ANÁLISE
Cap. 2 – Funções de *n* variáveis

Dep. Matemática UMinho

Fevereiro 2020

2. Funções de *n* variáveis

2.1 Introdução

2.2 Funções reais: generalidades
- Definição
- Domínio, contradomínio e gráfico
- Estruturas de nível
- Anexo:: Superfícies

2.3 Funções reais: Limite num ponto de acumulação

2.4 Funções reais: Continuidade

2.5 Funções vetoriais: Generalidades

2.6 Funções vetoriais: Limites e continuidade

2.1 Introdução

Seja f uma função $\quad f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k \quad n, k \in \mathbb{N}$

- $[n = 1, k = 1]$ Função real de (uma) variável real $\rightsquigarrow$ Cálculo

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

- $[n > 1, k = 1]$ Função real de várias variáveis reais

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

- $[n = 1, k > 1]$ Função vetorial de uma variável real

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

- $[n > 1, k > 1]$ Função vetorial de várias variáveis reais

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

  - $[n > 1, k > 1$, mas $n = k]$ Campo vetorial

Exemplo

1. Função real de variável real
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^2 + 1 \end{array}$$

2. Função real de várias variáveis reais
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \mapsto & f(x, y, z) = x + y - z \end{array}$$

3. Função vetorial de uma variável real
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & x & \mapsto & f(x) = (x, x - 1, x^2) \end{array}$$

4. Função vetorial de várias variáveis reais
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \mapsto & f(x, y) = (x + y, x - y, x^2) \end{array}$$

2.2 Funções reais: generalidades

- [Função real de várias variáveis]

  Uma função real de n variáveis reais é uma função

  $$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

  em que o conjunto D é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

  - A função f associa a cada elemento $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ um (e um só) número real $y = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$.

Exemplo

1. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$f(x, y) = 2\,x\,y;$$

2. $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2;$$

3. $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$h(x, y) = \operatorname{sen}(xy);$$

4. $m : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$m(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}.$$

Notação

$$\begin{array}{rccl} f\colon & D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \ldots, x_n). \end{array}$$

- Quando $D \subset \mathbb{R}^n$ e
  - $n = 2$ escreve-se habitualmente (x, y);
  - $n = 3$ escreve-se habitualmente (x, y, z).

- Usando a notação $(x_1, \ldots, x_n) = x$, as definições de contradomínio e gráfico de f são formalmente iguais aos conceitos análogos para funções reais de uma variável real.

Domínio, contradomínio e gráfico

- Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de *n variáveis*
  - O conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se **domínio** de f.
    - [Obs:] Quando o domínio de f for omisso considera-se como sendo o maior subconjunto de $\mathbb{R}^n$ onde a lei que define f tem significado.
  - O conjunto $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ diz-se o **contradomínio** de f.
  - O **gráfico** de f é o conjunto $\mathrm{Gr}_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de todos os $n+1-$uplos (x, y) com $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ e $y = f(x)$

$$\mathrm{Gr}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ x \in D \ \text{e} \ y = f(x)\}.$$

Observação

1. Sendo $\mathrm{Gr}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ x \in D \text{ e } y = f(x)\}$

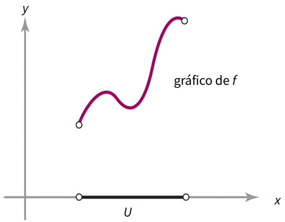
   - se $n = 1$, o gráfico de f é uma curva em $\mathbb{R}^{1+1} = \mathbb{R}^2$

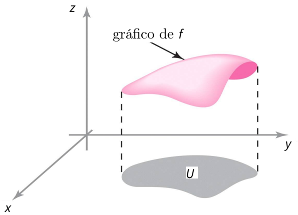
   - se $n = 2$, o gráfico de f é uma superfície em $\mathbb{R}^{2+1} = \mathbb{R}^3$

   - se $n \geq 3$, o gráfico de f é uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$

$f : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\mathrm{Gr}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in U, y = f(x)\}$



