



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA -
PPGEE

André Vinícius de Souza Lages

**Modelagem de Superfícies Reconfiguráveis
Inteligentes com Camada Única e Contínua
usando Método dos Momentos**

Belém

2024

André Vinícius de Souza Lages

Modelagem de Superfícies Reconfiguráveis Inteligentes com Camada Única e Contínua usando Método dos Momentos

Qualificação de Tese de Doutorado apresentado no Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica do Instituto de Tecnologia como requisito parcial para obtenção do grau de doutor.

Universidade Federal do Pará

Orientador: Karlo Queiroz da Costa

Coorientador: João Crisóstomo Weyl Albuquerque Costa

Belém

2024

Solicite sua ficha catalográfica em: <<http://bcficat.ufpa.br/>>

André Vinícius de Souza Lages

Modelagem de Superfícies Reconfiguráveis Inteligentes com Camada Única e Contínua usando Método dos Momentos

Qualificação de Tese de Doutorado apresentado no Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica do Instituto de Tecnologia como requisito parcial para obtenção do grau de doutor.

Conceito: _____

Belém, 30 de janeiro de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Karlo Queiroz da Costa - Orientador
UFPA

João Crisóstomo Weyl Albuquerque Costa - Coorientador
UFPA

André Mendes Cavalcante
Ericsson

Gilvan Soares Borges
IFPA

Escreva sua dedicatória aqui.

Agradecimentos

Os agradecimentos principais são a Deus por me dar forças e iluminar muitas pessoas, pais e mães do céu que tem me ajudado nesse caminho torutoso depois de muitas adversidades na minha vida. Em especial, aos professores Karlo e João, ao André da Ericsson, por me acolherem, me darem uma oportunidade, serem compreensivos com meus problemas pessoais, me deixarem acreditar que sou capaz de me superar com amor, dedicação...

*“Escreva sua epígrafe aqui”
(Fulano de Tal, 19XX)*

Resumo

Segundo a (??), o resumo deve ressaltar o objetivo, o método, os resultados e as conclusões do documento. A ordem e a extensão destes itens dependem do tipo de resumo (informativo ou indicativo) e do tratamento que cada item recebe no documento original. O resumo deve ser precedido da referência do documento, com exceção do resumo inserido no próprio documento. (...) As palavras-chave devem figurar logo abaixo do resumo, antecidas da expressão Palavras-chave:, separadas entre si por ponto e finalizadas também por ponto.

Palavras-chave: latex. abntex. editoração de texto.

Abstract

This is the english abstract.

Keywords: latex. abntex. text editoration.

Lista de ilustrações

Lista de quadros

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

5G	Quinta Geração de Tecnologia Móvel
6G	Sexta Geração de Tecnologia Móvel

Lista de símbolos

\overline{E}_i	Vetor Campo Elétrico incidente
\overline{E}_s	Vetor Campo Elétrico de Espalhamento
ϵ	Permissividade do meio
μ	Permeabilidade do meio
\overline{J}	Vetor densidade de corrente elétrica

