LÓGICA EI
Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Universidade do Minho

Departamento de Matemática

2019/2020

Observação 121: Ao contrário do Cálculo Proposicional, no Cálculo de Predicados existem duas classes sintáticas: a classe dos termos e a classe das fórmulas. Os termos serão usados para denotar objetos do domínio de discurso em questão (por exemplo, números naturais, conjuntos, etc.) e as fórmulas corresponderão a afirmações relativas aos objetos (por exemplo, "dois é um número par" ou "o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto").

O Cálculo de Predicados será parametrizado por um tipo de linguagem, que fixará quais os símbolos que poderão ser usados para construir termos (que designaremos por símbolos de função) ou para denotar relações elementares entre os objetos (que designaremos por símbolos de relação). Este conjunto de símbolos dependerá, naturalmente, do problema em estudo.

Por exemplo, se estivermos a considerar a Aritmética (a teoria dos números naturais), entre outros, será útil ter símbolos que denotem o número 0, a operação de adição e a relação de igualdade. Já no caso de estarmos a considerar teoria de conjuntos, será útil, por exemplo, ter símbolos para denotar o conjunto vazio, as operações de reunião de conjuntos e de conjunto potência, e as relações de pertença, inclusão e igualdade de conjuntos.

Definição 122: Um tipo de linguagem é um terno $(\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{N})$ t.q.:

a) $\mathcal{F}$ e $\mathcal{R}$ são conjuntos disjuntos;

b) $\mathcal{N}$ é uma função de $\mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ em $\mathbb{N}_0$.

Os elementos de $\mathcal{F}$ são chamados símbolos de função e os elementos de $\mathcal{R}$ são chamados símbolos de relação ou símbolos de predicado.

A função $\mathcal{N}$ é chamada função aridade, chamando-se ao número natural $n = \mathcal{N}(s)$ (para cada $s \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$) a *aridade* de s e dizendo-se que s é um símbolo n-ário. Intuitivamente, a aridade de um símbolo corresponde ao seu número de argumentos.

Os símbolos de função de aridade 0 são chamados constantes.

Neste estudo, assumiremos que os símbolos de relação nunca têm aridade 0.

Os símbolos de aridade 1 dir-se-ão também símbolos unários, os de aridade 2 binários, etc.

Exemplo 123: O terno $L_{Arit} = (\{0, s, +, \times\}, \{=, <\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(s) = 1$, $\mathcal{N}(+) = 2$, $\mathcal{N}(\times) = 2$, $\mathcal{N}(=) = 2$ e $\mathcal{N}(<) = 2$, é um tipo de linguagem. Chamaremos a L_{Arit} o *tipo de linguagem para a Aritmética*.

Notação 124: Habitualmente, usaremos a letra L (possivelmente indexada) para denotar tipos de linguagens.
Caso nada seja dito em contrário, durante este capítulo L denotará um tipo de linguagem $(\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{N})$, cujo conjunto de constantes será denotado por $\mathcal{C}$.

Definição 125: O *alfabeto* $\mathcal{A}_L$ *induzido pelo tipo de linguagem* L é o conjunto formado pelos seguintes símbolos:

a) $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ (os *conetivos proposicionais*);

b) $\exists$ e $\forall$, chamados *quantificador existencial* e *quantificador universal*, respetivamente;

c) $x_0, x_1, ..., x_n, ...$, chamados *variáveis (de primeira ordem)*, formando um conjunto numerável, denotado por $\mathcal{V}$;

d) "(", ")" e ",", chamados *símbolos auxiliares*;

e) os símbolos de função e os símbolos de relação de L (que se assume serem distintos de todos os símbolos anteriores).

Exemplo 126: A sequência de 8 símbolos $\exists x_0 \neg (x_0 = 0)$ é uma palavra sobre o alfabeto $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$, mas a sequência de 8 símbolos $\exists x_0 \neg (x_0 = 1)$ não é uma palavra sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ (1 não é uma das letras do alfabeto $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$).

Definição 127: O conjunto $\mathcal{T}_L$ é o menor conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}_L$ que satisfaz as seguintes condições:

a) para todo $x \in \mathcal{V}$, $x \in \mathcal{T}_L$;

b) para toda a constante c de L, $c \in \mathcal{T}_L$;

c) para todo o símbolo de função f de L, de aridade $n \geq 1$,

$$t_1 \in \mathcal{T}_L \text{ e ... e } t_n \in \mathcal{T}_L \implies f(t_1, ..., t_n) \in \mathcal{T}_L, \text{ para todo } t_1, ..., t_n \in (\mathcal{A}_L)^*.$$

Aos elementos de $\mathcal{T}_L$ chamaremos *termos de tipo L* ou, abreviadamente, *L-termos* .

