ANÁLISE DA VARIÂNCIA

PLANEAMENTO EXPERIMENTAL

- Seleção dos fatores e identificação dos parâmetros que são objeto do estudo;
- Decisão sobre a magnitude dos erros padrão pretendidos;
- Escolha dos tratamentos (combinações de níveis de fatores) a serem incluídos na experiência, bem como o número de observações em cada tratamento;
- Atribuição dos tratamentos às unidades experimentais.

ANÁLISE DA VARIÂNCIA

O objetivo da Análise da Variância é isolar e avaliar as fontes de variação associadas com as variáveis experimentais, independentes e determinar como estas variáveis interatuam e afetam a variável resposta.

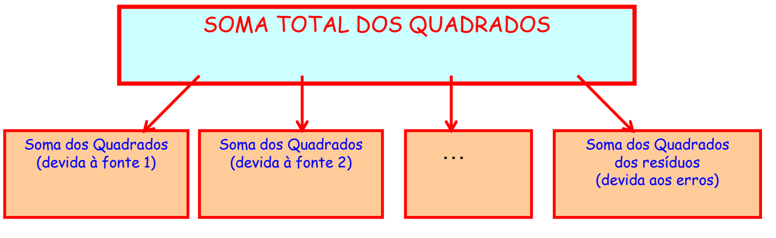
Nota histórica: Foi Sir Ronald Fisher quem desenvolveu esta técnica e a aplicou ao planeamento das experiências. Os seus livros *"Statistical Methods for Research Workers"*, editado em 1925 e *"The Design of Experiments"*, editado em 1935, são considerados clássicos na literatura.

Na Análise da Variância, a variação nas medidas observadas (resposta) é particionada em componentes que refletem os efeitos de uma ou mais variáveis independentes.
ANOVA – Analysis of Variance

Se o conjunto de dados consiste em *n* resultados $y_1, y_2, \ldots, y_n$ e se a média é $\bar{y}$, a variação total das observações em relação à média, soma dos quadrados das variações, é:

$$STQ = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

e designa-se por soma total dos quadrados (STQ) das variações.



O número de fontes de variação e as fórmulas para as componentes estão relacionadas como tipo de *planeamento* escolhido e com o modelo estatístico mais apropriado para a análise.

PLANEAMENTO COMPLETAMENTE ALEATÓRIO (PCA)

Tratamento					Total	Média
1	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1n}	$T_{1.}$	$\bar{y}_{1.}$
2	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2n}	$T_{2.}$	$\bar{y}_{2.}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	y_{k1}	y_{k2}	$\cdots$	y_{kn}	$T_{k.}$	$\bar{y}_{k.}$

PARTIÇÃO DA SOMA DOS QUADRADOS

$$\left(y_{ij}-\bar{y}_{..}\right)=\left(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..}\right)+\left(y_{ij}-\bar{y}_{i.}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\bar{y}_{..}\right)^2=n\sum_{i=1}^{k}\left(y_{i.}-\bar{y}_{..}\right)^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\bar{y}_{i.}\right)^2$$

$$STQ=SQT+SQR$$

- STQ – Soma Total dos Quadrados
- SQT – Soma dos Quadrados dos Tratamentos
- SQR – Soma dos Quadrados dos Resíduos

PLANEAMENTO COMPLETAMENTE ALEATÓRIO (PCA)

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, k \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ij} \sim N\left(0, \sigma^2\right)$$

$H_{01} : \alpha_i = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, k$

$H_{11} : \alpha_i \neq 0$ para pelo menos um valor de i

$R.R : F > c$

TABELA ANOVA

Fonte de Variação	Soma dos Quadrados	Graus de Liberdade	Média dos Quadrados	F
Tratamentos	SQT	k-1	MQT	F=MQT/MQR
Resíduos	SQR	k(n-1)	MQR	
Total	STQ	kn-1		

EXEMPLO

Um estudo realizado para avaliar o desenvolvimento de moscas consistiu na sua criação em três meio de cultura diferentes. A tabela apresenta o comprimento (mm×10^{-1}) das asas de 5 moscas recolhidas aleatoriamente de cada meio. Verifique se existem diferenças entre os comprimentos das asas das moscas recolhidas de cada meio.

