o que iria contra a hipótese. Logo, temos de ter $\alpha_{n+1} = 0$. Mas então, ficamos com

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}.$$

Como, por hipótese, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ são vetores linearmente independentes, isto implica que terá de ser $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Teorema:

Sejam $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ vetores de um espaço vetorial V e sejam $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ vetores obtidos de $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ por uma das seguintes operações:

1. *troca da ordem de dois vetores;*
2. *multiplicação de um dos vetores por um escalar não nulo;*
3. *substituição de um vetor pela sua soma com um múltiplo de outro.*

Os vetores $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ são linearmente independentes (dependentes) sse $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ são linearmente independentes (dependentes).

Demonstração: ver folha de exercícios.

Definição: Uma sequência de vetores $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ de um espaço vetorial V é uma base de V se os vetores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ são linearmente independentes e geram V.

Exemplos

1. Os vetores de $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{u} = (1, 0)$ e $\boldsymbol{v} = (0, 1)$ são linearmente independentes e geram $\mathbb{R}^2$, logo $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.
2. Os vetores de $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{u} = (1, 0)$ e $\boldsymbol{v} = (2, 0)$ não são linearmente independentes nem geram $\mathbb{R}^2$, logo $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$.
3. O vetor de $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{u} = (1, 0)$ é linearmente independente, mas não gera $\mathbb{R}^2$, logo $(\boldsymbol{u})$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$.
4. Os vetores de $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{u} = (1, 0)$, $\boldsymbol{v} = (0, 1)$ e $\boldsymbol{w} = (1, 2)$ geram $\mathbb{R}^2$, mas não são linearmente independentes, logo $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Exemplos

1. A sequência $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, com

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

   é uma base de $\mathbb{R}^n$.

2. A sequência $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ é uma base do espaço $\mathcal{P}_n(x)$ dos polinómios, na variável x, de grau menor ou igual a n.

3. $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ é uma base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Teorema:

Seja V um espaço vetorial. Se $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ geram V e $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ são vetores de V linearmente independentes, então $m \geq n$.

Corolário: *Se um espaço vetorial V tem uma base com n elementos, então todas as bases de V têm n elementos.*

Demonstração:
Seja $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ uma base de V e seja $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ uma outra base de V. Então,

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{ll}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n) \text{ base} & \Rightarrow \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \text{ geram } V \\ (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m) \text{ base} & \Rightarrow \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \text{ lin. indep.}\end{array}\right\} \Rightarrow n \geq m \\ \\ \left.\begin{array}{ll}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n) \text{ base} & \Rightarrow \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \text{ lin. indep.} \\ (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m) \text{ base} & \Rightarrow \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \text{ geram } V\end{array}\right\} \Rightarrow m \geq n\end{array}\right\} \Rightarrow m = n$$

Definição: Se V é um espaço vetorial que admite uma base com n elementos, diz-se que V tem **dimensão** n e escreve-se $\dim V = n$.

Observação: Se $V = \{\,\mathbf{0}\,\}$, considera-se que $\emptyset$ é base de V e que $\dim V = 0$.

Exemplos

1. $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ $\qquad \dim \mathbb{R}^n = ?$

2. $\dim \mathbb{R}^{2\times 2} = 4$ $\qquad \dim \mathbb{R}^{m\times n} = ?$

3. $\dim \mathcal{P}_2(x) = 3$ $\qquad \dim \mathcal{P}_n(x) = ?$

4. $B = ((-1,1,0),(-1,0,1))$ é uma base do subespaço

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\},$$

logo $\dim S = 2$.

Corolário: *Seja V um espaço vetorial de dimensão n e sejam $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ vetores de V.*

1. *Se $p < n$, então $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ não geram V.*
2. *Se $p > n$, então $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ não são linearmente independentes.*

Dito de outro modo: num espaço de dimensão n, o número mínimo de geradores é n e o número máximo de vetores linearmente independentes é n.

Demonstração: De imediato, tendo em conta o resultado do teorema anterior, a definição de dimensão e a definição de base.

Teorema: *Seja V um espaço vetorial de dimensão n.*

1. *Se $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ geram V, então $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ é uma base de V.*
2. *Se $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ são vetores de V linearmente independentes, então $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ é uma base de V.*

Demonstração: Ver folha de exercícios.

Exemplo: Os vetores $\boldsymbol{u} = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{v} = (1, 1, 0)$ e $\boldsymbol{w} = (1, 0, 0)$ são 3 vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$; como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, eles constituem uma base deste espaço.

