MAE 399 - Análise de dados e Simulação
Prof. Fábio Machado
Lista 5 - 19/05/2019

1. Considere S_n como sendo o passeio aleatório simples (inicialmente $p \in [0,1]$) em $\mathbb{Z}$.

   a. Dizemos que há uma troca de liderança, quando para algum k observamos $S_k = 0$, mas $S_{k-1} \neq S_{k+1}$. Sabemos que probabilidade de que, até o instante $2n+1$, ocorram exatamente r trocas de liderança é igual a

   $$\binom{2n+1}{n-r}/2^{2n}.$$

   Considere agora 1.000 simulações para as trajetórias de S_n para $n \in$ {0, 1,..., 101}. Encontre para cada uma destas 1.000 simulações o número de trocas de lideranças. Com estes dados estime a distribuição do número de trocas de lideranças em trajetórias de tamanho 101. Compare em uma tabela estas estimativas com os valores obtidos pela fórmula descrita no início deste item.

   b. Sabemos tambem que a probabilidade de que até o instante $2n$ (inclusive) a última visita à origem tenha ocorrido no instante $2k$ é igual a

   $$\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}/2^{2n}.$$

   Considere agora 1.000 simulações para as trajetórias de S_n para $n \in$ {0, 1,..., 100}. Encontre para cada uma destas 1.000 simulações o instante da última visita à origem. Com estes dados, estime a distribuição do instante da última visita à origem em trajetórias de tamanho 101. Compare em uma tabela as estimativas encontradas com os valores obtidos pela fórmula descrita no início deste item.

2. Vamos pensar agora no problema conhecido como **Ruina do jogador**, ou seja, um passeio aleatório simples ($p \in [0,1]$) em $\mathbb{Z}$, partindo de x ($S_0 = x$), com barreiras absorventes em c e d, com $c \leq x \leq d$. Inicialmente definimos $T_c = \inf_n\{S_n = c\}$ e $T_d = \inf_n\{S_d = d\}$. Da teoria dos processos estocásticos, sabemos que para $p \neq \frac{1}{2}$, $P(T_d = T_c = \infty) = 0$ e

   $$P_x(T_d < T_c) = \frac{1-(q/p)^{x-c}}{1-(q/p)^{d-c}}.$$

   a. Considere o um passeio onde p seja igual a probabilidade de vencer uma rodada na roleta americana, ou seja, $p = 18/38$ (portanto $q = 20/38$). Imagine um jogador que começa com com $x = \{10, 20, 30, 40\}$ e decide jogar até chegar em $50,00 ou até perder tudo. Faça 1.000 simulações para cada uma das fortunas iniciais $x = \{10, 20, 30, 40\}$ de modo a comparar os resultados simulados com os obtidos pelas fórmula acima.

   b. Considere agora o passeio simétrico, ou seja $p = 1/2$. Faça o mesmo que foi pedido no item acima, plotando as probabilidades obtidas pela simulação (também para $x = \{10, 20, 30, 40\}$) e inferindo sobre qual a função que melhor ajusta o conjunto de pontos obtidos. Fato: $P_x(T_d < T_c)$ é linear em x (fortuna inicial).

3. Considere agora S_n como sendo o passeio aleatório simples simétrico em $\mathbb{Z}^2$, partindo da origem, ou seja, $S_0 = (0,0)$. Calcule a média da distância Euclidiana (para $S_n = (x_n, y_n)$, definimos a distância Euclidiana como $|S_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$) à origem do passeio, observada nos instantes $n =$ {1.000, 2.000,..., 10.000} para 1.000 simulações. Plote estes pontos em um gráfico, indicando uma função para imitar o comportamento de $\mathbb{E}[|S_n|]$.