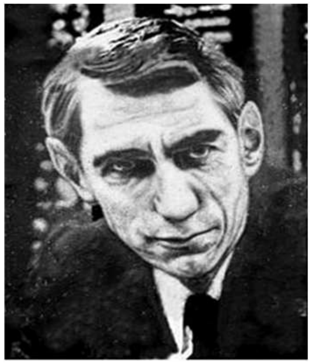
I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

Em termos gerais a Teoria da Informação é uma teoria que aborda várias temáticas relacionadas com sistemas de comunicação, transmissão de dados, informação, codificação, compressão de dados, ruído, correção de erros, entre outras...

Claude Shannon
Engenheiro/Matemático/Investigador Americano é reconhecido como sendo o "pai" da Teoria da Informação

Também apresentou importantes contributos noutras áreas: e.g. circuitos digitais, criptografia, inteligência artificial, digitalização...



Claude Shannon
[April 30, 1916 – February 24, 2001]

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

Teorema Fundamental da Teoria de informação

"Dado um ***canal de comunicação*** *e uma* ***fonte de informação*** *cujo débito de informação não excede a capacidade do canal, existe um código tal que a informação pode ser transmitida através do canal com uma frequência de erros arbitrariamente pequena, apesar da presença de ruído no canal."*

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

Teoria de informação estuda 4 problemas fundamentais:

– A medida de informação produzida por uma fonte ...

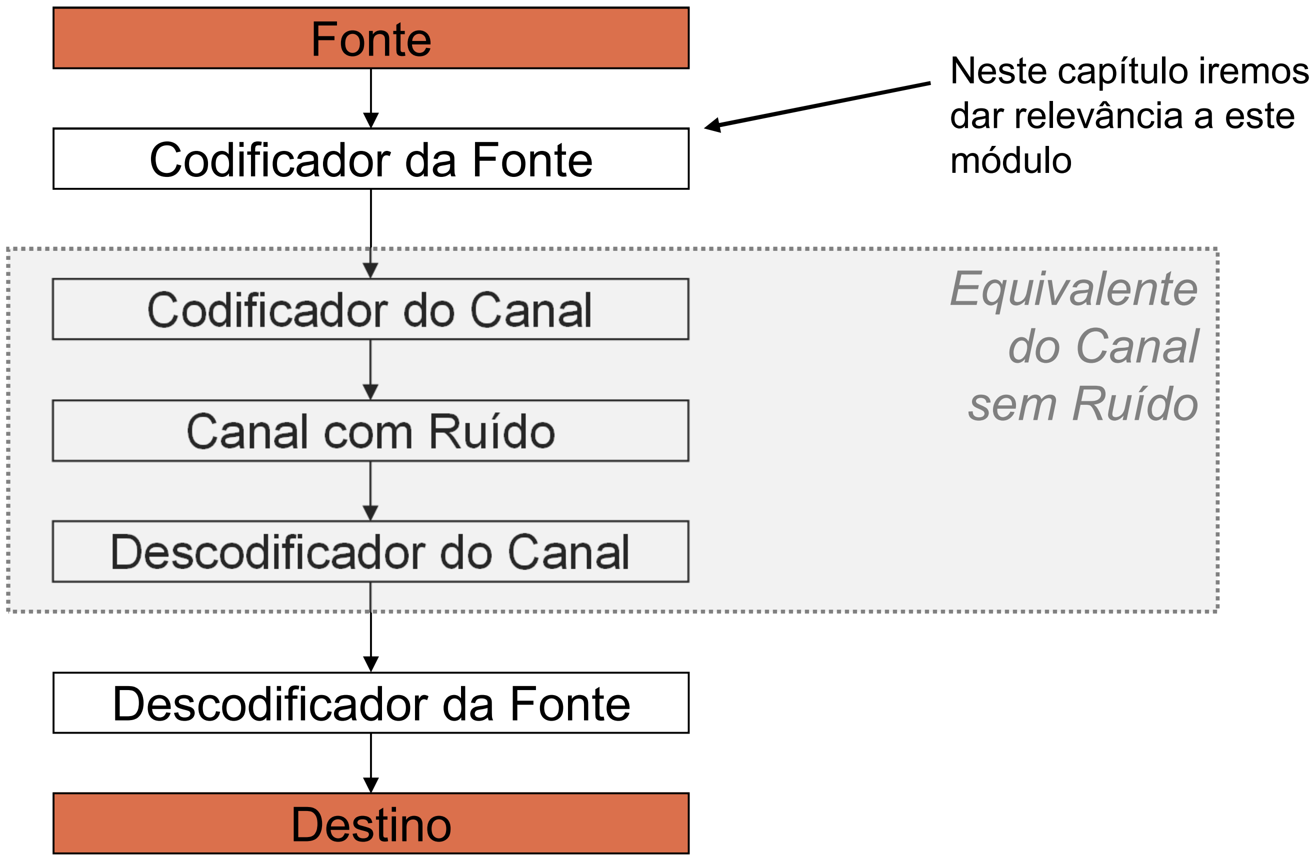
– A codificação eficiente da fonte ...

