

Entregable 1: Ecuaciones hidrodinámicas

Andrés Vicente Arévalo

Resumen

Desarrollo y comprensión de un código para la solución de las ecuaciones de la hidrodinámica en una dimensión. Para comprobar el código se han realizado pruebas con ondas sonoras simples y varias perturbaciones arbitrarias. Se ha realizado también un diagrama de flujo para visualizar los componentes principales del código así como su interacción.

Tareas:

1 - Sentido físico

Como ya hemos visto en clase, las ecuaciones hidrodinámicas que se van a resolver en el código son las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} u_m &= \rho & ; & f_m = \rho v \\ u_p &= \rho v & ; & f_p = \rho v^2 + p \\ u_e &= \rho \left(\epsilon + \frac{v^2}{2} \right) & ; & f_e = \left(\rho \epsilon + \rho \frac{v^2}{2} + p \right) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{\partial u_m}{\partial t} &= -\frac{\partial f_m}{\partial z} \\ \frac{\partial u_p}{\partial t} &= -\frac{\partial f_p}{\partial z} \\ \frac{\partial u_e}{\partial t} &= -\frac{\partial f_e}{\partial z} \end{aligned} \quad \text{Ecuaciones Hidrodinámicas} \quad (1)$$

Estas ecuaciones expresan el cambio en densidad de materia, densidad de energía y densidad de momento como resultado del flujo de estas. O dicho de otro modo, expresan leyes de conservación de la materia, la energía y el momento en un dominio físico determinado.

Supongamos una masa distribuida en una dimensión con una determinada densidad y presión como se intenta ilustrar en la figura 1. Si nos colocamos entre las superficies A_1 y A_2 (con sus vectores de superficie correspondientes representados en negro) en un determinado tiempo t_0 podemos definir unos flujos netos de las densidades descritas en las ecuaciones del sistema 1. Ya que no existe creación ni destrucción de dichas cantidades, estos flujos netos solo pueden venir de una variación de las cantidades existentes dentro del volumen estudiado (A_1 y A_2).

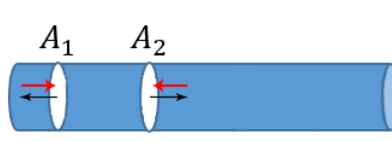
Nos fijamos ahora en la primera ecuación, que es la más intuitiva. Podemos ver claramente como, si solo tenemos flujo de materia entrando hacia el espacio definido por las superficies A_1 y A_2 , ~~la densidad de materia tiene~~, necesariamente, que aumentar dentro de dicho espacio (figura 1). **la masa total contenida entre A1 y A2: la densidad puede estar variando como quiera en el interior dependiendo de la distribución de velocidades**

La ecuación 2 nos dice que la densidad de momento (el momento de nuestro conjunto de partículas en un espacio determinado ρv) ha de variar si se ejerce una presión sobre el sistema (o si este ejerce una presión sobre el entorno) o si se escapan ~~partículas de~~ nuestro sistema llevándose consigo el momento que tienen ¹, lo que nos relaciona el intercambio de momento por

¹El flujo de momento lo definimos como la densidad de momento por la velocidad a la que se escapa o entra el fluido: $(\rho v)v = \rho v^2$

Mejor llamarlos 'elementos de gas', en el sentido de elementos infinitesimales con los que se puede llevar a cabo análisis matemático de medios continuos. La palabra 'partículas' se reserva normalmente para las partículas microscópicas constituyentes del fluido (átomos, etc)

las superficies A_1 y A_2 con la ~~densidad de momento de nuestro~~ elemento de fluido.



**con el momento total contenido
en el volumen entre A1 y A2**

volumen finito

Figura 1: Ilustración de un ~~elemento~~ de fluido con las superficies A_1 y A_2 representando las fronteras de dicho ~~elemento~~. Los vectores negros representan los vectores de las superficies, mientras que los vectores rojos representan un flujo hacia el interior de nuestro elemento de fluido.

hmm. Este texto sobre la energía no está muy bien ...

Por último, la ecuación de la energía nos relaciona la capacidad de ejercer un trabajo de nuestro fluido ya sea mediante presión, ~~intercambio de momento~~² o mediante la energía interna del mismo, con la densidad de energía de ese elemento de fluido estudiado. Esto es, si el elemento ejerce un trabajo (flujo de energía) su energía ha de disminuir para que la energía total se conserve y viceversa. Si realizamos un trabajo sobre el fluido (como una compresión) su energía ha de aumentar para que la energía total se conserve.

