1. Preliminary work

Background Theory Concepts

1. [3%] Write the expression according to which the system is updated using the implicit discretization, and using Crank-Nicholson method, considering that:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 h}{\partial t^2} =\approx \dfrac{h_j^{m+1} - 2h_j^m + h_j^{m-1}}{\Delta t^2} \\ \\ c\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} \approx c\dfrac{h_{j+1}^{m+1} - 2h_j^{m+1} + h_{j-1}^{m+1}}{\Delta x^2} \end{cases}$$

Derive an expression for μ for each method.

DISCRETITZACIÓ IMPLÍCITA

El mètode explícit anterior es pot transformar a un mètode implícit igualant la discretització de la segona derivada temporal a m, j amb la discretització de la segona derivada espaial a m+1, j.

$$\frac{u_j^{m+1} - 2u_j^m + u_j^{m-1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{j+1}^{m+1} - 2u_j^{m+1} + u_{j-1}^{m+1}}{\Delta x^2}$$

Utilitzant $\mu = c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}$, per a obtenir una notació més clara, obtenim:

$$u_j^{m+1} - 2u_j^m + u_j^{m-1} = \mu\left(u_{j+1}^{m+1} - 2u_j^{m+1} + u_{j-1}^{m+1}\right)$$

Ara, separant les variables que coneixem i les que no, aconseguim la següent fórmula:

$$-\mu u_{j+1}^{m+1} + (1 + 2\mu)u_j^{m+1} - \mu u_{j-1}^{m+1} = 2u_j^m - u_j^{m-1}$$

CRANK-NICHOLSON

En canvi, si apliquem el mètode de Crank-Nicholson, obtenim la fórmula

$$\frac{u_j^{m+1} - 2u_j^m + u_j^{m-1}}{\Delta t^2} = \frac{c^2}{2}\frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{\Delta x^2} + \frac{c^2}{2}\frac{u_{j+1}^{m+1} - 2u_j^{m+1} + u_{j-1}^{m+1}}{\Delta x^2}$$

i sabent que $\mu = c^2 \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}$, obtenim una notació més clara:

$$u_j^{m+1} - 2u_j^m + u_j^{m-1} = \mu\left[\left(u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m\right) + \left(u_{j+1}^{m+1} - 2u_j^{m+1} + u_{j-1}^{m+1}\right)\right]$$

Ara, separant les variables que coneixem i les que no, aconseguim la següent fórmula:

$$-\mu u_{j+1}^{m+1} + (1 + 2\mu)u_j^{m+1} - \mu u_{j-1}^{m+1} = \mu u_{j+1}^m + 2(1 - \mu)u_j^m + \mu u_{j-1}^m - u_j^{m-1}$$

2. [3%] Iterative solvers are used to solve implicit PDE by (as its name says) iteratively computing (approximating) the next step solution until they converge. Write the expression of Jacobi and Gauss-Seidel's iterative solvers for the heat equation (implicit discretization and Crank Nicolson's formulation), knowing that Jacobi's method is:

$$u_i^{(m+1),(n+1)} = \frac{b_i - \sum_{j\neq 1} a_{ij}\, u_j^{(m+1)(n)}}{a_{ii}}$$

Derive an expression for b_i, $a_{i,j}$ and a_{ii} for each pair of methods.

Si ho expressem **utilitzant la discretització implícita** en forma d'equació

Per el **mètode de resolució de Jacobi**, obtenim l'expressió següent:

$$u_j^{m+1,(n+1)} = \frac{u_j^m}{(1+2\mu)} + \frac{\mu}{(1+2\mu}\left(u_{j+1}^{m+1,(n)} + u_{j-1}^{m+1,(n)}\right)$$

Per el **mètode de resolució de Gauss-Seidel**, obtenim l'expressió següent:

$$u_j^{m+1,(n+1)} = \frac{u_j^m}{(1+2\mu)} + \frac{\mu}{(1+2\mu}\left(u_{j+1}^{m+1,(n)} + u_{j-1}^{m+1,(n+1)}\right)$$

En canvi, si ho expressem **utilitzant Crank-Nicolson** en forma d'equació:

Per el **mètode de resolució de Jacobi**, obtenim l'expressió següent:

$$u_j^{m+1,(n+1)} = \frac{\mu u_{j+1}^m + (1-2\mu)u_j^m + \mu u_{j-1}^m}{(1+2\mu)} + \frac{\mu}{(1+2\mu)}\left(u_{j+1}^{m+1,(n)} + u_{j-1}^{m+1,(n)}\right)$$

Per el **mètode de resolució de Gauss-Seidel**, obtenim l'expressió següent:

$$u_j^{m+1,(n+1)} = \frac{\mu u_{j+1}^m + (1-2\mu)u_j^m + \mu u_{j-1}^m}{(1+2\mu)} + \frac{\mu}{(1+2\mu)}\left(u_{j+1}^{m+1,(n)} + u_{j-1}^{m+1,(n+1)}\right)$$

3. [3%] The algorithm converges when the error between two consecutive iterations is small enough. However, a maximum number of iterations can be also set to stop the iterative solver. Write the expression for this error.