– A capacidade do canal ...

– A codificação do canal para controlo de erros ...

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

Sistema de Comunicação com codificação da fonte e do canal



I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

- Estudo da produção e transferência de informação
- Relevância na informação da mensagem em si e não dos sinais utilizados para a transmitir
- **Informação**: (no contexto das tele/comunicações)
  - "*objecto imaterial útil produzido por uma fonte que tem de ser transmitido para um determinado destino*"

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

um mais um é igual a dois

um dia tem 24 horas

amanhã o sol deve nascer

as acções da empresa xyz amanhã vão subir 300%

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

- Como definir uma **medida de informação** ?
  - relacionada com o grau de incerteza do destinatário relativamente à mensagem que vai receber
  - relacionada com a probabilidade da ocorrência da mensagem
  - vai ser definida como uma função que leva em conta essa probabilidade f(Pi)

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

- Informação própria de uma mensagem X_i :

$$\boxed{I_i = f(P_i)}$$

- Propriedades:

$$\text{(i)}\ \ f(P_i) \geq 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq P_i \leq 1$$

$$\text{(ii)}\ \ \lim_{P_i \to 1} f(P_i) = 0$$

$$\text{(iii)}\ \ f(P_i) > f(P_j) \quad \text{para} \quad P_i < P_j$$

$$\text{(iv)}\ \ f(P_i P_j) = f(P_i) + f(P_j)$$

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

- Adoptar uma função (função logarítmica negativa) que satisfaz estas propriedades:

$$\boxed{-\log_b()}$$

- A base adoptada define a unidade de medida de informação
- base=2 na teoria de informação
- logo a unidade correspondente é o *bit*

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

Bit como unidade de medida de informação

O bit é a quantidade de informação necessária para escolher uma entre duas alternativas igualmente prováveis ou, a quantidade de informação contida numa mensagem emitida por uma fonte capaz de emitir apenas duas mensagens distintas e equiprováveis.

Portanto, e por definição, a quantidade de informação, ou informação própria, I_i numa mensagem x_i é dada por:

$$\boxed{I_i \stackrel{def}{=} \log_2 \frac{1}{P_i} \quad bits}$$

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

- Assumir uma fonte que emite uma série de símbolos $X = \{x_1, ..., x_m\}$ com probabilidades $\{P_1.....P_m\}$

- **Entropia**: informação média (por símbolo) gerada pela fonte

$$\mathcal{H}(X) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{m} P_i \, I_i = \sum_{i=1}^{m} P_i \log_2 \frac{1}{P_i} \quad bits/símbolo$$

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

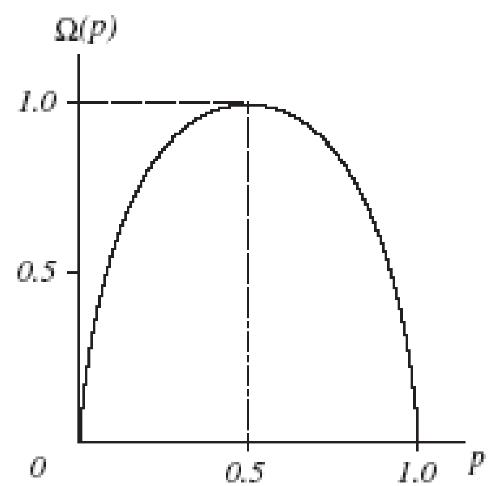
- Quais os **limites para a entropia** de uma fonte?
- Valor que depende:
  - das probabilidades dos símbolos da fonte e
  - da cardinalidade (m)

$$\boxed{0 \leq \mathcal{H}(X) \leq \log_2 m}$$

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

- **Exemplo 1**: Fonte binária (m=2); P_1=p e P_2=1 -p ; entropia?

