# Algebra Linear

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$A = (a_{ij})$ $\boxed{\text{ordem } m \times n}$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 23 \end{pmatrix}$ --> matriz triangular superior $(i > j \Rightarrow a_{ij} = 0)$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ --> matriz triangular inferior $(i < j \Rightarrow a_{ij} = 0)$

$A = (a_{ij})$ $B = (b_{ij})$ de ordem $m \times n$

$C = A + B = (c_{ij})$

onde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 11 \\ 3 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

A matriz quadrada de ordem n diz-se que A é uma matriz invertível se existe uma matriz X tal que

$$XA = AX = I_n$$

a matriz inversa de A escreve-se $A^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 1 & -2 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 1 & -2 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 1 & -2 & \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha-1 & -2+2\alpha+\beta \\ 0 & 1 & 0 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$3-4+\alpha$

$4-6+2\alpha+\beta$

$$XA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 1 & -2 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha-1 & 0 & 1 & 0 \\ -2+2\alpha+\beta & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$

$-2 + 2\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow -2 + 2 \times 1 + \beta = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{-2} + \cancel{2} + \beta = 0$

$\Leftrightarrow \beta = 0$

$4 - 6 + 2\alpha + \beta$

$-2 + 2\alpha + \beta$

OL1 - Troca de linhas : $L_i \leftrightarrow L_k$

OL2 = Multiplicação de uma linha por um número diferente de zero $L_i \leftarrow \alpha L_i$ $(\alpha \neq 0)$

OL3 = Substituição de uma linha da matriz pela sua soma com o múltiplo de uma outra linha

$$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_k$$

A diz-se equivalente por linhas a B se esta matriz pode ser obtida de A por nº finito de operações elementares sobre linhas.

$$A \rightarrow B$$

def.

O elemento $a_{ik}$ de uma matriz $A = (a_{ij})$ diz-se um pivô se é o primeiro elemento não-nulo da sua linha

def.

diz-se que uma matriz $m \times n$ é uma matriz em escada se

- não há linhas nulas seguidas de linhas não-nulas
- se o pivô da linha i estiver na linha k então todos os elementos abaixo da posição i nas colunas $1 - k$ são nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$3\times 4 \quad 2\times 3 \qquad 2\times 3 \quad 3\times 4$

~~1.8 ab~~ 1.3 a) não pode

b) não pode

c) $2\times 4$

d) não pode

e) $(2\times 3)(3\times 5)+(2\times 5) = (2\times 5)+(2\times 5) = 2\times 5$

f) $(2\times 3)(3\times 3)(3\times 4) = (2\times 3)(3\times 4) = 2\times 4$

1.4 a) $\underset{(1\times 3)}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \underset{(3\times 1)}{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$

b) $\underset{(2\times 3)}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \underset{(3\times 1)}{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$

c) $\underset{(3\times 3)}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{(3\times 1)}{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $\underset{(3\times 3)}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{(3\times 2)}{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 12 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 12 & 5 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 12 & 5 & -12 \\ 8 & 2 & -8 \end{pmatrix}$

g) $\underset{(1\times 3)}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \underset{(3\times 2)}{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \end{pmatrix}$

h) $\underset{(3\times 2)}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \underset{(2\times 1)}{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

i) $\underset{(3\times 1)}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \underset{(1\times 2)}{\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}} \quad \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

1.5 a) $\begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1.6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$1 \times a + 2 \times c = 0 \iff a + 2c = 0 \iff \ldots$

$1 \times b + 2 \times d = 1 \iff b + 2d = 1 \iff b = 1 - 2d \iff \ldots$

$2 \times a + 1 \times c = 1 \iff 2a + c = 1 \iff \ldots$

$2 \times b + 1 \times d = 0 \iff 2b + d = 0 \iff 2(1 - 2d) + d = 0 \iff 2 - 4d + d = 0 \iff 2 - 3d = 0 \iff d$

