ANÁLISE
Cap. 4 – Cálculo integral em $\mathbb{R}^n$

Dep. Matemática UMinho

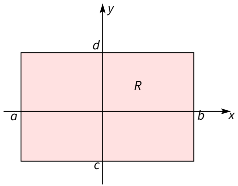
Abril 2020

4.1 Integrais duplos e volumes

Motivação

Seja R o retângulo $[a, b] \times [c, d]$ e $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

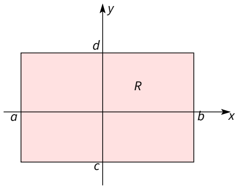
$$f(x, y) \geq 0 \qquad \text{em} \quad R.$$

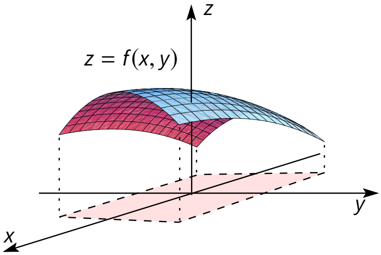


Motivação

Seja R o retângulo $[a, b] \times [c, d]$ e $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) \geq 0 \qquad \text{em} \quad R.$$





A superfície definida por $z = f(x, y)$ e os planos

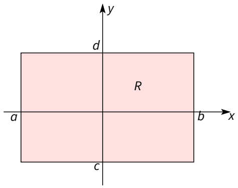
$$x = a, \quad x = b, \quad y = c, \quad y = d$$

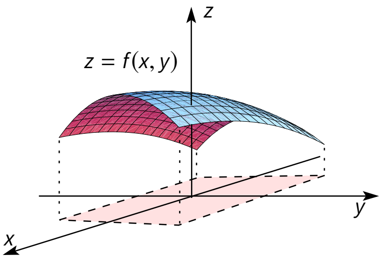
formam a fronteira de uma região de $\mathbb{R}^3$,

Motivação

Seja R o retângulo $[a, b] \times [c, d]$ e $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) \geq 0 \qquad \text{em} \quad R.$$





A superfície definida por $z = f(x, y)$ e os planos

$$x = a, \quad x = b, \quad y = c, \quad y = d$$

formam a fronteira de uma região de $\mathbb{R}^3$,

- [Problema] Determinar o volume da região do espaço compreendida entre o retângulo R e o gráfico da função f.

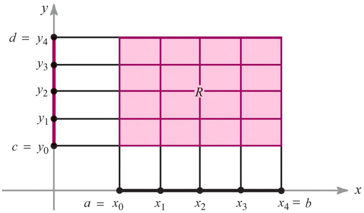
Definição de integral duplo

Seja $R = [a, b] \times [c, d]$ e $f : R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definição de integral duplo

Seja $R = [a, b] \times [c, d]$ e $f : R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

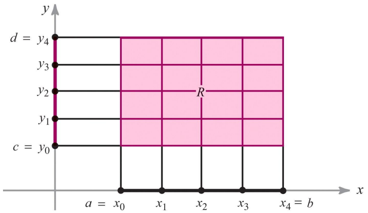
- Considere-se uma subdivisão de $[a, b]$ em n subintervalos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$;
- Considere-se uma subdivisão $[c, d]$ em k subintervalos $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{k-1} < y_k = d$;
- Às divisões anteriores corresponde uma subdivisão do retângulo R em $n \times k$ retângulos $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$;



Definição de integral duplo

Seja $R = [a, b] \times [c, d]$ e $f : R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Considere-se uma subdivisão de $[a, b]$ em n subintervalos
  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$;
- Considere-se uma subdivisão $[c, d]$ em k subintervalos
  $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{k-1} < y_k = d$;
- Às divisões anteriores corresponde uma subdivisão do retângulo R em $n \times k$ retângulos $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$;



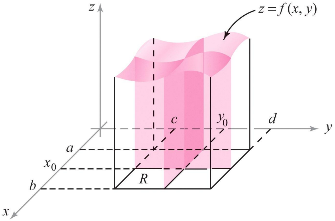
- Denote-se $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ e $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$;
- A área do retângulo R_{ij} é então $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \, \Delta y_j$.
- Para cada retângulo R_{ij} escolha-se um ponto $(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)$;