Para que valores de k os vetores $\boldsymbol{u} = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{v} = (k, -1, -k)$ e $\boldsymbol{w} = (1, k, 1)$ constituem uma base de $\mathbb{R}^3$?

4.4 Matrizes e espaços vetoriais

Sejam A e B matrizes reais de ordem $m \times n$ tais que

$$A \xrightarrow[linhas]{} B.$$

Consideremos as linhas de A e de B como vetores de $\mathbb{R}^n$.
Relembre que:

1. As linhas de A geram o mesmo subespaço de $\mathbb{R}^n$ que as linhas de B.
2. As linhas de A são linearmente independentes sse as linhas de B são linearmente independentes.

Teorema: *As linhas não nulas de uma matriz com a forma em escada são linearmente independentes.*

Aplicações

Sejam dados m vetores $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ de $\mathbb{R}^n$.

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_m \end{pmatrix} \xrightarrow[linhas]{} A' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}'_1 \\ \boldsymbol{v}'_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}'_m \end{pmatrix}$$

A' com forma em escada

① Verificar se os vetores são linearmente independentes

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ são linearmente independente sse A' não tem linhas nulas

sse $\boldsymbol{v}'_m \neq \mathbf{0}$

sse $\operatorname{car}(A) = m$

Exemplos

1. Os vetores $\boldsymbol{u}_1 = (1,2,3)$, $\boldsymbol{u}_2 = (3,2,1)$ e $\boldsymbol{u}_3 = (1,0,-1)$ são linearmente dependentes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Os vetores $\boldsymbol{v}_1 = (1,2,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,2,1)$ e $\boldsymbol{v}_3 = (1,0,1)$ são linearmente independentes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

② Determinar uma base e a dimensão de $\mathcal{V} = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle$

$$\boxed{\text{Sendo } r = \operatorname{car}(A), \quad (\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_r) \text{ é uma base de } \mathcal{V}}$$

$$\boxed{\dim \mathcal{V} = \operatorname{car}(A)}$$

Exemplos

1.

$$\mathcal{V}_1 = \langle (1,2,3), (3,2,1), (1,0,-1) \rangle$$

$$\dim \mathcal{V}_1 = 2 \qquad \text{e} \qquad ((1,2,3),(0,1,2)) \text{ é uma base de } \mathcal{V}_1$$

2.

$$\mathcal{V}_2 = \langle (1,2,3), (3,2,1), (1,0,1) \rangle$$

$$\dim \mathcal{V}_2 = 3 \qquad \text{e} \qquad ((1,2,3),(0,1,2),(0,0,1)) \text{ é uma base de } \mathcal{V}_2$$

③ Verificar se $\boldsymbol{v} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle$

$$\boldsymbol{v} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle \text{ sse } \operatorname{car} A = \operatorname{car} \begin{pmatrix} A \\ \hline \boldsymbol{v} \end{pmatrix}$$

Exemplos

1. $(1, 0, -1) \in \langle (1, 2, 3), (3, 2, 1) \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $(1, 0, 1) \notin \langle (1, 2, 3), (3, 2, 1) \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.5 Espaços associados a matrizes

Definição:

Seja A uma matriz real de ordem $m \times n$.

1. Chama-se espaço das linhas de A e representa-se por $\mathcal{L}(A)$, ao subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas m linhas de A.
2. Chama-se espaço das colunas de A e representa-se por $\mathcal{C}(A)$, ao subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado pelas n colunas de A.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}(A) = \langle (1,-1,1,0), (2,-1,3,1), (3,-2,4,1) \rangle$$

$$\mathcal{C}(A) = \langle (1,2,3), (-1,-1,-2), (1,3,4), (0,1,1) \rangle$$

$$A \xrightarrow[linhas]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim \mathcal{L}(A) = 2$

Base $\mathcal{L}(A)$: $((1,-1,1,0),(0,1,1,1))$

$$A^T \xrightarrow[linhas]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim \mathcal{C}(A) = 2$

Base $\mathcal{C}(A)$: $((1,2,3),(0,1,1))$

É possível, conhecendo uma matriz em escada, equivalente por linhas a A, determinar simultaneamente uma base para $\mathcal{L}(A)$ e uma base para $\mathcal{C}(A)$?

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_m \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{linhas}]{} A' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}'_1 \\ \boldsymbol{v}'_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}'_m \end{pmatrix}$$

A' matriz em escada

- Uma base para o espaço das linhas de A é constituída pelas linhas não nulas de A'.
- Uma base para o espaço das colunas de A é constituída pelas colunas de A que correspondem às colunas de A' que contêm pivôs- colunas principais.

