Capítulo 7: Matemática Financeira

O valor do dinheiro no tempo
O juro (interesse)
Valor Futuro de um Capital Inicial
Valor Presente de um Capital Futuro
Valor Futuro de uma Anuidade
Valor Presente de uma Anuidade
Valor Presente de uma Perpetuidade
Taxa de juro nominal e efetiva

Ficha de exercícios nº6

Conceitos básicos

⇒ A avaliação de um investimento envolve a análise de custos e benefícios, expressos em valores monetários, que ocorrem em diferentes momentos da vida do projeto.

⇒ De modo a comparar esses fluxos monetários é necessário recorrer ao conceito de **taxa de juro** ou **taxa de interesse** que permite avaliar como o valor do dinheiro varia no tempo.

O Juro

⇒ **Juro** ou **interesse (i)** é a medida do valor do dinheiro no tempo e permite quantificar a diferença entre o dinheiro inicialmente investido/emprestado e o valor final obtido/devido.

⇒ O capital inicial investido ou emprestado é chamado o **principal**.

$$\text{Juro} = (\text{valor final obtido})_{t1} - (\text{principal})_{t0}$$

$$\text{Taxa de juro (interesse)} = \frac{\text{Interesse no período de tempo t}}{\text{Principal original}} \times 100\ (\%)$$

Exemplo 1: Juro / Taxa de juro

Uma empresa têxtil investe 10 000€ num novo projecto, obtendo 10 650€ 12 meses depois. Determine:

(a) O juro ou interesse subjacente ao projecto.

(b) A taxa de juro ou interesse sobre o capital investido.

(a) Juro = 10650 – 10000 = 650€

(b) Taxa de juro = 650/10000 = 6,5% ao ano.

Valor Futuro de um Capital Inicial

$$VF = VP\underbrace{(1+i)^n}_{\text{Fator de capitalização}} = VP \times \underbrace{F_{PF,i,n}}_{\text{Tabela 1*}}$$

VF = Valor Futuro
VP = Valor Presente
i = Taxa de juro ou interesse
n = período de tempo
$F_{PF,i,n}$ = Fator que converte presente em futuro a uma taxa de juro i, durante n períodos

***Nota:** As tabelas financeiras estão disponíveis na Pasta “Conteúdo/Material de Apoio”

Exemplo 2: Valor Futuro de um Valor Presente

Admita-se que são investidos 100€, numa conta de poupança durante 20 anos a uma taxa de juro de 10%. Qual o valor acumulado?

VF = ?
VP = 100
n = 20
i = 0,1

$$\mathbf{VF = VP\,(1+i)^n = VP \times F_{PF,i,n}}$$

Tabela 1
Linha = n = 20
Coluna = i = 10%

$VF = 100\,(1 + 0{,}1)^{20}$ ou
$VF = 100 \times 6{,}7275 = 672{,}75€$

Valor Presente de um Capital Futuro

$$VP = VF\,\underbrace{(1+i)^{-n}}_{\text{Fator de atualização}} = VF \times \underbrace{F_{FP,i,n}}_{\text{Tabela 2}}$$

VP = Valor Presente
VF = Valor Futuro
i = Taxa de juro ou interesse
n = período de tempo
$\mathbf{F_{FP,i,n}}$ = Fator que converte futuro em presente a uma taxa de juro i, durante n períodos

Exemplo 3: Valor Presente de um Valor Futuro

Admita que o tio do André, que faz hoje 15 anos, lhe prometeu dar 20 000€, quando fizer 20 anos. Se a taxa de juro for 10%, qual o valor presente daquele valor futuro?

