UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEP. DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO
LABORATÓRIO DE SISTEMAS CONTROLE
André Laurindo Maitelli/Fábio Meneghetti Ugulino de Araújo

ROTEIRO DE LABORATÓRIO

1. *Código da Experiência*: **3B**

2. *Título*: Controle no Espaço de Estados: Observadores de Estado

3. *Objetivos*: Esta prática tem como objetivos:

- Introdução do conceito de espaço de estados;
- Conceituação de observadores de estado;
- Projeto e implementação de observadores de estados.

4. *Equipamento Utilizado*: São necessários para realização desta experiência:

- Um microcomputador PC com um os softwares necessários (Windows, MATLAB/SIMULINK, compilador C, QUARC);
- Uma placa de aquisição de dados Q8-USB da Quanser;
- Um módulo de potência VoltPAQ-X1;
- Um sistema de tanques acoplados da Quanser;

5. *Introdução*:

5.1. *Descrição Por Variáveis de Estado*

É aplicável a sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas, que podem ser lineares ou não-lineares, invariantes ou variantes no tempo e com condições iniciais não-nulas.

O estado de um sistema no instante t_0 é a quantidade de informação em t_0 que, junto com a entrada $u(t)$ em $t \geq t_0$, determina univocamente o comportamento do sistema para todo $t \geq t_0$.

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)} \quad \text{Equação de Estado (dinâmica do sistema)}$$
$$\boxed{y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t)} \quad \text{Equação de Saída (observação do sistema)} \tag{1}$$

$\mathbf{x}(t)$ → Vetor de estado;

$x_i(t)$ → Variável de estado;

$u(t)$ → Vetor de entrada;

$y(t)$ → Vetor de saída;

5.1.1. Estabilidade

- **Teorema**: Um sistema é estável se quando $u(t) = 0$, para todo $x(0)$, temos que $\lim_{t\to\infty} x(t) = \mathbf{0}$
- **Corolário:** Um sistema é estável se todos os autovalores da matriz **A** apresentam parte real negativa.

5.1.2. *Controlabilidade*

- **Definição:** O sistema (**A**,**B**,**C**,**D**) é controlável se, quaisquer que sejam $x(0)$ e $x(T)$, existe $u(t)$ $0 \le t \le T$ que transfere o estado $x(0)$ para o estado $x(T)$ em um tempo finito.

- **Teorema:** O sistema (**A**,**B**,**C**,**D**) é controlável se, e somente se, o posto da matriz de controlabilidade $\mathbf{U} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ldots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ é igual a ordem do sistema ($\rho(\mathbf{U}) = n$).

5.1.3. *Observabilidade*

- **Definição:** O sistema (**A**,**B**,**C**,**D**) é observável se para todo $x(0)$, o conhecimento da entrada $u(t)$ e da saída $y(t)$ em um tempo finito é suficiente para determinar $x(t)$.

- **Teorema:** O sistema (**A**,**B**,**C**,**D**) é observável se e somente se o posto da matriz de observabilidade $\mathbf{V} = [\mathbf{C} \quad \mathbf{CA} \quad \mathbf{CA}^2 \quad \ldots \quad \mathbf{CA}^{n-1}]^T$ é igual a ordem do sistema ($\rho(\mathbf{V}) = n$).

5.2. *Observadores de Estado*

O observador de estados consiste em um mecanismo (algoritmo) para estimação dos estados da planta. É uma solução útil quando os estados reais da planta não estão accessíveis, situação muito comum na prática.

Seja: $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$, conhecendo-se **A, B** e **C**, e a medição de $y(t)$ e $u(t)$, constrói-se o estimador:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{L}\big(y(t) - \hat{y}(t)\big) + \mathbf{B}u(t) \\ \hat{y}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) \end{cases}; \quad (\textit{Estimador Assintótico})$$

onde: $\mathbf{L} = [l_1 \quad l_2 \quad \ldots \quad l_n]^T$

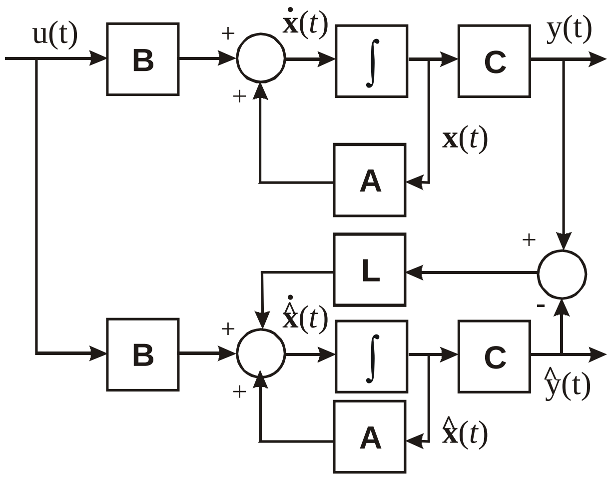

Figura 1. Diagrama esquemático de um observador de estados.

- *Erro de Estimação*

O erro entre $\mathbf{x}$ e $\hat{\mathbf{x}}$, conhecido como erro de estimação (ou erro de observação), é dado por; $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$, derivando-se, temos:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \left[\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)\right] - \left[\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{L}\left(y(t) - \hat{y}(t)\right) + \mathbf{B}u(t)\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\left(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\right) - \mathbf{LC}\left(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\right)$$

ou, simplesmente:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\tilde{\mathbf{x}}(t)$$

Para que $\lim_{t\to\infty} \tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$ é necessário que os autovalores de $(\mathbf{A} - \mathbf{LC})$ sejam estáveis, ou seja, tenham parte real negativa.

Teorema: Se (**A**,**B**,**C**,**D**) for observável, então um estimador de estado assintótico com quaisquer autovalores pode ser construído.

