ANÁLISE
Cap. 3 – Cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$

Dep. Matemática UMinho

Março 2020

3.5 Propriedades da diferencial e da matriz jacobiana

Aritmética das diferenciais:: funções reais e funções vetoriais

- Sejam $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ funções diferenciáveis em a. Então
  - [Produto por escalar] Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, a função $h(x) = \alpha f(x)$ é diferenciável em a e

$$dh(a) = \alpha df(a)$$

$$\Updownarrow$$

$$Jh(a) = \alpha Jf(a)$$

3.5 Propriedades da diferencial e da matriz jacobiana

Aritmética das diferenciais:: funções reais e funções vetoriais

- Sejam $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ funções diferenciáveis em a. Então
  - [Produto por escalar] Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, a função $h(x) = \alpha f(x)$ é diferenciável em a e
$$dh(a) = \alpha df(a)$$
$$\updownarrow$$
$$Jh(a) = \alpha Jf(a)$$
  - [Adição] A função $h(x) = f(x) + g(x)$ é diferenciável em a e
$$dh(a) = df(a) + dg(a)$$
$$\updownarrow$$
$$Jh(a) = Jf(a) + Jg(a)$$

Se $k = 1$, trata-se de funções reais e a matriz Jacobiana, sendo uma matriz $1 \times n$, corresponde a um vetor: o vetor gradiente.

Aritmética das diferenciais:: funções reais

- Sejam $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ funções reais diferenciáveis em a. Então
  - [Produto] A função $h(x) = f(x)g(x)$ é diferenciável em a e

$$
\begin{aligned}
dh(a) =& g(a)df(a) + f(a)dg(a) \\
&\Updownarrow \\
\nabla h(a) =& g(a)\nabla f(a) + f(a)\nabla g(a)
\end{aligned}
$$

Aritmética das diferenciais:: funções reais

- Sejam $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ funções reais diferenciáveis em a. Então
  - [Produto] A função $h(x) = f(x)g(x)$ é diferenciável em a e

$$\begin{aligned} dh(a) &= g(a)df(a) + f(a)dg(a) \\ &\updownarrow \\ \nabla h(a) &= g(a)\nabla f(a) + f(a)\nabla g(a) \end{aligned}$$

  - [Quociente] a função $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ é diferenciável em a e

$$\begin{aligned} dh(a) &= \frac{g(a)df(a) - f(a)dg(a)}{g(a)^2} \\ &\updownarrow \\ \nabla h(a) &= \frac{g(a)\nabla f(a) - f(a)\nabla g(a)}{g(a)^2} \end{aligned}$$

Regra da cadeia

- [Regra da cadeia]

  Sejam $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ e $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^k$ funções vetoriais tais que g é diferenciável em a e f é diferenciável em $g(a)$. Então a função $h = f \circ g$ é diferenciável em a e

$$dh(a) = d(f \circ g)(a) = df(g(a)) \circ dg(a)$$

$$\updownarrow$$

$$Jh(a) = J(f \circ g)(a) = Jf(g(a))\, Jg(a)$$

Regra da cadeia

- [Regra da cadeia]

  Sejam $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ e $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^k$ funções vetoriais tais que g é diferenciável em a e f é diferenciável em $g(a)$. Então a função $h = f \circ g$ é diferenciável em a e

$$dh(a) = d(f \circ g)(a) = df(g(a)) \circ dg(a)$$

$$\updownarrow$$

$$Jh(a) = J(f \circ g)(a) = Jf(g(a))\, Jg(a)$$

[Nota] O produto que ocorre no último membro é um produto de matrizes (não comutativo).

Observação

- A regra da cadeia é a generalização da regra da derivação da função composta estudada em Cálculo.
  - Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
    Se g é derivável em a e f é derivável em $g(a)$ então a função $h = f \circ g$ é derivável em a e
    $$h'(a) = f'(g(a))\, g'(a)$$

    (Repare que, como f, g, h são funções $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Jf, Jg e Jh são matrizes 1×1 que se identificam com f', g' e h', respetivamente.)

[Caso particular:: 1]

Sejam $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $g(t) = (x(t), y(t), z(t))$ e $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.
Defina-se $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(t) = (f \circ g)(t) = f(x(t), y(t), z(t)).$$

Então

$$h'(a) = Jh(a) = Jf(g(a))\, Jg(a) = \nabla f(g(a))\, Jg(a)$$

[Caso particular:: 1]

Sejam $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $g(t) = (x(t), y(t), z(t))$ e $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.
Defina-se $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(t) = (f \circ g)(t) = f(x(t), y(t), z(t)).$$

Então

$$h'(a) = Jh(a) = Jf(g(a))\, Jg(a) = \nabla f(g(a))\, Jg(a)$$

onde

$$\nabla f(g(a)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(a)), \frac{\partial f}{\partial y}(g(a)), \frac{\partial f}{\partial z}(g(a)) \right) \qquad \text{e}$$

$$Jg(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt}(a) \\ \dfrac{dy}{dt}(a) \\ \dfrac{dz}{dt}(a) \end{pmatrix}$$