Exemplo:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ \uparrow \quad \uparrow \qquad\qquad\quad \end{array} \xrightarrow[\text{linhas}]{} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \uparrow \quad \uparrow \qquad\qquad\quad \end{array}$$

Base $\mathcal{L}(A)$:
$((1,-1,1,0),(0,1,1,1))$

Base $\mathcal{C}(A)$:
$((1,2,3),(-1,-1,-2))$

Teorema: $\dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = \operatorname{car} A$

Observação: Definições equivalentes de característica de A:

1. número de linhas não nulas de qualquer matriz em forma de escada, equivalente por linhas a A;
2. dimensão do espaço das linhas de A;
3. dimensão do espaço das colunas de A;
4. número (máximo) de linhas linearmente independentes de A ;
5. número (máximo) de colunas linearmente independentes de A

Teorema: *Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. O sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tem solução se e só se $\boldsymbol{b} \in \mathcal{C}(A)$.*

Demonstração: O sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tem solução sse existe $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ tal que $A\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{b}$, ou seja, sse tivermos $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$, onde $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ são as n colunas da matriz A. Tal é equivalente a ter-se

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b},$$

o que equivale a dizer que $\boldsymbol{b} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \rangle = \mathcal{C}(A)$.

Corolário:

$$\boldsymbol{v} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \rangle \Leftrightarrow \operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A|\boldsymbol{v}),$$

onde A é a matriz com os vetores $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ como colunas.

Teorema: *Seja $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ um sistema homogéneo de m equações em n incógnitas. O conjunto de soluções deste sistema constitui um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Ver folha de exercícios.

Definição: Dada uma matriz real de ordem $m \times n$, chama-se espaço nulo ou núcleo de A, e representa-se por $\mathcal{N}(A)$, ao subespaço de $\mathbb{R}^n$ formado pelas soluções do sistema $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Exemplo: $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -3 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{N}(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^6 : A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

$$A \xrightarrow[linhas]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_6 - x_5 \\ x_3 = -x_6 \\ x_4 = x_6 - x_5 \end{cases}$$

SPI g.i. 6-4=2

$$\mathcal{N}(A) = \{(0, \beta - \alpha, -\beta, \beta - \alpha, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{N}(A) = \langle (0, -1, 0, -1, 1, 0), (0, 1, -1, 1, 0, 1) \rangle$$

$$\dim \mathcal{N}(A) = 2$$

$$\text{car}\, A = 4$$

Teorema: *Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Então*

$$\dim \mathcal{N}(A) = n - \operatorname{car} A$$

Exemplo: Seja $A \in \mathbb{R}^{10\times 20}$ uma matriz tal que $\operatorname{car} A = 6$. Então

$$\dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = \operatorname{car} A = 6$$

$$\dim \mathcal{N}(A) = 20 - 6 = 14$$

$$\dim \mathcal{N}(A^T) = 10 - 6 = 4$$

5. TRANSFORMAÇÕES LINEARES

5.1 Introdução

Definição: Sejam E e F dois espaços vetoriais reais e seja $f : E \to F$ uma aplicação de E em F. Diz-se que f é uma transformação linear ou aplicação linear se satisfaz as duas condições seguintes:

① $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in E,\ f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$;

② $\forall \boldsymbol{u} \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ f(\alpha\boldsymbol{u}) = \alpha f(\boldsymbol{u})$.

Exemplos de transformações lineares

- $f : E \to F$ definida por $f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_F$ aplicação nula
- $f : E \to E$ definida por $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$ aplicação identidade

Exemplos de transformações lineares (continuação)

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (2x + z, -4y)$
- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $f(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$,

  A matriz real de ordem $m \times n$

Exemplos de aplicações que não são lineares

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x, y, x + y + 1)$
- $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ definida por $f(A) = \det A$

Teorema: *Sejam E e F espaços vetoriais reais e $f : E \to F$ uma transformação linear. Então:*

1. $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$
2. $\forall \boldsymbol{u} \in E, f(-\boldsymbol{u}) = -f(\boldsymbol{u})$
3. $\forall \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in E,\ \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R},\ f(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{u}_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(\boldsymbol{u}_i)$

Demonstração:

1. $f(\mathbf{0}_E) = f(0.\mathbf{0}_E) = 0.f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$.

2. $f(-\boldsymbol{u}) = f((-1)\boldsymbol{u}) = (-1)f(\boldsymbol{u}) = -f(\boldsymbol{u})$.