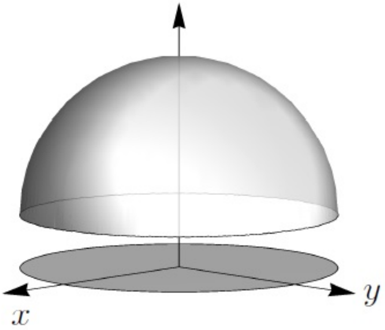


$f : U \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\mathrm{Gr}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U, z = f(x, y)\}$

Exemplo

1. Considere a função $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + 1$.
   (a) Indique o domínio de f.
   (b) Faça a representação gráfica do domínio de f.
   (c) Determine o contradomínio de f.



Observação

- Só é possível fazer o esboço do gráfico se o domínio da função estiver contido em $\mathbb{R}^2$, isto é, se o gráfico for um subconjunto de $\mathbb{R}^3$!

- Para esboçar gráficos em $\mathbb{R}^2$ é usual determinar os pontos de intersecção do gráfico com os eixos.

- Caso geral, em $\mathbb{R}^3$ a intersecção do gráfico com os planos coordenados são curvas.
  - Chama-se **traço** de f num dado plano coordenado à curva que resulta da intersecção desse plano com o gráfico de f.

Exercícios

1. Indique o domínio da função real de variáveis reais definida por
   (a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

   (b) $f(x,y) = \sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36}$

   (c) $f(x,y,z) = 1 + \sqrt{-(x-y-z)^2}$

2. Esboce uma representação gráfica da função real de variáveis reais definida por

$$f : [0,2] \times [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = x\,.$$

Como esboçar o gráfico de uma função em $\mathbb{R}^3$?

Recordar:: curvas em $\mathbb{R}^2$

Aqui $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

1. reta:: sendo $a, b, c \in \mathbb{R}$ não todos nulos

$$a\,x + b\,y + c = 0$$

2. sinusoide:: sendo $a, b \in \mathbb{R}$

$$y = a\ \operatorname{sen}(bx) \qquad \text{ou} \qquad y = a\ \cos(bx)$$

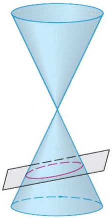
3. exponencial:: sendo $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e

$$y = a\,\mathrm{e}^{bx}$$

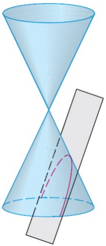
4. logarítmica:: sendo $a > 0$

$$y = b\ln(ax), \qquad x > 0$$

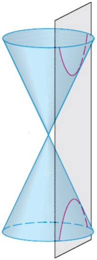
5. cónicas:: são curvas planas obtidas por interseção de um cone circular reto com um plano



Elipse



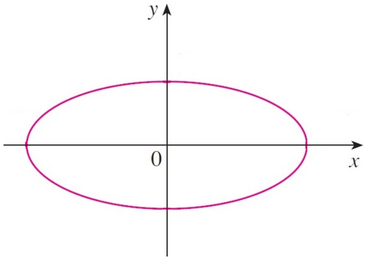
Parábola

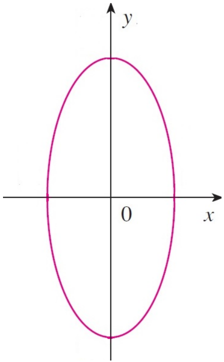


Hipérbole

Uma cónica é também o conjunto dos pontos (do plano) que satisfazem uma equação de segundo grau: $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$, com pelo menos um dos coeficientes a, b, c não nulo.

