Theoretical Work

Background Theory concepts (15%)

TW1 [2 * 5%] Obtain the expressions according to which the system is updated using Runge-Kutta 2 and Runge-Kutta 4

<u>Runge-Kutta 2</u>

Sabent que la fòrmula per al següent temps (m+1) en una posició j en el mètode

Runge-Kutta 2 és

$$u_j^{m+1} = u_j^m + \frac{\Delta t}{2}(F_{1,j} + F_{2,j})$$

podem obtenir les seves funcions components, $F_{1,j}$ i $F_{2,j}$:

$$F_{1,j} = \alpha \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{\Delta x^2}$$

$$F_{2,j} = f(t_j^{m+1}, u_j^m + \Delta t * F_{1,j}) = f(t_j^{m+1}, u_j'^{m+1}) = \frac{\partial u_j'^{m+1}}{\partial t} = \alpha \frac{u_{j+1}'^{m+1} - 2u_j'^{m+1} + u_{j-1}'^{m+1}}{\Delta x^2}$$

<u>Runge-Kutta 4</u>

Per al mètode de Runge-Kutta 4, la fòrmula que tenim és

$$u_j^{m+1} = u_j^m + \frac{\Delta t}{6}(F_{1,j} + 2 * F_{2,j} + 2 * F_{3,j} + F_{4,j})$$

per tant, cal obtenir $F_{1,j}$, $F_{2,j}$, $F_{3,j}$ i $F_{4,j}$:

$$F_{1,j} = \alpha \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{\Delta x^2}$$

$$F_{2,j} = f(t_j^{m+\frac{1}{2}}, u_j^m + \frac{\Delta t}{2} * (\alpha \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{\Delta x^2}) = f(t_j^{m+\frac{1}{2}}, u_j'^{m+1}) = \frac{\partial u_j'^{m+1}}{\partial t} = \alpha \frac{u_{j+1}'^{m+1} - 2u_j'^{m+1} + u_{j-1}'^{m+1}}{\Delta x^2}$$

$$F_{3,j} = f(t_j^{m+\frac{1}{2}}, u_j^m + \frac{\Delta t}{2} * (\alpha \frac{u_{j+1}'^{m+1} - 2u_j'^{m+1} + u_{j-1}'^{m+1}}{\Delta x^2}) = f(t_j^{m+\frac{1}{2}}, u_j''^{m+1}) = \frac{\partial u_j''^{m+1}}{\partial t} = \alpha \frac{u_{j+1}''^{m+1} - 2u_j''^{m+1} + u_{j-1}''^{m+1}}{\Delta x^2}$$

$$F_{4,j} = f(t_j^{m+\frac{1}{2}}, u_j^m + \frac{\Delta t}{2} * (\alpha \frac{u_{j+1}''^{m+1} - 2u_j''^{m+1} + u_{j-1}''^{m+1}}{\Delta x^2}) = f(t_j^{m+\frac{1}{2}}, u_j'''^{m+1}) = \frac{\partial u_j'''^{m+1}}{\partial t} = \alpha \frac{u_{j+1}'''^{m+1} - 2u_j'''^{m+1} + u_{j-1}'''^{m+1}}{\Delta x^2}$$

TW2 [5%] In concordance with the previous answer: what should the state be composed of for the diffusion equation? Which variables should be stored?

Com podem veure a la pregunta anterior, les nostres equacions depenen de només dues variables, de la posició i del temps, i com que la notació ens permet simplificar-les mitjançant u_j^m , on m és el temps i j la posició, l'estat serà [u]

Processing (15%)

TW3 [5%] The system has spatial information, encoded in discretized sections of the metal bar. Thus, the state needs to store the values for different positions of the metal bar for each time step. How can this spatial information codified in the state?

Per a dur a terme la pràctica, ens cal una representació espacial dels estats, per conèixer l'estat en cada instant de la barra. L'emmagatzematge d'aquesta informació es farà a través d'una llista de llistes o matriu [1][64].

TW4 [2 5%] Given **your responses for TW1**, describe the numerical simulation's workflow for Runge-Kutta 2 and Runge-Kutta 4. That is:

(1) Write the equations for updating the temporal evolution for each of the methods, according to exercise 1.

(2) List the equations and check any dependencies between the equations.

(3) Rearrange the equations for respecting the dependencies.