3. Indução sobre k.

5.2 Imagem e núcleo

Definição: Sejam E e F dois espaços vetoriais e seja $f : E \to F$ uma transformação linear.

Chama-se núcleo de f, e representa-se por $\operatorname{Nuc} f$, ao conjunto

$$\operatorname{Nuc} f = \{\boldsymbol{u} \in E : f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_F\}.$$

Chama-se imagem de f (ou contradomínio de f), e representa-se por $\operatorname{Im} f$, ao conjunto

$$\operatorname{Im} f = \{f(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{u} \in E\}.$$

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação definida por

$$f(x, y, z, w) = (x + y, y - z, x + w)$$

- f é uma transformação linear (Prove!)
- $\operatorname{Nuc} f = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : f(x, y, z, w) = (0, 0, 0)\}$

  $= \cdots = \langle (-1, 1, 1, 1) \rangle$
- $\operatorname{Im} f = \{(x + y, y - z, x + w) : x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$

  $= \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle$

base=?

Teorema: *Sejam E e F espaços vetoriais e $f : E \to F$ uma transformação linear. Então:*

1. $\mathrm{Nuc}\, f$ *é um subespaço vetorial de* E*;*
2. $\mathrm{Im}\, f$ *é um subespaço vetorial de* F*.*

Demonstração: Ao cuidado dos alunos.

5.3 Representação matricial de transformações lineares

Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, a transformação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ é uma transformação linear (exemplo pg. 147).

Exemplo: Se $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, então

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 + 8x_3 \\ 2x_1 + 5x_3 \end{pmatrix}.$$

A transformação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 + 8x_3, 2x_1 + 5x_3)$$

é uma transformação linear.

Teorema: *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear. Então existe uma matriz $\mathcal{M}_f \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que*

$$f(\boldsymbol{x}) = \mathcal{M}_f \boldsymbol{x}, \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração: Seja $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ a base canónica de $\mathbb{R}^n$. Dado $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ em $\mathbb{R}^n$, sabemos que $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e_n}$. Sejam $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ as imagens por f dos vetores de $\mathcal{B}$, i.e. $\boldsymbol{a}_1 = f(\boldsymbol{e}_1), \dots, \boldsymbol{a}_n = f(\boldsymbol{e}_n)$. Consideremos a matriz cujas colunas são $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ i.e.

$$\mathcal{M}_f = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}.$$

Então, $\mathcal{M}_f \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_f \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \\ &= x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{e}_n) = f(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = f(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

Acabamos de construir uma matriz $\mathcal{M}_f$, cujas colunas são as imagens por f dos vetores da base canónica de $\mathbb{R}^n$, e que satisfaz $\mathcal{M}_f \boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x}), \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Esta matriz chama-se a matriz da transformação f ou a representação matricial de f.[6]

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x, y, z) = (3x + 2y + 5z, x + y + z, 9x + 2y + 5z, 4y).$$

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (3,1,9,0) \\ f(0,1,0) &= (2,1,2,4) \\ f(0,0,1) &= (5,1,5,0) \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{M}_f = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Obter $f(1,1,1)$ a partir de $\mathcal{M}_f$

[6]Nao existe outra matriz $\mathcal{M}'$ para a qual se tenha $\mathcal{M}'\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x}), \forall x \in \mathbb{R}^n$. Porquê?

Teorema: *Seja* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *uma transformação linear e* $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ *uma base de* $\mathbb{R}^n$*. Se* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *são as coordenadas de* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ *nessa base, i.e., se* $\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n$*, então*

$$f(\boldsymbol{x}) = \alpha_1 f(\boldsymbol{u}_1) + \cdots + \alpha_n f(\boldsymbol{u}_n).$$

Demonstração: imediata.

$\Rightarrow$ Uma transformação linear está totalmente definida se soubermos as imagens dos vetores de uma base.

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $f(1,2,1) = (5,-1)$, $f(-1,5,1) = (0,4)$ e $f(3,1,4) = (2,3)$. Calcular $f(8,-3,5)$.

- $((1,2,1),(-1,5,1),(3,1,4))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ (verifique!)
- $(8,-3,5) = 3(1,2,1) - 2(-1,5,1) + (3,1,4)$ (verifique!)
- $f(8,-3,5) = 3f(1,2,1) - 2f(-1,5,1) + f(3,1,4) = (17,-8)$

Teorema: *Seja $\mathcal{M}_f \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a matriz de uma dada transformação linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Então*

① *O núcleo de f é igual ao espaço nulo de $\mathcal{M}_f$, i.e.*

$$\operatorname{Nuc} f = \mathcal{N}(\mathcal{M}_f)$$

② *O espaço imagem de f coincide com o espaço das colunas de $\mathcal{M}_f$, i.e.*

$$\operatorname{Im} f = \mathcal{C}(\mathcal{M}_f)$$

Demonstração: ao cuidado dos alunos.