Sumário

1 Introdução

Na literatura, parece não haver consenso, várias definições são usadas para definir superfícies inteligentes (SI): superfícies inteligentes reconfiguráveis (RIS), superfícies reflexivas inteligentes (IRS), grandes superfícies inteligentes (LIS) [1]-[2]. No entanto, o que parece ser unânime é a multiplicidade de aplicações, desde comunicações por satélite com UAV e utilizadores, até à transmissão simultânea de energia sem fios [3]. Além disso, as superfícies inteligentes reconfiguráveis são facilitadoras essenciais da cobertura massiva de rádio para cenários 5G e 6G. As superfícies de baixo custo podem ser implantadas em praticamente qualquer lugar, casas, edifícios, ruas e assim por diante, economizando energia desperdiçada espalhada por quaisquer objetos e paredes não animados. Ativo ou Passivo, ambos podem melhorar a redução do caos dos canais sem fio [4],[5]. Além da fome da sociedade por largura de banda devido ao uso massivo da Internet das Coisas e dos sistemas Cell Free no futuro, essa orquestra será liberada para vários GHz de espectro [6]-[8]. Neste contexto, o trabalho de [9] também apresentou o conceito de superfície inteligente reconfigurável e computacional (RICS), que promete tornar a comunicação e a computação ubíquas [3],[10]. Na opinião desses autores até o momento, RIS seria um termo geral para superfícies inteligentes que são reconfiguráveis e executam tarefas únicas ou multitarefas, que funcionariam em modo reflexivo, de detecção, de computação e de transmissão, e, assim por diante [3],[4]. Superfícies inteligentes reconfiguráveis são estruturas muito semelhantes a arranjos de antenas, cujos elementos também são antenas. Neste caso, RISs são antenas passivas ou ativas, geralmente terminadas em curto-circuito, circuito aberto, impedâncias reativas ou ativas cujo objetivo é direcionar ou processar energia eletromagnética de maneira controlada [9]-[11]. A compensação do acoplamento mútuo em pequenos arranjos é um problema bem conhecido [12]-[13], mas a maioria dos algoritmos de formação de feixe não considera as interações de polarização baseadas em modelos fisicamente fidedignos, especialmente para RIS []. Os requisitos para implementações práticas de hardware em conformidade com os pré-codificadores de canal são um caminho obscuro. No mundo das antenas, isso é comumente feito pelo método dos momentos para arranjos lineares ou arranjos planares de dipolos [12], [14]. Funções de base de domínio inteiro com condição segmentada foram propostas para matrizes refletoras no domínio espectral [15]. Em outro trabalho [16], foi proposta uma combinação da transformada rápida de Fourier de contorno (C-FFT) e técnicas interpoladoras baseadas em MBF, além de uma otimização convexa para posições irregulares de antenas e síntese de arranjos. Para RIS, pesquisadores investigaram recentemente o mesmo problema [11],[17]-[20], o acoplamento mútuo causa interferência na relação sinal-ruído, mas surpreendentemente ao mesmo tempo, pode ser um foco de uma aumento da taxa de soma [19]. Eles calcularam uma expressão de forma

fechada para impedância ajustável ideal na ausência de acoplamento mútuo e um algoritmo interativo para ajustar impedâncias RIS na presença de acoplamento mútuo. Eles também consideraram fios finos como dispersores RIS para construir um modelo eletromagnético compatível [20]. Historicamente o método de Moments é uma ferramenta clássica para análise de phased array, para tipos planares e lineares [12]-[13]. Simulações de onda completa de conjuntos de antenas geralmente usam portas para analisar o acoplamento e as características de radiofrequência do conjunto. Para RIS, em geral não existem portas para medir a interação entre todos os elementos [17]. Propomos um modelo utilizando o Método dos Momentos com um arranjo contínuo e de camada única de impedâncias de superfície (MoMCSL), onde cada elemento do arranjo encapsula suas características de volume, devido às dimensões do subcomprimento de onda da estrutura [18]. Podemos avaliar todo o comportamento eletromagnético e de radiofrequência do RIS através de uma simulação de onda completa, incluindo campo próximo e acoplamento de polarização. A impedância de superfície é modelada usando a teoria de ondas planas e linhas de transmissão (PWTL) [21]-[22]. A seção transversal do radar passivo e ativo (RCS) é analisada.

2 Teoria RIS

Um ambiente de rádio inteligente é um ambiente sem fio que se transforma em um espaço reconfigurável e inteligente e que desempenha um papel ativo na transferência e processamento de informações (??). Ambientes inteligentes de rádio ampliam a noção das redes de software: atualmente, a operação de redes sem fio é controlado por software e otimizado de forma elástica para suportar requisitos heterogêneos de entrada, por exemplo, taxa de dados aprimoradas, alta eficiência energética, baixa latência, ultra confiabilidade, conectividade massiva de objetos, *internet* das coisas - Internet of things - Iot - (??). Em outra definição de ambientes de rádio inteligentes, o ambiente sem fio em si é transformado em uma entidade reconfigurável por *software* (??), cuja operação é otimizada para permitir conectividade, garantia de qualidade de serviço e, onde a informação é transmitida sem necessariamente gerar novos sinais, mas reciclando os existentes sempre que possível.