Meio 1	36	39	43	38	37
Meio 2	50	42	51	40	43
Meio 3	45	53	56	52	56

Resolução:

	Meio 1	Meio 2	Meio 3
	36	50	45
	39	42	53
	43	51	56
	38	40	52
	37	43	56
totais	T1. =193	T2.= 226	T3.=262
	T..= 681		

$$\sum_{i,j} y_{ij}^2 = 31603$$

$$SQT = \frac{1}{5}\left(193^2 + 226^2 + 262^2\right) - \frac{1}{15}681^2 = 476,4$$

$$STQ = 31603 - 30917,4 = 685,6$$

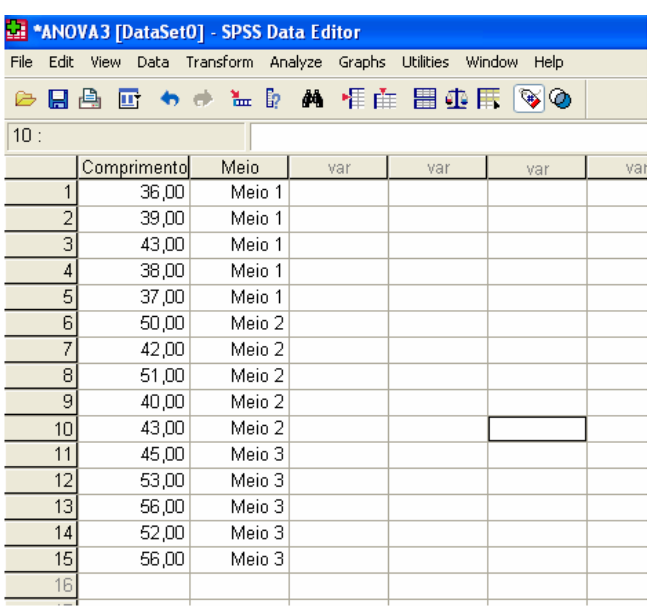
$$SQR = 685,6 - 476,4 = 209,2$$

TABELA ANOVA

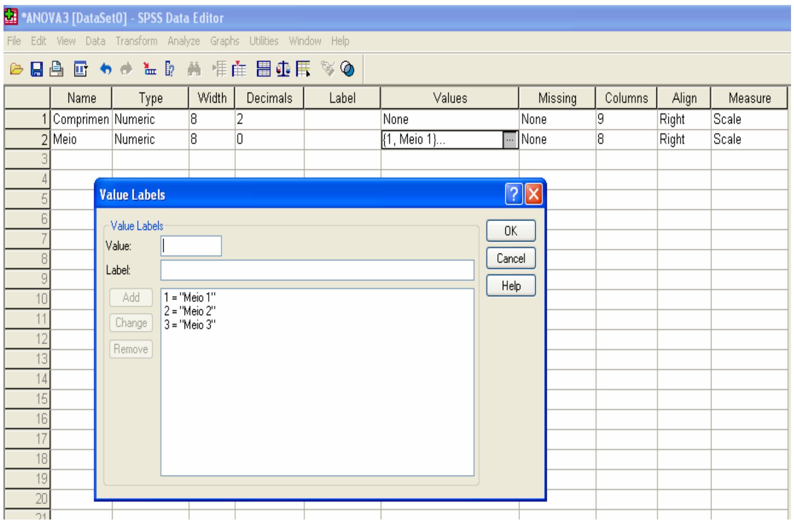
Fonte de Variação	Soma dos Quadrados	Graus de Liberdade	Média dos Quadrados	F
Tratamentos	476,4	2	238,2	F=13,67
Resíduos	209,2	12	17,43	
Total	685,6	14		