2 - Condiciones iniciales de una onda de sonido

Si comparamos la condición inicial impuesta en nuestra onda de sonido con la las soluciones exactas vemos que coinciden en estructura, como se ve en las ecuaciones 2 (con $wt = 0$ ya que $t = 0$).

$$\left. \begin{aligned} p'(z, t = 0)/p_{00} &= C\gamma h(z) \equiv A_p \cos(-kz + \Phi_p) \\ \rho'(z, t = 0)/\rho_{00} &= C h(z) \equiv A_\rho \cos(-kz + \Phi_\rho) \\ v'(z, t = 0)/c_{s00} &= C h(z) \equiv A_v \cos(-kz + \Phi_v) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Las tres componentes de nuestras condiciones iniciales (velocidad, densidad y presión) están en fase ya que $h(z)$ es el mismo para todas. Por tanto, obtendremos el primer modo de propagación donde se cumple que:

$$\omega = c_{s00}k \iff \Phi_p = \Phi_\rho = \Phi_v \iff A_p = \frac{A_\rho}{\gamma} = A_v \quad (3)$$

si cogemos la solución a $t = 0$ e imponemos nuestras condiciones iniciales por ejemplo en $\rho'(z, t = 0)/\rho_{00}$ vemos que:

$$\rho'(z, t = 0)/\rho_{00} = C h(z) = C \cos\left(2\pi \frac{z - z_0}{z_f - z_0} + \frac{2\pi}{5}\right) = A_\rho \cos(-kz + \Phi_\rho) \quad (4)$$

si identificamos los términos de amplitud $C = A_\rho$ y el número de ondas como $k = 2\pi/(z_f - z_0)$ y englobamos el resto en una fase nos queda que:

$$\Phi_p = \Phi_\rho = \Phi_v = 2kz - kz_0 + \frac{2\pi}{5} \iff A_p = \frac{A_\rho}{\gamma} = A_v = C \quad (5)$$

²Nótese que ahora se entiende el flujo de momento como un intercambio de energía cinética a través de las paredes del dominio

El hecho de que la fase nos dependa de z nos está indicando que existe una indeterminación en el argumento del coseno que hace que en $t = 0$ podamos usar $-k z + \Phi_\rho$ o $+k z - \Phi_\rho$, lo que, igualado al argumento de nuestra condición inicial, nos da diferentes definiciones para la fase Φ igualmente válidas si somos consistentes en la definición de nuestra solución exacta. Finalmente para R , P y V obtenemos:

$$R = \frac{P}{\gamma} = V = A e^{i \Phi} = C e^{2 k z - k z_0 + \frac{2\pi}{5}} \quad (6)$$

3 - Onda de sonido simple

a)

Si observamos la simulación de una onda de sonido con el código creado vemos la figura 2 avanzando hacia la derecha, coincidiendo en todo momento con la solución exacta más allá de la difusión numérica. Vemos en la figura 2 líneas horizontales en 0 y en $\pm C$ ³, y líneas verticales en el máximo de las condiciones iniciales que se desplazan con la velocidad del sonido v_{cs00} . Este tipo de representación se repetirá a lo largo de las siguientes figuras (3,4,5)

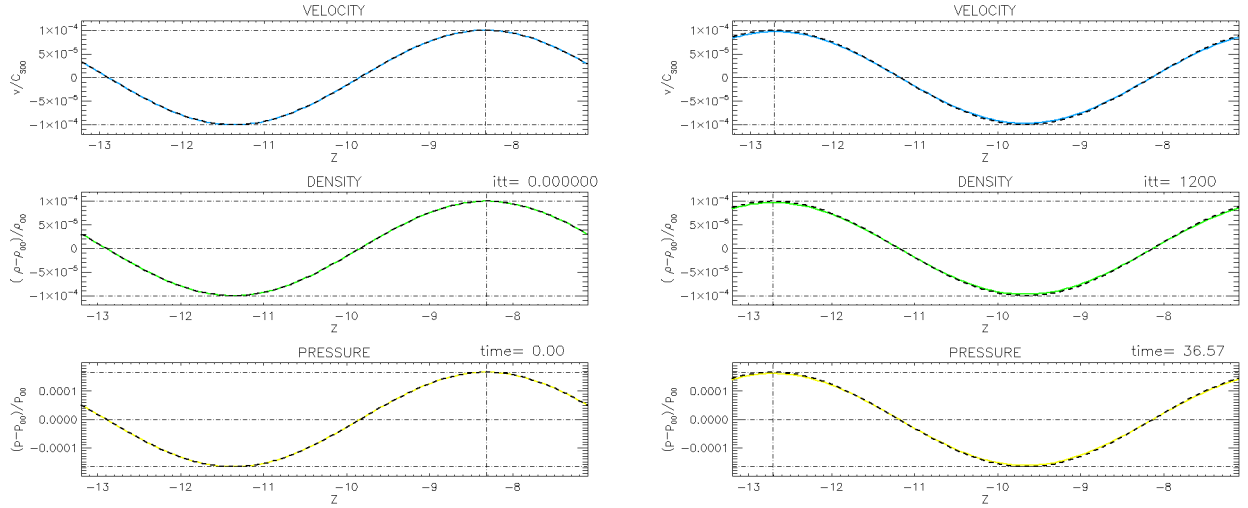


Figura 2: Condiciones iniciales y su evolución para el modo normal de propagación de una onda de sonido. La solución numérica se representa en la línea sólida de color mientras que la exacta en línea negra discontinua.

b)

El tiempo que tarda en cruzar todo el rango es de 3.93, como se puede observar si se realiza la comprobación ejecutando el programa. Dado que el rango es $z_0 \sim z_f$ y la velocidad es la del sonido c_{s00} el valor teórico es de:

$$t = \frac{z_f - z_0}{c_{s00}} \simeq \frac{-7.1 - (-13.2)}{1.55} \simeq 3.93$$

Por tanto, vemos que efectivamente la solución se desplaza como el primer modo y la solución exacta que viaja con $v = c_{s00}$ concuerda perfectamente con la solución numérica.

³siendo C la amplitud de la perturbación inicial.

Al dar valores de entrada al código para que calcule, el experimentador DEBE haber hecho una adimensionalización de su problema en términos de unidades razonables físicas para el mismo (tamaños característicos del problema, tiempos característicos, etc). Lo que se tiene que pasar al código son valores en dichas unidades

c)

Las unidades del tiempo son tales que sean consistentes con las unidades temporales de p_{00} , ya que la velocidad del sonido recibe su dimensión temporal de esta⁴. A su vez, es esta velocidad del sonido la que otorga la dimensión temporal al cálculo del paso temporal Δt (formula 7).

Por otra parte las unidades espaciales de z_0, z_f, p_{00} y ρ_{00} han de ser consistentes, ya que esto es lo que otorgará las unidades espaciales a la velocidad, siendo estas dos últimas (ρ_{00} y p_{00}) también consistentes en sus unidades de masa para la obtención correcta de c_{s00} .

d)

Podemos explicar más detalladamente la evolución que sufre un elemento *euleriano* de fluido en términos puramente físicos. Por ejemplo, podemos ver con las ecuaciones 1 que si tenemos un elemento de fluido que va más lento que el que tiene detrás, o lo que es lo mismo, si $\frac{\partial v}{\partial z} < 0$ se creará una zona donde se ~~concentrará~~ **concentrará** la materia. Por tanto, aumentará su densidad y presión en instantes posteriores, lo que a su vez, hará que el elemento de fluido más 'lento' se vea empujado a aumentar su velocidad por el aumento de la presión en el elemento que le precede.

Pasa lo opuesto cuando el elemento de fluido va más rápido que el precedente. Se genera una zona de densidad y presión menores que tiende a ralentizar a los elementos posteriores y a acelerar los elementos anteriores como si 'tirase' de las zonas donde la densidad y presión son mayores.

hmm. Esta explicación no es muy completa ...

Todo esto genera un cambio simultáneo en el perfil de densidades, velocidades y presiones que hace que la perturbación avance y se propague como se observa en la simulación.

4 - Estabilidad del esquema numérico

En este caso estamos usando el esquema numérico de Lax-Friedrichs junto con la condición de *Courant*, el cual calcula un paso temporal tal que:

$$\Delta t < f_{CFL} \frac{\Delta z}{\max(|v_i + c_{si}|, |v_i - c_{si}|)} \quad (7)$$

Siendo f_{CFL} un parámetro.

Con esto vemos que si cambiamos el parámetro f_{CFL} por encima de 1 obtenemos un esquema inestable, tardando más en manifestarse las inestabilidades cuanto más cercano a 1 sea ese parámetro. Si cogemos un parámetro muy cercano a 1 como por ejemplo $f_{CFL} = 1.000001$, el esquema no mostrará inestabilidades apreciables pronto, pero la solución en un tiempo suficientemente grande se habrá antidifundido y finalmente se apreciará la inestabilidad.

Esta experiencia se puede realizar cambiando el parámetro `clf` en el fichero `datain.dat` y escogiendo el tiempo e iteraciones finales suficientemente grandes (en el mismo fichero) para que esto llegue a hacerse notable.

5 - Segundo modo de una onda sonora

Para obtener el segundo modo de propagación de una onda sonora solo hemos de añadir una fase de π a la perturbación inicial de la velocidad en las condiciones iniciales. Con esto obtenemos

⁴Recuérdese que presión es fuerza por unidad de área y la fuerza a su vez tiene unidades de $[F] = \frac{\text{Masa} \cdot \text{distancia}}{\text{tiempo}^2}$

una onda que se propaga en sentido contrario a la inicial con $\omega = -c_{s00}K$ como se ha calculado en la rutina `introut.pro`. Así obtenemos la figura 3 donde, como vemos, al añadir una fase de π el máximo en la velocidad pasa a ser un mínimo. La solución exacta de este modo también se ha calculado en `exact_solution.pro` y se ha representado.

Podemos explicar lo que está ocurriendo de forma análoga a como se hace en el apartado 4-d pero con la velocidad inicial en sentido opuesto. Esto significa que, al introducir un cambio de signo en la velocidad mediante la suma de π a la fase, estamos cambiando el sentido del movimiento ⁵, ya que la presión y densidad no dependen de la dirección mantienen su forma pero varían en la dirección de propagación. Mientras que la velocidad sufre una reflexión especular en el eje x debido al cambio de signo. El razonamiento de que elemento presiona, empuja o tira es análogo al del apartado 4-d con la salvedad del cambio de signo.

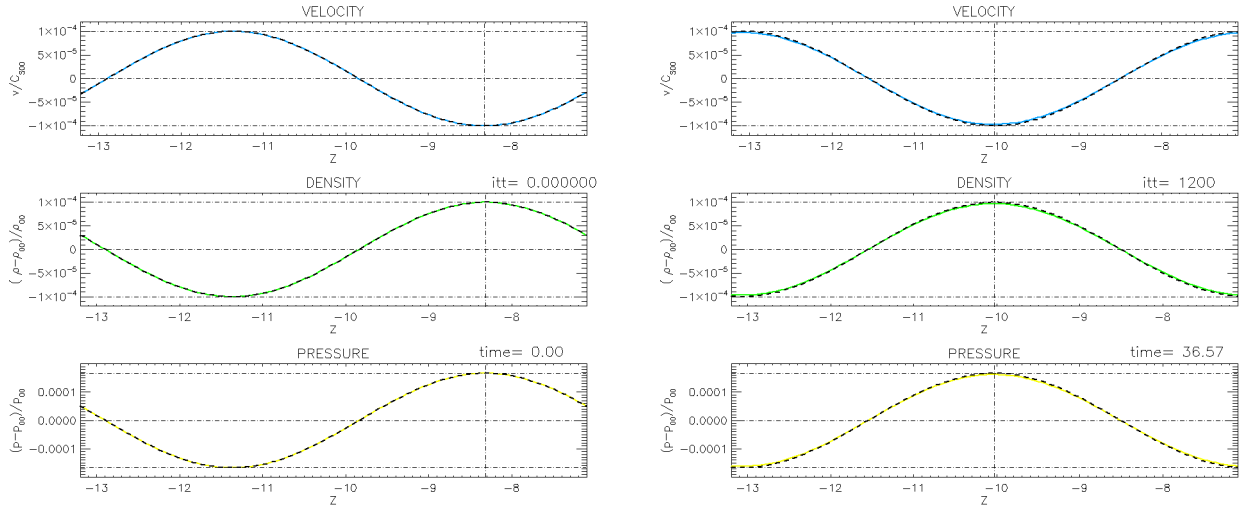


Figura 3: Condiciones iniciales y evolución del modo antipropagante para una onda de sonido. La solución numérica se representa en la línea sólida de color mientras que la exacta en la negra discontinua

Para realizar este experimento basta con ir al fichero `datain.dat` y cambiar el tipo de condición inicial (itype) a *sound wave* y la forma (shape) a *second mode*. Con esto el programa calculará la solución exacta de este tipo de onda sonora y la mostrará superpuesta junto con la realización numérica correspondiente.

6 - Perturbación de forma arbitraria

Podemos también realizar la evolución de una perturbación de forma arbitraria como en este caso:

$$h(z) = J_0 \left(-\frac{20z}{5} \right) \left[1 + \tanh \left(\frac{z - z_1}{W} \right) \right] \left[1 - \tanh \left(\frac{z - z_2}{W} \right) \right] \quad (8)$$

con J_0 función de Bessel, z_1 y z_2 como combinación de z_f y z_0 , y W un parámetro determinado. Con esto obtenemos una perturbación en forma de pulso como se ve en la figura 4.

⁵Intuitivamente podemos ver como cambiar el signo a una velocidad implica un movimiento en la dirección opuesta.

Como observamos al realizar la simulación, la perturbación se mueve como el primer modo de propagación (hacia z crecientes) y conserva su forma. Esto tiene sentido, ya que si consideramos que p, ρ y v están en fase, la perturbación se va a mover hacia z positivas como ya hemos discutido. En cuanto a la conservación de la forma, podemos pensar que si descomponemos en cosenos y senos mediante la transformada de Fourier:

$$h(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega n z + b_n \sin \omega n z)$$

Cada uno de ellos va a desplazarse como si fuese un modo normal (figura 2) a la velocidad del sonido pero con amplitudes distintas. Por tanto, cuando realicemos la antitransformada en un instante t posterior, obtendremos la función inicial desplazada una cierta cantidad, ya que todos los modos se han desplazado la misma cantidad⁶. Este desplazamiento de la solución inicial es lo que se ha representado en el lugar de la solución (punto fundamental número 2: ¿por qué es la suma de soluciones también una solución del sistema?) en la figura 4.

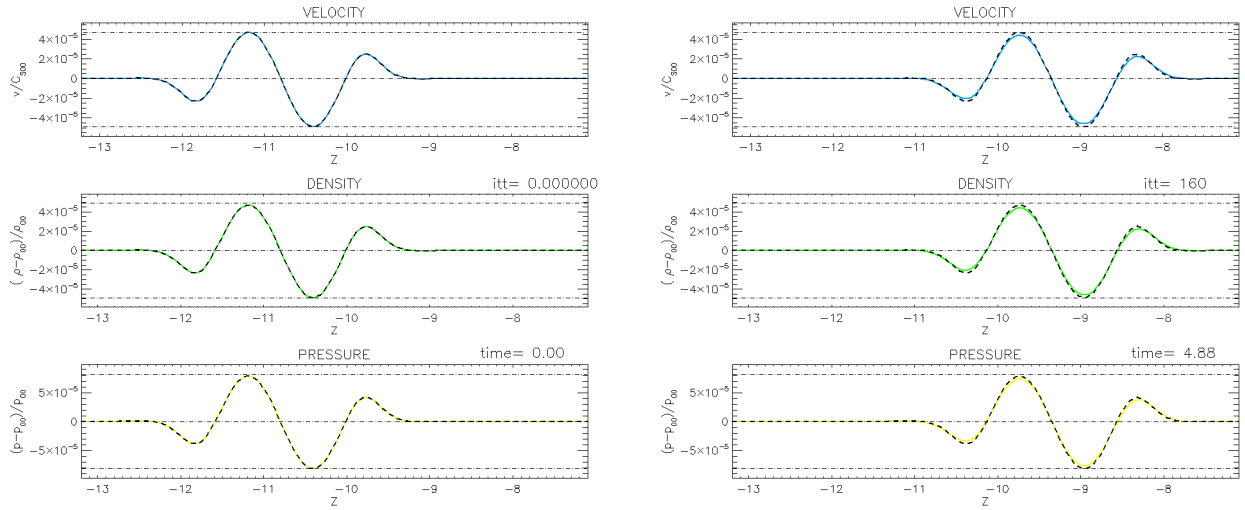


Figura 4: Condiciones iniciales y su evolución para una perturbación tipo pulso. La solución numérica se representa en la línea sólida de color mientras que la propagación de las condiciones iniciales con la velocidad del sonido en una línea negra discontinua.

Esta experiencia puede observarse cambiando en el fichero de condiciones iniciales `datain.dat` el tipo de perturbación (itype) por `pulse`.

Otras for de condiciones iniciales que podemos probar son las que contengan una clara discontinuidad para ver de que manera responde el código a las componentes de mayor frecuencia en términos del desarrollo de Fourier⁷. Para ello, podemos usar una función similar la de la figura 5, que se puede conseguir dentro de nuestro dominio de varias maneras.

⁶Esto se debe a que todos los modos viajan a la misma velocidad c_{s0} . **las ondas de sonido son NO DISPERSIVAS. Esto es el punto fundamental numero uno**

⁷En este caso al ser una función analítica real. **Échale un vistazo a la forma de los coeficientes de Fourier para la función paso de Heaviside ... en realidad son de la forma $1/n$.** <http://mathworld.wolfram.com/FourierSeriesSquareWave.html>

Una de ellas es la función error[3] , otra la función logística o sigmoide [2] y en nuestro caso una función del tipo:

$$h(z) = A \left(\tanh \left(\frac{z + z_c}{W} \right) - \tanh \left(\frac{z - z_c}{W} \right) \right)$$

Donde z_c está centrado en nuestro intervalo y W y A son parámetros. La discontinuidad principal en este caso proviene de aplicar las condiciones de contorno periódicas, mientras que en el centro tenemos una pendiente pronunciada pero continua.

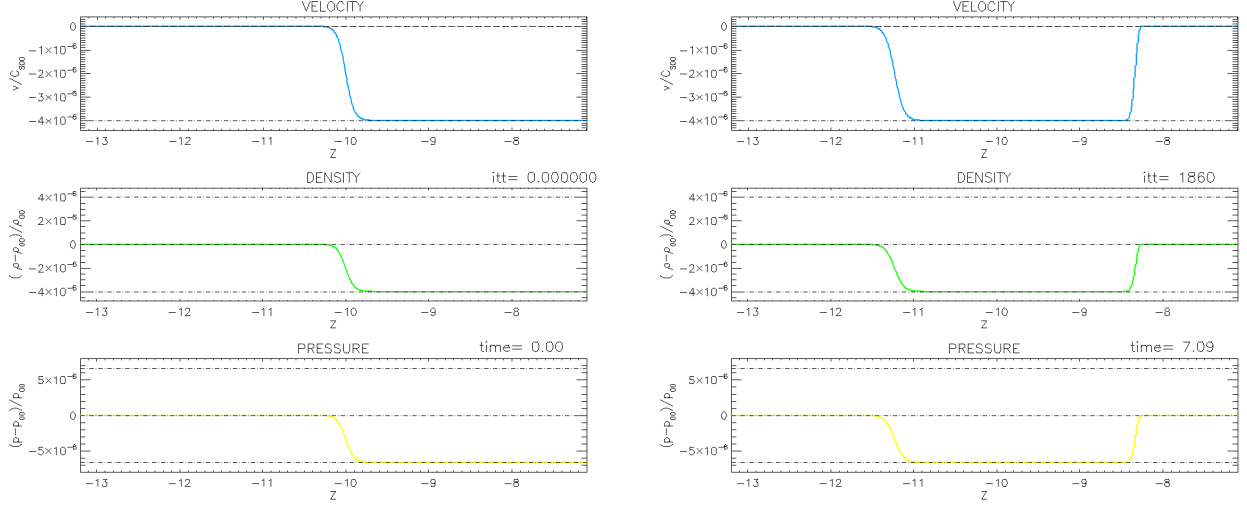


Figura 5: Condiciones iniciales y su evolución para una perturbación que contiene una discontinuidad.

Podemos observar que el código responde bien a esta perturbación, evolucionando el sistema y suavizando relativamente rápido la discontinuidad debido al efecto de la difusión. Esto ocurre hasta que llegados un punto donde nuestra perturbación se convierte en una onda cuadrada con los bordes redondeados, perdiendo las componentes más altas de Fourier, que son atenuadas conforme pasa el tiempo por la difusión numérica.

