ANÁLISE
Cap. 3 – Cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$

Dep. Matemática UMinho

Março 2020

3. Cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$

3.2 Funções reais: diferencial

Função diferenciável

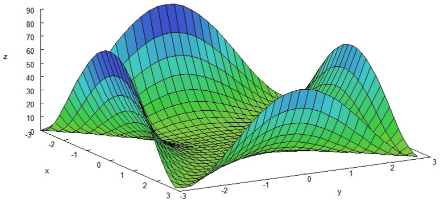
- [Revisão de Cálculo] Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se derivável ou diferenciável em $a \in D$ se existe a derivada de f em a: $f'(a)$.
  - Se f é derivável em a existe uma reta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$ e o seu declive é $f'(a)$:

$$\ell(x) = f(a) + f'(a)\,(x - a)\,.$$

  - Isto é,

$$\begin{aligned}\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) &\Leftrightarrow \lim_{x \longrightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \longrightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a}\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \longrightarrow a} \left[\frac{f(x) - \ell(x)}{x - a}\right] = 0\end{aligned}$$

- Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qual o significado de f ser diferenciável em a?



A função

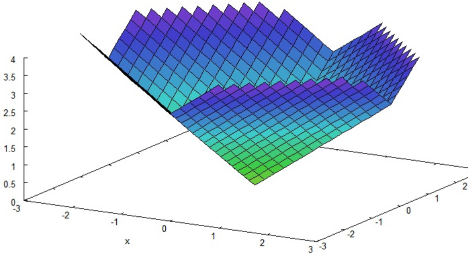
$$g(x, y) = (x^2 - y^2)^2$$

é uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

A função

$$f(x, y) = |x| + |y|$$

não é uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$.



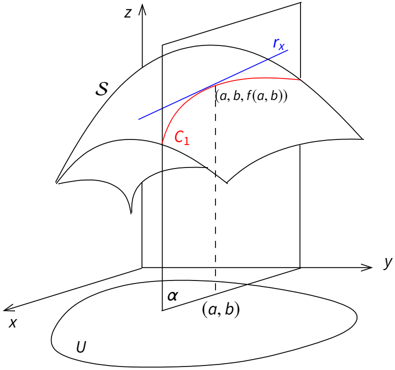
Aproximação linear ($n = 2$)

- Sejam
  - r_x a reta tangente ao gráfico de f em (a, b) cujo declive é dado por

$$f_x(a, b)$$

  - r_y a reta tangente ao gráfico de f em $(a, b, f(a, b))$ cujo declive é dado por

$$f_y(a, b)$$



- As retas r_x e r_y, concorrentes em $(a, b, f(a, b))$, definem um plano.

- $(1, 0, f_x(a, b))$ e $(0, 1, f_y(a, b))$ são vetores diretores desse plano

- Uma equação desse plano é, para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$(x, y, z) = (a, b, f(a, b)) + \lambda\,(1, 0, f_x(a, b)) + \mu\,(0, 1, f_y(a, b))$$

  ou ainda

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)\,(x - a) + f_y(a, b)\,(y - b)$$

- O plano $\pi(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)\,(x - a) + f_y(a, b)\,(y - b)$ será uma boa aproximação linear de f na vizinhança de (a, b) se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{|f(x, y) - \pi(x, y)|}{\|(x, y) - (a, b)\|} = 0$$

isto é, se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{|f(x, y) - f(a, b) - f_x(a, b)\,(x - a) - f_y(a, b)\,(y - b)|}{\|(x, y) - (a, b)\|} = 0$$

- Considerando a aplicação linear[1] $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $L(u_1, u_2) = f_x(a, b)u_1 + f_y(a, b)u_2$, o limite anterior vem

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{|f(x, y) - f(a, b) - L(x - a, y - b)|}{\|(x, y) - (a, b)\|} = 0$$

[1] L é uma aplicação linear se $L(\alpha\, v + \beta\, w) = \alpha\, L(v) + \beta\, L(w)$

- [Função diferenciável]

  Sejam $f\ :\ D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$, D aberto.
  A função f **é diferenciável em** a se existir uma aplicação linear

  $$L\ :\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

  tal que

  $$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{|f(x) - f(a) - L(x-a)|}{\|x-a\|} = 0\,.$$