Na literatura, parece não haver consenso, ou se visto por outro ponto de vista, várias definições são usadas para definir as superfícies inteligentes: superfícies reconfiguráveis inteligentes (RIS), superfícies refletoras inteligentes (IRS), meta-superfícies reconfiguráveis inteligentes, superfícies inteligentes longas (LIS) (??). Na concepção destes autores até o presente momento, a RIS seria um termo geral para superfícies inteligentes, que funcionaria tanto em modo refletor como em modo de transmissão (e/ou refração), funcionando como um *reflectarray*, *transmitarray* ou lente. As meta-superfícies fazem alusão aos componentes, que majoritariamente são concebidos com metamateriais (??). Por outro lado as IRSs são como *reflectarrays* (arranjos refletores) sendo atualmente utilizadas como antenas para aplicações em sistemas de satélites e outros sistemas de telecomunicações, moldando a reflexão. Decide-se empregar o termo RIS para o caso generalizado, e a terminologia IRS para o caso particular de reflexão. Outras classificações são temas de debate como em HRIS, define-se a RIS híbrida refletora e de detecção (RIS *Hybrid reflecting and sensing* - HRIS). Já para (??), RIS híbridas englobam o modo de transmissão e reflexão ao mesmo tempo. No nosso entendimento, uma RIS híbrida possui duas ou mais funções, não somente o caso convencional de reflexão.

2.1 Metasurfaces

2.2 Modelagem Eletromagnética

A modelagem de superfícies refletores inteligentes por teoria de circuitos elétricos e linhas de transmissão é similar a técnica comumente utilizada na literaturas para projetar as metasuperfícies. Por serem estruturas com espessura de sub-comprimento de onda, ou

partículas polarizadas . Estas são tratadas matematicamente como uma fronteira entre dois meios, podendo ser vistas como impedâncias superficiais que provocam discontinuidades nos campos eletromagnéticos. Essas superfícies são definidas por alguns autores como Metasuperfícies de Huygens, um caso geral da natureza eletromagnética dos metamateriais, que com dimensions de sub-comprimmento de onda seguem o princípio da equivalência (??). Uma vez que com base no método das condições de fronteira eletromagnéticas , a natureza pode ser elétrica e magnética. Essas superfícies são tratadas como a superposição de dipolos elétricos e dipolos magnéticos que variam espacialmente e impõem discontinuidades eletromagnéticas superficiais entre dois meios (??). Possibilitando a manipulação arbitrária do meio para diversas aplicações desde transformadores de feixes gaussianos em feixes de bessel, capa de invisibilidade, controle arbitrário da direção e forma do feixe , antenas. Análise por circuitos elétricos e redes multiportas, também intrinsecamente relacionada devido a dualidade com os campos eletromagnéticos. Nesse âmbito como as RIS também são homonimamente denominadas metasuperfícies. O desenvolvimento por teoria de ondas planas é um técnica bastante utilizada (??),(??), onde o meio é considerado infinito, porém usado como aproximação para espessuras bem inferiores ao comprimento de onda.

2.2.1 Definição dos Campos Eletromagnéticos

Para a RIS, de forma geral, que opere tanto em modo refletor quanto transmissor, como ilustrado na Fig. 1, representamos dois meios separados pela discontinuidade da IRS. O meio 1 em $z > 0$, engloba os campos eletromagnéticos de incidência $\bar{E}_i(\theta_i, \phi_i)$ e espalhamento $\bar{E}_s(\theta_s, \phi_s)$, já o meio 2, em $z < 0$, o campo eletromagnético transmitido neste . Logo define-se os campos elétricos como,