Isto é (omitindo os argumentos)

$$\nabla f \, Jg = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Isto é (omitindo os argumentos)

$$\nabla f\, Jg = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Assim,

$$h' = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Isto é (omitindo os argumentos)

$$\nabla f\, Jg = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Assim,

$$h' = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

ou seja

$$h'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(a))\frac{dx}{dt}(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(a))\frac{dy}{dt}(a) + \frac{\partial f}{\partial z}(g(a))\frac{dz}{dt}(a)\,.$$

[Caso particular:: 2]

Sejam $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g(x,y,z) = (u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$ e $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.
Defina-se $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(x,y,z) = (f \circ g)(x,y,z) = f(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)).$$

Então

$$Jh(x,y,z) = Jf(g(x,y,z))\, Jg(x,y,z) = \nabla f(g(x,y,z))\, Jg(x,y,z)$$

Aqui

$$\nabla f(u,v,w) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial w}\right) \qquad \text{e}$$

$$Jg(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Isto é (omitindo os argumentos)

$$\nabla h = \nabla f \, Jg =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial w}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Isto é (omitindo os argumentos)

$$\nabla h = \nabla f \, Jg =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial w} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Assim,

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

[Regra da cadeia:: como fazer]

1. Identificar as funções f, g
2. Verificar se Jf ou Jg é um gradiente
3. Calcular Jf e $Jf(g)$
4. Calcular Jg
5. Efetuar $Jf(g)\,Jg$

Exercícios:: 1

1. Calcular ∇h sendo $h = f \circ g$ onde

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (xz, xy) \end{array} \quad \text{e} \quad f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & u^2 + v \end{array}$$

2. Considere as funções

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{array}, \quad v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array},$$

$$w : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & e^x \end{array}, \quad f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x^2y + y^2z \end{array}$$

$$\text{e} \quad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(u(x, y), v(x, y), w(x, y)) \,. \end{array}$$

Determine $\nabla h(x, y)$.

3. Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x^2y - xz$ e $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Calcule $df(1,0,0)(1,2,2)$.
   (b) Usando a regra da cadeia, determine a de modo que a função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(t) = f(at^2, at, t^3)$ tenha derivada nula.

4. Calcule $\frac{\partial w}{\partial p}$ e $\frac{\partial w}{\partial q}$, onde $w = r^2 + s^2$ e $r = pq^2, s = p^2 \operatorname{sen} q$.

Interpretação geométrica do vetor gradiente

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $a \in U$.

1. Sendo $v \in \mathbb{R}^n$ um vetor, foi visto que

$$df(a)(v) = \nabla f(a) \cdot v = ||\nabla f(a)||\ ||v|| \cos \alpha$$

(α é a amplitude do ângulo entre $\nabla f(a)$ e v);

e, para $||v|| = 1$,

$$df(a)(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(a).$$

Então, se $\nabla f(a) \neq 0$ e $||v|| = 1$

- o maior valor de $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ é igual a $||\nabla f(a)||$ e ocorre quando $\alpha = 0$, isto é

$$v = \frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||};$$

Interpretação geométrica do vetor gradiente

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $a \in U$.

1. Sendo $v \in \mathbb{R}^n$ um vetor, foi visto que

$$df(a)(v) = \nabla f(a) \cdot v = ||\nabla f(a)||\ ||v|| \cos \alpha$$

(α é a amplitude do ângulo entre $\nabla f(a)$ e v);

e, para $||v|| = 1$,

$$df(a)(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(a).$$

Então, se $\nabla f(a) \neq 0$ e $||v|| = 1$

- o maior valor de $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ é igual a $||\nabla f(a)||$ e ocorre quando $\alpha = 0$, isto é
$$v = \frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||};$$
- o menor valor de $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ é igual a $-||\nabla f(a)||$ e ocorre quando $\alpha = \pi$, isto é
$$v = -\frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||};$$

Interpretação geométrica do vetor gradiente

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $a \in U$.

1. Sendo $v \in \mathbb{R}^n$ um vetor, foi visto que

$$df(a)(v) = \nabla f(a) \cdot v = ||\nabla f(a)||\, ||v|| \cos\alpha$$

(α é a amplitude do ângulo entre $\nabla f(a)$ e v);

e, para $||v|| = 1$,

$$df(a)(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(a).$$

Então, se $\nabla f(a) \neq 0$ e $||v|| = 1$

- o maior valor de $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ é igual a $||\nabla f(a)||$ e ocorre quando $\alpha = 0$, isto é
$$v = \frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||};$$
- o menor valor de $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ é igual a $-||\nabla f(a)||$ e ocorre quando $\alpha = \pi$, isto é
$$v = -\frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||};$$
- $\frac{\partial f}{\partial v}(a)=0$ quando $\alpha = \frac{\pi}{2}$, isto é $v \perp \nabla f(a)$.

