# Numerical Methods: Lab II

Simulation with higher order methods

Enric Perera Bel Universitat
Pompeu Fabra

2018-2019

## Introduction

In this lab session, we will continue investigating the vertical motion problem (Fig. 1) represented by the ODE in equation 1. In the previous session, we implemented the Euler method. However, Euler is a first order method, thus its error propagates very rapidly through the simulation. We will code the semi-implicit Euler-Cromer method and higher order methods such as Runge-Kutta 2 (RK2), and Runge-Kutta 4 (RK4) to overcome the limitations of first order methods and improve the accuracy of our results. Throughout the session, we will explore the mathematics of each numerical approximation.

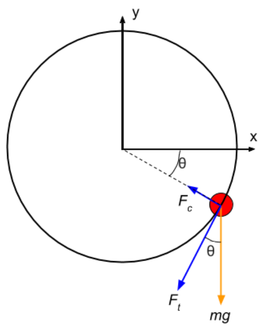


Figure 1: Ball oscillating in a circle

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g cos\theta}{r}$$

## 1 Preliminary Work

Answer section 1 in a doc or pdf file.

1. (10%) Find the Euler-Cromer equations to approximate the solution of the differential equation 1, for each of the variables defining its state.

Sabent que les equacions que descriuen el mètode d'Euler-Cromer són:

$x_{k+1} = x_k + \Delta t * f(t_{k+1}, \theta_{k+1}) \rightarrow$ Aplicable sempre.

$x_{k+1} = x_k + \Delta t * f(t_k, \theta_k) \rightarrow$ Aplicable només a l'últim estat.

Desenvolupant i aplicant-ho al sistema que ens presenta la pràctica, obtenim les següents equacions:

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \Delta t * f(t_{k+1}, \theta_{k+1}) = \theta_k + \Delta t * \left(\frac{d\theta_{k+1}}{dt}\right) = \theta_k + \Delta t * \omega_{k+1}$$

$$\omega_{k+1} = \omega_k + \Delta t * f(t_k, \omega_k) = \omega_k + \Delta t * \left(\frac{d\omega_k}{dt}\right) = \omega_k + \Delta t * \alpha_k = \omega_k + \Delta t * \left(\frac{-g}{r} * cos\theta_k\right)$$

2. (10%) Find the Runge-Kutta 2 equations to approximate the solution of the differential equation 1, for each of the variables defining its state.

A partir de l'equació que descriu la posició en el mètode de Runge-Kutta 2:

$\theta_{k+1} = \theta_k + \frac{\Delta t}{2}(F_{1,\theta} + F_{2.\theta})$

trobem les següents funcions components:

$F_{1,\theta} = f(t_k, \theta_k) = \frac{d\theta_k}{dt} = \omega_k$

$F_{2,\theta} = f(t_{k+1}, \theta_k + \Delta t * f(t_k, \theta_k)) = f(t_{k+1}, \theta'_{k+1}) = \frac{d\theta'_{k+1}}{dt} = \omega'_{k+1}$

i sabent que

$\omega'_{k+1} = \omega_k + \Delta t * (\frac{-g}{r}cos(\theta_k))$ ,

trobem les funcions components desenvolupades:

$F_{1,\theta} = \omega_k$

$F_{2,\theta} = \omega_k + \Delta t * (\frac{-g}{r}cos(\theta_k))$

Per tant, l'equació que determina la posició en el nostre sistema, és la següent:

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \frac{\Delta t}{2}(\omega_k + (\omega_k + \Delta t * (\frac{-g}{r}cos(\theta_k)))$$

A partir de l'equació que descriu la velocitat en el mètode de Runge-Kutta 2:

$\omega_{k+1} = \omega_k + \frac{\Delta t}{2}(F_{1,\omega} + F_{2.\omega})$

trobem les següents funcions components:

$F_{1,\omega} = \alpha_k = \frac{-g}{r}cos(\theta_k)$

$F_{2,\omega} = f(t_{k+1}, \omega_k + \Delta t * f(t_k, \omega_k) = f(t_{k+1}, \omega'_{k+1}) = \alpha'_{k+1} = \frac{-g}{r}cos(\theta'_{k+1})$

i sabent que

$\theta'_{k+1} = \theta_k + \Delta t * f(t_k, \theta_k) = ... = \theta_k + \Delta t * \omega_k$ ,

trobem les funcions components desenvolupades:

$F_{1,\omega} = \frac{-g}{r}cos(\theta_k)$

$F_{2,\omega} = \frac{-g}{r}cos(\theta_k + \Delta t * \omega_k)$

Per tant, l'equació que determina la velocitat en el nostre sistema, és la següent:

$$\omega_{k+1} = \omega_k + \frac{\Delta t}{2}(\frac{-g}{r}cos(\theta_k) + \frac{-g}{r}cos(\theta'_k + \Delta t * \omega_k))$$

3. (10%) Find the Runge-Kutta 4 equations to approximate the solution of the differential equation 1, for each of the variables defining its state.

A partir de l'equació que descriu la posició al Mètode de Runge-Kutta 4:

$\theta_{k+1} = \theta_k + \frac{\Delta t}{6}(F_{1,\theta} + 2F_{2,\theta} + 2F_{3,\theta} + F_{4,\theta})$

trobem les següents funcions components:

$F_{1,\theta} = f(t_k, \theta_k) = \omega_k$

$F_{2,\theta} = f(t + \frac{h}{2},\ \theta_k + \frac{h}{2} * F_{1,k}) = f(t + \frac{h}{2},\ \theta') = \omega'_k$

$F_{3,\theta} = f(t + \frac{h}{2},\ \theta_k + \frac{h}{2} * F_{2,k}) = f(t + \frac{h}{2},\ \theta'') = \omega''_k$

$F_{4,\theta} = f(t + h,\ \theta_k + h * F_{3,k}) = f(t + h,\ \theta''') = \omega'''_k$

i sabent que:

$\omega'_k = \omega_k + \frac{h}{2} * F_{1,\omega}$

$\omega''_k = \omega_k + \frac{h}{2} * F_{2,\omega}$

$\omega'''_k = \omega_k + h * F_{3,\omega}$ ,

trobem les funcions components desenvolupades:

$F_{1,\theta} = \omega_k$

$F_{2,\theta} = \omega_k + \frac{h}{2} * F_{1,\omega}$

$F_{3,\theta} = \omega_k + \frac{h}{2} * F_{2,\omega}$

$F_{4,\theta} = \omega_k + h * F_{3,\omega}$

Per consegüent, l'equació del mètode RK4 que defineix la posició el nostre sistema és:

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \frac{\Delta t}{6}(\omega_k + 2(\omega_k + \frac{h}{2} * F_{1,\omega}) + 2(\omega_k + \frac{h}{2} * F_{2,\omega}) + \omega_k + h * F_{3,\omega})$$

A partir de l'equació que descriu la velocitat al Mètode de Runge-Kutta 4:

$\omega_{k+1} = \omega_k + \frac{\Delta t}{6}(F_{1,\omega} + 2F_{2,\omega} + 2F_{3,\omega} + F_{4,\omega})$

trobem les següents funcions components:

$F_{1,\omega} = f(t_k, \omega_k) = \frac{-g}{r} cos(\theta_k)$

$F_{2,\omega} = f(t_k + \frac{h}{2},\ \omega_k + \frac{h}{2} * F_{1,\omega}) = f(t_k + \frac{h}{2},\ \omega'_k) = \frac{-g}{r} cos(\theta'_k)$

$F_{3,\omega} = f(t_k + \frac{h}{2},\ \omega_k + \frac{h}{2} * F_{2,\omega}) = f(t_k + \frac{h}{2},\ \omega''_k) = \frac{-g}{r} cos(\theta''_k)$

$F_{4,\omega} = f(t_k + h,\ \omega_k + h * F_{3,\omega}) = f(t_k + h,\ \omega'''_k) = \frac{-g}{r} cos(\theta'''_k)$

sabent que:

$\theta'_k = \theta_k + \frac{h}{2} * F_{1,\theta}$

$\theta''_k = \theta_k + \frac{h}{2} * F_{2,\theta}$

$\theta'''_k = \theta_k + \frac{h}{2} * F_{3,\theta}$

trobem les funcions components desenvolupades:

$F_{1,\omega} = \frac{-g}{r}cos(\theta_k)$

$F_{2,\omega} = \frac{-g}{r}cos(\theta_k + \frac{h}{2} * F_{1,\theta})$

$F_{3,\omega} = \frac{-g}{r}cos(\theta_k + \frac{h}{2} * F_{2,\theta})$

$F_{4,\omega} = \frac{-g}{r}cos(\theta_k + \frac{h}{2} * F_{3,\theta})$

Per conseqüent, l'equació del mètode RK4 que defineix la velocitat el nostre sistema és:

$\omega_{k+1} = \omega_k + \frac{\Delta t}{6}((\frac{-g}{r}cos(\theta_k)) + 2(\frac{-g}{r}cos(\theta_k + \frac{h}{2} * F_{1,\theta})) + 2(\frac{-g}{r}cos(\theta_k + \frac{h}{2} * F_{2,\theta})) + (\frac{-g}{r}cos(\theta_k + \frac{h}{2} * F_{3,\theta})))$

## 2.1 Visualization (15%)

Run your code. What do you observe? (you can try to print the difference between states). Does the simulation run according to reality? Why not? Which might be the cause of the problem? Compare the results with the Euler method implemented in Laboratory 1. Explain and provide your conclusions. Write the answers in the same file as questions in section

Quan executem el codi, podem observar certes diferències en funció del mètode que utilitzem per aproximar la solució a la EDO.

Quan executem el corresponent codi, a l'inici del mateix, veiem com les 3 pilotes oscilen identicament iguals.

Al cap del temps, si deixem les 3 pilotes oscil·lant alhora, totes elles es descoordinen.

El motiu d'aquesta descoordinació ve donat pels errors que acumulem en els càlculs dels diferents mètodes.

La simulació que menys s'acosta a la realitat és la que simulem mitjançant el mètode d'Euler-Cromer, mentre que la que més s'acosta a la realitat és el de Runge-Kutta 4.

En canvi, si comparem aquests 3 mètodes amb el mètode aplicat a la pràctica anterior, podem veure que el mètode d'Euler de la pràctica 1 era molt menys exacte que els aplicats en aquesta, ja que en l'anterior, la pilota, per culpa dels errors acumulats, arribava a donar la volta a la pilota, a causa de que l'acceleració augmentava, mentre que a la realitat, aquest fenomen mai arriba a succeir.