Exemplo 128:

1. As seguintes seis palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ são L_{Arit}-termos:

$$x_1,\ x_2,\ 0,\ s(0),\ \times(x_1, x_2),\ +(\times(x_1, x_2), s(0)).$$

Lida como uma sequência de palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$, esta sequência constitui uma sequência de formação de $+(\times(x_1, x_2), s(0))$.

2. As palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ $=(0, x_1)$ e $<(0, x_1)$ (ambas de comprimento 6) não são L_{Arit}-termos. Apesar de $=$ e $<$ serem símbolos de aridade 2 e de 0 e x_1 serem dois L_{Arit}-termos, $=$ e $<$ são símbolos de relação e não símbolos de função, como exigido na condição *c*) da definição anterior. Estas duas palavras são exemplos do que adiante designaremos por *fórmulas atómicas*.

Exemplo 129: Seja L_0 o tipo de linguagem $(\{c, f_1, f_2\}, \{R_1, R_2\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(c) = 0$, $\mathcal{N}(f_1) = 1$, $\mathcal{N}(f_2) = 2$, $\mathcal{N}(R_1) = 1$ e $\mathcal{N}(R_2) = 2$. As seguintes quatro palavras sobre $\mathcal{A}_{L_0}$ são L_0-termos (e constituem uma sequência de formação do último termo):

$$c\,,\ x_1\,,\ f_2(c, x_1)\,,\ f_1(f_2(c, x_1))\,.$$

Notação 130: Quando f é um símbolo de função binário e $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L$, utilizamos a notação $t_1 f t_2$, possivelmente entre parênteses, para representar o L-termo $f(t_1, t_2)$. Por exemplo, a notação $(x_1 \times x_2) + s(0)$ representará o L_{Arit}-termo $+(\times(x_1, x_2), s(0))$.

Teorema 131 (Indução Estrutural em L-Termos): Seja $P(t)$ uma propriedade que depende de um L-termo t. Se:

a) para todo $x \in \mathcal{V}$, $P(x)$;

b) para todo $c \in \mathcal{C}$, $P(c)$;

c) para todo $f \in \mathcal{F}$, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$,

$$P(t_1) \text{ e ... e } P(t_n) \implies P(f(t_1, ..., t_n));$$

então para todo $t \in \mathcal{T}_L$, $P(t)$.

Dem.: Exercício. □

Observação 132: A definição indutiva do conjunto dos L-termos é determinista e tem associado um *princípio de recursão estrutural*, para definir funções cujo domínio é o conjunto dos L-termos. Este princípio é usado nas três definições que se seguem.

Definição 133: O conjunto $VAR(t)$, das *variáveis* que ocorrem num L-termo t, é definido, por recursão estrutural em L-termos, do seguinte modo:

a) $VAR(x) = \{x\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$;

b) $VAR(c) = \emptyset$, para todo $c \in \mathcal{C}$;

c) $VAR(f(t_1, ..., t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} VAR(t_i)$, para todo $f \in \mathcal{F}$ de aridade $n \geq 1$ e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$.

Exemplo 134: O conjunto das variáveis que ocorrem no L_{Arit}-termo $x_2 + s(x_1)$ é:

$$VAR(x_2 + s(x_1)) = VAR(x_2) \cup VAR(s(x_1)) = \{x_2\} \cup VAR(x_1) = \{x_2, x_1\}.$$

Definição 135: O conjunto $subt(t)$, dos *subtermos* de um L-termo t, é definido, por recursão estrutural em L-termos, do seguinte modo:

a) $subt(x) = \{x\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$;

b) $subt(c) = \{c\}$, para todo $c \in \mathcal{C}$;

c) $subt(f(t_1, ..., t_n)) = \{f(t_1, ..., t_n)\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} subt(t_i)$, para todo $f \in \mathcal{F}$ de aridade $n \geq 1$ e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$.

Exemplo 136: O conjunto dos subtermos do L_{Arit}-termo $(x_2 + s(x_1)) \times 0$ é:

$$\{x_2, x_1, s(x_1), x_2 + s(x_1), 0, (x_2 + s(x_1)) \times 0\}$$

Definição 137: A operação de *substituição* de uma variável x por um L-termo t num L-termo t' é notada por $t'[t/x]$ e é definida por recursão estrutural (em t') do seguinte modo:

a) $y[t/x] = \begin{cases} t, & se \;\; y = x \\ y, & se \;\; y \neq x \end{cases}$, para todo $y \in \mathcal{V}$;

b) $c[t/x] = c$, para todo $c \in \mathcal{C}$;

c) $f(t_1, ..., t_n)[t/x] = f(t_1[t/x], ..., t_n[t/x])$, para todo $f \in \mathcal{F}$ de aridade $n \geq 1$ e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$.

Exemplo 138:

1. O L_{Arit}-termo que resulta da substituição da variável x_1 pelo L_{Arit}-termo $s(0)$ no L_{Arit}-termo $x_2 + s(x_1)$ é:

$$\begin{array}{cl} & (x_2 + s(x_1))[s(0)/x_1] \\ = & x_2[s(0)/x_1] + s(x_1)[s(0)/x_1] \\ = & x_2 + s(x_1[s(0)/x_1]) \\ = & x_2 + s(s(0)) \end{array}$$

2. $(x_2 + s(x_1))[s(0)/x_0] = x_2 + s(x_1)$ (observe que $x_0 \notin VAR(x_2 + s(x_1))$).

Proposição 139: Sejam x uma variável e t_1 e t_2 L-termos. Se $x \notin VAR(t_1)$, então $t_1[t_2/x] = t_1$.

Dem.: Por indução estrutural em t_1. (Exercício.) $\square$

Definição 140: Uma palavra sobre o alfabeto induzido por L da forma $R(t_1, ..., t_n)$, onde R é um símbolo de relação n-ário e $t_1, ..., t_n$ são L-termos, é chamada uma *fórmula atómica de tipo L* ou, abreviadamente, uma *L-fórmula atómica*. O conjunto das L-fórmulas atómicas é notado por At_L.

Exemplo 141:

1. As três palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ que se seguem são L_{Arit}-fórmulas atómicas:

$$=(0, x_1), < (0, x_1), = (+(0, x_1), \times(s(0), x_1)).$$

2. Já a palavra sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ $\times(0, x_1)$ não é uma L_{Arit}-fórmula atómica (note-se que $\times$ é um símbolo de função e não um símbolo de relação; de facto, esta palavra é um L_{Arit}-termo).

Notação 142: Quando R é um símbolo de relação binário e $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L$, utilizamos a notação $t_1 R t_2$, possivelmente entre parênteses, para representar o L-fórmula atómica $R(t_1, t_2)$. Por exemplo, a notação $x_0 < s(0)$ representará a L-fórmula atómica $<(x_0, s(0))$.

Definição 143: O conjunto $\mathcal{F}_L$ é o menor conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}_L$ que satisfaz as seguintes condições:

a) $\varphi \in \mathcal{F}_L$, para todo $\varphi \in At_L$;

b) $\bot \in \mathcal{F}_L$;

c) $\varphi \in \mathcal{F}_L \implies (\neg\varphi) \in \mathcal{F}_L$, para todo $\varphi \in (\mathcal{A}_L)^*$;

d) $\varphi \in \mathcal{F}_L$ e $\psi \in \mathcal{F}_L \implies (\varphi \Box \psi) \in \mathcal{F}_L$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in (\mathcal{A}_L)^*$;

e) $\varphi \in \mathcal{F}_L \implies (Qx\, \varphi) \in \mathcal{F}_L$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$ e para todo $\varphi \in (\mathcal{A}_L)^*$.

Aos elementos de $\mathcal{F}_L$ chamaremos *fórmulas de tipo L* ou, abreviadamente, *L-fórmulas*.

Exemplo 144: As seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ são L_{Arit}-fórmulas (fazendo uso das simplificações anteriormente mencionadas na representação de fórmulas atómicas):

$$\begin{array}{l}(x_0 < s(0)),\\ (\neg(x_0 < s(0))),\\ x_0 = x_1,\\ ((\neg(x_0 < s(0))) \to x_0 = x_1),\\ (\exists x_1((\neg(x_0 < s(0))) \to x_0 = x_1)),\\ (\forall x_0(\exists x_1((\neg(x_0 < s(0))) \to x_0 = x_1))).\end{array}$$

Lida como uma sequência de palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$, esta sequência constitui uma sequência de formação de $(\forall x_0(\exists x_1((\neg(x_0 < s(0))) \to x_0 = x_1)))$.

Exemplo 145: Recordemos o tipo de linguagem L_0 do Exemplo 129: $L_0 = (\{c, f_1, f_2\}, \{R_1, R_2\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(c) = 0$, $\mathcal{N}(f_1) = 1$, $\mathcal{N}(f_2) = 2$, $\mathcal{N}(R_1) = 1$ e $\mathcal{N}(R_2) = 2$.
As seguintes quatro palavras sobre $\mathcal{A}_{L_0}$ são L_0-fórmulas (e constituem uma sequência de formação da última fórmula):

$$
\begin{array}{l}
R_1(x_1), \\
R_2(x_1, f_2(c, x_1)), \\
(R_1(x_1) \to R_2(x_1, f_2(c, x_1))), \\
(\forall x_1 (R_1(x_1) \to R_2(x_1, f_2(c, x_1)))).
\end{array}
$$

Notação 146: Os parênteses extremos e os parênteses à volta de negações ou de quantificadores são geralmente omitidos. Por exemplo, a L_{Arit}-fórmula

$$(\forall x_0(\exists x_1((\neg(x_0 < s(0))) \rightarrow x_0 = x_1)))$$

pode ser abreviada por

$$\forall x_0 \exists x_1(\neg(x_0 < s(0)) \rightarrow x_0 = x_1).$$

Teorema 147 (Indução Estrutural em L-Fórmulas): Seja $P(\varphi)$ uma propriedade que depende de uma L-fórmula φ. Se:

a) $P(\psi)$, para todo $\psi \in At_L$;

b) $P(\perp)$;

c) $P(\psi) \implies P(\neg\psi)$, para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;

d) $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2) \implies P(\psi_1 \Box \psi_2)$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$;

e) $P(\psi) \implies P(Qx\, \psi)$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$ e para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;

então $P(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}_L$.

Dem.: Exercício $\square$

Observação 148: A definição indutiva do conjunto das L-fórmulas é determinista e tem associado um *princípio de recursão estrutural*, para definir funções cujo domínio é o conjunto das L-fórmulas. Este princípio é usado na definição seguinte.

Definição 149: O conjunto das *subfórmulas* de uma L-fórmula φ é notado por $subf(\varphi)$ e é definido, por recursão estrutural, do seguinte modo:

a) $subf(\psi) = \{\psi\}$, para todo $\psi \in At_L$;

b) $subf(\perp) = \{\perp\}$;

c) $subf(\neg\psi) = subf(\psi) \cup \{\neg\psi\}$, para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;

d) $subf(\psi_1 \square \psi_2) = subf(\psi_1) \cup subf(\psi_2) \cup \{\psi_1 \square \psi_2\}$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$;

e) $subf(Qx\,\psi) = subf(\psi) \cup \{Qx\,\psi\}$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathcal{V}$, $\psi \in \mathcal{F}_L$.

Definição 150: Seja φ uma L-fórmula e seja $Qx\,\psi$ uma subfórmula de φ, onde $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathcal{V}$ e $\psi \in \mathcal{F}_L$. O *alcance* desta ocorrência do quantificador Qx em φ é esta ocorrência da L-fórmula ψ.

Exemplo 151: Na L_{Arit}-fórmula

$$\forall x_0(\exists x_1(x_0 = s(x_1)) \to (\neg(x_0 = 0) \wedge \exists x_1(x_1 < x_0))) :$$

1. o alcance da única ocorrência de $\forall x_0$ é

$$\exists x_1(x_0 = s(x_1)) \to (\neg(x_0 = 0) \wedge \exists x_1(x_1 < x_0));$$

2. o alcance da primeira ocorrência do quantificador $\exists x_1$ é $x_0 = s(x_1)$;
3. o alcance da segunda ocorrência do quantificador $\exists x_1$ é $x_1 < x_0$.

Definição 152: Numa L-fórmula φ, uma ocorrência (em subfórmulas atómicas de φ) de uma variável x diz-se *livre* quando x não está no alcance de nenhuma ocorrência de um quantificador Qx (com $Q \in \{\exists, \forall\}$); caso contrário, essa ocorrência de x diz-se *ligada*. Escrevemos $LIV(\varphi)$ para denotar o conjunto das variáveis que têm ocorrências livres em φ e $LIG(\varphi)$ para denotar o conjunto das variáveis que têm ocorrências ligadas em φ.