$$\mathcal{H}(X) = \Omega(p) \stackrel{def}{=} p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p}$$



I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

- **Débito de Informação**
  - indica o débito médio de informação por segundo
  - assumindo que a fonte produz r_s símbolos por segundo:

$$\boxed{\mathcal{R} \stackrel{def}{=} r_s \mathcal{H}(X) \quad bits/seg}$$

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

- **Exemplo 2**: Fonte emite 2000 símbolos/seg de um alfabeto de 4 símbolos (m=4) com probabilidades:

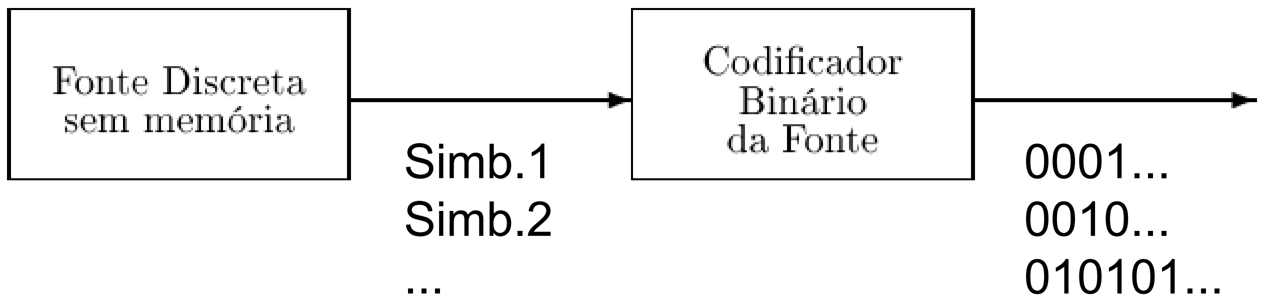
x_i	P_i	I_i
A	$1/2$	1
B	$1/4$	2
C	$1/8$	3
D	$1/8$	3

- Entropia?
- Débito de informação?

$$\mathcal{H}(X) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 + \frac{1}{8} \times 3 = 1.75 \quad \text{bits/símb}$$

$$\mathcal{R} = 2000 \times 1.75 = 3500 \quad \text{bits/seg}$$

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO



- N_i - comprimento da palavra de código correspondente ao símbolo i
- **Comprimento médio do código**:

$$\overline{N} = \sum_{i=1}^{m} P_i N_i \quad \text{dig bin/símbolo}$$

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

- **Rendimento do código**

$$\rho = \frac{\mathcal{H}(X)}{\overline{N}} \leq 1$$

- **Compressão obtida numa codificação**

$$c = \frac{N_f - \overline{N}}{N_f} \times 100\ \%$$

codificação com um **código de comprimento fixo mínimo**

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

- **Como obter códigos?**
  - existem várias alternativas com diferentes desempenhos
  - os códigos necessitam de ser decifráveis (e.g. desigualdade de kraft apresentada na secção códigos óptimos)

$$\boxed{\mathrm{Kr} = \sum_{i=1}^{m} 2^{-N_i} \leq 1}$$

  - melhores códigos -> melhores rendimentos

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

- **Exemplo**: diferentes codificações para uma fonte que gera quatro símbolos (entropia 1.75 bits/símbolo) – Comprimentos médios e rendimentos dos códigos?

x_i	P_i	Código I	Código II	Código III	Código IV
A	1/2	00	0	0	0
B	1/4	01	1	01	10
C	1/8	10	10	011	110
D	1/8	11	11	0111	111
$\overline{N}$		2.0	1.25	1.875	1.75

rendimento 88%

menor que a entropia!!
mas código não decifrável

código em vírgula
melhor que código I

código em árvore
que neste caso
tem rendimento =
100%

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

Códigos de Shannon-Fano / *Huffman* e outras variantes:

- Podem ser usados para construir <u>códigos decifráveis</u>
- Geram códigos de comprimento variável
- Geram códigos com "*bom*" rendimento
- Algoritmos para geração de códigos? – vamos analisar unicamente um dos algoritmos mais simples para construção de códigos deste tipo
  - » Códigos de *Shannon-Fano*

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

Códigos de Shannon-Fano (nota: em alguma bibliografia estes códigos são também por vezes associados aos Códigos de Huffman, mas na realidade estes últimos são uma evolução dos primeiros, e usam uma técnica distinta – corrigir na página 208):

(1) Ordenar os símbolos por ordem decrescente de probabilidade;

(2) Dividir o conjunto assim ordenado em dois subconjuntos tais que a soma das probabilidades em cada um deles seja o mais aproximadamente possível igual a metade da soma das probabilidades no conjunto anterior. Manter a ordenação.

(3) O dígito seguinte do código binário dos símbolos do primeiro dos sub-conjuntos é o **0** e o dos do outro é o **1**;

(4) Se os sub-conjuntos contêm um só elemento, a codificação terminou para esses sub-conjuntos;

(5) Repetir para cada um dos restantes sub-conjuntos (passo 2.)

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

Codificação da fonte - **Exemplo**: aplicar o algoritmo anterior para codificar a fonte com oito símbolos (m=8)

x_i	A	B	C	D	E	F	G	H
P_i	0.50	0.15	0.15	0.08	0.08	0.02	0.01	0.01

Entropia?

Código?

Comprimento médio?

Rendimento?

Compressão ?

x_i	P_i	Passos de codificação 1	2	3	4	5	6	Código
A	0.50	0						0
B	0.15	1	0	0				100
C	0.15	1	0	1				101
D	0.08	1	1	0				110
E	0.08	1	1	1	0			1110
F	0.02	1	1	1	1	0		11110
G	0.01	1	1	1	1	1	0	111110
H	0.01	1	1	1	1	1	1	111111
$\mathcal{H}(X) = 2.15$								$\overline{N} = 2.18$

x_i	P_i	Passos de codificação						Código
		1	2	3	4	5	6	
A	0.50	0						0
B	0.15	1	0	0				100
C	0.15	1	0	1				101
D	0.08	1	1	0				110
E	0.08	1	1	1	0			1110
F	0.02	1	1	1	1	0		11110
G	0.01	1	1	1	1	1	0	111110
H	0.01	1	1	1	1	1	1	111111
$\mathcal{H}(X) = 2.15$								$\overline{N} = 2.18$

x_i	A	B	C	D	E	F	G	H
P_i	0.50	0.15	0.15	0.08	0.08	0.02	0.01	0.01

Um canal de comunicação recebe os dados (binários) transmitidos por 10 destas fontes de informação. Cada fonte emite, em média, 200 símbolos por segundo.

Considere que os codificadores das fontes usam o código de tamanho variável calculado anteriormente. Ao fim de 10 horas de operação, quantos bytes “poupamos” na transmissão no canal?

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

Codificação por blocos:

- agrupar símbolos da fonte e proceder à sua codificação
- daí a noção de "bloco"
- blocos de K símbolos
- normalmente leva a melhorias no rendimento do código...
- ... e na compressão obtida

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

Exemplo:

- Fonte que emite símbolos de um alfabeto X com apenas dois símbolos X={A,B}; $P_A = 0.8$ e $P_B = 0.2$. (entropia = 0.722 bits/símbolo)
- Se se codificarem dois símbolos de cada vez temos um novo alfabeto Y={AA,AB,BA,BB}
- $P_{ij} = P_i * P_j$
  - por se tratar de uma fonte sem memória
  - ou seja, símbolos estatisticamente independentes
- código de *Shannon-Fano* para Y?
  (blocos de K=2)

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

- Tabela das probabilidades/palavras de código

Código?

Comprimento médio?

y_i	P_{y_i}	Código
AA	0.64	0
AB	0.16	11
BA	0.16	100
BB	0.04	101
$\overline{N}_2$		1.56

- para uma codificação K=1 comprimento médio do código era?

- logo ....

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

y_i	P_{y_i}	Código
AA	0.64	0
AB	0.16	11
BA	0.16	100
BB	0.04	101
$\overline{N}_2$		1.56

$$\overline{N}_2 = 1.560 \ \textit{dígitos binários/símbolo}_Y$$

$$\overline{N} = \frac{\overline{N}_2}{2} = 0.780 \quad \textit{dígitos binários/símbolo}_X$$

Rendimento e compressão obtidos com (K=2) ?

$$\boxed{\rho = \frac{\mathcal{H}(X)}{\overline{N}} = \frac{0.722}{0.780} = 0.926}$$

$$\boxed{c = \frac{N_f - \overline{N}}{N_f} \times 100 = \frac{1-0.780}{1} = 22 \ \%}$$

Rendimento e compressão obtidos com (K=1) (sem blocos) ?