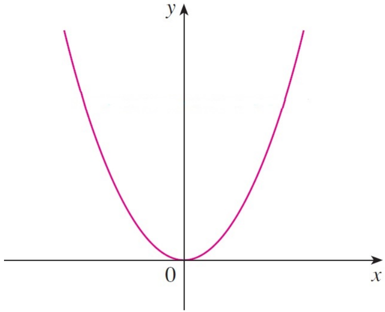
5.A Elipse:: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

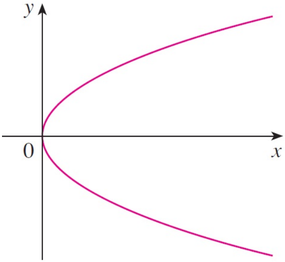




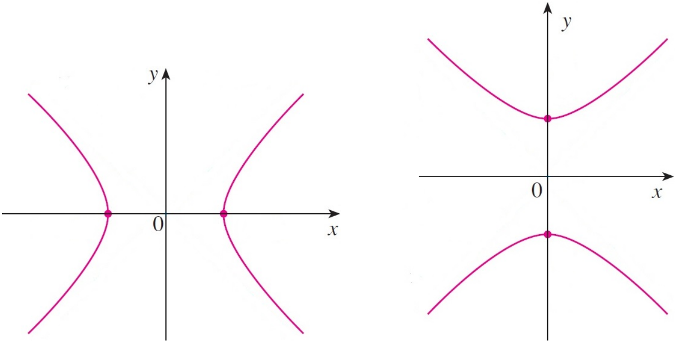
- se $a = b$ a elipse é uma circunferência

5.B Parábola:: $y = ax^2$ ou $x = ay^2$



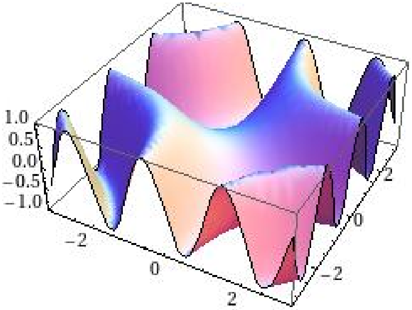


5.C Hipérbole:: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ou $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$



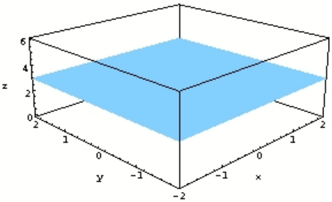
Exemplo: gráficos em $\mathbb{R}^3$

- Se $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = \text{sen}(xy)$
  - então $f(\mathbb{R}^2) = [-1, 1]$ e



A. Gráficos que são planos

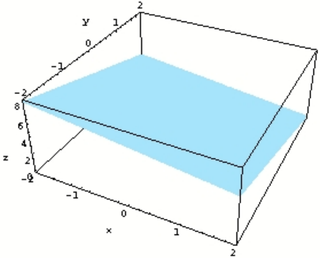
- $f(x, y) = 3$
  - $f(\mathbb{R}^2) = \{3\}$



Plano de equação

$$z = 3$$

- $f(x, y) = 4 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y$
  - $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$

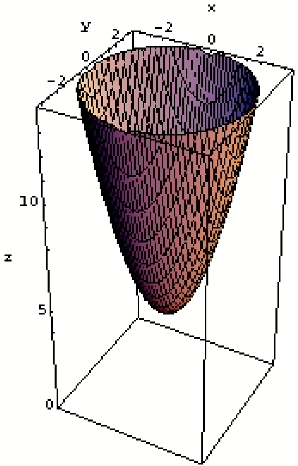


Plano de equação

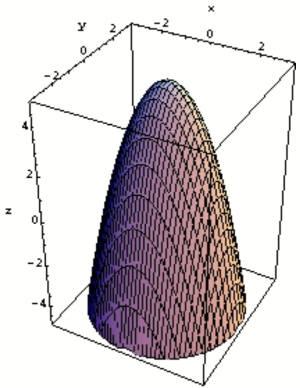
$$2x + 4y + 3z = 12.$$

B. Gráficos que são parabolóides

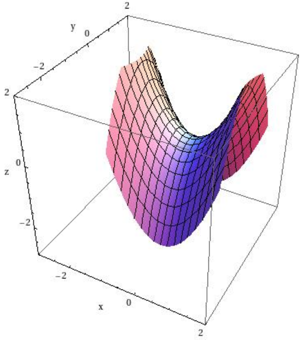
- $f(x, y) = 4 + x^2 + y^2$
  - $f(\mathbb{R}^2) = [4, +\infty[$



- $f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$
  - $f(\mathbb{R}^2) =]-\infty, 5]$

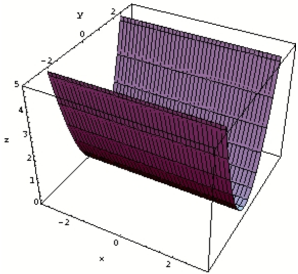


- $f(x,y) = x^2 - y^2$



Parabolóide hiperbólico

- $f(x,y) = y^2$



Cilindro parabólico

Estruturas de nível

- Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de n variáveis

  - A **estrutura de nível** $k \in \mathbb{R}$ é o conjunto $\Sigma_k \subset \mathbb{R}^n$ de todos os pontos $x \in D$ cuja imagem por f é k

$$\Sigma_k = \{x \in D \ : \ f(x) = k\}.$$

  - Se $D \subseteq \mathbb{R}^2$ as estruturas de nível designam-se curvas de nível;

  - Se $D \subseteq \mathbb{R}^3$ as estruturas de nível designam-se superfícies de nível.

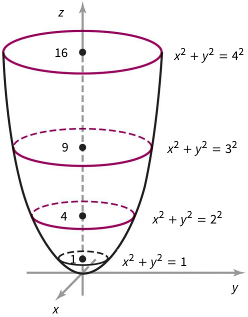
  - Se $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n > 3$ as estruturas de nível designam-se hipersuperfícies de nível.

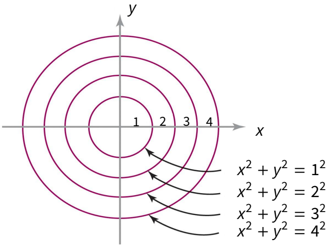
Exemplo:: curvas de nível

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + y^2$.

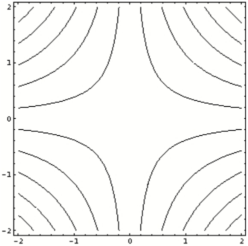
   Para cada número real k ($k \geq 0$), a curva de nível k de f é

$$\Sigma_k = \{(x,y) \in U : f(x,y) = k\} = \{(x,y) \in U : x^2 + y^2 = k\}.$$

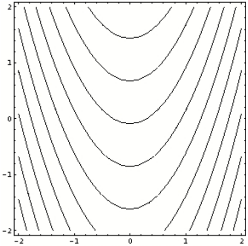




2. Curvas de nível de $f(x,y) = -xy$



3. Curvas de nível de $g(x,y) = y - x^2$



- [Obs:] Os gráficos anteriores não estão completos. Porquê?

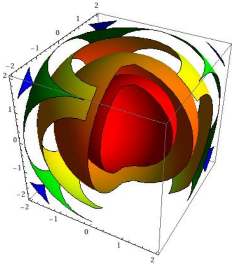
Exemplo:: superfícies de nível

1. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

A superfície de nível $k \geq 0$ de f é

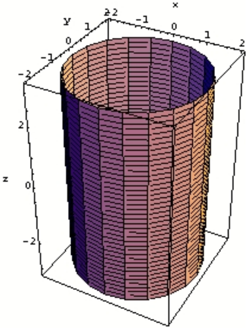
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = k\},$$

isto é, é a superfície esférica de centro $(0, 0, 0)$ e raio $\sqrt{k}$.

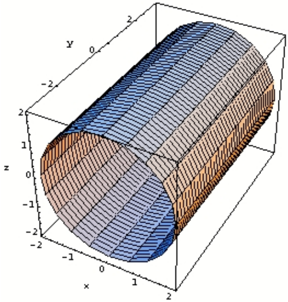


2. Superfícies de nível que são cilindros

- $f(x, y, z) = x^2 + y^2$
  superfície de nível 4:
  $x^2 + y^2 = 4$



- $f(x, y, z) = x^2 + z^2$
  superfície de nível 4:
  $x^2 + z^2 = 4$



Observação

- Todos os gráficos de funções reais de 2 variáveis são superfícies;

- Nem todas as superfícies são gráficos de funções reais de duas variáveis.

