

# TESTES DE HIPÓTESES



## OBJETIVO



Verificar se os dados amostrais (ou estimativas obtidas a partir deles) são ou não compatíveis com determinadas populações (ou valores previamente fixados dos parâmetros populacionais).



## PROCEDIMENTO

- Definição das hipóteses
  - $H_0$  – hipótese nula
  - $H_1$  – hipótese alternativa
- Identificação da estatística de teste (ET)
- Definição da regra de decisão
- Cálculo da estatística de teste e tomada de decisão

Profª Ana Cristina Braga, DPS

3



## Critérios para um teste de hipóteses

Hipótese \ Decisão	Decisão	
	Não rejeitar $H_0$	Rejeitar $H_0$
$H_0$ é verdadeira	Decisão correta	<b>Erro Tipo I</b>
$H_0$ é falsa	<b>Erro Tipo II</b>	Decisão correta

Profª Ana Cristina Braga, DPS

4



## ERROS

- $\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rej. } H_0 | H_0)$
- $\beta = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{não rej } H_0 | H_1)$

### Função potência de um teste

$$k(\theta) = \begin{cases} \alpha & H_0 \\ 1 - \beta & H_1 \end{cases}$$



## DECISÃO

- Se o valor calculado para a  $ET > ET(\alpha)$  então rejeita-se  $H_0$  (valor  $p < \alpha$ )

“**valor p** é a probabilidade de se obter uma estatística de teste igual ou mais extrema quanto aquela observada em uma amostra, assumindo verdadeira a hipótese nula”

- Se o valor calculado para a  $ET < ET(\alpha)$  então não se rejeita  $H_0$ ; (valor  $p > \alpha$ ) - resultado inconclusivo.

**Nota: A magnitude do valor p não indica o tamanho ou a importância de um efeito observado**

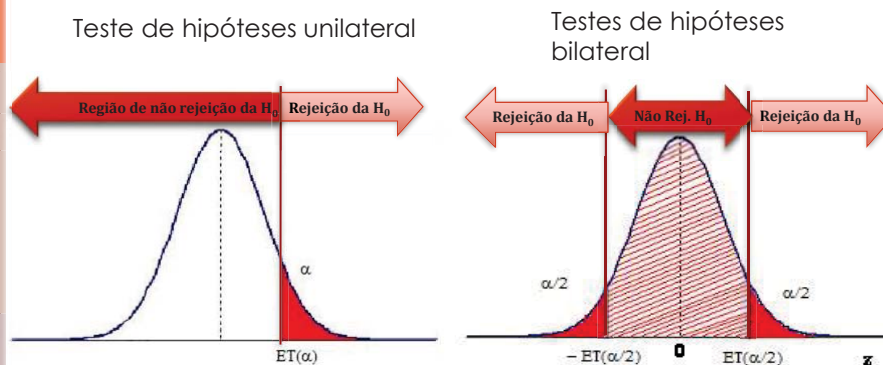


# TESTE DE SIGNIFICÂNCIA

- Se a diferença entre o que esperamos e o que obtemos é tão grande que não pode ser atribuída ao acaso, nós rejeitamos a hipótese na qual baseamos as nossas expectativas.
- Se a diferença entre o que esperamos e o que obtemos é tão pequena que pode ser realmente atribuída ao acaso, nós não rejeitamos a hipótese na qual baseamos as nossas expectativas, dizemos que o resultado do teste não é (estatisticamente) significativo.

Profª Ana Cristina Braga, DPS

7



Profª Ana Cristina Braga, DPS

8

# MÉDIA



## Teste Unilateral

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

$$(H_1 : \mu < \mu_0)$$

## Teste Bilateral

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

### Estatística

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \approx \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

### Região de Rejeição

$$z > z_{1-\alpha}$$

$$(z < -z_{1-\alpha})$$

### Região de Rejeição

$$|z| > z_{1-\alpha/2}$$

Profª Ana Cristina Braga, DPS

9

# EXEMPLO 1



- Suponha que a Inspeção das Atividades Económicas quer verificar se os sacos de cimento de uma determinada fábrica têm um peso médio de 15 Kg. Para tal recolheu uma amostra aleatória de 50 sacos, tendo encontrado uma média de 14.81 Kg com um desvio padrão de 0.62 Kg. Permitem os dados concluir que a fábrica está a fornecer sacos com um peso inferior ao especificado?. Assuma  $\alpha=0.05$ .