0.722

0%

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

- **Rendimento e compressão obtidos com (K=3) ?**
  - experimentar.... melhor rendimento e compressão?

- **O que está a acontecer aos comprimentos médios dos códigos?**
  - à medida que K aumenta $\overline{N}$ tem tendência a diminuir; matematicamente isto é expresso na seguinte expressão:

$$\boxed{\mathcal{H}(X) \leq \overline{N} < \mathcal{H}(X) + \frac{1}{K}}$$

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

Um dos teoremas fundamentais da Teoria da Informação

Toda a fonte de informação caracterizada por um valor da entropia $\mathcal{H}(X)$ bits/símbolo, pode ser codificada em binário de tal forma que o comprimento médio do código, $\overline{N}$, é limitado por

$$\mathcal{H}(X) \le \overline{N} \le \mathcal{H}(X) + \epsilon$$

Na codificação por blocos está-se a fazer $\epsilon = \frac{1}{K}$.

- código ideal será aquele em que ε=0; na prática nem sempre é possível sendo satisfatório um código que possua bom rendimento

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

Fontes com memória

- Por vezes a probabilidade de emissão de um determinado símbolo depende dos símbolos anteriormente emitidos
- Fontes com memória de primeira ordem
  - fonte só se *lembra* do símbolo precedente
  - noção de probabilidade condicional
  - probabilidade de um símbolo ter ocorrido depois de um outro símbolo da fonte

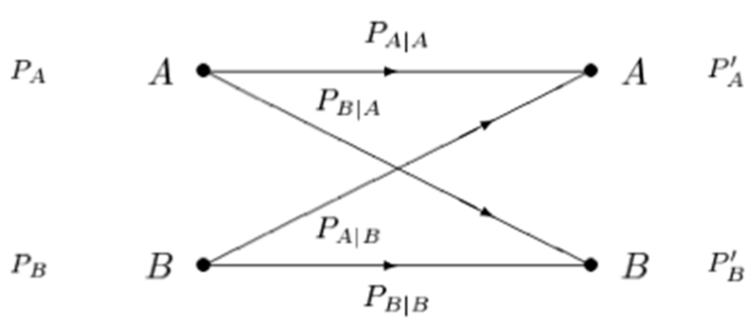
I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

Fontes com memória de primeira ordem

- **P (x_i | x_j)** - probabilidade de o símbolo x_i ser escolhido depois do símbolo x_j
- **P (x_i x_j)** - se for interpretado como a probabilidade da ocorrência de x_j e posteriormente x_i :

$$\mathbf{P\,(x_i\; x_j) = P(x_j) * P\,(x_i \mid x_j)}$$

...para a construção da tabela de blocos de símbolos



$$P'_A = P_A \cdot P_{A|A} + P_B \cdot P_{A|B}$$
$$P'_B = P_A \cdot P_{B|A} + P_B \cdot P_{B|B}$$

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

Fontes com memória

Como se calcula a entropia para fontes com memória de primeira ordem?

- Entropia condicional relativamente ao símbolo x_j

$$\boxed{\mathcal{H}(X|x_j) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{m} P(x_i|x_j) \log_2 \frac{1}{P(x_i|x_j)}}$$

- Entropia real de uma fonte de primeira ordem

$$\boxed{\mathcal{H}(X) = \sum_{j=1}^{m} P(x_j)\,\mathcal{H}(X|x_j)}$$

I. TEORIA DA INFORMAÇÃ

Fontes com memória

Exemplo: fonte com memória de 1ª ordem emite 8 símbolos {A, B, C, D, E, F, G, H} com probabilidades etc, etc, etc ....

•Que (e quantos) cálculos faria para determinar a entropia real desta fonte?