Els mètodes expressats anteriorment poden funcionar indefinidament.

Per tant, cal aturar-se a partir d'algun cas. El criteri ve donat per la següent fórmula:

$$\frac{\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|}{\left\|x^{(k+1)}\right\|}$$

En un altre cas, podem considerar *k* un nombre d'iteracions determinat, i aturar la iteració del mètode quan les iteracions arribin a *k*.

2.5. [3·5%] Change the stopping criteria to the solver.

Try changing the error to different values (e.g. 10^{-12}). What do you observe?

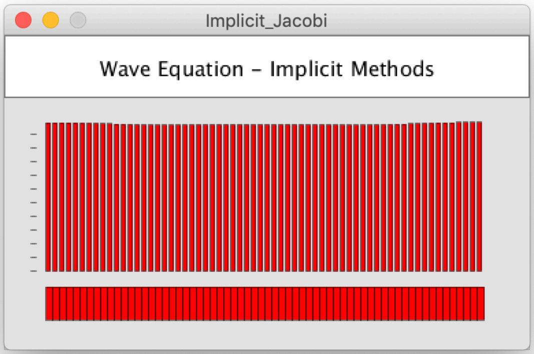
Si canviem el llindar d'error a un número menor, la simulació tindrà més iteracions, per tant, la seva simulació serà més extensa que si ho comparem amb un 10^{-6}.

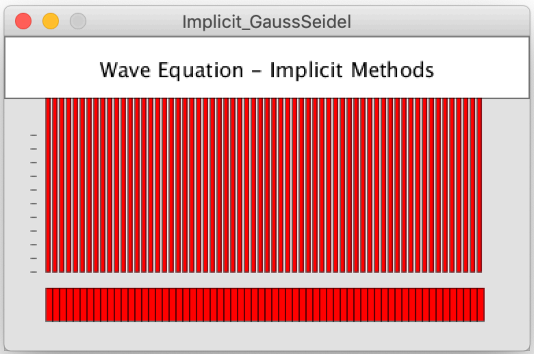
3. Visualization (10%)

Run your code. What do you observe? Does the simulation run according to reality? Why? If not, which might be the cause of the problem? Explain and provide your conclusions.

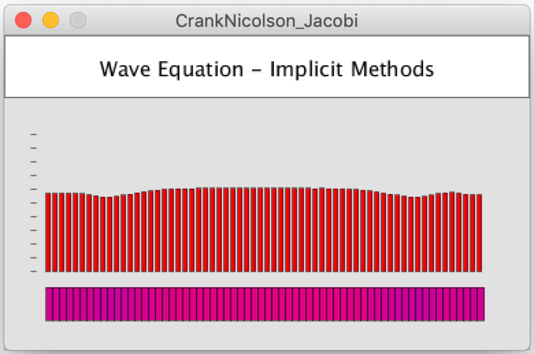
Com podem veure als diferents arxius de codi, es produeixen diferents situacions:

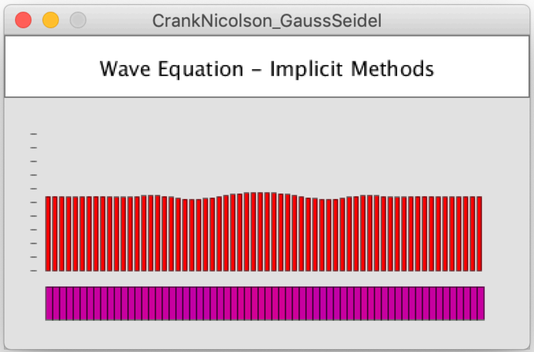
En el cas del **mètode implícit**, un cop realitzada la simulació, podem veure com, un cop la força de la ona disminueix, el fluid augmenta considerablement el seu volum, com podem veure a continuació:





En canvi, en el cas del mètode de Crank-Nicholson, podem veure com, un cop la força de la ona disminueix, el fluid disminueix considerablement el seu volum, com podem veure en la següent imatge:





Per tant, cap de les dues simulacions s'adapten a la realitat.