ANÁLISE
Cap. 3 – Cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$

Dep. Matemática UMinho

Março 2020

3. Cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$

3.3 Funções reais: derivadas de ordem superior

- Derivadas parciais de ordem superior
- Função de Classe C^k
- Teorema de Schwarz

3.3 Funções reais: derivadas de ordem superior

Derivadas parciais de ordem superior

Sejam $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $a \in D$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que numa vizinhança de $a \in D$ existe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ (i fixo).

- Diz-se que que f tem derivada parcial de segunda ordem em a se $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ admite derivada parcial em ordem a x_j em a.
  - Esta derivada parcial de segunda ordem em a representa-se por
  $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \qquad \text{ou} \qquad f_{x_i x_j}(a)\,.$$
  - Se $j = i$ representa-se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$
  - Poderão existir n^2 derivadas parciais de segunda ordem.
  - Define-se a derivada parcial de ordem k como uma derivada parcial de uma derivada parcial de ordem $k - 1$.

Exercício:: 1

1. Determine todas as derivadas parciais de segunda ordem da função

$$f(x,y) = \cos(x\,y^2)\,.$$

Função de Classe $\mathcal{C}^k$

Sejam $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função.

- [Função de Classe $\mathcal{C}^k$]

  Diz-se que f **é de classe** $\mathcal{C}^k$ quando existem e são contínuas todas as derivadas parciais de f de ordem menor ou igual a k .

  - A função f diz-se de classe $\mathcal{C}^0$ se for contínua.
  - A função f diz-se de classe $\mathcal{C}^\infty$ se for de classe $\mathcal{C}^k$ para todo o k.

Teorema de Schwarz

- [Teorema de Schwarz] Seja $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$. Então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

  - Este resultado implica que se f é de classe $\mathcal{C}^k$ então qualquer permutação na ordem de derivação de uma derivada parcial de ordem menor ou igual a k conduz ao mesmo resultado.
  - Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$ se f é de classe $\mathcal{C}^3$ tem-se
    - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$
    - $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$ e $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$

Exercício:: 2

2. Verifique o teorema de Schwarz para a função $f(x, y) = xe^y + x^2y$.

3. Mostre que não pode existir uma função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ cujas derivadas parciais de primeira ordem sejam

$$f_x(x, y) = 2x^3 \qquad \text{e} \qquad f_y(x, y) = yx^2 + x\,.$$