ANÁLISE
Cap. 1 – Noções topológicas em $\mathbb{R}^n$

Dep. Matemática UMinho

Fevereiro 2020

1. Noções topológicas em $\mathbb{R}^n$

Introduzem-se algumas das propriedades de $\mathbb{R}^n$ relacionadas com a noção de proximidade, que conferem a $\mathbb{R}^n$ a estrutura adequada para introduzir os conceitos de limite e continuidade.

1.1 O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

Seja $n \geq 1$ um número natural.

- $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ é o conjunto dos n-uplos ordenados $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números reais.
  - Os elementos de $\mathbb{R}^n$ são chamados vetores de $\mathbb{R}^n$.
  - Os números reais $x_1, \ldots, x_n$ são as coordenadas de x.
- Sendo $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ em $\mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, define-se:
  - a soma de x e y: $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$
  - o produto do escalar α por x: $\alpha * x = \alpha\, x = (\alpha\, x_1, \ldots, \alpha\, x_n)$
- O conjunto $\mathbb{R}^n$ munido das operações anteriores $(\mathbb{R}^n, +, *)$ é um **espaço vetorial real**.

1.2 Produto interno, norma e distância

- [Produto interno]

  Uma função $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se produto interno[1] se para todo o $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e todo o $\alpha \in \mathbb{R}$:

  1. $x \neq \mathbf{0} \Longrightarrow x \cdot x > 0$
  2. $x \cdot y = y \cdot x$
  3. $(\alpha\, x) \cdot y = \alpha(x \cdot y)$
  4. $(x + z) \cdot y = (x \cdot y) + (z \cdot y)$

- [Exemplo] Em $\mathbb{R}^n$ o produto interno canónico é definido por

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

  onde $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n)$.

[1] ou produto escalar; também se denota $\langle x, y \rangle$

- [Norma]

  Uma função $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se uma norma se para todo o $x, y \in \mathbb{R}^n$ e para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$

  1. $\|x\| \geq 0$
  2. $\|x\| = 0$ e se só se $x = \mathbf{0}$
  3. $\|\alpha\, x\| = |\alpha|\, \|x\|$
  4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ desigualdade triangular

- [Exemplo] A norma euclidiana de $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é definida por

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

- [Distância]

  Uma função $d\ :\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se uma distância se para todo o $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

  1. $d(x, y) \geq 0$
  2. $d(x, y) = 0$ se e só se $x = y$
  3. $d(x, y) = d(y, x)$
  4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ desigualdade triangular

- [Exemplo] Se $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ a função d definida por

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}. \end{aligned}$$

  é uma distância em $\mathbb{R}^n$. É a distância euclidiana.

Observação

- A norma euclidiana de um vetor de $\mathbb{R}^1$, isto é, de um número real x, é o valor absoluto (módulo) deste número x. De facto,

$$\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$$

  Assim, a norma é uma generalização do valor absoluto a dimensões superiores.

- Neste curso, caso nada seja dito em contrário, considerar-se-á sempre a norma euclidiana e a distância a ela associada.

1.3 Ângulos entre vetores

- [Desigualdade de Cauchy-Schwarz]

  Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se

  $$|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

  Tendo-se $|x \cdot y| = \|x\| \cdot \|y\|$ se e só se um dos vetores é múltiplo escalar do outro.

  - Para dois vetores $x,\ y$ não nulos tem-se então

    $$\frac{|x \cdot y|}{\|x\|\ \|y\|} \leq 1 \iff -1 \leq \frac{x \cdot y}{\|x\|\ \|y\|} \leq 1$$

- [Ângulo]

  O ângulo entre os vetores não nulos $x, y \in \mathbb{R}^n$ é o número real $\theta \in [0, \pi]$ definido por

  $$\theta = \arccos\left(\frac{x \cdot y}{\|x\|\ \|y\|}\right) \iff \cos\theta = \frac{x \cdot y}{\|x\|\ \|y\|}.$$

  - Os vetores x e y dizem-se ortogonais se $x \cdot y = 0$ (ou, equivalentemente, $\theta = \frac{\pi}{2}$).

1.4 Noções topológicas

Sejam $a \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}^+$.

