Tópicos de Matemática Discreta

folha 1

## 1. Noções elementares de lógica

**1.1.** Das seguintes frases indique aquelas que são proposições:

(a) A Terra é redonda.

(b) Hoje está sol.

(c) $2 + x = 3$ e 2 é par.

(d) $(25 \times 2) + 7$

(e) 2 é ímpar ou 3 é múltiplo de 4.

(f) Qual é o conjunto de soluções inteiras da equação $x^2 - 1 = 0$?

(g) $4 < 3$

(h) Se $x \geq 2$ então $x^3 \geq 1$.

(i) A U.M. é a melhor academia do país.

**1.2.** Representando as frases *Eu gosto de leite*, *Eu não gosto de cereais* e *Eu sei fazer crepes* por $p_0$, $p_1$ e $p_2$, respetivamente, traduza as seguintes fórmulas para linguagem corrente:

(a) $p_0 \wedge p_1$ (c) $\neg p_2$ (e) $\neg p_0 \vee \neg p_1$ (g) $(p_2 \wedge p_0) \vee p_1$

(b) $p_1 \vee p_2$ (d) $\neg(p_0 \vee p_1)$ (f) $p_2 \to p_0$ (h) $p_2 \wedge (p_0 \vee p_1)$

**1.3.** Considere as proposições *7 é um número inteiro par*, *3+1=4* e *24 é divisível por* 8 representadas, respetivamente, por $p_0$, $p_1$ e $p_2$.

(a) Escreva fórmulas que representem as afirmações:

(i) $3 + 1 \neq 4$ e 24 é divisível por 8.

(ii) Não é verdade que: 7 é ímpar ou $3 + 1 = 4$.

(iii) Se $3 + 1 = 4$ então 24 não é divisível por 8.

(b) Traduza por frases cada uma das seguintes fórmulas:

(i) $p_0 \vee (\neg p_2)$ (ii) $\neg(p_0 \wedge p_1)$ (iii) $(\neg p_2) \to (\neg p_1 \vee p_0)$

**1.4.** De entre as seguintes palavras sobre o alfabeto do Cálculo Proposicional, indique, justificando, aquelas que pertencem ao conjunto $\mathcal{F}^{CP}$:

(a)$(\neg\, (p_1 \vee p_2))$ (d) $((p_0 \wedge \neg p_0) \to \perp)$

(b) $((\neg p_5) \to (\neg p_6))$ (e) $(\perp)$

(c) $((p_3 \wedge p_1) \vee ($ (f) $(((p_9 \to ((p_3 \vee (\neg p_8)) \wedge p_{12})) \leftrightarrow (\neg p_4)) \to (p_7 \vee \perp)))$

## Tópicos de Matemática Discreta

folha 2

**1.5.** Das seguintes proposições indique as que são verdadeiras:

(a) $(e < 4) \wedge (e^2 < 9)$

(b) 1 e $-1$ são soluções da equação $x^3 - 1 = 0$.

(c) 64 é múltiplo de 3 ou de 4.

(d) $\sqrt{530} < 25 \to 530 < 25^2$

(e) $7^4$ é par se e só se $7^4 + 1$ é ímpar.

**1.6.** Construa tabelas de verdade para cada uma das seguintes fórmulas do Cálculo Proposicional:

(a) $p_0 \vee (\neg p_0)$

(b) $\neg(p_0 \vee p_1)$

(c) $p_0 \wedge \neg(p_0 \vee p_1)$

(d) $p_0 \wedge (\neg p_0 \vee p_1)$

(e) $\neg(p_0 \to \neg p_1)$

(f) $p_0 \leftrightarrow (p_1 \vee p_0)$

(g) $(p_0 \to p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \vee p_1)$

(h) $(p_0 \to p_1) \leftrightarrow (\neg p_1 \to \neg p_0)$

(i) $p_0 \to (p_1 \to p_2)$

(j) $p_0 \wedge \neg(p_1 \to p_2)$

(k) $(p_0 \leftrightarrow \neg p_2) \vee (p_1 \wedge p_2)$

(l) $(p_0 \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_0 \wedge p_1) \to p_2)$

**1.7.** Suponha que $p_0$ representa uma proposição verdadeira, $p_1$ uma proposição falsa, $p_2$ uma proposição falsa e $p_3$ uma proposição verdadeira. Quais das seguintes fórmulas são verdadeiras e quais são falsas?

