ANÁLISE
Cap. 3 – Cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$

Dep. Matemática UMinho

Março 2020

3. Cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$

3.1 Funções reais: derivadas parciais

Derivada direcional

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$ e v um vetor de $\mathbb{R}^n$ unitário (isto é, tal que $\|v\| = 1$).

- A derivada direcional de f no ponto a na direção de v define-se como
$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$
caso o limite do segundo membro exista e denota-se por $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$.

Observações

1. A derivada direcional na direção do vetor v

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \qquad \text{é um número real}$$

   - $t \in \mathbb{R}$;
   - $a + tv = (a_1, \ldots, a_n) + t(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$;
   - $f(a+tv),\ f(a) \in \mathbb{R} \qquad \text{logo} \qquad f(a+tv) - f(a) \in \mathbb{R}$;

2. o símbolo ∂ em $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$ lê-se “dê curvo”.

3. $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$ indica a variação de f a partir de a e na direção de v.

4. Utilizamos nesta definição apenas vetores unitários porque dos vetores só nos interessa a direção (e sentido).

Exercício:: 1

1. Sejam $f(x, y) = x^2 + xy$, $a = (3, 4)$, $v = (1, 1)$ e $w = (1, 0)$.

   (a) Indique vetores v_1, w_1, unitários, com a mesma direção e sentido de v, w, respetivamente.

   (b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial v_1}(a)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial w_1}(a)$.

Derivada parcial

- Se e_k designar o $k-$ésimo vetor da base canónica de $\mathbb{R}^n$

$$u = e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

a derivada direcional de f na direção de e_k denomina-se **derivada parcial em ordem a** x_k e denota-se por $\frac{\partial f}{\partial x_k}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \frac{\partial f}{\partial e_k}(a)$$

- O vetor gradiente de f em a é o vetor das derivadas parciais de f em a e denota-se

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ \ldots, \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, e_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\, e_n$$

Caso particular:: $\mathbb{R}^2$

- Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, onde D é um conjunto aberto.
  - A derivada parcial de f em ordem a x no ponto (a, b) é o limite, se existir,
  $$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(a+t, b) - f(a, b)}{t}$$
  e denota-se por
  $$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \qquad \text{ou} \qquad f_x(a, b)$$
  - A derivada parcial de f em ordem a y no ponto (a, b) é o limite, se existir,
  $$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(a, b+t) - f(a, b)}{t}$$
  e denota-se por
  $$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \qquad \text{ou} \qquad f_y(a, b)\,.$$

Exercício:: 2

2. Sendo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y) = x^2\, y$, calcule, usando a definição:

   (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$

   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$

3. Calcule, se existir, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ quando

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

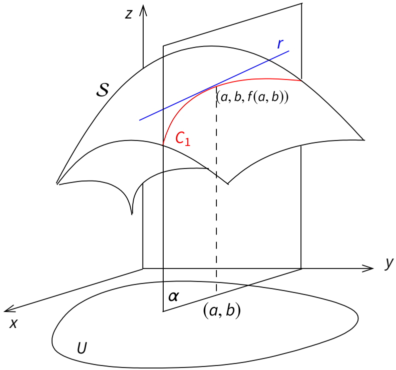
Interpretação geométrica da derivada parcial ($n = 2$)

- Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = f(x, y) \ \wedge \ (x, y) \in D\}$$

- Suponha-se que existe

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = f_x(a, b)$$



- Sejam
  - $\alpha\ :\ y = b$ o plano paralelo ao plano xz e que passa em $(a, b, f(a, b)) \in \mathcal{S}$;
  - C_1 a curva definida pela interseção de α e de $\mathcal{S}$

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = b \end{cases} \implies z = f(x, b) = \varphi(x);$$

  - $\varphi'(a)$ é o declive da reta tangente a C_1 em $(a, b, f(a, b))$

- Mas

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) &= \lim_{t \to 0} \frac{f((a, b) + t(1, 0)) - f(a, b)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t, b) - f(a, b)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(a + t) - \varphi(a)}{t}, \qquad \text{pois} \qquad f(x, b) = \varphi(x) \\ &= \varphi'(a) \end{aligned}$$

- Conclusão
  - $f_x(a, b)$ é o declive da reta tangente à curva C_1 no ponto $(a, b, f(a, b))$ obtida pela intersecção do plano $y = b$ e da superfície $\mathcal{S}$;
  - De modo análogo, $f_y(a, b)$ é o declive da reta tangente à curva C_2 no ponto $(a, b, f(a, b))$ obtida pela interseção do plano $x = a$ e da superfície $\mathcal{S}$.
- [Caso geral] Se v é um vetor unitário não vertical, é possível considerar o plano vertical que passa no ponto $(a, b, f(a, b))$ e tem a direção do vetor v. Este plano interseta a superfície S segundo uma curva, seja C_3. $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a, b)$ é o declive da reta tangente à curva C_3 no ponto $(a, b, f(a, b))$.

Aritmética das derivadas parciais

Sejam $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $\quad a \in D \quad$ e $\quad f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Se, para $i = 1, \ldots, n$, existirem

$$f_{x_i}(a) \quad \text{e} \quad g_{x_i}(a)$$

  tem-se

  - $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(f+g)(a) = f_{x_i}(a) + g_{x_i}(a)$
  - $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(fg)(a) = f_{x_i}(a)g(a) + f(a)g_{x_i}(a)$
  - $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{f}{g}\right)(a) = \dfrac{f_{x_i}(a)g(a) - f(a)g_{x_i}(a)}{(g(a))^2}, \quad g(a) \neq 0.$

Observação

- Para derivar f em ordem a x_k considera-se todas as outras variáveis x_i ($i \neq k$) como constantes:

  - [Exemplo] Se $f(x, y) = 2x + y \quad \text{e} \quad g(x, y) = 2\,xy$

    - para derivar em ordem a x considera-se y como uma constante

      $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2, \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2y.$$

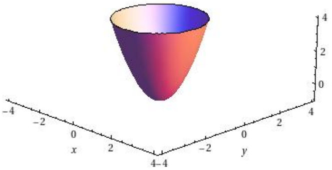
    - para derivar em ordem a y considera-se x como uma constante

      $$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2x.$$

Exercício:: 3

4. Calcular as derivadas parciais da função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 1\,.$$



Exercício:: 4

5. Calcule as derivadas parciais de 1.ª ordem das funções seguintes indicando o domínio de validade. Escreva o gradiente.

   (a) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2 - 3xy)$

   (b) $f(x,y) = x^2y^2\, e^{2xy}$

   (c) $f(x,y) = e^x \ln(xy)$

   (d) $f(x,y,z) = x\, e^{x^2+y^2+z^2}$

6. Mostre que sendo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = e^{xy}$, então
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$