$n = 5$
$VF = 20\ 000$
$i = 0{,}1$
$VP = ?$

$$\boxed{VP = VF\,(1+i)^{-n} = VF \times F_{FP,i,n}}$$

$VP = 20\ 000\ (1 + 0{,}1)^{-5} = 12\ 418€$

ou

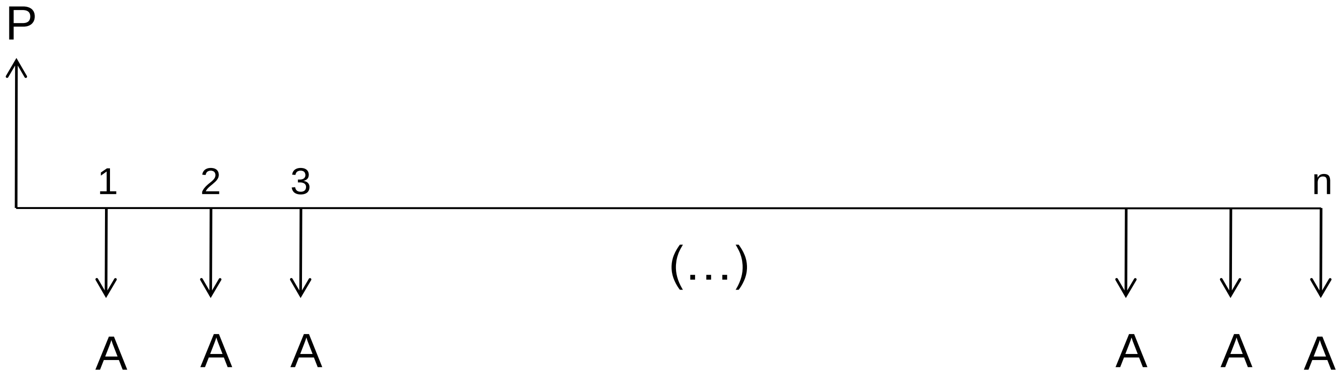
$VP = 20\ 000 \times 0{,}6209 = 12\ 418€$

Tabela 2
Linha = n = 5
Coluna = i = 10%

Anuidades

⇒ **Pagamentos uniformes**

⇒ Frequentemente os projetos/investimentos requerem pagamentos ou recebimentos uniformes, caracterizados por um valor A constante e pago no final de cada sub-período durante um período de tempo n.



Valor Futuro de uma Anuidade

$$F = A\,\frac{(1+i)^{n}-1}{i} = AF_{AF,i,n}$$

Tabela 3

Exemplo 4: Valor Futuro de uma Anuidade

Suponha-se que uma pessoa decide depositar 1 000€ numa conta poupança reforma no final de cada ano, durante o seu período de vida ativa de 40 anos. O dinheiro pode ser investido a uma taxa de juro de 10% ao ano.

A = 1 000
n = 40
i = 0,1
VF = ?

Tabela 3
Linha = n = 40
Coluna = i = 10%

Então, os 1 000 euros anuais transformar-se-ão num valor futuro de:

$$VFA = 1\,000 \times F_{AF,\ i,\ n} = 1\,000 \text{ x } 442.59 = 442\,590€$$

Valor Presente de uma Anuidade

$$P = A\,\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = A\,F_{AP,i,n}$$

Tabela 4

Exemplo 5: Valor Presente de uma Anuidade

Imagine-se que o vencedor da Lotaria do Noroeste receberá um prémio de vinte milhões de euros. No entanto, o regulamento desta lotaria estipula que o prémio não será pago todo de uma vez mas sim que o vencedor receberá de imediato um pagamento de um milhão de euros e o montante restante será pago em parcelas de um milhão de euros, no final de cada ano, durante os dezanove anos seguintes. Se a taxa de juro for de 10% ao ano, pode calcular-se o valor presente (atual) desta série de pagamentos.

VP = 1 000 000

A = 1 000 000 (durante 19 anos)

i = 0,1

VP = ?

Tabela 4
Linha = n = 19
Coluna = i = 10%

$VP = 1\,000\,000 + 1\,000\,000\ F_{AP;\ 10\%,\ 19}$

$VP = 1000000 + 1000000 \times 8{,}3649 = 9\,364\,900€$

Valor Presente de uma Perpetuidade

⇒ **Perpetuidades**

⇒ Um projeto pode ter uma sequência infinita de recebimentos ou pagamentos.

⇒ O custo capitalizado representa o valor presente dos custos e benefícios uniformes de um projeto com tempo de vida infinito.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-1/(1+i)^n}{i} = \frac{1}{i}$$

$$\boxed{P_\infty = A\,\frac{1}{i}}$$

Exemplo 6: Valor Presente de uma Perpetuidade

Uma fundação pretende criar um fundo de investimento que lhe permita distribuir anualmente 80 000€ para um período de tempo infinito. Se a taxa de interesse do fundo for de 7,75% quanto deverá ser investido hoje?