(a) $p_0 \vee p_2$

(b) $(p_2 \wedge p_3) \vee p_1$

(c) $\neg(p_0 \wedge p_1)$

(d) $\neg p_3 \vee \neg p_2$

(e) $(p_3 \wedge p_0) \vee (p_1 \wedge p_2)$

(f) $p_2 \vee (p_3 \vee (p_0 \wedge p_1))$

(g) $p_2 \to p_1$

(h) $p_0 \leftrightarrow p_2$

(i) $(p_1 \leftrightarrow p_3) \wedge p_0$

(j) $p_3 \to (p_0 \to \neg p_3)$

(k) $((p_1 \to p_3) \leftrightarrow p_3) \wedge \neg p_0$

(l) $(p_3 \to p_0) \leftrightarrow \neg(p_2 \vee p_1)$

**1.8.** Admitindo que $p_0$, $p_1$ e $p_2$ representam proposições e que $p_0 \leftrightarrow p_1$ é falsa, o que pode dizer sobre o valor lógico das seguintes fórmulas?

(a) $p_0 \wedge p_1$

(b) $p_0 \vee p_1$

(c) $p_0 \to p_1$

(d) $(p_0 \wedge p_2) \leftrightarrow (p_1 \wedge p_2)$

# Tópicos de Matemática Discreta

## folha 3

**1.9.** Suponha que o Manuel gosta da cor azul, não gosta da cor vermelha, gosta da cor amarela e não gosta da cor verde. Quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas?

(a) O Manuel gosta de azul e de vermelho.

(b) O Manuel gosta de amarelo ou verde e o Manuel não gosta de vermelho.

(c) O Manuel gosta de vermelho ou o Manuel gosta de azul e amarelo.

(d) O Manuel gosta de azul ou amarelo e o Manuel gosta de vermelho ou verde.

(e) Se o Manuel gosta de azul então gosta de amarelo.

(f) O Manuel gosta de amarelo se e só se gosta de vermelho.

(g) O Manuel gosta de verde e se o Manuel gosta de amarelo então gosta de azul.

(h) Se o Manuel gosta de amarelo então gosta de verde ou o Manuel gosta de amarelo se e só se gosta de vermelho.

**1.10.** Considere as seguintes afirmações:

- Se há vida em Marte, então Zuzarte gosta de tarte.
- Zuzarte é um marciano ou não gosta de tarte.
- Zuzarte não é um marciano, mas há vida em Marte.

(a) Exprima as afirmações anteriores através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar as frases simples.

(b) Mostre que as três afirmações acima não podem ser simultaneamente verdadeiras.

**1.11.** De entre as seguintes fórmulas, indique aquelas que são tautologias e aquelas que são contradições:

(a) $p_0 \to (p_0 \vee p_1)$

(b) $\neg(p_0 \wedge p_1) \to (p_0 \vee p_1)$

(c) $(p_0 \to p_1) \leftrightarrow (\neg p_1 \to \neg p_0)$

(d) $(p_0 \to (p_0 \vee p_1)) \wedge p_1$

(e) $(p_0 \vee \neg p_0) \to (p_0 \wedge \neg p_0)$

(f) $\neg(p_0 \to (p_1 \to p_0))$

**1.12.** Indique quais dos pares de fórmulas que se seguem são logicamente equivalentes:

(a) $\neg(p_0 \wedge p_1)$; $\neg p_0 \wedge \neg p_1$

(b) $p_0 \to p_1$; $p_1 \to p_0$

(c) $\neg(p_0 \to p_1)$; $p_0 \wedge (p_1 \to (p_0 \wedge \neg p_0))$

(d) $p_0 \to (p_1 \to p_2)$; $\neg(\neg p_2 \to \neg p_1) \to \neg p_0$

**1.13.** Encontre uma fórmula que seja logicamente equivalente à fórmula $p_0 \vee \neg p_1$ e que envolva apenas os conetivos $\wedge$ e $\neg$.

# Tópicos de Matemática Discreta

folha 4

**1.14.** Exprima cada uma das seguintes frases como quantificações:

(a) A equação $x^3 = 28$ tem pelo menos uma solução nos números naturais.

(b) 1000000 não é o maior número natural.

(c) A soma de três números naturais consecutivos é um múltiplo de 3.