•Como calculava um código de comprimento variável para a fonte?

$$\boxed{\mathcal{H}(X|x_j) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{m} P(x_i|x_j) \log_2 \frac{1}{P(x_i|x_j)}}$$

$$\boxed{\mathcal{H}(X) = \sum_{j=1}^{m} P(x_j)\, \mathcal{H}(X|x_j)}$$

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

Fontes com memória

- Quando as probabilidades condicionais de uma fonte com memória reduzem significativamente o valor da entropia face ao seu valor máximo:
  - *a fonte diz-se redundante*
  - possibilidade de codificar a fonte com códigos mais eficientes (i.e. comprimento médio do código mais próximo da entropia real da fonte)

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

- Processos de **codificação da fonte** estudados no contexto da Teoria da Informação

  - Levam em conta o **grau de incerteza** da fonte para tentar
  - Tentam **retirar a redundância** produzida pela fonte
  - Daí se designarem por mecanismos de **compressão da fonte**

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

- **Processos de Codificação da Fonte** (... algumas considerações adicionais)

  - Aplicabilidade em processos de transmissão de dados, em mecanismos/algoritmos de compressão, etc.

  - Códigos Shannon-Fano são métodos muito simples/básicos de compressão (lossless)... foram abordados mais pela sua importância histórica no contexto da Teoria da Informação

  - Existem inúmeros mecanismos de compressão alternativos que assumem diferentes estratégias e com diferentes desempenhos

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

Mecanismos/algoritmos de compressão

Lossless

Algoritmos que permitem recuperar todos os dados originais a partir do ficheiro comprimido

Lossy

Algoritmos que só permitem recuperar uma aproximação aos dados originais

- Diferentes algoritmos de compressão são desenhados para lidar com determinados tipos de dados tendo em consideração algumas características específicas desses dados

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

Mecanismos/algoritmos/formatos de compressão (só alguns exemplos...)

Lossless *

Geral: RLE, LZ78, LZW, LZF, DEFLATE, bzip2, LZMA, Brotli, etc...

Áudio: ALAC, ATRAC, DST, FLAC, RealPlayer, TTA, WavPack, WMA lossless, etc..

Gráficos: PNG, TIFF, TGA, PCX, ILBM, JBIG2, etc...

Vídeo: Dirac lossless, FFV1, H.264 lossless, etc...

Lossy *

Gráficos: JPEG, JPEG2000, DjVu, JBIG2, PGF, etc...

Vídeo: Motion JPEG, H.264/MPEG-4 AVC, Dirac, VC-1, H.265/HEVC, etc ...

Áudio: AAC, ADPCM, ATRAC, Dolby Digital (AC-3), MP2, MP3, Musepack, Ogg Vorbis, WMA lossy, etc ...

Voz: Adaptive Multi-Rate, Codec2, Speex, etc ...

* alguns dos algoritmos/formatos mencionados tambem suportam a variante alternativa lossless/lossy

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

- Além da codificação da fonte a Teoria da Informação também aborda questões relacionadas:

  - Com o canal de comunicação.... e.g. **Capacidade do Canal**

  - Com a **Codificação do Canal** (iremos estudar mais tarde nesta unidade curricular)

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

Transmissão de Informação: o canal

(secção 8.4 da sebenta)

- Aborda a transmissão de informação em canais de comunicação
- *Não iremos abordar esta parte da matéria em detalhe...*
- .... mas iremos mais tarde utilizar a fórmula da Capacidade do Canal que é demonstrada nesta secção

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

Transmissão de Informação: o canal

(breve referência)

- Capacidade do Canal - dependente de vários fatores, nomeadamente (conceitos mais tarde abordados):
  - potência do sinal (S)
  - potência do ruído (N)
  - banda de transmissão (B_T)

- Considerada uma das equações mais importantes no contexto da telecomunicações

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

Transmissão de Informação: o canal

(breve referência)

- Capacidade do Canal > .. mede informação ... <

$$\boxed{C = B_T \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) \quad bits/s}$$

I. TEORIA DA INFORMAÇÃO

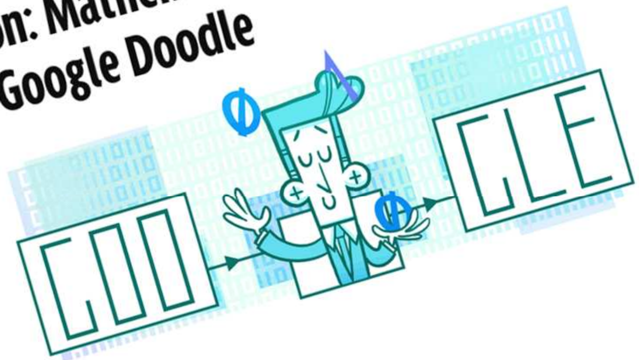
Teorema Fundamental da Teoria de informação