- O volume do paralelipípedo de base R_{ij} e altura $f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)$ é

$$f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)\Delta A_{ij}$$

- O volume do sólido limitado por R e pelo gráfico de f pode ser aproximado por

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)\, \Delta A_{ij}.$$

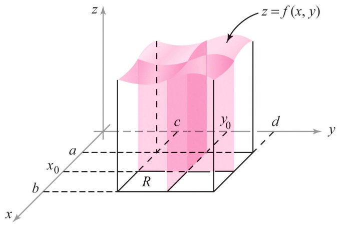


- O volume do paralelipípedo de base R_{ij} e altura $f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)$ é

$$f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)\Delta A_{ij}$$

- O volume do sólido limitado por R e pelo gráfico de f pode ser aproximado por

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)\, \Delta A_{ij}.$$



- A soma de Riemann de f relativa à subdivisão anterior de R é o número

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} f(\widetilde{x_i}, \widetilde{y_j})\, \Delta A_{ij}$$

- A soma de Riemann de f relativa à subdivisão anterior de R é o número
$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} f(\widetilde{x_i}, \widetilde{y_j})\, \Delta A_{ij}$$

- [Definição] Quando $n, k \longrightarrow \infty$ o valor da soma de Riemann de f designa-se por integral duplo de f em R e denota-se
$$\iint_R f(x,y)\, dA \quad \text{ou} \quad \iint_R f(x,y)\, dx\, dy \quad \text{ou} \quad \iint_R f(x,y)\, d(x,y).$$

- A soma de Riemann de f relativa à subdivisão anterior de R é o número

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)\, \Delta A_{ij}$$

- [Definição] Quando $n, k \longrightarrow \infty$ o valor da soma de Riemann de f designa-se por integral duplo de f em R e denota-se

$$\iint_R f(x,y)\, dA \quad \text{ou} \quad \iint_R f(x,y)\, dx\, dy \quad \text{ou} \quad \iint_R f(x,y)\, d(x,y).$$

  - Se existir o integral duplo de f em R, diz-se que f é integrável em R.

Propriedades dos integrais duplos

Sejam $f, \ g : R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções integráveis em R. Então:

1. $\displaystyle\iint_R [f(x,y) + g(x,y)] \ dA = \iint_R f(x,y)\, dA + \iint_R g(x,y)\, dA;$

Propriedades dos integrais duplos

Sejam $f,\ g : R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções integráveis em R. Então:

1. $\displaystyle\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]\ dA = \iint_R f(x,y)\, dA + \iint_R g(x,y)\, dA$;
2. $\displaystyle\iint_R \lambda\ f(x,y)\, dA = \lambda \iint_R f(x,y)\, dA, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$;

Propriedades dos integrais duplos

Sejam $f,\ g : R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções integráveis em R. Então:

1. $\displaystyle\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]\ dA = \iint_R f(x,y)\, dA + \iint_R g(x,y)\, dA;$

2. $\displaystyle\iint_R \lambda\ f(x,y)\, dA = \lambda\ \iint_R f(x,y)\, dA, \qquad \lambda \in \mathbb{R};$

3. $\displaystyle\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA$
   $R = R_1 \cup R_2$ e $R_1 \cap R_2 = \emptyset$;

Propriedades dos integrais duplos

Sejam $f,\ g : R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções integráveis em R. Então:

1. $\displaystyle\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]\ dA = \iint_R f(x,y)\,dA + \iint_R g(x,y)\,dA;$
2. $\displaystyle\iint_R \lambda\ f(x,y)\,dA = \lambda\ \iint_R f(x,y)\,dA, \qquad \lambda \in \mathbb{R};$
3. $\displaystyle\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA$
   $R = R_1 \cup R_2$ e $R_1 \cap R_2 = \emptyset$;
4. $\displaystyle f \geq g \Longrightarrow \iint_R f(x,y)\,dA \geq \iint_R g(x,y)\,dA;$

Propriedades dos integrais duplos

Sejam $f,\ g : R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções integráveis em R. Então:

1. $\displaystyle\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]\ dA = \iint_R f(x,y)\,dA + \iint_R g(x,y)\,dA;$

2. $\displaystyle\iint_R \lambda\ f(x,y)\,dA = \lambda\ \iint_R f(x,y)\,dA, \qquad \lambda \in \mathbb{R};$

3. $\displaystyle\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA$
   $R = R_1 \cup R_2$ e $R_1 \cap R_2 = \emptyset$;

4. $\displaystyle f \geq g \Longrightarrow \iint_R f(x,y)\,dA \geq \iint_R g(x,y)\,dA;$