Exercício

1. Indique o domínio, determine e esboce algumas curvas de nível das funções reais de variáveis reais, definidas por:

   (a) $f(x, y) = x + y$

   (b) $f(x, y) = x^2 - y^2$

   (c) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

Anexo:: Superfícies

Interessam-nos alguns tipos particulares de superfícies

- Planos:: $ax + by + cz + d = 0$
- Quádricas
  - Esferas:: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$
  - Cilindros (quádricos)
  - Outras quádricas

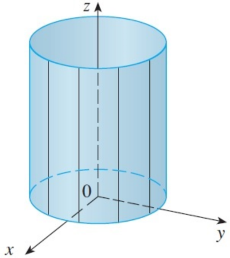
A. Cilindros

- [Cilindro]

  Um cilindro é uma superfície constituída por todas as retas, ditas geratrizes, que são paralelas a uma reta dada e que passam por uma curva plana.
  Se a curva for uma cónica, o cilindro é uma quádrica.

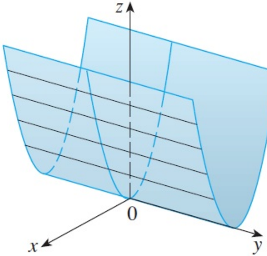
  - Cilindro elíptico
  - Cilindro parabólico
  - Cilindro hiperbólico

Cilindro elíptico



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

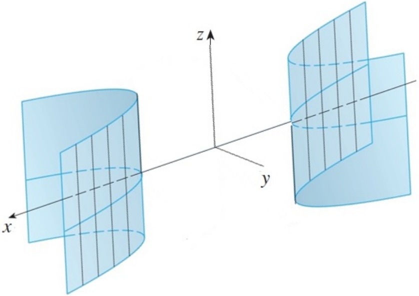
Cilindro parabólico



$$z = a\,x^2$$

Cilindro hiperbólico

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



B. Outras quádricas

- [Quádricas]

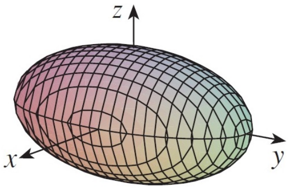
  Uma superfície quádrica é um conjunto de pontos que satisfazem uma equação cartesiana de segundo grau nas três variáveis x, y, z

  $$A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 + D\,xy + E\,yz + F\,xz + G\,x + H\,y + I\,z = J$$

  com pelo menos um dos coeficientes A, B, C, D, E, F não nulo.

  - [cilindros]
  - Elipsóide
  - Parabolóide elíptico
  - Parabolóide hiperbólico
  - Cone
  - Hiperbolóide de uma folha
  - Hiperbolóide de duas folhas

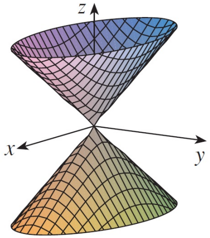
Elipsóide



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

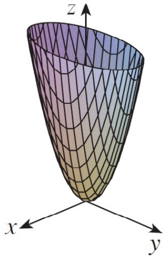
Caso particular ($a = b = c$):
esfera

Cone



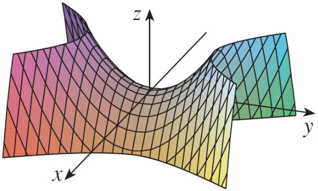
$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Parabolóide elíptico