*"Dado um **canal de comunicação** e uma **fonte de informação** cujo **débito de informação** não excede a **capacidade do canal**, existe um **código** tal que a informação pode ser transmitida através do canal com uma frequência de erros arbitrariamente pequena, apesar da presença de ruído no canal."*

17 Equations That Changed the World
by Ian Stewart

1.	**Pythagoras's Theorem**	$a^2 + b^2 = c^2$	Pythagoras,530 BC
2.	**Logarithms**	$\log xy = \log x + \log y$	John Napier, 1610
3.	**Calculus**	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$	Newton, 1668
4.	**Law of Gravity**	$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$	Newton, 1687
5.	**The Square Root of Minus One**	$i^2 = -1$	Euler, 1750
6.	**Euler's Formula for Polyhedra**	$V - E + F = 2$	Euler, 1751
7.	**Normal Distribution**	$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\rho^2}}$	C.F. Gauss, 1810
8.	**Wave Equation**	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	J. d'Almbert, 1746
9.	**Fourier Transform**	$f(\omega) = \int_{\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \omega} \mathrm{d}x$	J. Fourier, 1822
10.	**Navier-Stokes Equation**	$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \nabla\cdot\mathbf{T} + \mathbf{f}$	C. Navier, G. Stokes, 1845
11.	**Maxwell's Equations**	$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\nabla\cdot\mathbf{H} = 0$ $\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$ $\nabla\times\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}$	J.C. Maxwell, 1865
12.	**Second Law of Thermodynamics**	$\mathrm{d}S \geq 0$	L. Boltzmann, 1874
13.	**Relativity**	$E = mc^2$	Einstein, 1905
14.	**Schrodinger's Equation**	$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H\Psi$	E. Schrodinger, 1927
15.	**Information Theory**	$H = -\sum p(x)\log p(x)$	C. Shannon, 1949
16.	**Chaos Theory**	$x_{t+1} = kx_t(1 - x_t)$	Robert May, 1975
17.	**Black-Scholes Equation**	$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV = 0$	F. Black, M. Scholes, 1990

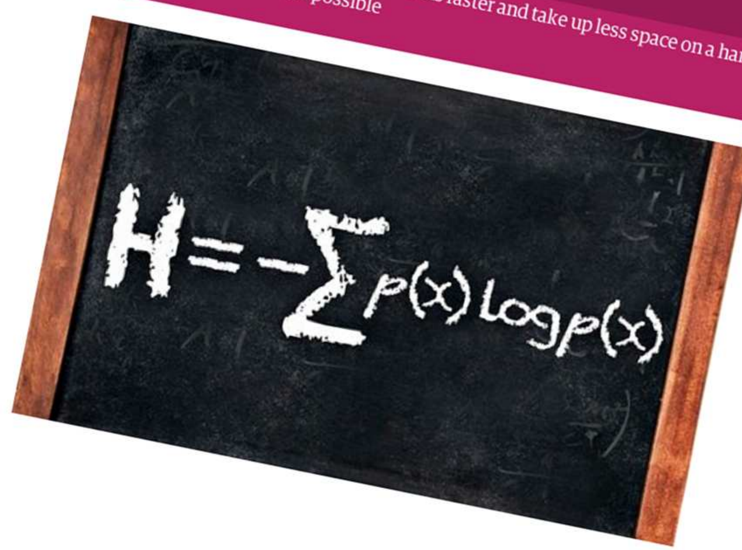
Claude Shannon: Mathematician's 100th birthday marked with Google Doodle



Science A short history of equations

Without Claude Shannon's information theory there would have been no internet

It showed how to make communications faster and take up less space on a hard disk, making the internet possible



Q.1	Alguns dos problemas fundamentais estudados pela Teoria da Informação relacionam-se com a medida da informação produzida por uma fonte e com a codificação (sem perda de informação) dessa fonte com o menor número possível de símbolos. Neste contexto, considere as seguintes afirmações:
A1	A entropia de uma fonte discreta sem memória é uma grandeza que representa a quantidade média de informação gerada por segundo por uma fonte e permite perceber qual o rendimento de uma determinada codificação.
B2	Pretende-se codificar uma fonte de informação com códigos *Shannon-Fano* mas sem utilizar codificações por blocos. Neste contexto, se a fonte gerar unicamente dois símbolos A e B com probabilidades $P_A=1/5$ e $P_B=4/5$ então nunca será possível comprimir a fonte.
C3	Assuma que a codificação *Shannon-Fano* de símbolos individuais de uma fonte de informação gerou um *código_a* cujo rendimento é superior a zero e inferior a um. Neste caso, através de codificação *Shannon-Fano* por blocos é sempre possível encontrar um *código_b* com rendimento superior ao obtido pelo *código_a*.
D4	Suponha que desenvolve um *software* de compressão/descompressão de ficheiros baseado em códigos *Shannon-Fano* e pretende aplicar esse *software* a um ficheiro de 10 Kbytes. Podemos afirmar que existe sempre um valor de N ($1 \leq N < \infty$) de tal forma que aplicando o *software* de compressão N vezes consecutivas consegue obter um ficheiro resultante com um tamanho inferior a 10 Kbytes.