$$\bar{E}_1 = \bar{E}_i + \bar{E}_s, \quad z > 0 \quad (2.1)$$

$$\bar{E}_2 \quad z < 0 \quad (2.2)$$

$$\bar{H}_1 = \bar{H}_i + \bar{H}_s, \quad z > 0 \quad (2.3)$$

$$\bar{H}_2 \quad z < 0 \quad (2.4)$$

As condições de fronteira eletromagnéticas nos dão a seguintes relações para os campos eletromagnéticos

$$[(\bar{E}_s + \bar{E}_i) \cdot \bar{a}_t] \bar{a}_t = E_2 \quad (2.5)$$

$$[(\bar{E}_s + \bar{E}_i) \cdot \bar{a}_t] \bar{a}_t = Z_s \bar{J}_s \quad (2.6)$$

$$\bar{a}_z \times [\bar{H}_2 - \bar{H}_1] = \bar{J}_s \quad (2.7)$$

2.2.2 Modelagem pelo Método de Arranjo de Antenas

Os método de arranjos é comumente usado na literatura para analisar

2.2.3 Modelagem pelas Equações de Espaço Livre

?

2.2.4 Modelagem pelo Método de Ondas Planas

Dadas as condições de contorno e a definição dos campos (??), a impedância vista da RIS representada pela impedância superficial e o meio 2 que pode ser considerada uma linha de transmissão, é dada por,

$$Z_{in} = \frac{Z_s \eta_2^{TM}}{\eta_2^{TM} + Z_s} \quad (2.8)$$

Se o meio 2 é o idêntico ao meio 1, e todos os dois, o espaço Livre, o caso da RIS, pois a impedância superficial encapsula toda estrutura, temos $\eta_2^{TM} = \eta_1^{TM} = \eta_0^{TM}$

E o coeficiente de reflexão se deduz como,

$$\Gamma = \frac{Z_{in} - \eta_1^{TM}}{Z_{in} + \eta_1^{TM}} \quad (2.9)$$

Se os dois meios forem o espaço livre,

$$\Gamma = \frac{-\eta_0^{TM}}{2Z_s + \eta_0^{TM}} \quad (2.10)$$

A impedância superficial em relação ao coeficiente de reflexão

3 Formulação do MoMCSL

Nesse capítulo descreveremos a formulação matemática e física do método dos momentos (MoM). A implementação matemática e os cálculos numéricos serão realizados usando o programa comercial Matlab. As IRSs, por serem estruturas planares, optou-se pelo método dos momentos bidimensional (MoM-2D) para analisar numericamente como realizado por Costa e Dmitriev . espaçamento menor que meio comprimento de onda [Balanis][Phased array]. Além da espessura 3 D dos elementos serem menores que o comprimento de onda, toda estrutura pode ser aproximada por uma impedância de superfície. Como a impedância pode ser negativa, contudo o coeficiente de cada elemento sendo menor que 1, pode se alcançar uma resolução de fase de 360 Graus para os *phase shifters*. Este chamaremos de MoMCSL (MoM continuous and single Layer). Este método utiliza as equações do vetor magnético pontencial \bar{A} e do potencial escalar elétrico ϕ em seu desenvolvimento, advindas das equações de Maxwell. Apesar da última também poder ser escrita em função da densidade corrente ou do potencial magnético A . Tem-se a semântica de que fazendo a separação das duas, a primeira representa a lei de faraday da indução, no qual os campos eletromagnéticos variantes no tempo rotacionam, o mais representativo da propagação no campo distante, e a segunda, a lei de Gauss da concentração de cargas encerradas por determinada superfície, para o qual os campos não divergem ou convergem ao/do infinito, característico do campo próximo, onde há descontinuidades das linhas de campo e das condições de contorno. Logo as seguintes formulações são usadas

$$\bar{E}_s = -j\omega\bar{A} - \nabla\Phi \quad (3.1)$$

$$\bar{A} = \mu \iint_S \bar{J} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dS' \quad (3.2)$$

$$\Phi = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \iint_S \nabla \cdot \bar{J} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dS' \quad (3.3)$$

Considerando $R = |\bar{p} - \bar{p}'|$, se \bar{p} é o vetor posição de um determinado ponto na superfície analisado e \bar{p}' o vetor posição do conjunto de pontos na superfície S , somados um a um. A superfície S pode ser a união de várias superfícies distintas, de várias IRS e/ou conjunto de antenas. Fica implícito que a densidade de corrente superficial \bar{J} depende de \bar{p} e \bar{p}' .