Profª Ana Cristina Braga, DPS

10

## SOLUÇÃO 1

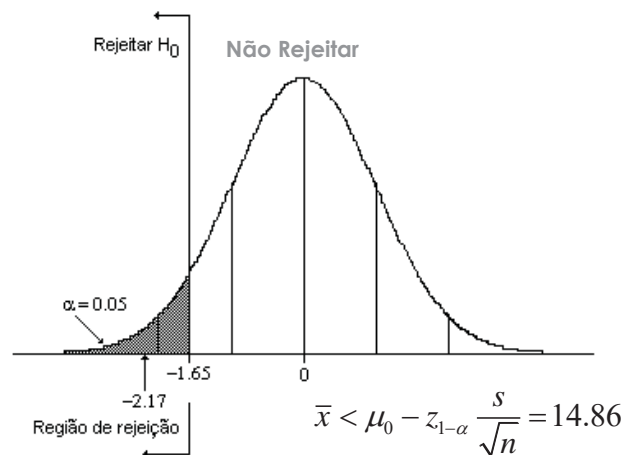


- 1. Formulação das hipóteses  $H_0 : \mu = 15$   
 $H_1 : \mu < 15$
- 2. Região crítica  $z < -z_{0.95} = -1.65$
- 3. Teste estatístico  $z \approx \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{14.81 - 15}{0.62/\sqrt{50}} = -2.17$
- 4. Decisão  
Rejeitar a Hipótese Nula, ou seja, os sacos têm, em média, um peso inferior a 15 Kg.

Profª Ana Cristina Braga, DPS

11

## SOLUÇÃO 1



Profª Ana Cristina Braga, DPS

12

# MÉDIA



## Teste Unilateral

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

$$(H_1 : \mu < \mu_0)$$

## Teste Bilateral

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Estatística

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

## Região de Rejeição

$$t > t_\alpha$$

$$(t < -t_\alpha)$$

## Região de Rejeição

$$|t| > t_{\alpha/2}$$

Profª Ana Cristina Braga, DPS

13

# EXEMPLO 2



- Uma máquina produz seringas com 2.5 cm de comprimento. No entanto, se as seringas forem demasiado curtas ou longas, serão rejeitadas. Neste caso a máquina necessita de ser ajustada. Para tal, uma amostra de seringas é recolhida, a intervalos regulares, para verificar se as mesmas estão a ser produzidas com o comprimento médio de 2.5 cm.
- Suponha que foi recolhida uma amostra de 16 seringas, com uma média  $\bar{x} = 2.5138$  cm e um desvio padrão  $s = 0.03594$  cm.
- Há evidência suficiente para assumir que a máquina não está a produzir segundo as especificação, isto é, que a máquina está fora de controlo? Use  $\alpha = 0.01$ .

Profª Ana Cristina Braga, DPS

14

## SOLUÇÃO 2



- 1. Formulação das hipóteses

$$H_0 : \mu = 2.5$$

- 2. Região crítica

$$H_1 : \mu \neq 2.5$$

- 3. Teste estatístico

$$|t| \geq t_{0.005} = 2.947$$

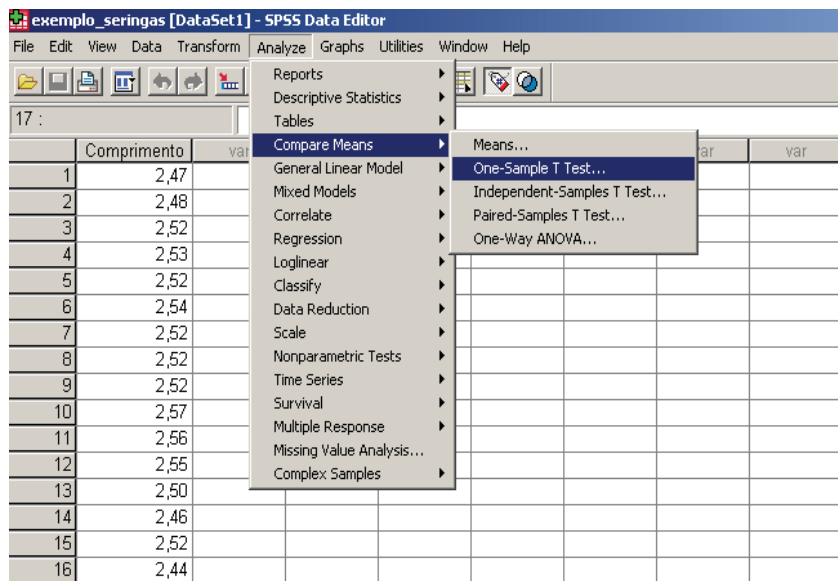
- 4. Decisão

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{2.5138 - 2.5}{0.03594/\sqrt{16}} = 1.536$$

Não rejeitar a Hipótese Nula, ou seja, as seringas podem apresentar um comprimento médio de 2.5 cm.