   - $\displaystyle f \geq 0 \Longrightarrow \iint_R f(x,y)\,dA \geq 0;$

Propriedades dos integrais duplos

Sejam $f,\ g : R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções integráveis em R. Então:

1. $$\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]\ dA = \iint_R f(x,y)\, dA + \iint_R g(x,y)\, dA;$$
2. $$\iint_R \lambda\ f(x,y)\, dA = \lambda \iint_R f(x,y)\, dA, \qquad \lambda \in \mathbb{R};$$
3. $$\iint_R f(x,y) dA = \iint_{R_1} f(x,y) dA + \iint_{R_2} f(x,y) dA$$
   $R = R_1 \cup R_2$ e $R_1 \cap R_2 = \emptyset$;
4. $$f \geq g \Longrightarrow \iint_R f(x,y)\, dA \geq \iint_R g(x,y)\, dA;$$
   - $$f \geq 0 \Longrightarrow \iint_R f(x,y)\, dA \geq 0;$$
5. $$\left| \iint_R f(x,y)\, dA \right| \leq \iint_R |f(x,y)|\ dA.$$

Como calcular um integral duplo?

- [Teorema] Toda a função contínua definida num retângulo fechado é integrável.

Como calcular um integral duplo?

- [Teorema] Toda a função contínua definida num retângulo fechado é integrável.

- [Teorema de Fubini]

  Seja f uma função contínua no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Então, o integral duplo de f em R é dado por

$$\iint_R f(x, y)\, dA =$$

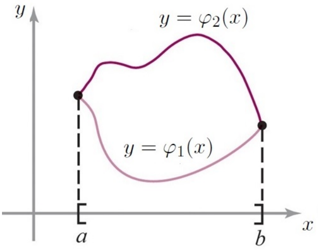
$$= \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy.$$

Exemplo

- Calcular o integral, onde R é o retângulo $[0,1] \times [1,2]$,

$$\iint_R (x^3 + y^2)\, dA.$$

Integração em regiões elementares de $\mathbb{R}^2$

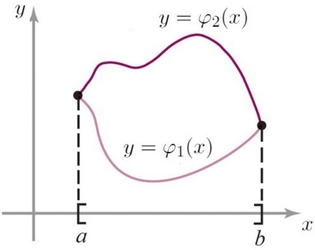


Região do tipo I

$a \leq x \leq b$

$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$

Integração em regiões elementares de $\mathbb{R}^2$



Região do tipo I

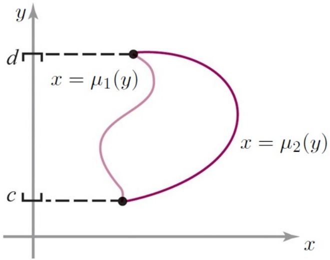
$a \leq x \leq b$

$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$

Região do tipo II

$c \leq y \leq d$

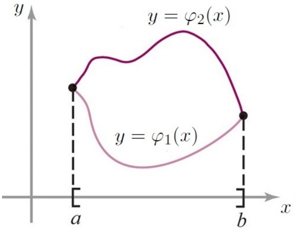
$\mu_1(y) \leq x \leq \mu_2(y)$



Regiões elementares de $\mathbb{R}^2$

- [Região do tipo I]

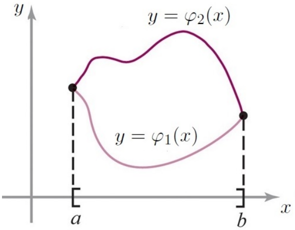
$$a \leq x \leq b$$
$$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$$



Regiões elementares de $\mathbb{R}^2$

- [Região do tipo I]

$$a \leq x \leq b$$
$$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$$



- $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma região do tipo I de $\mathbb{R}^2$, ou verticalmente simples, se existe um intervalo $[a, b]$ e duas funções

$$\varphi_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \varphi_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

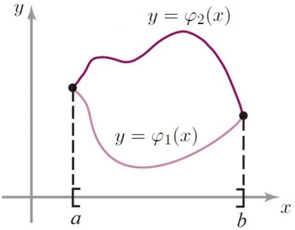
$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^1(]a, b[)$ tais que

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

Regiões elementares de $\mathbb{R}^2$

- [Região do tipo I]

$$a \le x \le b$$
$$\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$$



- $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma região do tipo I de $\mathbb{R}^2$, ou verticalmente simples, se existe um intervalo $[a, b]$ e duas funções

$$\varphi_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \varphi_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