- *Fórmula de Ackermann para Determinação da Matriz de Ganhos do Observador* **L**

1- Formar $\Delta(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n$ com os pólos desejados para o observador.

2- Calcular **L** da seguinte forma: $\mathbf{L} = \mathrm{q}_{\mathrm{L}}(\mathbf{A})\mathbf{V}^{-1}\left[0 \quad 0 \quad \ldots \quad 1\right]^{\mathrm{T}}$

onde: $\begin{cases} \mathbf{V} = \left[\mathbf{C} \quad \mathbf{CA} \quad \mathbf{CA}^2 \quad \ldots \quad \mathbf{CA}^{n-1}\right]^{\mathrm{T}} \\ q_L(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_1\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + a_n\mathbf{I} \end{cases}$

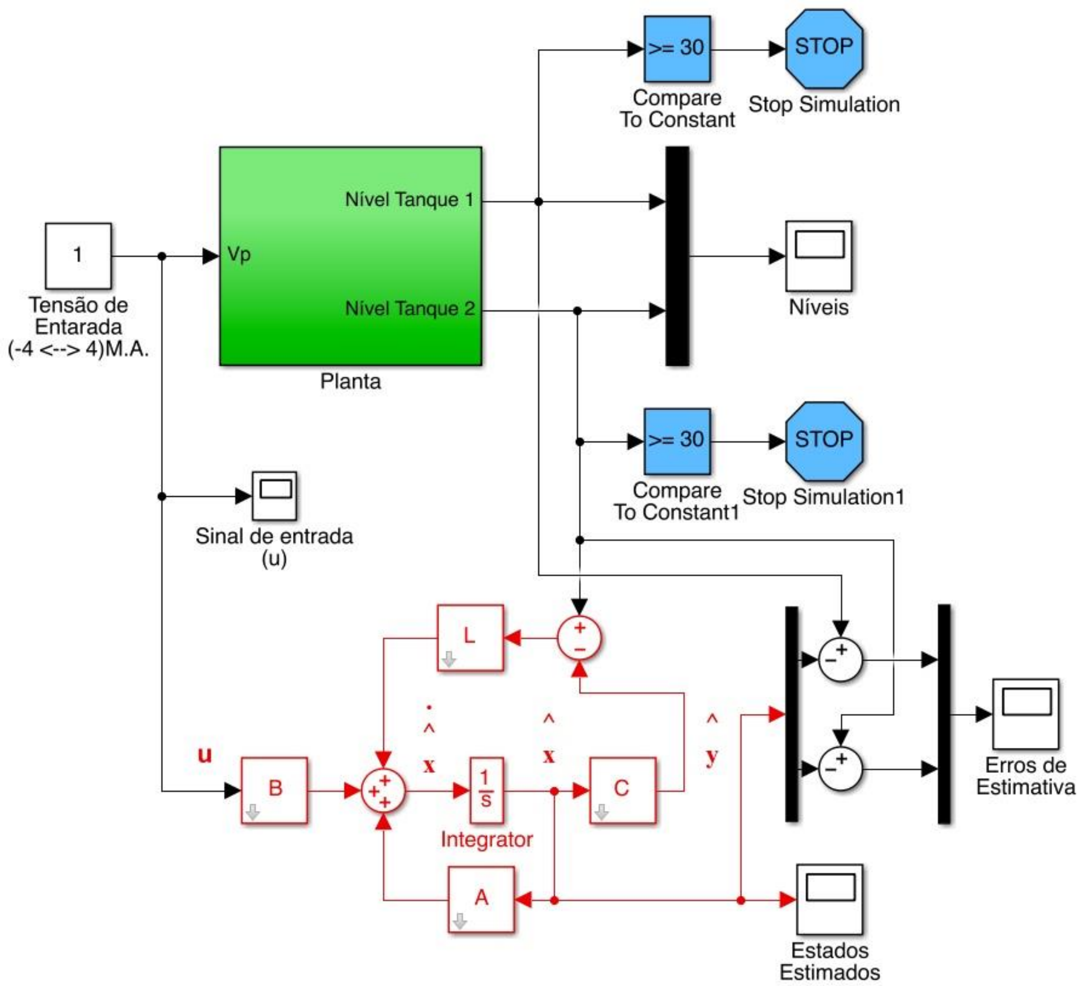

Figura 2. Observador de Estados para o Sistemas de Tanques Implementado em SIMULINK/MATLAB.

6. *Desenvolvimento*:

Conhecendo-se as EDOs que descrevem as dinâmicas dos tanques 1 e 2 (configuração #2):

$$\boxed{\dot{L}_1 = -\frac{a_1}{A_1}\sqrt{\frac{g}{2L_{10}}}L_1 + \frac{K_m}{A_1}V_P} \quad \text{e} \qquad \boxed{\dot{L}_2 = -\frac{a_2}{A_2}\sqrt{\frac{g}{2L_{20}}}L_2 + \frac{a_1}{A_2}\sqrt{\frac{g}{2L_{10}}}L_1},$$

onde:

- $A_1 = A_2 = 15{,}5179$;
- $L_{20} = 15$; $L_{10} = \frac{a_2^2}{a_1^2} L_{20}$;
- $a_1 = 0{,}17813919765$; $a_2 = a_1$; (Orifício médio)
- K_m = valor encontrado em experimentos anteriores (≈11,00).

Pede-se:

1º. Encontre uma representação em espaço de estados onde L_1 e L_2 sejam os estados do modelo;

2º. Projete um observador de estados com base no modelo obtido (A escolha dos polos do observador faz parte do projeto, e deve ficar clara no relatório).

3º. Examine e descreva em seu relatório o comportamento do observador para diferentes conjuntos de polos: