MAE 399 - Análise de dados e Simulação
Prof. Fábio Machado
Lista 7 - 23/06/2019

A ciência atuarial é uma área do conhecimento onde o domínio de conceitos de economia, administração, contabilidade, matemática, finanças, legislação e estatística são fundamentais. Neste exercício vamos fazer uma aplicação despretensiosa de análise de dados e simulações nesta ciência tão importante no enfrentamento entre os desejos humanos, criando demandas crescentes (e ilimitadas), e os recursos disponíveis, sempre finitos e via de regra insuficientes.

1. Vamos simular o fluxo de caixa para uma seguradora de carros hipotética. O cenário típico é o seguinte: seguros sendo vendidos com alta frequência a valores (relativamente) baixos e sinistros ocorrendo com baixa frequência com valores (relativamente) altos. A seguradora precisa combinar (a) preços competitivos para apólices com (b) recursos em caixa suficientes para pagar os sinistros que venham ocorrer. Para isto vamos considerar o que segue: Seja $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência de v.a.i.i.d. com distribuição exponencial de média $1/\lambda$ e $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 1$, suas somas parciais, com $S_0 = 0$. Considere o processo de contagem $N(t) = \text{máx}\{n : S_n \leq t\}$, ou seja, um Processo de Poisson de taxa λ. Considere também o Processo de Poisson Composto (ou com Recompensa), $R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ com $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência de v.a.i.i.d. Em resumo $N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ com $\mathbb{E}(N(t)) = Var(N(t)) = \lambda t$. Além disto $\mathbb{E}(R(t)) = \lambda t \mathbb{E}(Y_1)$ e $Var(R(t)) = \lambda t \mathbb{E}({Y_1}^2)$. Com estes processos estocásticos podemos modelar tanto a entrada de recursos com os pagamentos das apólices, feitos pelos clientes, quanto a saída de recursos com os pagamentos dos sinistros, feitos pelos segurados.

   Vamos supor que a uma taxa de 1 por mês (distribuição exponencial de média 1) a seguradora venda uma nova apólice cujas mensalidades se distribuem de maneira uniforme entre \$100,00 e \$200,00. Por outro lado, a uma taxa de 1 por 24 meses, cada um dos carros cobertos por seguros tenha um sinistro cujo valor seja distribuído segundo uma exponencial de média \$1.200,00.

   Desta forma temos dois **Processos de Poisson Compostos**, um para a entrada ($R(t)$) e outro para a saída ($D(t)$) de recursos financeiros. Lembre que é importante garantir que $R(t) \geq D(t)$ para todo t (exceto talvez para o inicio do processo, digamos $t \leq 36$, quando a empresa deve usar seu próprio capital inicial) ou a empresa não poderá cumprir os compromissos para os quais está vendendo o seguro.

   a. Considere 1.000 simulações para as trajetórias de $R(t)$, $D(t)$ e $R(t) - D(t)$, para $t \in [0, 500]$. Para cada $t \in \{50, 100, \ldots, 500\}$ encontre os percentis $0,05$ e 99,5 para os valores observados de S_t. Apresente estes valores em tabelas.

   b. Apresente em um só gráfico

      i) a trajetória de 5 simulações, plotando os valores de $R(t) - D(t)$,

      ii) os valores da tabela do item a, apenas para $R(t) - D(t)$,

      iii) a função $\mathbb{E}[R(t) - D(t)]$.

   d. Repita o exercício inserindo a ideia de franquia, ou seja, que o sinistro só seja coberto pela seguradora caso o seu valor seja superior a \$ 600,00.

   c. Repita o exercício fazendo alguma modificação (a seu critério) na distribuição do valor das mensalidades e/ou no valor da franquia, objetivando diminuir a chance de $R(t) < D(t)$ para algum t mas mantendo valores (baixos) em condições de competir com outras empresas.

2. Imagine um grupo de 2^n tenistas cujos rankings sejam os valores inteiros entre 1 e 2^n. Cada jogador ocupa uma posição distinta neste ranking sendo o melhor de todos o 1 e o mais fraco de todos o 2^n. Sempre que houver uma partida entre dois jogadores deste grupo, vence o jogador com a melhor posição no ranking.

Imagine agora um torneio entre eles, com os pareamentos iniciais e depois, entre os vencedores, aleatorizados. Não é difícil perceber quem vai ser o campeão do torneio. Uma questão interessante é com relação ao vice-campeão.

i) Qual o ranking do jogador mais fraco a ter chance de chegar em segundo lugar?
ii) Estime, através de simulações, a distribuição de probabilidades do ranking do vice-campeão para $n = 3, 4, 5$ e 10.
iii) Apresente os valores obtidos no item anterior para $n = 10$ em um gráfico.

Imagine agora que o jogador melhor posicionado no ranking tenha probabilidade p de vencer (e $1 - p$ de perder). Agora já não é mais verdade que apenas o melhor posicionado no ranking pode ser o campeão.

iv) Para $p = 0{,}8$ estime, através de simulações, encontre a distribuição do ranking do campeão e do vice-campeão do torneio.
v) Apresente os valores em gráficos e compare com o a situação anterior quando o melhor rankiado sempre vencia.