Profª Ana Cristina Braga, DPS

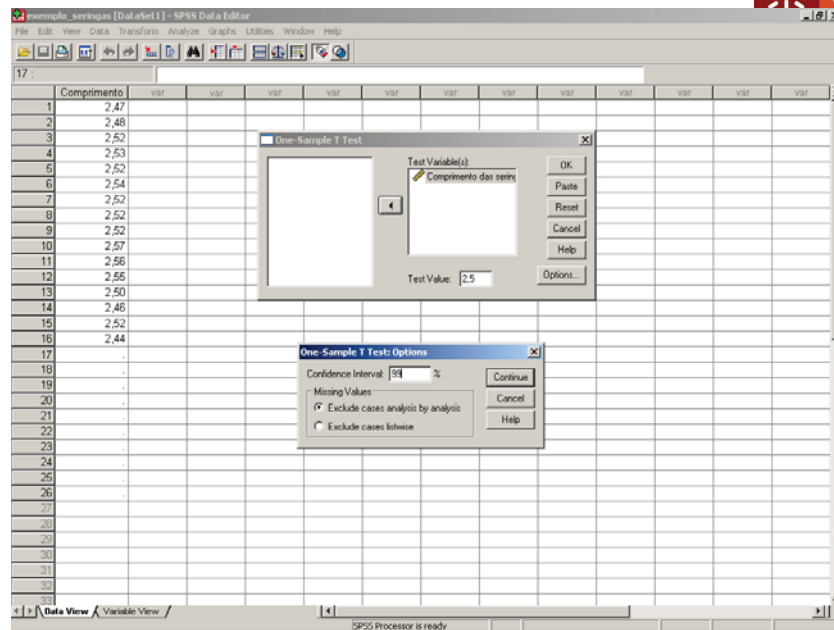
15



Profª Ana Cristina Braga, DPS

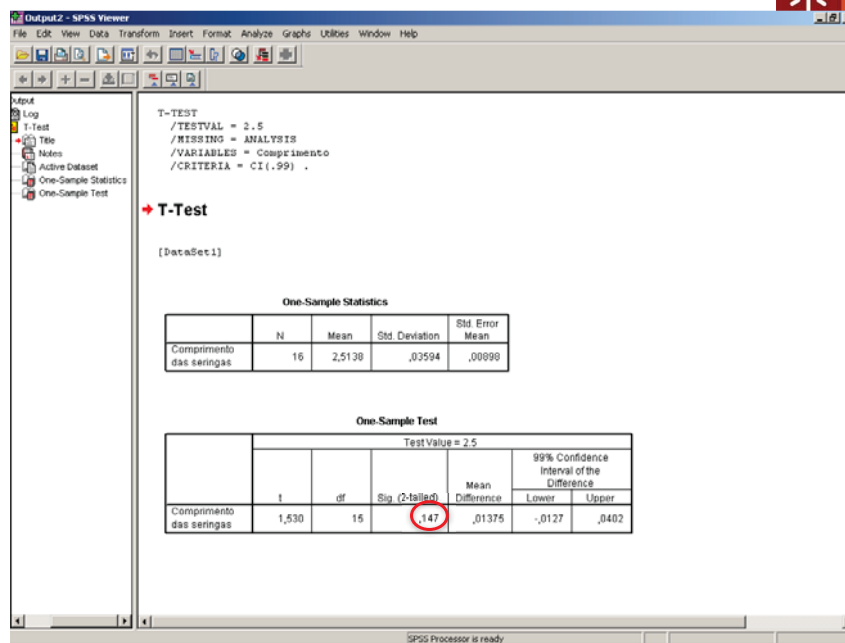
16





Profª Ana Cristina Braga, DPS

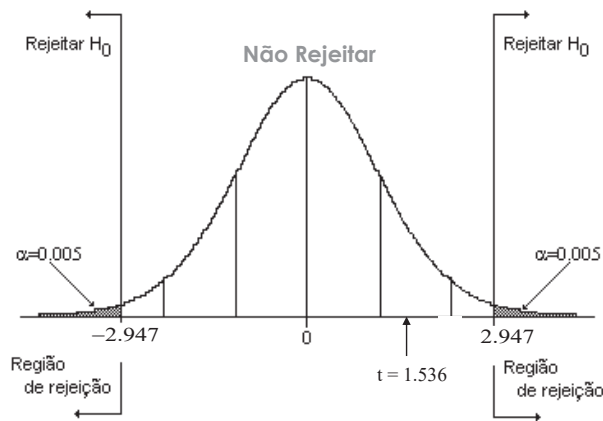
17



Profª Ana Cristina Braga, DPS

18

## SOLUÇÃO 2



Profª Ana Cristina Braga, DPS

19

## DIFERENÇA DE MÉDIAS AMOSTRAS INDEPENDENTES



### Teste Unilateral

$$H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = d_0$$

$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) > d_0$$

$$(H_1 : (\mu_1 - \mu_2) < d_0)$$

### Teste Bilateral

$$H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = d_0$$

$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq d_0$$

### Estatística

$$T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

### Região de Rejeição

$$t > t_\alpha$$

$$(t < -t_\alpha)$$

### Região de Rejeição

$$|t| > t_{\alpha/2}$$

Profª Ana Cristina Braga, DPS

20