$A = 80\,000$
$i = 0{,}0775$
$P\infty = ?$

$$P_{\infty} = 80000 \; \frac{1}{0{,}0775} = 1032258\ €$$

Taxa de juro nominal e efetiva

⇒ Capitalização:

Por exemplo, se o juro for vencido duas vezes num ano com uma taxa de juro de 6% em cada período de meio ano, a taxa pode ser expressa como 12% ao ano com capitalização semestral.

⇩

Taxa anual nominal = 12%
Taxa efetiva semestral = 6%

Exemplo: se um banco oferecer uma taxa de juro nominal de 12% ao ano para um depósito de 1 000 €, teremos ao fim de 1 ano:

com capitalização anual	$VF = 1\ 000 \times (1+0{,}12) = 1\ 120€$
com capitalização semestral	$VF = 1\ 000 \times (1+0{,}06)^2 = 1\ 124€$

Taxa de juro nominal e efetiva

$\Rightarrow$ A utilização de taxas equivalentes torna os cálculos independentes do período de capitalização.

Por exemplo, se um banco oferecer uma taxa de juro efetiva de 12% ao ano para um depósito de 1 000 €, teremos ao fim de 1 ano:

$$VF = 1\,000 \times (1+0{,}12) = 1\,120\ €$$

A taxa efetiva semestral associada a esta conta poderia ser calculada por uma relação de equivalência:

$$1\,000 \times (1+0{,}12) = 1\,000 \times (1+i_{semestral})^2 \Leftrightarrow i_{semestral} = 5{,}83\%$$

$$VF = 1\,000 \times (1+0{,}0583)^2 = 1\,120€$$

É fundamental efetuar os cálculos de matemática financeira utilizando sempre as taxas de juro efetivas e não as anunciadas ou nominais.

Taxa de juro nominal e efetiva

⇒ A partir de uma taxa nominal é sempre possível calcular a taxa efetiva referente ao período de capitalização sabendo qual a periodicidade dessa capitalização.

⇒ **Relação de proporcionalidade:**

$i_{ef} = i_n / m$, para o período de capitalização m

⇒ Para converter uma taxa de juro efetiva referentes a um período numa taxa efetiva referente a um sub-período p, utilizaremos a **relação de equivalência**:

$(1+i) = (1+i_p)^p$,onde p é o numero de sub-períodos dentro do período da taxa.

Efetuar os cálculos de matemática financeira utilizando sempre as taxas de juro efetivas e não as taxas nominais.

Calcular taxa de juro efetiva a partir de uma taxa de juro nominal

Relação de proporcionalidade

Calcular taxa de juro efetiva a partir de outra taxa de juro efetiva

Relação de equivalência

Exemplo 7: Taxa de juro nominal e efetiva

Considerando a taxa anual nominal de 18% com capitalização semestral, determine a taxa de juro mensal efetiva:

Como partimos de uma taxa de juro nominal, utilizamos sempre a relação de proporcionalidade:

Assim pela **relação de proporcionalidade** teremos a taxa semestral efetiva, porque a taxa em questão capitaliza semestralmente:
$i_s = 18\% / 2 = 9\%$.

Como agora partimos de uma taxa de juro efetiva, utilizamos sempre a relação de equivalência, para obtermos outra taxa de juro efetiva:

Assim pela **relação de equivalência** teremos a taxa mensal efetiva, tendo em atenção que 1 semestre tem 6 meses:

$(1+i_s)^1 = (1+i_m)^6$
$(1+0{,}09) = (1+i_m)^6$
$i_m = 1{,}45\%$

Tabela resumo

Descrição	Fórmula	Factor
Valor futuro de um capital inicial	$VF = VP (1 + i)n$	$F_{PF, i, n}$
Valor presente de um capital futuro	$VP = VF [1 / (1 + i)n]$	$F_{FP, i, n}$
Valor futuro de uma anuidade	$VFA = A \times [(1 + i)n - 1]/i$	$F_{AF, i, n}$
Valor presente de uma anuidade	$VPA = A \times [1 - 1/(1 + i)n]/i$	$F_{AP, i, n}$
Valor presente de uma perpetuidade	$VP = A / i$	
Taxa de juro efetiva anual	$(1 + i_{ano}) = (1 + i_{p})^{p}$	