Corolário:

1. $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{car}(\mathcal{M}_f)$
2. $\dim \operatorname{Nuc} f = n - \operatorname{car}(\mathcal{M}_f)$
3. $\dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f = n$

Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a matriz de uma aplicação linear f.

$$A \xrightarrow[linhas]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

- $\operatorname{Nuc} f = \mathcal{N}(A) = \langle (-1, 1, 1, 1) \rangle$
- $\operatorname{Im} f = \mathcal{C}(A) = \langle (1,0,1), (1,1,0), (0,-1,0), (0,0,1) \rangle$

$$= \langle (1,0,1), (1,1,0), (0,-1,0) \rangle$$

$$\dim \operatorname{Nuc} f = 1 \qquad \dim \operatorname{Im} f = 3 \qquad n = 4 = 1 + 3$$

5.4 Aplicações injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Definição: Seja $f : E \to F$ uma aplicação linear. Diz-se que

① f é uma aplicação injetiva se e só se

$$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in E,\ f(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{v}) \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$$

② f é uma aplicação sobrejetiva se e só se

$$\forall \boldsymbol{v} \in F\ \exists \boldsymbol{u} \in E,\ f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$$

② f é uma aplicação bijetiva se e só se f é injetiva e sobrejetiva.

Teorema: *Seja $f : E \to F$ uma aplicação linear. Então:*

1. *f é injetiva se e só se $\operatorname{Nuc} f = \{0_E\}$;*
2. *f é sobrejetiva se e só se $\operatorname{Im} f = F$.*

Demonstração:

1. $\Rightarrow$) Seja f injetiva e seja $u \in \operatorname{Nuc} f$. Então $f(u) = 0_F = f(0_E)$. Como f é injetiva, conclui-se que $u = 0_E$.

$\Leftarrow$) Suponhamos agora que $\operatorname{Nuc} f = \{0_E\}$ e que $f(x) = f(y)$, i.e. $f(x) - f(y) = 0_F$. Então, $f(x - y) = 0_F$, o que significa que $x - y \in \operatorname{Nuc} f$, donde se conclui que $x - y = 0_E$, i.e. $x = y$. A aplicação f é, por isso injetiva.

2. imediata

Exemplo: Relativamente à aplicação $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ do exemplo anterior

$$\operatorname{Nuc} f = \mathcal{N}(A) = \langle(-1, 1, 1, 1)\rangle$$

e

$$\operatorname{Im} f = \langle(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 0)\rangle = \mathbb{R}^3.$$

Conclui-se que f não é injetiva, mas é sobrejetiva.

Em termos de matrizes, podemos concluir que, se $\mathcal{M}_f \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é a matriz da aplicação linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, então

1. f é injetiva se e só se $\operatorname{car} \mathcal{M}_f = n$;
2. f é sobrejetiva se e só se $\operatorname{car} \mathcal{M}_f = m$.

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Recordando que:

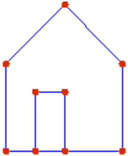
- $\dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f = n$
- f injetiva $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Nuc} f = 0$
- f sobrejetiva $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = m$

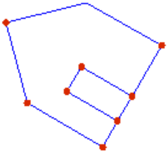
conclui-se que:

1. se $n < m$, f não é sobrejetiva;
2. se $n > m$, f não é injetiva;
3. se $n = m$ são equivalentes as afirmações
   - f é injetiva;
   - f é sobrejetiva;
   - f é bijetiva;
   - a matriz de f é invertível.

Aplicações (G. Strang)

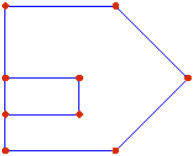
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

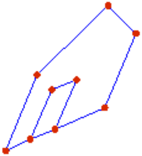




$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

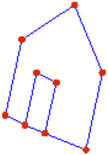
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

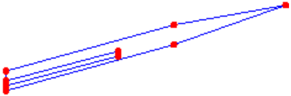




$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ -0.3 & 0.9 \end{pmatrix}$$





$$\begin{pmatrix} 0 & 1.1 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

6. VALORES E VETORES PRÓPRIOS

6.1 Introdução

Definição: Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Diz-se que o escalar λ é um valor próprio de A se existir um vetor não nulo $\boldsymbol{x}$ tal que

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}.$$

O vetor $\boldsymbol{x}$ chama-se vetor próprio de A associado ao valor próprio λ.

Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Como

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$(1,0)$ é um vetor próprio da matriz A associado ao valor próprio 2.

Cálculo de valores próprios

Teorema: *Seja A uma matriz de ordem n. Então, λ é valor próprio de A se e só se*

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Demonstração: Por definição, λ é valor próprio de A, se e só se

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}, \qquad \text{para algum } \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}.$$

ou seja se e só se

$$(A - \lambda I)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \qquad \text{para algum } \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}.$$

$$\downarrow$$

sistema homogéneo com soluções além da nula.

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{car}(A - \lambda I) < n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det(A - \lambda I) = 0.$$

$$\lambda = 0?$$

Definição: Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A equação

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

chama-se a equação característica de A.

Exemplo: A equação característica da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, é

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 3\lambda)(1-\lambda) = 0.$$

Os valores próprios da matriz A são as raízes da sua equação característica, tendo-se neste caso

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 3.$$

Definição: Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Ao polinómio em λ,

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

chama-se **polinómio característico** de A.

Exemplo: O polinómio característico da matriz anterior é

$$p_A(\lambda) = (\lambda^2 - 3\lambda)(1 - \lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda.$$

Observação: Se A é uma matriz quadrada de ordem n, o seu polinómio característico é de grau n. Os valores próprios de A são os zeros do seu polinómio característico e consequentemente A terá n valores próprios, eventualmente complexos e não distintos.

Se nada for dito em contrário, dada uma matriz real, estamos interessados em determinar apenas os seus valores próprios reais e vetores próprios em $\mathbb{R}^n$.

Se λ é um zero do polinómio característico com multiplicidade k, diz-se que o valor próprio λ tem multiplicidade algébrica k e escreve-se $\mathrm{ma}(\lambda) = k$.

Exemplo: Uma matriz A cujo polinómio característico seja

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^5(\lambda + 2)^3(\lambda - 4)(\lambda^2 + 1),$$

tem 3 valores próprios reais distintos:

- 1, sendo $\mathrm{ma}(1) = 5$;
- -2, sendo $\mathrm{ma}(-2) = 3$;
- 4, sendo $\mathrm{ma}(4) = 1$.

A matriz A tem ordem 11 e admite ainda 2 valores próprios complexos i e $-i$.

Cálculo de vetores próprios

Os vetores próprios associados ao valor próprio λ obtêm-se resolvendo o sistema homogéneo

$$(A-\lambda I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0},$$

e considerando as soluções não nulas desse sistema.

Exemplo: Calculemos os vetores próprios associados ao valor próprio 1 da matriz A do exemplo da pg. 165. Temos de resolver o sistema homogéneo

$$(A-I)\,\boldsymbol{x}=0,$$

isto é,

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

O conjunto das soluções deste sistema é $\{(0,0,\alpha):\alpha\in\mathbb{R}\}$. Os vetores próprios de A associados ao valor próprio 1 são todos os vetores da forma $(0,0,\alpha)$, com $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Sendo $\lambda \in \mathbb{R}$ um valor próprio de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, o conjunto

$$\begin{aligned} V_\lambda &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\} \\ &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\} \end{aligned}$$

contém, para além do vetor nulo, todos os vetores próprios da matriz A associados ao valor próprio λ.

Este conjunto V_λ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ (porquê?) e designa-se por subespaço próprio associado ao valor próprio λ.

A dimensão do subespaço vetorial V_λ designa-se por multiplicidade geométrica do valor próprio λ e denota-se por $\mathrm{mg}(\lambda)$.

Teorema: *Sendo λ um valor próprio de uma matriz A quadrada de ordem n, tem-se:*

1. $\mathrm{mg}(\lambda) = n - \mathrm{car}(A - \lambda I)$;
2. $\mathrm{mg}(\lambda) \geq 1$;
3. $\mathrm{mg}(\lambda) \leq \mathrm{ma}(\lambda)$.

Exemplo: A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ tem como valores próprios:

- 1 , sendo $\mathrm{ma}(1) = 2$;
- 3, sendo $\mathrm{ma}(3) = 1$;
- 4, sendo $\mathrm{ma}(4) = 1$.