Matriz Comuta

$AB = BA = I_m$

$I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

1.7

1.8 $AB = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$AC = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$

$AD = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$

1.9

# Característica da Matriz

car(A) = número de linhas não nulas da matriz escada

$$A = \begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$n^{o}$ equações do sistema

- $car(A) = car(A|b) = n$

  sistema possível determinado

- $car(A) < car(A|b)$

  sistema impossível

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 7 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_4]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_2}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -11 & -3 & -9 \end{array}\right)$$

# Sistemas de Equações Lineares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Se $car(A) = car(A|b) = n$ então o sistema é possível e determinado

Se $car(A) = car(A|b) < n$ então o sistema é possível e indeterminado

Se $car(A) \neq car(A|b)$ então o sistema é impossível

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 <-> L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 <- L_2 - 2L_1 \\ L_3 <- L_3 - 3L_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$car(A) = car(A|b) = 2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - 2\alpha \\ x_2 = \alpha - 5 \\ x_3 = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R} \qquad S = \{(8-2\alpha, \alpha-5, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2x + z = 2 \\ x - y + \alpha z = \beta \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & \alpha & \beta \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 <- L_2 - 2L_1 \\ L_3 <- L_3 - L_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 & \beta + 1 \end{array}\right)$$

Se $\alpha \neq 1$ então $car(A) = car(A|b) = 3 = n.^{o}$ de incógnitas do sistema. Logo sistema possível e determinado

Se $\alpha = 1$ então $car(A) = 2$, se $\beta \neq -1$ então $car(A|b) = 3$ logo sistema impossível

; se $\beta = -1$ então $car(A|b) = 2$ logo sistema possível e indeterminado

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{a}{2} \\ y = 2 + \frac{a}{2} \\ z = a \end{cases}, a \in \mathbb{R}$$

# Determinantes

$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 4 \times (-5) = 26$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

$|A| = (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times 3 \times \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \times 2 \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$

$= 1 \times 1 \times (-8) + (-1) \times 3 \times 11 + 1 \times 2 \times (-29)$

$= -8 - 33 - 58$

$= -99$

P7 O determinante de uma matriz não se altera se somar a uma linha da matriz um múltiplo de outra

P8 O determinante de uma matriz muda de sinal por troca de duas linhas

P4 $\begin{vmatrix} a_{11} & \text{—} & a_{1m} \\ \alpha a_{K1} & \text{—} & \alpha a_{Km} \\ a_{m1} & \text{—} & a_{mm} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \text{—} & a_{1m} \\ a_{K1} & \text{—} & a_{Km} \\ a_{m1} & \text{—} & a_{mm} \end{vmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \times 9 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 1 \times 9 \times (-11) = -99$

$A \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + L_1]{}$

3.11

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

$M_{21} = $ //  $\quad M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad M_{23} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

$M_{31} = $ //  $\quad M_{32} = $ //  $\quad M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \times 1 & (-1)^{1+2} \times (-1) & (-1)^{1+3} \times 1 \\ (-1)^{2+1} \times 1 & (-1)^{2+2} \times 2 & (-1)^{2+3} \times (-2) \\ (-1)^{3+3} \times 1 & (-1)^{3+2} \times (-2) & (-1)^{3+3} \times 3 \end{pmatrix}$$

# Teste 1 – 2019

1. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow 5L_3 - 2L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$car(A) = 3$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ -4 & 3 & 6 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

$2 I_3 = 2 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A^2 - 2 I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ -4 & 3 & 6 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 6 \\ -4 & 1 & 6 \\ -4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

c)

d) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow 5L_3 - 2L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -2 & 5 \end{array}\right)$

$0 = 1 \times (-6) + 2 \times x + 0 \times (-5)$

$\Leftrightarrow 0 = -6 + 2x$

$\Leftrightarrow 2x = 6$

$\Leftrightarrow x = 3$