$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

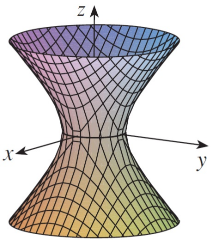
Parabolóide hiperbólico



$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

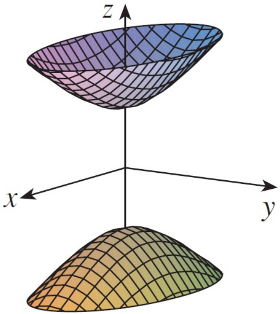
A imagem corresponde a $c < 0$

Hiperbolóide de uma folha



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Hiperbolóide de duas folhas



$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Observação

- Recorde que em $\mathbb{R}^3$ a equação da reta que passa em $A = (a, b, c)$ e tem a direção de $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ tem

  - Equação vetorial :: $P = A + t\,\mathbf{v}, \qquad t \in \mathbb{R}$

  - Equações paramétricas :: $\begin{cases} x = a + t\,v_1 \\ y = b + t\,v_2 \\ z = c + t\,v_3 \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$

  - Equações cartesianas:: $\dfrac{x-a}{v_1} = \dfrac{y-b}{v_2} = \dfrac{z-c}{v_3}$

2.3 Funções reais: Limite num ponto de acumulação

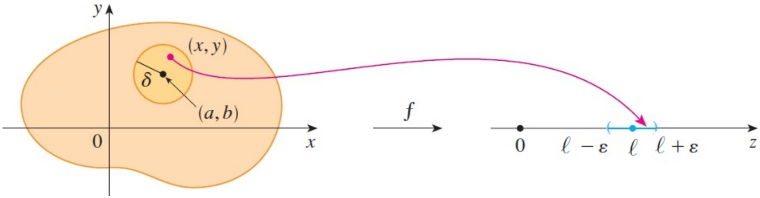
- [Definição]

  Sejam $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^n$ um ponto de acumulação de U. Diz-se que **$\ell \in \mathbb{R}$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para a** e escreve-se

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell$$

  se, para todo o $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que, para todo o $x \in U$

$$0 < ||x - a|| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$



Observação

- Na definição anterior
  - $x, a \in \mathbb{R}^n$ logo $x - a \in \mathbb{R}^n$ e $|| \cdot ||$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$;
  - $f(x), \ell \in \mathbb{R}$ logo $f(x) - \ell \in \mathbb{R}$ e $| \cdot |$ é módulo usual de um número real.
- Na definição de limite intervém apenas a distância de x a a e não o modo como x se aproxima de a; se existir o limite de f quando x tende para a ele deve ser independente da forma como x se aproxima de a.

- [Teorema da unicidade] Se o limite de $f(x)$ quando x tende para a existe, então é único.

  - [Consequência] Se existirem duas trajetórias C_1 e C_2 tais que

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow a \\ x \in C_1}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \longrightarrow a \\ x \in C_2}} f(x)$$

    então não existe $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$.

Exemplo

1. Seja $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Não existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\,.$$

2. Seja $g(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$. Não existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)\,.$$

- [Teorema do enquadramento] Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e sejam, ainda, $a \in U'$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ funções (de várias variáveis) tais que

$$|f(x) - \ell| \leq g(x) \qquad \lim_{x \longrightarrow a} g(x) = 0$$

  Então

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell$$

- Se $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell$ e $h : f(U) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em ℓ então

$$\lim_{x \longrightarrow a} h(f(x)) = h(\ell).$$

Exemplo

1. Seja $h(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$. Calcular, caso exista,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x, y)\,.$$

Observação

- Por vezes é usada a designação de limite trajetorial para designar o limite ao quando x tende para a ao longo de uma trajetória específica.

- No caso de a trajetória ser uma reta, por vezes usa-se a designação de limite direcional.

- [Aritmética dos limites] Sejam

$$f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

$x \in U$, $a \in \mathbb{R}^n$ um ponto de acumulação de U e ℓ, m números reais.

Se $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \longrightarrow a} g(x) = m$ então

  - $\lim_{x \longrightarrow a} [f(x) + g(x)] = \ell + m$;
  - $\lim_{x \longrightarrow a} c\, f(x) = c\, \ell$ para todo o $c \in \mathbb{R}$;
  - $\lim_{x \longrightarrow a} f(x)\, g(x) = \ell\, m$;
  - $\lim_{x \longrightarrow a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{m}$ se $m \neq 0$ e $g(x) \neq 0, x \in U$.