## EXEMPLO 4

O desgaste da cabeça do fêmur conduz à implantação de uma cabeça de substituição numa liga metálica leve e resistente. Esta implantação é feita com um cimento especial, que alguns médicos suspeitam que possa diminuir a resistência do osso. No entanto, as opiniões dos ortopedistas dividem-se quanto à necessidade de introdução de um tampão que evite que o cimento se espalhe pelo espaço disponível. Para comparar o efeito do uso do tampão na resistência à flexão, foram efetuados vários implantes em animais de laboratório, tendo sido obtidos os seguintes resultados de resistência (Nm):

C/ Tampão	7.0	6.2	7.1	8.1	5.1	5.6
S/ Tampão	8.9	7.7	5.3	8.6	7.1	4.6

O que pode concluir acerca do efeito do tampão na resistência à flexão? Use  $\alpha=0.05$ .

Profª Ana Cristina Braga, DPS

21



F2.6 [DataSet2] - SPSS Data Editor

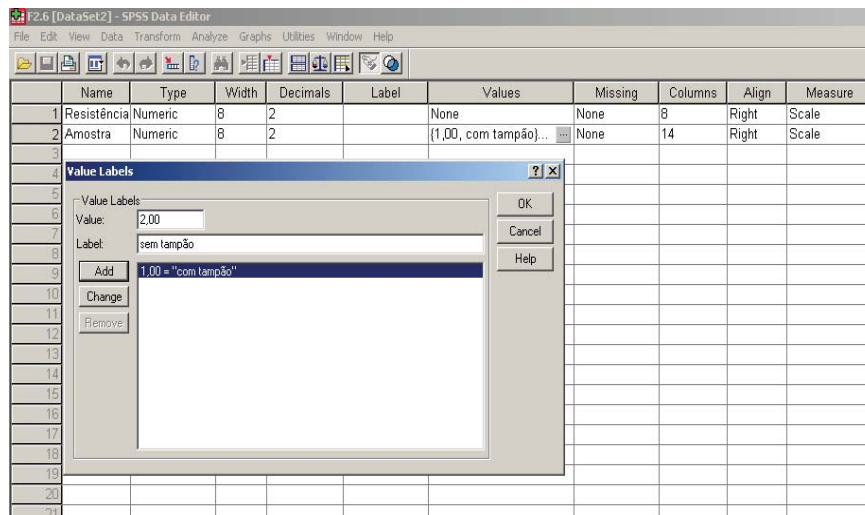
File Edit View Data Transform Analyze Graphs Utilities Window Help