3.1 MoM com Impedância Superficial

Os parâmetros eletromagnéticos do material da IRS são encapsulados na impedância superficial Z_s . A seguinte condição de contorno dos campos elétricos deve ser respeitada:

$$[(\bar{E}_s + \bar{E}_i) \cdot \bar{a}_t] \bar{a}_t = Z_s \bar{J} \quad (3.4)$$

sendo \bar{E}_i (V/m^2) é o vetor campo elétrico incidente proveniente de uma fonte distante, e que conhecemos sua intensidade na superfície da IRS. Como a equação do vetor campo espalhado \bar{E}_s resulta de uma operação linear sobre a densidade de corrente, substituído o ??-?? em ??

$$\bar{E}_s \cdot \bar{a}_t = L_s(\bar{J}) \quad (3.5)$$

$$L_s(\bar{J}) = -j\omega\mu \iint_S \bar{J} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dS' + \nabla \left[\frac{1}{j\omega\epsilon} \iint_S \nabla \cdot \bar{J} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dS' \right] \quad (3.6)$$

Além disso, a geometria da superfície e sua impedância superficial é predefinida. Temos a densidade de corrente \bar{J} como variável não conhecida. Sabendo que E_s depende da densidade de corrente, da geometria, da permeabilidade magnética μ_0 e da permissividade elétrica ϵ_0 , ambas no espaço livre. As características eletromagnéticas são unicamente definidas pela impedância superficial Z_s . Substituído a eq. ?? em eq. ??

$$\bar{E}_i \cdot \bar{a}_t = Z_s \bar{J} + j\omega\mu \iint_S \bar{J} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dS' - \nabla \left[\frac{1}{j\omega\epsilon} \iint_S \nabla \cdot \bar{J} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dS' \right] \quad (3.7)$$

Temos as componentes E_x^i e E_y^i do campo incidente,

$$E_x^i = Z_s \bar{J} \cdot \bar{a}_x + j\omega\mu \iint_S \bar{J} \cdot \bar{a}_x \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dS' - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{j\omega\epsilon} \iint_S \left(\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} \right) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dS' \right] \quad (3.8)$$

$$E_y^i = Z_s \bar{J} \cdot \bar{a}_y + j\omega\mu \iint_S \bar{J} \cdot \bar{a}_y \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dS' - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{j\omega\epsilon} \iint_S \left(\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} \right) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dS' \right] \quad (3.9)$$

Apesar dos resultados na maioria das vezes se intensificar no campo distante, podendo o potencial escalar ser desprezado se a excitação é conhecida. Observa-se que a interação entre os elementos no campo próximo interfere diretamente na corrente de excitação, assim como as componentes ortogonais de excitação dependem uma da outra, o que não é considerado em outros métodos comumente utilizados. O valor da corrente utilizada é considerado ideal, sem conter o efeito de sua vizinhança de campo próximo. O procedimento do MoM tradicional enseja a expansão da solução em termos funções base. Além da realização do produto interno com uma função teste w_m em ambos os lados da equação, no lado com as operações lineares sobre a solução, e no lado com o valor imposto ao resultado da operação linear, neste problema, o campo incidente.

$$\langle w_m, \bar{E}_i \rangle = \langle w_m, Z_s \bar{J} - L_s(\bar{J}) \rangle \quad (3.10)$$

Se transformarmos o lado direito da equação ?? em um operador linear $L = Z_s - L_s$

$$\langle w_m, \bar{E}_i \rangle = \langle w_m, L(\bar{J}) \rangle \quad (3.11)$$

Com o intuito de resolver o sistema linear de equações, transforma-se em um sistema matricial com uma matriz impedância reacionando a densidade de corrente e com a tensão incidente. A densidade de corrente depende do acoplamento mútuo de cada elemento, incluindo o efeito entre si das densidades de correntes ortogonais provenientes do potencial escalar.