Exemplo 153: Seja φ a L_{Arit}-fórmula

$$\exists x_1(\neg(\underbrace{x_0}_{(a)} < s(0)) \rightarrow \forall x_0(\underbrace{x_0}_{(b)} = \underbrace{x_1}_{(a)})).$$

A ocorrência (a) de x_0 é livre, enquanto que a ocorrência (b) de x_0 é ligada. A ocorrência (a) de x_1 é ligada. Assim, $LIV(\varphi) = \{x_0\}$ e $LIG(\varphi) = \{x_0, x_1\}$.

Observação 154: Note-se que $LIV(\varphi) \cap LIG(\varphi)$ não é necessariamente o conjunto vazio (veja-se o exemplo anterior).

Definição 155: A operação de *substituição das ocorrências livres* de uma variável x por um L-termo t numa L-fórmula φ é notada por $\varphi[t/x]$ e é definida, por recursão estrutural em L-fórmulas, do seguinte modo:

a) $R(t_1, ..., t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], ..., t_n[t/x])$ para todo $R \in \mathcal{R}$ de aridade n e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$;

b) $\perp [t/x] = \perp$;

c) $(\neg\psi)[t/x] = \neg\psi[t/x]$, para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;

d) $(\psi_1 \Box \psi_2)[t/x] = \psi_1[t/x] \Box \psi_2[t/x]$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$;

e) $(Qy\,\psi)[t/x] = \begin{cases} Qy\,\psi & \text{se } y = x \\ Qy\,\psi[t/x] & \text{se } y \neq x \end{cases}$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, $y \in \mathcal{V}$, $\psi \in \mathcal{F}_L$.

Exemplo 156:

1.
$$\begin{array}{lll} & (x_0 < s(x_1))[0/x_0] & \\ = & x_0[0/x_0] < s(x_1)[0/x_0] & \text{(def. anterior } \textbf{a)}) \\ = & 0 < s(x_1) & \text{(subst. em } L\text{-termos)} \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{lll} & (\exists x_0(x_0 < s(x_1)))[0/x_0] & \\ = & \exists x_0(x_0 < s(x_1)) & \text{(def. anterior } \textbf{e)}, 1^{\text{o}} \text{ caso)} \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{lll} & (\exists x_0(x_0 < s(x_1)))[0/x_1] & \\ = & \exists x_0(x_0 < s(x_1))[0/x_1] & \text{(def. anterior } \textbf{e)}, 2^{\text{o}} \text{ caso)} \\ = & \exists x_0(x_0 < s(0)) & \text{(def. anterior } \textbf{a)} \text{ e subst. em } L\text{-termos)} \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{lll} & (\exists x_0(x_0 < s(x_1)) \wedge (0 < x_0))[0/x_0] & \\ = & \exists x_0(x_0 < s(x_1)) \wedge 0 < 0 & \text{(porquê?)} \end{array}$$

Exemplo 157: Seja φ a L_{Arit}-fórmula $\exists x_1(x_0 < x_1)$. Então,

$$\varphi[s(x_1)/x_0] = \exists x_1(s(x_1) < x_1).$$

Observe que em φ a ocorrência livre de x_0 "não depende" da quantificação $\exists x_1$, mas, após a substituição, o termo $s(x_1)$, que substituiu x_0, "depende" da quantificação $\exists x_1$.[1] Na definição seguinte, identificaremos as condições que evitam este fenómeno indesejado de *captura de variáveis* em substituições.

Definição 158: Uma variável x diz-se *substituível* (*sem captura de variáveis*) por um L-termo t numa L-fórmula φ quando para todas as ocorrências livres de x em φ no alcance de algum quantificador Qy, $y \notin VAR(t)$.

NOTA: Nas folhas de exercício, em vez da terminologia x é substituível por t em φ é utilizada a terminologia: *x está livre para t em φ*.

Observação 159: Se x é uma variável que não tem ocorrências livres numa L-formula φ ou t é um L-termo onde não ocorrem variáveis, x é substituível por t em φ.

