

Tópicos de Matemática Discreta

1.º teste — 28 de outubro de 2015 — duração: 2 horas

1. Considere as fórmulas $\varphi : (\neg p_0 \vee p_1) \leftrightarrow (p_0 \rightarrow (p_1 \wedge \neg p_1))$ e $\psi : (p_1 \rightarrow p_0) \rightarrow \neg p_0$. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira.

- (a) A fórmula φ é uma tautologia ou uma contradição.
- (b) A fórmula φ tem valor lógico 0 sempre que a fórmula ψ tem valor lógico 0.

2. Considerando que p representa a proposição $\forall_{a \in A} (a \geq 0 \rightarrow \exists_{b \in B} (a = 2b \vee a^2 = a))$,

- (a) Verifique se p é verdadeira para $A = \{-2, 0, 1, 4\}$ e $B = \{0, 2, 4\}$. Justifique.
- (b) Indique, sem recorrer ao conetivo *negação*, uma proposição equivalente a $\neg p$.

3. (a) Sejam p e q proposições. Diga, justificando, se a seguinte afirmação é ou não verdadeira: Para provar que $p \leftrightarrow q$ é verdadeira, basta provar que se p é verdadeira, então q é verdadeira.

(b) Seja A um conjunto de números inteiros com, pelo menos, 3 elementos. Mostre que é possível encontrar elementos distintos m e n de A tais que $m - n$ é par.

4. Considere os conjuntos

$$A = \{1, \{4\}\}, \quad B = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N} \wedge 2n < 5\}, \quad C = \{1, 2, 4\} \text{ e } D = \{x \in \mathbb{N} \mid \sqrt{x} \in C\}.$$

- (a) Determine B e D .
- (b) Verifique se $(1, 4, 1) \in C \times (A \cap C) \times A$. Justifique.
- (c) Determine $\mathcal{P}(A)$.

5. Diga, justificando, se, para quaisquer conjuntos A , B e C , cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira.

- (a) $\{\emptyset\} \subseteq A$.
- (b) Se $A \in B$ e $B \subseteq C$, então $A \in C$.
- (c) $\mathcal{P}(A) \cap A = \emptyset$.
- (d) Se $A \times B = A \times C$, então $B = C$.

6. Sejam A , B e C conjuntos. Mostre que se $A \cap B = A \cap C$ então $(A \cap B) \setminus C = \emptyset$.

| | | | | | | |
|----------|-----------|------------|-----------|-------|---------------------|----|
| Cotações | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. |
| | 1,75+1,75 | 1,75 +1,75 | 1,25+1,75 | 1+1+1 | 1,25+1,25+1,25+1,25 | 2 |