Subespaço próprio associado a cada valor próprio:

- $V_1 = \langle (1, 0, 0, 0) \rangle$. Logo $\mathrm{mg}(1) = 1$;
- $V_3 = \langle (3, 0, 2, 0) \rangle$. Logo, $\mathrm{mg}(3) = 1$;
- $V_4 = \langle (10, 0, 6, 3) \rangle$. Logo, $\mathrm{mg}(4) = 1$.

6.2 Propriedades

Teorema: *Seja λ um valor próprio de uma matriz A e seja $\boldsymbol{x}$ um vetor próprio associado a λ. Então:*

1. *$\alpha\lambda$ é um valor próprio de αA, sendo $\boldsymbol{x}$ um vetor próprio associado a esse valor próprio;*
2. *$\lambda - p$ é um valor próprio de $A - pI$, sendo $\boldsymbol{x}$ um vetor próprio associado a esse valor próprio;*
3. *λ^k ($k \in \mathbb{N}$) é valor próprio de A^k, sendo $\boldsymbol{x}$ um vetor próprio associado a esse valor próprio.*

Demonstração: ver folhas de exercícios.

Teorema: *Dada uma matriz quadrada A, tem-se:*

1. *A é invertível se e só se A não tem zero como valor próprio.*
2. *Se λ é um valor próprio de uma matriz invertível A e se $\boldsymbol{x}$ é um vetor próprio associado a λ, então λ^{-1} é um valor próprio de A^{-1} e $\boldsymbol{x}$ é um vetor próprio associado a esse valor próprio.*

Demonstração:

1. Como λ é valor próprio de A se e só se $\det(A - \lambda I) = 0$, conclui-se que $\lambda = 0$ é v.p. de A se e só se $\det A = 0$ ou seja se e só se A é singular.

2. Sendo A invertível, temos

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Leftrightarrow A^{-1}(A\boldsymbol{x}) = A^{-1}(\lambda\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow (A^{-1}A)\boldsymbol{x} = \lambda(A^{-1}\boldsymbol{x})$$
$$\Leftrightarrow I\,\boldsymbol{x} = \lambda(A^{-1}\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \lambda(A^{-1}\boldsymbol{x}).$$

Como $\lambda \neq 0$ (por 1.), segue-se que $\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{x}$ ou seja que

$$A^{-1}\boldsymbol{x} = \lambda^{-1}\boldsymbol{x}.$$

Teorema: *As matrizes A e A^T têm os mesmos valores próprios.*

Demonstração: Segue-se de imediato do facto de os polinómios característicos de A e A^T serem iguais:

$$\det(A - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^T) = \det(A^T - \lambda I^T) = \det(A^T - \lambda I).$$

Teorema: *Os valores próprio de uma matriz diagonal ou triangular são os seus elementos diagonais.*

Demonstração: Consequência imdiata de propriedade dos determinantes relativa a matrizes diagonais ou triangulares.

Teorema: *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem n e sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os n valores próprios de A. Então:*

1. $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n = \det A$;
2. $\lambda_1 + \lambda_2 \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \operatorname{tr} A$.

Exemplo: Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- $p_\lambda = -4 + 4\lambda + 3\lambda^2 - 4\lambda^3 + \lambda^4 = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)(\lambda + 1)$;
- valores próprios: 2 (duplo), -1 e 1 (simples);
- $\det A = -4$;
- $\operatorname{tr} A = 4$.

Teorema: *Sejam λ_1 e λ_2 dois valores próprios distintos de uma matriz A e sejam $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ vetores próprios de A, linearmente independentes, associados a λ_1 e $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_s$ vetores próprios de A, linearmente independentes, associados a λ_2. Então, os vetores*

$$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_s$$

são linearmente independentes.

Demonstração: Consideremos a combinação linear nula

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_r \boldsymbol{x}_r + \beta_1 \boldsymbol{y}_1 + \cdots + \beta_s \boldsymbol{y}_s = \mathbf{0} \qquad (*)$$

(pretende-se provar que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = \beta_1 = \cdots = \beta_s = 0$). Multiplicando ambos os membros de (*), à esquerda, pela matriz A e usando propriedades do produto de matrizes, obtém-se

$$\alpha_1 A\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_r A\boldsymbol{x}_r + \beta_1 A\boldsymbol{y}_1 + \cdots + \beta_s A\boldsymbol{y}_s = \mathbf{0},$$

ou, atendendo a que $A\boldsymbol{x}_k = \lambda_1 \boldsymbol{x}_k; k = 1, \ldots, r$ e $A\boldsymbol{y}_\ell = \lambda_2 \boldsymbol{y}_\ell; \ell = 1, \ldots, s$:

$$\alpha_1 \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_r \lambda_1 \boldsymbol{x}_r + \beta_1 \lambda_2 \boldsymbol{y}_1 + \cdots + \beta_s \lambda_2 \boldsymbol{y}_s = \mathbf{0}. \qquad (**)$$