Runge-Kutta 2

Les equacions per al mètode Runge-Kutta 2 són les següents:

1. Mètode de Runge-Kutta 2: $u_j^{m+1} = u_j^m + \frac{\Delta t}{2}(F_{1,j} + F_{2,j})$
2. Càlcul de $F_{1,j}$: $F_{1,j} = \alpha \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{\Delta x^2}$
3. Càlcul de $F_{2,j}$: $F_{2,j} = \frac{\partial u_j'^{m+1}}{\partial t} = \alpha \frac{u_{j+1}'^{m+1} - 2u_j'^{m+1} + u_{j-1}'^{m+1}}{\Delta x^2}$

Com podem veure, per a calcular u_j^{m+1} , necessitem saber abans les funcions components, que en el cas de Runge-Kutta 2 son $F_{1,j}$ i $F_{2,j}$. Per tant, l'ordre dels càlculs variar, ja que abans haurem de declarar les funcions components.

Per tant, les equacions quedaran ordenades de la forma següent:

1. Càlcul de $F_{1,j}$: $F_{1,j} = \alpha \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{\Delta x^2}$
2. Càlcul de $F_{2,j}$: $F_{2,j} = \frac{\partial u_j'^{m+1}}{\partial t} = \alpha \frac{u_{j+1}'^{m+1} - 2u_j'^{m+1} + u_{j-1}'^{m+1}}{\Delta x^2}$
3. Mètode de Runge-Kutta 2: $u_j^{m+1} = u_j^m + \frac{\Delta t}{2}(F_{1,j} + F_{2,j})$

Runge-Kutta 4

Les equacions per al mètode Runge-Kutta 4 són les següents:

1. Mètode de Runge-Kutta 4: $u_j^{m+1} = u_j^m + \frac{\Delta t}{6}(F_{1,j} + 2 * F_{2,j} + 2 * F_{3,j} + F_{4,j})$
2. Càlcul de $F_{1,j}$: $F_{1,j} = \alpha \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{\Delta x^2}$
3. Càlcul de $F_{2,j}$: $F_{2,j} = \frac{\partial u_j'^{m+1}}{\partial t} = \alpha \frac{u_{j+1}'^{m+1} - 2u_j'^{m+1} + u_{j-1}'^{m+1}}{\Delta x^2}$
4. Càlcul de $F_{3,j}$: $F_{3,j} = \frac{\partial u_j''^{m+1}}{\partial t} = \alpha \frac{u_{j+1}''^{m+1} - 2u_j''^{m+1} + u_{j-1}''^{m+1}}{\Delta x^2}$
5. Càlcul de $F_{4,j}$: $F_{4,j} = \frac{\partial u_j'''^{m+1}}{\partial t} = \alpha \frac{u_{j+1}'''^{m+1} - 2u_j'''^{m+1} + u_{j-1}'''^{m+1}}{\Delta x^2}$

Com podem veure, per a calcular u_j^{m+1} , necessitem saber abans les funcions components, que en el cas de Runge-Kutta 4 son $F_{1,j}$, $F_{2,j}$, $F_{3,j}$ i $F_{4,j}$. Per tant, l'ordre dels càlculs variar, ja que abans haurem de declarar les funcions components.

Per tant, les equacions quedaran ordenades de la forma següent:

1. Càlcul de $F_{1,j}$: $F_{1,j} = \alpha \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{\Delta x^2}$
2. Càlcul de $F_{2,j}$: $F_{2,j} = \frac{\partial u_j'^{m+1}}{\partial t} = \alpha \frac{u_{j+1}'^{m+1} - 2u_j'^{m+1} + u_{j-1}'^{m+1}}{\Delta x^2}$
3. Càlcul de $F_{3,j}$: $F_{3,j} = \frac{\partial u_j''^{m+1}}{\partial t} = \alpha \frac{u_{j+1}''^{m+1} - 2u_j''^{m+1} + u_{j-1}''^{m+1}}{\Delta x^2}$
4. Càlcul de $F_{4,j}$: $F_{4,j} = \frac{\partial u_j'''^{m+1}}{\partial t} = \alpha \frac{u_{j+1}'''^{m+1} - 2u_j'''^{m+1} + u_{j-1}'''^{m+1}}{\Delta x^2}$
5. Mètode de Runge-Kutta 4: $u_j^{m+1} = u_j^m + \frac{\Delta t}{6}(F_{1,j} + 2 * F_{2,j} + 2 * F_{3,j} + F_{4,j})$

PW6 [10%] Once finished, change the α constant in your code (**and remember to change it back to α=0.25 afterwards!**) to a higher number. What do you observe? What is the reason for this? **Include your answer in the report.**

Si canviem el valor d' α al codi, el programa no funciona amb la mateixa normalitat que si α=0.25.

El motiu és perquè al augmentar o disminuir el valor d' α, hi han valors que es tornen negatius, per tant, influeixen en la distribució del fluid.