$\varphi_1, \varphi_2 \in C^1(]a, b[)$ tais que

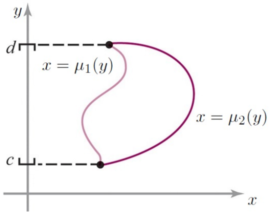
$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

- Neste caso,

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx.$$

- [Região do tipo II]

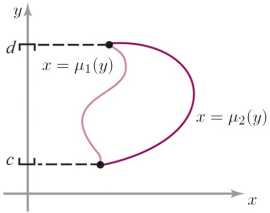
$$c \leq y \leq d$$
$$\mu_1(y) \leq x \leq \mu_2(y)$$



► [Região do tipo II]

$$c \leq y \leq d$$

$$\mu_1(y) \leq x \leq \mu_2(y)$$



- $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma região do tipo II de $\mathbb{R}^2$, ou horizontalmente simples, se existe um intervalo $[c, d]$ e duas funções

$$\mu_1 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \mu_2 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{C}^1(]c, d[)$ tais que

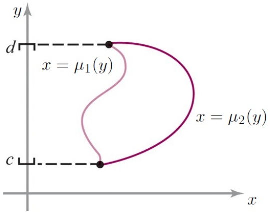
$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ \mu_1(y) \leq x \leq \mu_2(y)\}$$

- Neste caso,

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_{\mu_1(y)}^{\mu_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy.$$

- **[Região do tipo II]**

$$c \le y \le d$$
$$\mu_1(y) \le x \le \mu_2(y)$$



- $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma região do tipo II de $\mathbb{R}^2$, ou horizontalmente simples, se existe um intervalo $[c, d]$ e duas funções

$$\mu_1 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \mu_2 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\mu_1, \mu_2 \in C^1(]c, d[)$ tais que

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ \mu_1(y) \le x \le \mu_2(y)\}$$

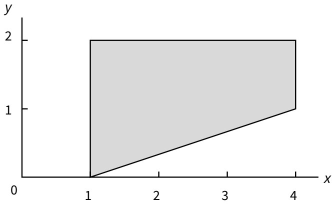
- Neste caso,

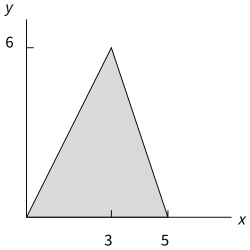
$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_{\mu_1(y)}^{\mu_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy.$$

- [Região do tipo III] $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma região do tipo III de $\mathbb{R}^2$ se for, simultaneamente, uma região do tipo I e do tipo III.

Exemplo

- Para cada uma das seguintes regiões D escreva $\iint_D f\, dA$ na forma de dois integrais iterados





Exemplo

- Calcular
$$\iint_{\mathcal{D}} xy\, dx\, dy$$
quando
$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ \ 0 \leq y \leq x^2\}.$$
   a) Usando uma região verticalmente simples.
   b) Usando uma região horizontalmente simples.

Observação

- Antes de calcular um integral duplo é aconselhável fazer um esboço da região de integração.

Observação

- Antes de calcular um integral duplo é aconselhável fazer um esboço da região de integração.

- A ordem de integração *dy dx* corresponde a uma subdivisão "vertical"da região de integração, enquanto que a ordem *dx dy* corresponde a uma subdivisão "horizontal".

Observação

- Antes de calcular um integral duplo é aconselhável fazer um esboço da região de integração.

- A ordem de integração *dy dx* corresponde a uma subdivisão "vertical"da região de integração, enquanto que a ordem *dx dy* corresponde a uma subdivisão "horizontal".

- Para regiões do tipo III, a alteração da ordem de integração pode permitir calcular um integral que de outra forma não seria possível.

Exemplo

- Calcular $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\, dx\, dy$.

Volume e área

- Se $f : B \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é não negativa e integrável em B e S é a região do espaço definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \in B, \ 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

define-se o volume de S por

$$\text{vol}(S) = \iint_B f(x, y)\, dA.$$

Volume e área

- Se $f : B \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é não negativa e integrável em B e S é a região do espaço definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \in B, \ 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

define-se o volume de S por

$$\mathrm{vol}(S) = \iint_B f(x, y)\, dA.$$

- Se $f : B \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função constante $f(x, y) = 1$ e f é integrável em B, a área de B é dada por

$$\text{área}(B) = \iint_B 1\, dA$$