Portanto temos, a tensão pode ser escrita na forma matricial

$$[\Delta V_J]_{N_t \times 1} = \{[Z_s^J \Delta l_J] - [Z_{JI}]\}_{N_t \times N_t} \times [J_I]_{N_t \times 1} \quad (3.12)$$

e a densidade de corrente,

$$[J_I]_{N_t \times 1} = \{[Z_s^J \Delta l_J] - [Z_{JI}]\}_{N_t \times N_t}^{-1} \times [\Delta V_J]_{N_t \times 1} \quad (3.13)$$

Se representarmos com matrizes de acoplamento para visualizar, o efeito do vetor potencial magnético representada pela matriz $[M]$ do vetor magnético e pela matriz $[C]$ o efeito potencial escalar das cargas portando o acoplamento das polarizações.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [J_I^x]_{N_{xx} \times 1} \\ [J_I^y]_{N_{yy} \times 1} \end{bmatrix} &= \left\{ \begin{bmatrix} [Z_s^{xx} \Delta l_J]_{N_{xx} \times N_{xx}} & [O]_{N_{xx} \times N_{yy}} \\ [O]_{N_{yy} \times N_{xx}} & [Z_s^{yy} \Delta l_J]_{N_{yy} \times N_{yy}} \end{bmatrix} \right. \\ &+ \begin{bmatrix} [M_{JI}^{xx}]_{N_{xx} \times N_{xx}} & [O]_{N_{xx} \times N_{yy}} \\ [O]_{N_{yy} \times N_{xx}} & [M_{JI}^{yy}]_{N_{yy} \times N_{yy}} \end{bmatrix} + \left. \begin{bmatrix} [C_{JI}^{xx}]_{N_{xx} \times N_{xx}} & [C_{JI}^{xy}]_{N_{xx} \times N_{yy}} \\ [C_{JI}^{yx}]_{N_{yy} \times N_{xx}} & [C_{JI}^{yy}]_{N_{yy} \times N_{yy}} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} [\Delta V_J^x]_{N_{xx} \times 1} \\ [\Delta V_J^y]_{N_{yy} \times 1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Como o campo a tensão do campo espalhado é expressa

$$[\Delta V_J^s]_{N_t \times 1} = [Z_{IJ}]_{N_t \times N_t} [J_I]_{N_t \times 1} \quad (3.15)$$

A matriz de acoplamento ou de parametros de espalhamento pode ser escrita como

$$[S_{JJ}]_{N_t \times N_t} = [Z_{JI}]_{N_t \times N_t} [Y_{IJ}]_{N_t \times N_t} \quad (3.16)$$

3.1.1 Disposição da RIS

RIS tem $N_{ZsL} \times N_{ZsW}$ elementos na superfície S , porém cada antena da IRS terá N_{xZs} discretizações em x e N_{yZs} discretizações em y . Logo temos

$$N_x = N_{xZs} N_{ZsL} \quad (3.17)$$

$$N_y = N_{yZs}N_{ZsW} \quad (3.18)$$

Como na prática teríamos $N_{ZsL} \times N_{ZsW}$ impedâncias superficiais para as correntes J_x e $N_{ZsL} \times N_{ZsW}$ impedâncias superficiais para as correntes J_y . Porém o MoM devido as eq. diferenciais do potencial escalar, as densidade de corrente J_x tem $N_x - 1$ linhas de discretização, se aplicarmos a impedância superfície diretamente nas formulação, A superfície ficaria diferente da desejada. Na verdade o tamanho dos elementos ficaria assimétrico. tem $N_{ZsL} \times N_{ZsW}$ elementos na superfície S , porém cada antenna da IRS terá N_{xZs}