- [Consequência 1]

  A derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ mede a variação da função em $a \in U$ na direção do vetor unitário v. Assim, o que atrás foi visto significa que

  - o vetor $\nabla f(a)$ aponta na direção e no sentido de crescimento máximo de f ;

  - o vetor $-\nabla f(a)$ aponta na direção e no sentido de decrescimento máximo de f;

  - $||\nabla f(a)||$ é maior quando as estruturas de nível de f estão mais próximas entre si e menor quando estas estão mais afastadas.

2. Sejam Σ_c a estrutura de nível c de f em $a \in U$ $(c = f(a))$ e v um vetor unitário tangente a Σ_c em a:

2. Sejam Σ_c a estrutura de nível c de f em $a \in U$ $(c = f(a))$ e v um vetor unitário tangente a Σ_c em a:

Como f é constante em Σ_c tem-se $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$ pelo que

$$0 = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \nabla f(a) \cdot v$$

2. Sejam Σ_c a estrutura de nível c de f em $a \in U$ ($c = f(a)$) e v um vetor unitário tangente a Σ_c em a:

Como f é constante em Σ_c tem-se $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$ pelo que

$$0 = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \nabla f(a) \cdot v$$

Assim, $\nabla f(a)$ é ortogonal a v.

2. Sejam Σ_c a estrutura de nível c de f em $a \in U$ $(c = f(a))$ e v um vetor unitário tangente a Σ_c em a:

Como f é constante em Σ_c tem-se $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$ pelo que

$$0 = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \nabla f(a) \cdot v$$

Assim, $\nabla f(a)$ é ortogonal a v.

- [Consequência 2] $\nabla f(a)$ é normal à estrutura de nível de f, Σ_c, em a.

  (Um vetor diz-se normal a uma curva num ponto se for ortogonal à reta tangente à curva nesse ponto, normal a uma superfície num ponto se for ortogonal ao plano tangente à superfície nesse ponto, e assim por diante.)

Reta normal e hiperplano tangente

- Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, $a \in U$ tal que $\nabla f(a) \neq 0$ e Σ_c a estrutura de nível de f em a

$$\Sigma_c = \{x \in U \;:\; f(x) = f(a)\} \,.$$

  - $\nabla f(a)$ é um vetor normal a Σ_c;

[1] se f é uma função real de variável real o “hiperplano” tangente a Σ_c é uma reta.

Reta normal e hiperplano tangente

- Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, $a \in U$ tal que $\nabla f(a) \neq 0$ e Σ_c a estrutura de nível de f em a

$$\Sigma_c = \{x \in U \ : \ f(x) = f(a)\} \, .$$

  - $\nabla f(a)$ é um vetor normal a Σ_c;
  - Uma equação paramétrica da reta normal a Σ_c em a é, então,

$$x = a + \lambda \, \nabla f(a), \qquad \lambda \in \mathbb{R};$$

[1] se f é uma função real de variável real o "hiperplano" tangente a Σ_c é uma reta.

Reta normal e hiperplano tangente

- Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, $a \in U$ tal que $\nabla f(a) \neq 0$ e Σ_c a estrutura de nível de f em a

$$\Sigma_c = \{x \in U \, : \, f(x) = f(a)\} \, .$$

  - $\nabla f(a)$ é um vetor normal a Σ_c;
  - Uma equação paramétrica da reta normal a Σ_c em a é, então,

$$x = a + \lambda \, \nabla f(a), \qquad \lambda \in \mathbb{R};$$

  - Uma equação cartesiana do hiperplano[1] tangente a Σ_c em a é, então,

$$\nabla f(a) \cdot (x - a) = 0 \, .$$

[1] se f é uma função real de variável real o "hiperplano" tangente a Σ_c é uma reta.

Exemplo

- Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $P = (2, 3)$.

- curva de nível de f que passa em P:

  $\Sigma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 13\}$

Exemplo

- Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $P = (2, 3)$.

- curva de nível de f que passa em P:

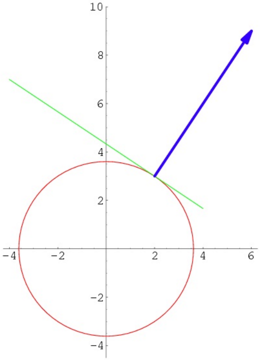
  $$\Sigma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 13\}$$

- vetor gradiente de f em P:

  $$\nabla f(2, 3) = (4, 6)$$

Exemplo

- Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $P = (2,3)$.



- curva de nível de f que passa em P:

$$\Sigma_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 13\}$$

- vetor gradiente de f em P:

$$\nabla f(2,3) = (4,6)$$

- reta tangente a Σ_c em P:

$$\nabla f(2,3) \cdot (x-2, y-3) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x + 3y = 13$$

Exercícios:: 2

5. Considere a curva de equação $x^2 + xy + y^2 = 3$.
   (a) Encontre um vetor perpendicular/normal e um vetor tangente à curva no ponto $(-1, -1)$.
   (b) Encontre equações que definam a reta tangente e a reta normal à curva no ponto $(-1, -1)$.

6. Determine o plano tangente ao elipsoide definido por

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} = 1$$

no ponto de coordenadas $(2, 2, 1)$.