Demonstração (cont.): Por ouro lado, se multiplicarmos (*) por λ_2, vem

$$\lambda_2\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_2\alpha_r\boldsymbol{x}_r + \lambda_2\beta_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + \lambda_2\beta_s\boldsymbol{y}_s = \mathbf{0}. \qquad (***)$$

Subtraindo (***) de (**), obtém-se

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_r(\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{x}_r = \mathbf{0},$$

o que implica que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$, uma vez que $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ são linearmente independentes e $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Mas, sendo $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$, a equação (*) reduz-se a

$$\beta_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + \beta_s\boldsymbol{y}_s = \mathbf{0},$$

o que, tendo em conta que $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_s$ são vetores linearmente independentes, implica que $\beta_1 = \cdots = \beta_s = 0$.

O teorema anterior generaliza-se para mais do que dois valores próprios. Em particular, tem-se: se $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ são valores próprios distintos de uma matriz A, com vetores próprios asoociados $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$, respetivamente, então $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ são linearmente independentes.

Exemplo: Consideremos novamente a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

- $(1, 0, 0, 0)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 1;
- $(3, 0, 2, 0)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 3;
- $(10, 0, 6, 3)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 4.

Os vetores $(1, 0, 0, 0)$, $(3, 0, 2, 0)$ e $(10, 0, 6, 3)$ são linearmente independentes.

6.3 Matrizes diagonalizáveis

Definição: Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n. Dizemos que A é semelhante a B se existe uma matriz P de ordem n, invertível, tal que

$$B = P^{-1}AP.$$

Note-se que, se A é semelhante a B, também B é semelhante a A (porquê?) e, por isso, também dizemos que A e B são semelhantes.

Teorema: *Se A e B são matrizes semelhantes, então têm o mesmo conjunto de valores próprios.*

Demonstração: Seja P uma matriz não singular tal que $B = P^{-1}AP$. Então

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda I) \\ &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) = \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) \\ &= \det P^{-1} \det(A - \lambda I) \det P = \det(A - \lambda I) = p_A(\lambda). \end{aligned}$$

Concluímos, assim, que A e B têm o mesmo polinómio característico, logo os mesmos valores próprios.

Exemplo: Consideremos as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Como

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

tem-se

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Donde, os valores próprios de A são -2 e 4, sendo este último de multiplicidade 2.

Definição: Uma matriz quadrada A diz-se **diagonalizável** se for semelhante a uma matriz diagonal, isto é, se existir uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = D$, com D uma matriz diagonal. Nesse caso, dizemos que P **diagonaliza** A.

Teorema: *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então:*

1. *A é diagonalizável, se e só se A tiver n vetores próprios linearmente independentes.*
2. *Se A tiver n vetores próprios linearmente independentes $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ associados, respetivamente, aos valores próprios $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ (não necessariamente distintos) e se for P a matriz cujas colunas são os vetores próprios $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, então P diagonaliza A; mais precisamente, tem-se*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Corolário: *Se uma matriz A quadrada de ordem n tiver n valores próprios distintos, então A é diagonalizável.*

Note-se que este corolário estabelece uma condição suficiente, mas não necessária, para que A seja diagonalizável.

Exemplo: A matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tem os valores próprios 0 (simples) e 1 (duplo). Além disso, tem-se (verifique)

- $V_0 = \langle (1,0,0) \rangle$
- $V_1 = \langle (1,1,0),(2,0,1) \rangle$ e $(1,1,0),(2,0,1)$ são l.i.

Então, A tem três vetores próprios l.i.: $(1,0,0),(1,1,0),(2,0,1)$ e é, portanto, diagonalizável. A matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ diagonaliza A.

Corolário: *Uma matriz quadrada de ordem n cujos valores próprios sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ (distintos dois a dois) é diagonalizável se e só se*

$$\mathrm{mg}(\lambda_1) + \cdots + \mathrm{mg}(\lambda_r) = n.$$

Exemplo: No exemplo anterior, tínhamos uma matriz quadrada de ordem 3 com dois valores próprios distintos, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$, sendo

$$\mathrm{mg}(\lambda_1) + \mathrm{mg}(\lambda_2) = 1 + 2 = 3.$$