(d) Entre cada dois números racionais distintos existe um outro número racional.

**1.15.** Considere a seguinte proposição:

Todos os Hobbits são criaturas pacíficas.

Indique qual ou quais das seguintes proposições equivale à negação da proposição anterior:

(a) Todos os Hobbits são criaturas conflituosas.

(b) Nem todos os Hobbits são criaturas pacíficas.

(c) Existem Hobbits que são criaturas conflituosas.

(d) Nem todos os Hobbits são criaturas conflituosas.

**1.16.** Escreva quantificações equivalentes à negação de cada uma das seguintes proposições.

(a) Todo o OVNI tem o objetivo de conquistar alguma galáxia.

(b) Existem morcegos que pesam 50 ou mais quilogramas.

(c) A inequação $x^2 - 2x > 0$ verifica-se para todo o número real $x$.

(d) Existe um inteiro $n$ tal que $n^2$ é um número perfeito.

**1.17.** Considere as seguintes proposições, em que o universo de cada uma das quantificações é o conjunto dos números reais.

(a) $\forall_x \exists_y \; x + y = 0$

(b) $\exists_x \forall_y \; x + y = 0$

(c) $\exists_x \forall_y \; x + y = y$

(d) $\forall_x \; (x > 0 \to \exists_y \; xy = 1)$

Para cada proposição $p$ acima (i) indique se $p$ é ou não verdadeira e (ii) apresente, sem recorrer ao conetivo negação, uma proposição que seja equivalente a $\neg p$.

# Tópicos de Matemática Discreta

folha 5

**1.18.** Considerando que $p$ representa a proposição $\forall_{a\in A}\exists_{b\in B}\ (a^2 = b \vee a+b=0)$,

**(a)** verifique se $p$ é verdadeira para $A=\{-2,0,1,2\}$ e $B=\{-1,0,4\}$.

**(b)** indique em linguagem simbólica, sem recorrer ao símbolo de negação, uma proposição equivalente à negação de $p$.

**1.19.** Considerando que $p$ representa a proposição

$$\exists_{y\in A}\forall_{x\in A}(x\neq y \to (xy>0 \vee x^2+y=0)),$$

(a) dê exemplo de um universo $A$ não vazio onde:

(i) a proposição $p$ é verdadeira;

(ii) a proposição $p$ é falsa.

(b) indique, sem recorrer ao conetivo *negação*, uma proposição equivalente a $\neg p$.

**1.20.** Averigue a validade dos seguintes argumentos:

(a) O João afirma: "Hoje vou ao cinema ou fico em casa a ver um filme na televisão". No dia seguinte o João comentou: "Ontem não fui ao cinema." Em resposta, a Joana concluiu: "Então viste um filme na televisão!".

(b) A Maria afirmou: "Se hoje encontrar a Alice e estiver calor, vou à praia". No dia seguinte a Maria comentou: "Ontem esteve calor e fui à praia". Em resposta, a Rita concluiu: "Então encontraste a Alice".

(c) O Tiago disse: "Vou almoçar no bar ou na cantina". E acrescentou: "Se comer no bar fico mal disposto e não vou ao cinema". Nesse dia, a Joana encontrou o Tiago no cinema e concluiu: "O Tiago foi almoçar à cantina".

**1.21.** Mostre que a soma de dois números inteiros ímpares é um número par.

**1.22.** Mostre que o produto de números inteiros ímpares é um número ímpar.

**1.23.** Mostre que não existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $n+5=3n+2$.

**1.24.** Seja $n$ um número natural ímpar. Mostre que $n^2+8n-1$ é múltiplo de 4.

**1.25.** Mostre que, para todo o natural $n$, se $3n+5$ é ímpar, então $n$ é par.

**1.26.** Prove que, para todo o natural $n$, $n^2$ é ímpar se e só se $n$ é ímpar.

**1.27.** Prove que, dado um número natural $n$, se $n$ é múltiplo de 6, então $n$ é múltiplo de 2 e de 3.

**1.28.** Encontre um contraexemplo para cada das afirmações seguintes:

(a) Se $n=p^2+q^2$, com $p,q$ primos, então $n$ é primo.

(b) Se $a>b$, com $a,b\in\mathbb{R}$, então $a^2>b^2$.

(c) Se $x^4=1$, com $x\in\mathbb{R}$, então $x=1$.