$$c = \frac{N_f - \overline{N}}{N_f} \times 100\ \%$$

$$\mathcal{H}(X) = \Omega(p) \stackrel{def}{=} p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p}$$

$$\mathcal{H}(X|x_j) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{m} P(x_i|x_j) \log_2 \frac{1}{P(x_i|x_j)}$$

$$0 \leq \mathcal{H}(X) \leq \log_2 m$$

$$\rho = \frac{\mathcal{H}(X)}{\overline{N}}$$

$$\mathcal{H}(X) = \sum_{j=1}^{m} P(x_j)\, \mathcal{H}(X|x_j)$$

$$\overline{N} = \sum_{i=1}^{m} P_i\, N_i$$

$$\mathcal{R} \stackrel{def}{=} r_s\, \mathcal{H}(X)$$

$$\mathcal{H}(X) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{m} P_i\, I_i = \sum_{i=1}^{m} P_i \log_2 \frac{1}{P_i}$$

$$I_i \stackrel{def}{=} \log_2 \frac{1}{P_i}$$

$$\mathcal{H}(X) \leq \overline{N} < \mathcal{H}(X) + \frac{1}{K}$$

Q.2	Uma fonte de informação emite oito símbolos independentes entre si de um alfabeto X, com X={A,B,C,D,E,F,G,H}, gerando 1800 símbolos por minuto. Sabe-se que o débito de informação desta fonte é de 75 bits/seg.
A1	Com os dados apresentados podemos afirmar que os oito símbolos gerados pela fonte não são equiprováveis.
B2	O valor máximo de compressão que se poderia obter por codificação da fonte é superior a 20%.
C3	Usando códigos binários de comprimento fixo, para uma codificação por blocos de 2 símbolos (K=2) necessitávamos de um código com comprimento de 6 dígitos binários por par de símbolos$_X$.
D4	Aplicando uma codificação *Shannon-Fano* por blocos de 4 símbolos (K=4) obtínhamos um comprimento médio de código inferior a 2.8 dígitos binários por símbolo$_X$.

Q.6 – Considere uma fonte de informação capaz de emitir *n* mensagens distintas e independentes entre si em que metade delas, sendo equiprováveis, ocorre com 1/3 da probabilidade da outra metade, constituída também por mensagens equiprováveis. Mostre que a fonte possui entropia $H(x) = \log_2 n - \frac{3}{4}\log_2 3 + 1.$

Correcção - p. 210:

A codificação por blocos conduz tendencialmente a um código óptimo, isto é, com $K \to \infty$ tem-se $\boxed{\overline{N}}$ $\to \mathcal{H}(X)$, $\rho \to 1$ e $c \to c_{max}$. De facto, para a codificação por blocos, a desigualdade 8.13 escreve-se

$$\boxed{K * \mathcal{H}(X) \leq \overline{N}_K < K * \mathcal{H}(X) + 1}$$

donde, dividindo por K e tendo em atenção que a entropia da fonte não se altera com a codificação, se obtém

$$\mathcal{H}(X) \leq \frac{\overline{N}_K}{K} < \mathcal{H}(X) + \frac{1}{K}$$

ou, visto que $\overline{N} = \frac{\overline{N}_K}{K}$,

$$\mathcal{H}(X) \leq \overline{N} < \mathcal{H}(X) + \frac{1}{K}$$

Podemos agora enunciar um dos teoremas fundamentais da Teoria da Informação embora não procedamos à sua demonstração geral:

Correcção - p. 208:

Corrigir títulos da secção e exemplo:

Secção 8.2.3 – Códigos de *Shannon-Fano*

Exemplo 8.4 – Codificação de *Shannon-Fano*