30 :

	Resistência	Amostra	var	var	var
1	7,00	com tampão			
2	6,20	com tampão			
3	7,10	com tampão			
4	8,10	com tampão			
5	5,10	com tampão			
6	5,60	com tampão			
7	8,90	sem tampão			
8	7,70	sem tampão			
9	5,30	sem tampão			
10	8,60	sem tampão			
11	7,10	sem tampão			
12	4,60	sem tampão			
13					

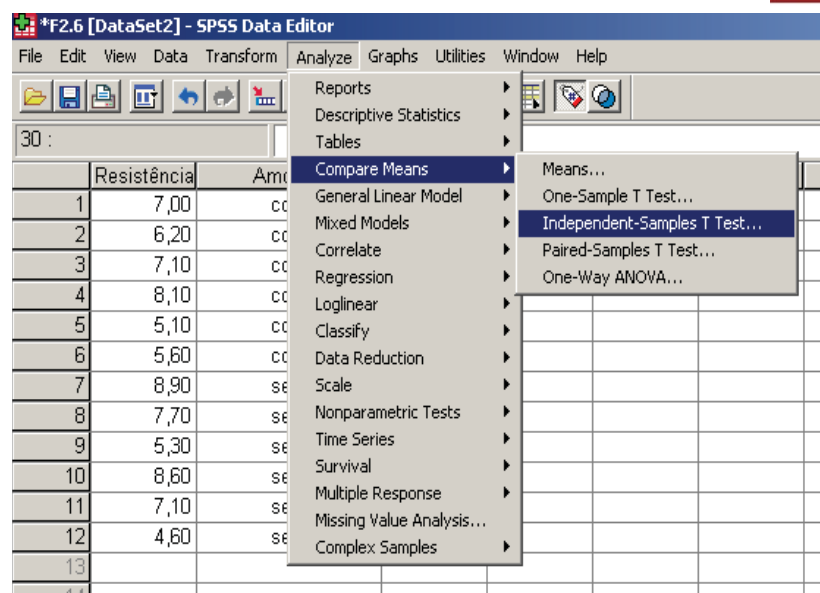
Profª Ana Cristina Braga, DPS

22



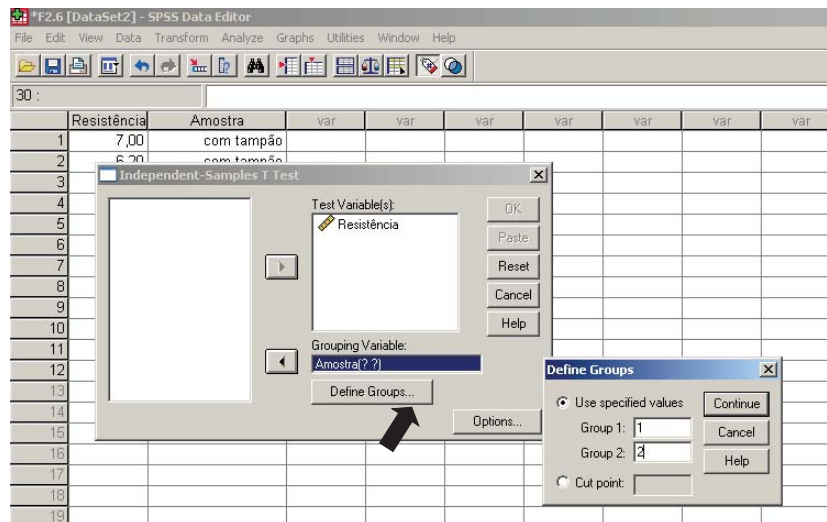
Profª Ana Cristina Braga, DPS

23



Profª Ana Cristina Braga, DPS

24



Profª Ana Cristina Braga, DPS

25

## SOLUÇÃO 4



$$\bar{x}_1 = 6.517 \quad s_1 = 1.098$$

$$\bar{x}_2 = 7.033 \quad s_2 = 1.750$$

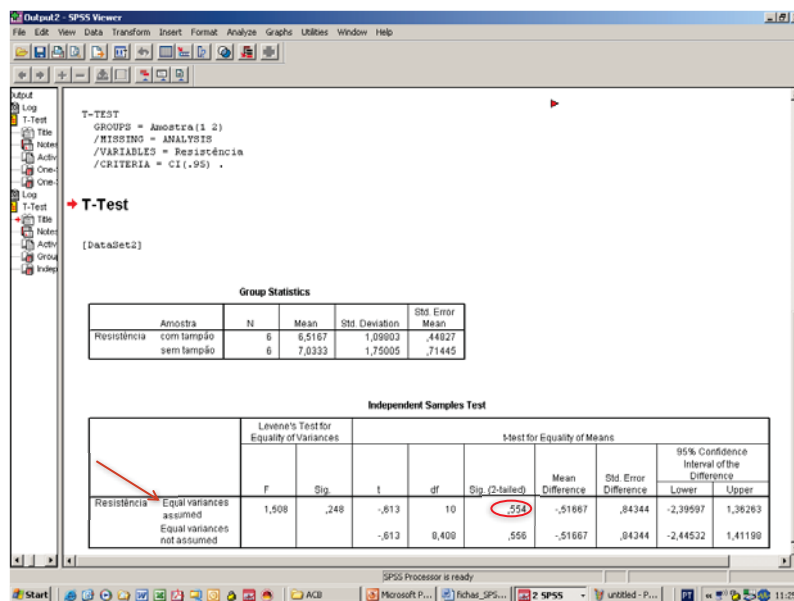
- 1. Formulação das hipóteses  $H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = 0$   
 $H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq 0$

- 2. Região crítica

$$|t| \geq t_{0.025} = 2.228$$

Profª Ana Cristina Braga, DPS

26



Profª Ana Cristina Braga, DPS

27

## DIFERENÇA DE MÉDIAS AMOSTRAS EMPARELHADAS

### Teste Unilateral

$$H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = D_0$$

$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) > D_0$$

$$(H_1 : (\mu_1 - \mu_2) < D_0)$$

### Teste Bilateral

$$H_0 : (\mu_1 - \mu_2) = D_0$$

$$H_1 : (\mu_1 - \mu_2) \neq D_0$$

### Estatística

$$t = \frac{\bar{d} - D_0}{s_d / \sqrt{n}}$$

### Região de Rejeição

$$t > t_{\alpha}$$

Profª Ana Cristina Braga, DPS

### Região de Rejeição

$$|t| > t_{\alpha/2}$$

28

# PROPORÇÃO



## Teste Unilateral

$$H_0 : \pi = \pi_0$$

$$H_1 : \pi > \pi_0$$

$$(H_1 : \pi < \pi_0)$$

## Estatística

$$Z = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1 - \pi_0)}{n}}}$$

## Região de Rejeição

$$z > z_{1-\alpha}$$

$$(z < -z_{1-\alpha})$$

## Teste Bilateral

$$H_0 : \pi = \pi_0$$

$$H_1 : \pi \neq \pi_0$$

## Região de Rejeição

$$|z| > z_{1-\alpha/2}$$

Profª Ana Cristina Braga, DPS

29

# DIFERENÇA DE PROPORÇÕES



## Teste Unilateral

$$H_0 : \pi_1 - \pi_2 = d_0$$

$$H_1 : \pi_1 - \pi_2 > d_0$$

$$(H_1 : \pi_1 - \pi_2 < d_0)$$

## Estatística

$$Z = \frac{(p_1 - p_2) - d_0}{\sqrt{\frac{p_1(1 - p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1 - p_2)}{n_2}}} \quad \text{se } d_0 \neq 0$$