Cabe destacar que el rango ha dejado de ser simétrico y nuestras perturbaciones tienen un rango de $[-C, 0]$ como se observa en la figura 5. La perturbación introducida, por tanto, es equivalente a generar una zona de baja presión y densidad que se propaga dentro del fluido, sin zonas que superen nunca la presión o densidad de equilibrio p_{00} y ρ_{00} .

Esta experiencia puede observarse cambiando en el fichero de condiciones iniciales `datain.dat` el tipo de perturbación (`itype`) por `other`.

7 - Cambios en el estado de equilibrio

Además de cambiar la perturbación inicial, también podemos cambiar el estado de equilibrio inicial sobre el que realizamos dicha perturbación añadiendo una velocidad inicial al fluido v_{00} . Esto cambia la velocidad a la cual se propaga nuestra onda sobre un observador en reposo o Euleriano, pero mantiene la velocidad Lagrangiana de propagación. Sabiendo esto, al introducir

¿por qué pasa todo esto?

¿qué es la 'velocidad Euleriana'?

¿quieres decir la 'velocidad de fase'?

una velocidad inicial positiva como $v_{00} = c_{s00}/5$ vemos que la velocidad Euleriana es mayor, mientras que si escogemos una negativa como $v_{00} = -c_{s00}/4$ vemos que se ralentiza. Además observamos que, en el caso en el que la propagación se mueve en dirección contraria el fluido, la difusión numérica aumenta considerablemente incluso a tiempos pequeños (figura 6).

Si ponemos por tanto la velocidad del medio inicial igual a $\pm c_{s00}$ ⁸ (la velocidad del sonido de equilibrio) la perturbación se mantendrá estacionaria para un observador Euleriano en el modo correspondiente de propagación. Esto hace que, desde nuestro punto de vista Euleriano, podamos ver una perturbación como si estuviera 'parada' o 'congelada' en la pantalla.

Esta experiencia se puede realizar cambiando la velocidad inicial del fluido (v_{00}) en el fichero `datain.dat` en función de c_{s00} de forma que $v_{00} = v_{0_cs} \cdot c_{s00}$

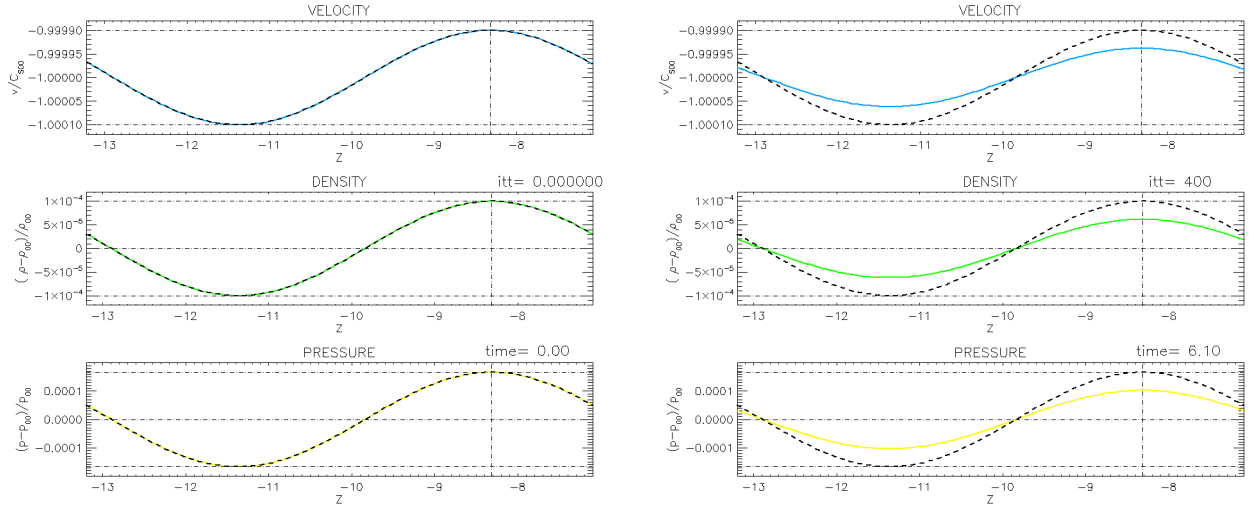


Figura 6: Condiciones iniciales y su evolución para una onda cosenoidal en el primer modo de propagación con una velocidad inicial $v_{00} = -c_{s00}$. Se puede observar como la difusión numérica es del orden del 30 % en un tiempo pequeño.

⁸ El signo \pm viene del hecho que para cada modo de propagación la onda se desplaza en una dirección, por tanto, para mantenerla estática se ha de elegir la velocidad inicial del fluido convenientemente. Con el signo (-) para el modo del coseno y con el signo (+) para el segundo modo.

Diagrama de flujo

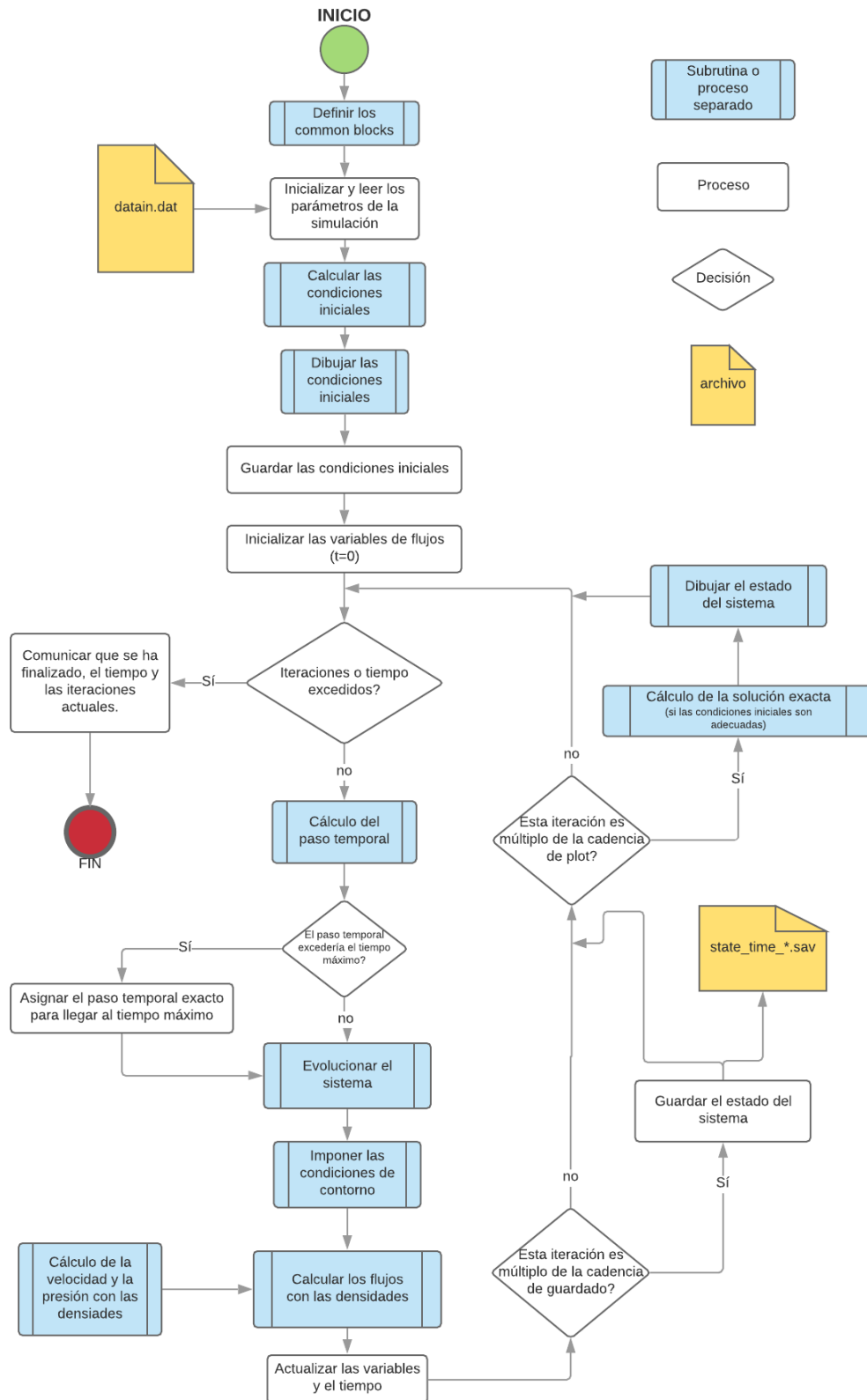


Figura 7:

Referencias

- [1] [Lucid chart web](#)
- [2] [Funcion sigmoide](#)
- [3] [Funcion error](#)