  - Prova-se que a aplicação linear L, se existir, é única.
  - [Diferencial] A aplicação L diz-se diferencial de f em a e denota-se por $df(a)$:

  $$\begin{array}{rccc} df(a): & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \mapsto & L(v) \end{array}$$

- Sendo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto e $a \in D$
    - f é diferenciável em a se f admite hiperplano tangente ao seu gráfico em $(a, f(a))$;
    - neste caso, a diferencial de f em a é a aplicação linear dada por

$$df(a)(v) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)v_n$$

para cada $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- A função será diferenciável em $(0,0)$ se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\|f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)(x-0, y-0)\|}{\|(x,y)-(0,0)\|} = 0$$

  - $f_x(0,0) = 0$ e $f_y(0,0) = 0$ pelo que $df(0,0)(x,y) = 0$.
  - Logo, o limite anterior pode ser escrito como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\dfrac{x\,y}{x^2+y^2} - 0 - 0\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x\,y|}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

  - Como este limite não existe, f não é diferenciável em $(0,0)$.

- [Teorema A] Se f é diferenciável em a, então existem todas as derivadas parciais de f em a e

$$\begin{array}{rccl} df(a): & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \mapsto & df(a)(v) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)v_1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)v_n \end{array}$$

  - Se f é diferenciável em a então

$$df(a)(v) = \nabla f(a) \cdot v$$

- [Teorema B] Se todas as derivadas parciais de f existem numa vizinhança de a e são contínuas em a **então** a função f é diferenciável em a .

- [Teorema C] Se f é diferenciável em a, então f é contínua em a .

Exemplo:: Teoremas B+C

Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- A função f não é contínua em $(0,0)$ pois não existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\,.$$

  - Se f não é contínua em $(0,0)$ pelo Teorema C, não é diferenciável em $(0,0)$.

- Mas a função f tem derivadas direcionais em $(0,0)$ segundo todas as direções .
  - Para um qualquer vetor $u=(u_1,u_2)$ unitário

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+tu)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(tu_1,tu_2)-0}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}\,\frac{t^4u_1^3u_2}{t^6u_1^6+t^2u_2^2}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{tu_1^3u_2}{t^4u_1^6+u_2^2}=0$$

  - Em particular existem as duas derivadas parciais em $(0,0)$.
  - Como f não é diferenciável, pelo Teorema B, pelo menos uma das derivadas parciais de f não é contínua em $(0,0)$.

Propriedades das funções diferenciáveis

- Se f for diferenciável em $a \in D$ então
  - f é contínua em a;
  - existem todas as derivadas parciais e direcionais de f em a e, para todo o vetor v unitário,

$$df(a)(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(a);$$

  - a diferencial de f em a é a aplicação linear $df(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada para cada $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, por

$$df(a)(v) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)v_n$$

  - a diferencial e o gradiente de f em a relacionam-se pela igualdade

$$df(a)(v) = \nabla f(a) \cdot v$$

Exercícios:: 1

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\text{sen}\,\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Calcule $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.
   (b) Determine f_x e f_y e verifique que não são contínuas em $(0,0)$.
   (c) Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

Funções de classe C^1

- [Funções de classe C^1]

  A função $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, diz-se de classe C^1 se as derivadas parciais existem e são contínuas.

  - Se as derivadas parciais existem e são contínuas, a função é diferenciável.
  - Se a função é diferenciável, então é contínua.
  - $f \in C^1$:: f é contínua e todas as suas derivadas parciais são contínuas.

Plano tangente ao gráfico ($n = 2$)

- Se f é diferenciável em (a, b), uma equação do plano tangente ao gráfico de f em $(a, b, f(a, b))$ é

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

- Foi visto que o plano tangente ao gráfico de f em $(a, b, f(a, b))$ é uma linearização de f em torno de (a, b).

- Usando o vetor gradiente e o produto escalar de vetores, a equação do plano tangente ao gráfico de f em $(a, b, f(a, b))$ é

$$z = f(a, b) + \nabla f(a, b) \cdot (x - a, y - b).$$

desde que $\nabla f(a, b) \neq 0$.

Exercícios:: 2

2. Encontre uma equação do plano tangente ao gráfico da função $f(xy) = x^2 + y^3$ no ponto de coordenadas $(3, 1)$.