$$F_{2,12,0.05} = 3,89$$

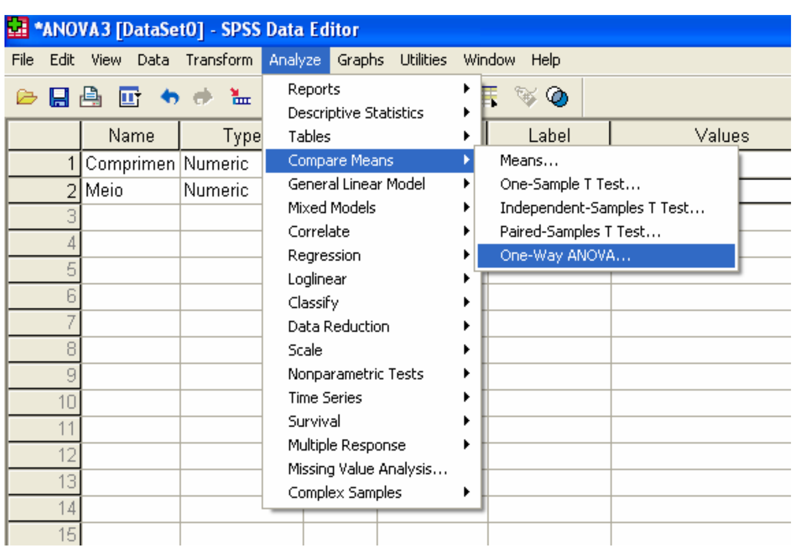
Decisão: Como F> c, rejeita-se a H_0 para um nível de significância de 5%, pelo que existem diferenças estatísticamente significativas entre os valores médios de crescimento nos 3 meios.



	Comprimento	Meio	var	var	var	var
1	36,00	Meio 1				
2	39,00	Meio 1				
3	43,00	Meio 1				
4	38,00	Meio 1				
5	37,00	Meio 1				
6	50,00	Meio 2				
7	42,00	Meio 2				
8	51,00	Meio 2				
9	40,00	Meio 2				
10	43,00	Meio 2				
11	45,00	Meio 3				
12	53,00	Meio 3				
13	56,00	Meio 3				
14	52,00	Meio 3				
15	56,00	Meio 3				
16						



*ANOVA3 [DataSet0] - SPSS Data Editor
File Edit View Data Transform Analyze Graphs Utilities Window Help
Name Type Width Decimals Label Values Missing Columns Align Measure
1 Comprimen Numeric 8 2 None None 9 Right Scale
2 Meio Numeric 8 0 {1, Meio 1}... None 8 Right Scale
Value Labels
Value Labels
Value:
Label:
Add
Change
Remove
1 = "Meio 1"
2 = "Meio 2"
3 = "Meio 3"
OK
Cancel
Help



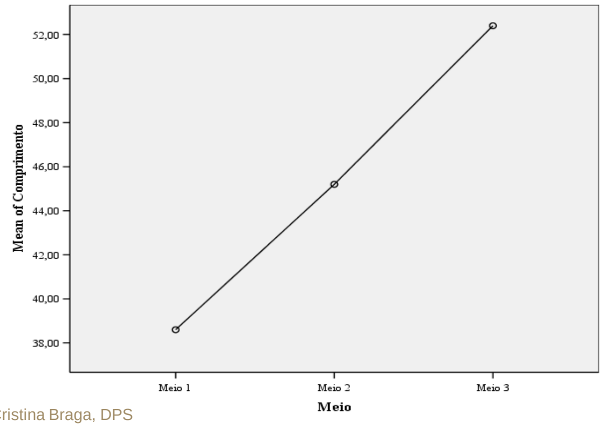
*ANOVA3 [DataSet0] - SPSS Data Editor
File Edit View Data Transform Analyze Graphs Utilities Window Help
Name Type Label Values
1 Comprimen Numeric
2 Meio Numeric
Reports
Descriptive Statistics
Tables
Compare Means
General Linear Model
Mixed Models
Correlate
Regression
Loglinear
Classify
Data Reduction
Scale
Nonparametric Tests
Time Series
Survival
Multiple Response
Missing Value Analysis...
Complex Samples
Means...
One-Sample T Test...
Independent-Samples T Test...
Paired-Samples T Test...
One-Way ANOVA...

TABELA ANOVA

ANOVA

Comprimento

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	476,400	2	238,200	13,663	,001
Within Groups	209,200	12	17,433		
Total	685,600	14			



Exemplo (Amostras desequilibradas)

Quatro grupos de vendedores foram sujeitos a diferentes programas de treino. Durante o programa de treino houve algumas desistências. No fim dos programas, a cada vendedor foi atribuída uma área de venda. A tabela regista as vendas ao fim de uma semana. Considere α=0,05.

Grupo de treino			
G1	**G2**	**G3**	**G4**
65	75	59	94
87	69	78	89
73	83	67	80
79	81	62	88
81	72	83	
69	79	76	
	90		

	G1	G2	G3	G4		
	Grupo de treino					
	65	75	59	94		
	87	69	78	89		
	73	83	67	80		
	79	81	62	88		
	81	72	83			
	69	79	76			
		90				
Totais	**454**	**549**	**425**	**351**	**T.. =**	**1779**
nj	6	7	6	4		

$$\sum_{i,j} y_{ij}^2 = 139511$$

H_0: Não existem diferenças significativas nas vendas devido aos diferentes programas de treino

$\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4$ ou $\alpha j = 0$ com $j = 1,2, 3, 4$

H_1: Pelo menos 2 programas são diferentes

$\alpha j \neq 0$ para pelo menos um valor de j.

R.R: F> c

$$SQT = \left(\frac{454^2}{6} + \frac{549^2}{7} + \frac{425^2}{6} + \frac{351^2}{4} \right) - \frac{1}{23} 1779^2 = 712,6$$

$$STQ = 139511 - \frac{1}{23} 1779^2 = 1909,2$$

$$SQR = 1909,2 - 712,6 = 1196,6$$

TABELA ANOVA

Fonte de Variação	Soma dos Quadrados	Graus de Liberdade	Média dos Quadrados	F
Tratamentos	712,6	3	237,5	F=3,77
Resíduos	1196,6	19	62,97	
Total	1909,2	22		

$$F_{3,19,0.05} = 3,13$$

Decisão: Como F> c, rejeita-se a H0 para um nível de significância de 5%, pelo que existem diferenças estatísticamente significativas entre os valores médios das vendas nos 4 grupos de treino.

Intervalos de confiança para as comparações múltiplas

$$T = \frac{\left(\bar{y}_{.i} - \bar{y}_{.j}\right) - \left(\mu_i - \mu_j\right)}{\sqrt{MQR\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}} \sim t_{N-k}$$

$$\boxed{\left(\bar{y}_{.i} - \bar{y}_{.j}\right) - t_{(\alpha/2),N-k} * \sqrt{MQR\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)} < \mu_i - \mu_j < \left(\bar{y}_{.i} - \bar{y}_{.j}\right) - t_{(\alpha/2),N-k} * \sqrt{MQR\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}}$$

$1.36 \leq \mu_4 - \mu_1 \leq 22.81$* $\quad -14.42 \leq \mu_3 - \mu_1 \leq 4.76 \quad -1.09 \leq \mu_4 - \mu_2 \leq 19.73$

$-16.84 \leq \mu_3 - \mu_2 \leq 1.65 \quad 6.19 \leq \mu_4 - \mu_3 \leq 27.64$* $\quad -6.48 \leq \mu_2 - \mu_1 \leq 12.00$

PLANEAMENTO COM BLOCOS ALEATÓRIOS (PBA)

Permite comparar **k tratamentos** envolvendo **n blocos**, cada contendo k unidades experimentais relativamente homogéneas. Os k tratamentos são distribuídos aleatoriamente às unidades experimentais dentro de cada bloco, com uma unidade experimental por tratamento.

PLANEAMENTO COM BLOCOS ALEATÓRIOS (PBA)

Tratamento \ Bloco	1	2	⋯	b	Total	Média
1	y_{11}	y_{12}	⋯	y_{1b}	$\boldsymbol{T}_{1.}$	$\bar{\boldsymbol{y}}_{1.}$
2	y_{21}	y_{22}	⋯	y_{2b}	$\boldsymbol{T}_{2.}$	$\bar{\boldsymbol{y}}_{2.}$
⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋮
k	y_{k1}	y_{k2}	⋯	y_{kb}	$\boldsymbol{T}_{k.}$	$\bar{\boldsymbol{y}}_{k.}$
Total	$\boldsymbol{T}_{.1}$	$\boldsymbol{T}_{.2}$	⋯	$\boldsymbol{T}_{.b}$	$\boldsymbol{T}_{..}$	
Média	$\bar{\boldsymbol{y}}_{.1}$	$\bar{\boldsymbol{y}}_{.2}$	⋯	$\bar{\boldsymbol{y}}_{.b}$		$\bar{\boldsymbol{y}}_{..}$

PLANEAMENTO COM BLOCOS ALEATÓRIOS (PBA)

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, k \\ j = 1, 2, \ldots, b \end{cases} \qquad \varepsilon_{ij} \sim N\left(0, \sigma^2\right)$$

$H_{01} : \alpha_i = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, k$

$H_{11} : \alpha_i \neq 0$ para pelo menos um valor de i

$R.R : F_1 > c_1$

$H_{02} : \beta_j = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, b$

$H_{12} : \beta_j \neq 0$ para pelo menos um valor de j

$R.R : F_2 > c_2$

PLANEAMENTO COM BLOCOS ALEATÓRIOS (PBA)

$$SQT = b\sum_{j=1}^{k}(\overline{y}_{.j} - \overline{Y})^2$$
$$SQB = k\sum_{i=1}^{b}(\overline{y}_{i.} - \overline{Y})^2$$
$$STQ = \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}(y_{ij} - \overline{Y})^2$$
$$SQR = \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}(y_{ij} - \overline{y}_{i.} - \overline{y}_{.j} + \overline{Y})^2$$

$$SQT = \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{k}T_{.j}^2 - \frac{1}{kb}T_{..}^2$$
$$SQB = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{b}T_{i.}^2 - \frac{1}{kb}T_{..}^2$$
$$STQ = \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}y_{ij}^2 - \frac{1}{kb}T_{..}^2$$
$$SQR = STQ - SQT - SQB$$

$T_{i.}$ é o total dos valores obtidos para o bloco i ; $T_{.j}$ é o total dos valores obtidos para o tratamento j

TABELA ANOVA

Fonte de Variação	Soma dos Quadrados	Graus de Liberdade	Média dos Quadrados	F
Tratamentos	SQT	k-1	MQT	F_1=MQT/MQR
Blocos	SQB	b-1	MQB	F_2=MQB/MQR
Resíduos	SQR	(k-1)(b-1)	MQR	
Total	STQ	kb-1		

Exemplo: Considere o tempo (em minutos) que levou uma certa pessoa a conduzir de casa até ao emprego, de segunda a sexta, por 4 caminhos diferentes.

dias	Seg.	Ter.	Qua.	Qui.	Sex.	
Caminho 1	22	26	25	25	31	T_1 = 129
Caminho 2	25	27	28	26	29	T_2 = 135
Caminho 3	26	29	33	30	33	T_3 = 151
Caminho 4	26	28	27	30	30	T_4 = 141

T_1 = 99 T_2 = 110 T_3 = 113 T_4 = 111 T_5 = 123 T =556

Comparar os tempos de percurso para o emprego, considerando α = 0.05.

Resolução:

Trata-se de um planeamento com blocos aleatórios (dias da semana), cujo modelo é:

$$y_{ij} = \mu_{ij} + e_{ij} = \mu + \alpha_j + \beta_i + e_{ij}$$

H_{01}: Não existem diferenças significativas nos tempos devido aos diferentes caminhos

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 \text{ ou } \alpha_j = 0 \text{ com } j = 1, 2, 3, 4$$

H_{02}: Não existem diferenças significativas nos tempos devido aos diferentes dias da semana

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 \text{ ou } \beta_i = 0 \text{ com } i = 1, 2, 3, 4, 5$$

H_{11}: $\alpha_j \neq 0$ para pelo menos um valor de j.

H_{12}: $\beta_j \neq 0$ para pelo menos um valor de i.

$\Sigma\Sigma y_{ij}^2 = 15610$ $n = 5$ $k = 4$ $STQ = 153.2$ $SQT = 52.8$ $SQB = 73.2$ $SQR = 27.2$

Tabela ANOVA

Fonte de variação	Soma dos Quadrados	Graus de liberdade	Média dos Quadrados	Estatística de teste, F
Tratamentos	52.8	3	17.6	$F_1 = 7.75$
Blocos	73.2	4	18.3	
Resíduos	27.2	12	2.27	$F_2 = 8.06$
Total	153.2	19		

Decisão: Como $F_1 = 7.75 > F_{3,\,12,\,(0.05)} = 3.49$ e $F_2 = 8.06 > F_{4,\,12,\,(0.05)} = 3.26$, rejeitam-se ambas hipóteses nulas para um nível de significância 0.05, pelo que existem diferenças significativas nos tempos de percurso, quer devido aos diferentes caminhos quer devido aos diferentes dias da semana.