## Região de Rejeição

$$z > z_{1-\alpha}$$

$$(z < -z_{1-\alpha})$$

## Teste Bilateral

$$H_0 : \pi_1 - \pi_2 = d_0$$

$$H_1 : \pi_1 - \pi_2 \neq d_0$$

## Região de Rejeição

$$|z| > z_{1-\alpha/2}$$

Profª Ana Cristina Braga, DPS

30



## DIFERENÇA DE PROPORÇÕES

### Teste Unilateral

$$H_0 : \pi_1 - \pi_2 = 0$$

$$H_1 : \pi_1 - \pi_2 > 0$$

$$(H_1 : \pi_1 - \pi_2 < 0)$$

### Estatística

$$z = \frac{(p_1 - p_2)}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

### Teste Bilateral

$$H_0 : \pi_1 - \pi_2 = 0$$

$$H_1 : \pi_1 - \pi_2 \neq 0$$

$$\text{sendo } p = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

### Região de Rejeição

$$z > z_{1-\alpha}$$

$$(z < -z_{1-\alpha})$$

### Região de Rejeição

$$|z| > z_{1-\alpha/2}$$

Profª Ana Cristina Braga, DPS

31



## VARIÂNCIA

### Teste Unilateral

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

$$(H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2)$$

### Estatística

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

### Região de Rejeição

$$\chi^2 > \chi_{\alpha}^2 \quad (\chi^2 < \chi_{1-\alpha}^2)$$

### Teste Bilateral

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

### Região de Rejeição

$$\chi^2 < \chi_{1-\alpha}^2 \quad \text{ou} \quad \chi^2 > \chi_{\alpha}^2$$

Profª Ana Cristina Braga, DPS

32





## EXEMPLO 5

As garrafas de refrigerantes contêm um volume aproximado de 33 cl. O produtor perderá dinheiro se as garrafas contiverem muito mais do que o volume especificado, e correrá o risco de ser multado, se o volume for bastante inferior. Assim, é necessário controlar a variação do volume de enchimento das garrafas. Se a variância for superior a 0.25 o processo está fora de controlo, e a máquina de enchimento deve ser ajustada. Para tal, um controlador de qualidade recolhe uma amostra de 15 garrafas, com um enchimento médio de 33.15 cl e um desvio padrão de 0.71 cl. Face a estes resultados pode-se concluir que o processo está controlado?

Profª Ana Cristina Braga, DPS

33



## SOLUÇÃO 5

1. Formulação das hipóteses  $H_0 : \sigma^2 = 0.25$   
 $H_1 : \sigma^2 > 0.25$
2. Região crítica  $\chi^2 \geq \chi_{0.05}^2 = 23.685$
3. Teste estatístico 
$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{14(0.71)^2}{0.25} = 28.230$$
4. Decisão  
Rejeitar a Hipótese Nula, ou seja, o processo de enchimento está fora de controlo.

Profª Ana Cristina Braga, DPS

34



## RAZÃO DE VARIÂNCIAS

### Teste Unilateral

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \Rightarrow (\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$$

$$H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1 \Rightarrow (\sigma_1^2 > \sigma_2^2)$$

### Estatística

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

$$\left( F = \frac{s_2^2}{s_1^2} \right)$$

### Região de Rejeição

$$F > F_\alpha \quad \left[ H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1 \Rightarrow (\sigma_1^2 < \sigma_2^2) \right]$$

Profª Ana Cristina Braga, DPS

### Teste Bilateral

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \Rightarrow (\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$$

$$H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1 \Rightarrow (\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$$

### Estatística

$$F = \begin{cases} \frac{s_1^2}{s_2^2} & s_1^2 > s_2^2 \\ \frac{s_2^2}{s_1^2} & s_1^2 < s_2^2 \end{cases}$$

### Região de Rejeição

$$F > F_{\alpha/2}$$

35



## EXEMPLO 9

Uma das características importantes num vinho de qualidade é a constância do gosto no sabor e no aroma. A variabilidade no sabor depende do processo de vinificação, que pode incluir o controlo de variáveis como a temperatura, fermentação, qualidade das leveduras, etc. Um empresa quer ensaiar um novo processo de vinificação com o objetivo de reduzir a variabilidade no gosto, medido por um índice. Duas amostras aleatórias, respectivamente de 25 e 15 copos, retiradas da produção dos dois processos de vinificação foram avaliadas por um painel de provadores, produzindo os seguintes resultados:  $s_1 = 1.22$  e  $s_2 = 0.72$ .

Permitem os dados concluir que a variabilidade no segundo processo de vinificação é menor? (considere  $\alpha=0,05$ ).

Profª Ana Cristina Braga, DPS

36

## SOLUÇÃO 9



1. Formulação das hipóteses

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$

$$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$$

2. Região crítica

$$F \geq F_{0.05, 24, 14} \cong 2.34$$

3. Teste estatístico

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{(1.22)^2}{(0.72)^2} = 2.87$$

4. Decisão

Rejeitar a Hipótese Nula, ou seja, a variabilidade no segundo processo de vinificação é significativamente menor.