- [Bola]

  Chama-se bola de centro a e raio r ao conjunto

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; \|x - a\| < r\}$$

- Isto é, uma bola de centro a e raio r é o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^n$ que estão a uma distância inferior a r de a .
- Chama-se bola fechada de centro a e raio r ao conjunto

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; \|x - a\| \leq r\}$$

- $B(a, r) \subset \overline{B}(a, r)$
- Os conceitos de bola (aberta) e de bola fechada estendem a $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, as noções de intervalo aberto e de intervalo fechado, respetivamente.

Exemplo:: bola

Seja $r \in \mathbb{R}^+$. Usando a noção de distância euclidiana

1. Se $n = 1$, $a \in \mathbb{R}$ e $B(a, r)$ é o intervalo aberto centrado em a

$$\begin{aligned} B(a, r) &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ \|x - a\| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x - a| < r\} = \,]a - r, a + r[\end{aligned}$$

2. Se $n = 2$, $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ e $B(a, r)$ é o disco de centro a e raio r

$$\begin{aligned} B(a, r) &= \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|x - a\| < r\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2\} \end{aligned}$$

3. Se $n = 3$, $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ e $B(a, r)$ é o interior da esfera de centro a e raio r

$$\begin{aligned} B(a, r) &= \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ \|x - a\| < r\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 < r^2\} \end{aligned}$$

Ponto interior, aderente, fronteira, acumulação e isolado

Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$. Diz-se que a é

- ponto interior de U se $\quad \exists\, \varepsilon > 0 \quad B(a, \varepsilon) \subseteq U$

- ponto aderente de U se $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad B(a, \varepsilon) \cap U \neq \varnothing$

- ponto de fronteira de U se é ponto aderente de U e de $\mathbb{R}^n \setminus U$ isto é

$$\forall \varepsilon > 0 \quad B(a, \varepsilon) \cap U \neq \varnothing \qquad \text{e} \qquad B(a, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus U) \neq \varnothing$$

- ponto de acumulação de U se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \cap U \neq \varnothing$$

- ponto isolado de U se pertencer a U e não for ponto de acumulação de U, isto é,

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad B(a, \varepsilon) \cap U = \{a\}$$

Interior, aderência, fronteira e derivado

- Interior de U:: é o conjunto dos pontos interiores de U;
  - representa-se por int U ou $\mathring{U}$.

- Aderência ou fecho de U:: é o conjunto dos pontos aderentes de U;
  - representa-se por ad U ou $\overline{U}$.

- Fronteira de U :: é o conjunto dos pontos de fronteira de U;
  - representa-se por fr U ou ∂U.

- Derivado de U:: é o conjunto dos pontos de acumulação de U;
  - representa-se por U'.

- Um subconjunto U de $\mathbb{R}^n$ diz-se
  - aberto se for igual ao seu interior: $U = \operatorname{int} U$
  - fechado se for igual à sua aderência: $U = \overline{U}$
  - limitado se estiver contido em alguma bola
- [Proposições]
  - U é fechado se e só se $\mathbb{R}^n \setminus U$ é aberto.
  - $\operatorname{int} U \subseteq U \subseteq \overline{U}$
  - $\operatorname{fr} U = \overline{U} \setminus \operatorname{int} U$
  - $U' = \overline{U} \setminus \{\text{pontos isolados de } U\}$

Exemplo

1. Seja $A = [0,1[\, \times [0,1] \cup \left\{\left(1, \dfrac{3}{2}\right)\right\}$.

   Então

   - Interior: $\operatorname{int} A = \,]0,1[\, \times \,]0,1[$
   - Aderência: $\overline{A} = [0,1] \times [0,1] \cup \left\{\left(1, \dfrac{3}{2}\right)\right\}$
   - Fronteira: $\operatorname{fr} A = [0,1] \times \{0,1\} \cup \{0,1\} \times [0,1] \cup \left\{\left(1, \dfrac{3}{2}\right)\right\}$
   - Derivado: $A' = [0,1] \times [0,1]$
   - A é limitado?

Exercícios

1. Um exemplo de um conjunto não limitado?

2. Seja $A = \left\{\left(\frac{1}{n}, 1\right),\ n \in \mathbb{N}\right\}$. Indique:

   (a) interior

   (b) fronteira

   (c) aderência

   (d) derivado

   (e) se o conjunto é aberto

   (f) se o conjunto é fechado

   (g) se o conjunto é limitado