Exemplo 160: Seja $\varphi = \forall x_1(x_1 < x_2) \vee \neg(x_1 < x_2)$. Então:

a) x_0 é substituível por $x_1 + s(x_2)$ em φ, pois x_0 não tem ocorrências livres na fórmula;

b) x_1 é substituível por $x_1 + s(x_2)$ em φ, pois a única ocorrência livre de x_1 não está no alcance de qualquer quantificador;

c) x_2 não é substituível por $x_1 + s(x_2)$ em φ, pois x_2 tem uma ocorrência livre no alcance do quantificador $\forall x_1$ e $x_1 \in VAR(x_1 + s(x_2))$;

d) x_2 é substituível por $x_0 + s(x_2)$ em φ, pois, embora exista uma ocorrência livre de x_2 no alcance do quantificador $\forall x_1$, $x_1 \notin VAR(x_0 + s(x_2))$.

Observação 161: Note-se que, mesmo quando uma variável x não é substituível por um L-termo t numa L-fórmula φ, a operação de substituição de x por t em φ encontra-se definida.
Por exemplo, x_2 não é substituível por $x_1 + s(x_2)$ em

$$\varphi = \forall x_1 (x_1 < x_2) \vee \neg(x_1 < x_2);$$

a L_{Arit}-fórmula resultante da substituição de x_2 por $x_1 + s(x_2)$ em φ encontra-se definida e é igual a

$$\forall x_1 (x_1 < x_1 + s(x_2)) \vee \neg(x_1 < x_1 + s(x_2))),$$

no entanto, ao efetuar a substituição, acontece o fenómeno da captura de variáveis.

Proposição 162: Sejam φ uma L-fórmula, x uma variável e t um L-termo. Se $x \notin LIV(\varphi)$, então $\varphi[t/x] = \varphi$.

Dem.: Por indução estrutural em L-fórmulas. A prova está organizada por casos, consoante a *forma* de φ.

a) Caso $\varphi = \perp$. Então, $\varphi[t/x] = \perp [t/x] \stackrel{(1)}{=} \perp = \varphi$.

Justificações	
(1)	Definição de substituição.

b) Caso $\varphi = R(t_1, ..., t_n)$, com $R \in \mathcal{R}$, n-ário, e $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$. Então, $x \notin VAR(t_i)$, para todo $1 \leq i \leq n$, de outra forma teríamos $x \in LIV(\varphi)$, e contrariaríamos a hipótese. Assim, aplicando a Proposição 139, $t_i[t/x] = t_i$, para todo $1 \leq i \leq n$. Logo:

$$\varphi[t/x] = R(t_1, ..., t_n)[t/x] \overset{\textbf{(1)}}{=} R(t_1[t/x], ..., t_n[t/x]) \overset{\textbf{(2)}}{=} R(t_1, ..., t_n) = \varphi.$$

<u>Justificações</u>

(1) Definição de substituição.
(2) $t_i[t/x] = t_i$, para todo $1 \leq i \leq n$.

c) Caso $\varphi = Qy\,\varphi_1$, com $Q \in \{\exists, \forall\}$, $y \in \mathcal{V}$ e $\varphi_1 \in \mathcal{F}_L$.

c.1) Caso $x = y$. Então:

$$\varphi[t/x] = (Qy\,\varphi_1)[t/x] \overset{(1)}{=} Qy\,\varphi_1 = \varphi.$$

Justificações	
(1)	Definição de substituição.

c.2) Caso $x \neq y$. Então:

$$\varphi[t/x] = (Qy\,\varphi_1)[t/x] \overset{\mathbf{(1)}}{=} Qy\,\varphi_1[t/x] \overset{\mathbf{(2)}}{=} Qy\,\varphi_1 = \varphi.$$

Justificações	
(1)	Definição de substituição.
(2)	Por hipótese, $x \notin LIV(\varphi)$. Como $LIV(\varphi_1) \subseteq LIV(\varphi) \cup \{y\}$ e $x \neq y$, segue-se que $x \notin LIV(\varphi_1)$. Logo, por H.I., $\varphi_1[t/x] = \varphi_1$.

d) Os restantes casos são deixados como exercício.

$\square$

Definição 163: Uma L-fórmula φ diz-se uma *L-sentença*, ou uma *L-fórmula fechada*, quando $LIV(\varphi) = \emptyset$.

Proposição 164: Sejam φ uma L-sentença. Então, para toda a variável x e para todo o L-termo t,

1. x é substituível por t em φ;
2. $\varphi[t/x] = \varphi$.

Dem.: Exercício. □