Exercício:: 1

1. Mostre que

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

2. Calcule, caso exista, cada um dos seguintes limites

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,1)} x^3\, y$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{e^{x\,y}}{x+1}$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(1,1)} \frac{y^2-x^2}{x-y}$

2.4 Funções reais: Continuidade

- [Função contínua num ponto]

  A função $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se **contínua em** a, $a \in U$, se

  - a é um ponto isolado de U

    ou

  - $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$.

- A função f diz-se contínua, se f for contínua em todos os pontos do domínio.

Observação

- Os resultados relativos à soma, produto e composição de funções contínuas de uma variável, são extensíveis, de forma natural, a funções de várias variáveis.

Exemplo

1. A função

$$\overline{g}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é contínua em $(0,0)$ pois não existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}.$$

2. A função

$$\overline{h}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$ pois

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0 = \overline{h}(0,0).$$

3. A função

$$\widetilde{h}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é contínua em $(0,0)$ pois

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0 \neq \widetilde{h}(0,0) = 1.$$

Exercício::2

1. Apresente, caso seja possível, um prolongamento contínuo à origem de cada uma das funções definidas por

   (a) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}$

   (b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

   (c) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   (d) $f(x,y) = \dfrac{2(x-1)y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2. Estude a continuidade de cada uma das funções definidas por

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se} \quad x \neq -y \\ x^2/2 & \text{se} \quad x = -y \end{cases}$

2.5 Funções vetoriais: Generalidades

- [Função vetorial de n variáveis reais]

  Uma **função vetorial de n variáveis reais** é uma função

  $$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

  - f associa a cada $x \in D$ um único vetor de $\mathbb{R}^k$,
    $y = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x))$
  - as funções
    $$f_i : D \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$
    designam-se por funções componentes ;
  - quando omisso, o domínio de f é a interseção dos domínios das suas funções componentes.

Observação

- $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ é uma função vetorial de uma variável real
  - $f(x)$ é vetor de $\mathbb{R}^k$:: $(f_1(x), \ldots, f_k(x))$ onde cada f_i é uma função real de uma variável real

- $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ é uma função vetorial de n variáveis reais
  - $f(x)$ é vetor de $\mathbb{R}^k$:: $(f_1(x), \ldots, f_k(x))$ onde cada f_i é uma função real de n variáveis reais.

Exemplo

1. Sendo $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

   (a) Esta é uma função vetorial de **uma variável real**

   (b) Domínio de f:: $D_f = [0, 2\pi]$

   (c) Funções componentes

   $$f_1(t) = \cos t \qquad \text{e} \qquad f_2(t) = \operatorname{sen} t$$

Exercício:: 1

1. Indique as funções componentes e o domínio das leis

   (a) $f(t) = \left(\ln t, \dfrac{t}{t-1}, \mathrm{e}^{-t} \right)$

   (b) $h(x, y, z) = \left(\dfrac{x^2 z}{y}, \sqrt{y-1}, \dfrac{\sqrt{6-z}}{\sqrt{1-x}} \right)$

2.6 Funções vetoriais: Limites e continuidade

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ uma função vetorial de n variáveis.

- O limite da função vetorial f quando x tende para $a \in D'$ existe se e só se existe o limite de cada uma das funções componentes de f quando x tende para $a \in D'$.
- A função vetorial f é contínua em $a \in D$ se e só se cada uma das funções componentes de f for contínua em a.

Exercício:: 2

1. Calcule

   (a) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x)$ quando $f(x) = (x^2, e^x)$

   (b) $\lim\limits_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} h(x,y)$ quando $h(x,y) = \left(\dfrac{\cos x}{x^2 + y^2 + 1}, \; e^{x^2} \right)$

2. Estude a continuidade da função

$$f(x,y,z) = \left(\ln(x + y^2), \cos\sqrt{3z} \right)$$