$$N_x = N_{xZs}N_{ZsL} \quad (3.19)$$

$$N_y = N_{yZs}N_{ZsW} \quad (3.20)$$

Como na prática teríamos $N_{ZsL} \times N_{ZsW}$

3.1.2 Far-Field Approximation

A aproximação de campo distante é realizada de acordo com o Balanis, o campo elétrico em termos de coordenadas esféricas é escrito como,

$$E_\theta = -\frac{jk\eta e^{-jkR}}{4\pi R} \iint_S [J_x \cos \theta \cos \phi + J_y \cos \theta \sin \phi] dS' \quad (3.21)$$

$$E_\phi = -\frac{jk\eta e^{-jkR}}{4\pi R} \iint_S [-J_x \sin \phi + J_y \cos \phi] dS' \quad (3.22)$$

O espalhamento será avaliado em termos de seção reta radar ou *radar cross section* (RCS),

$$\sigma_\theta = 4\pi R^2 \frac{|E_\theta^s|^2}{|E_\theta^i|^2} = \frac{\eta^2 k^2}{4\pi} |Vr| \quad (3.23)$$

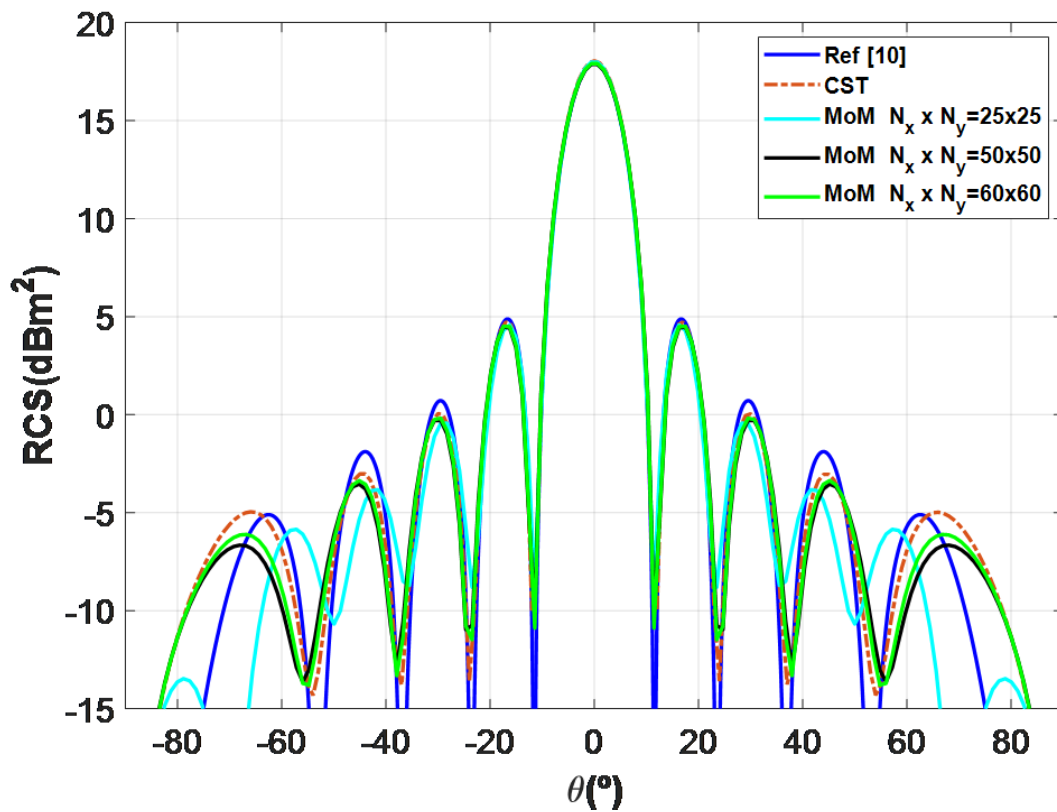
4 Resultados Numéricos

Neste capítulo vamos analisar primeiramente a validade do nosso método numérico, parâmetros de malha e convergência. Primeiro, validamos nosso modelo com CST e AFM, depois realizamos o direcionamento do feixe para uma variação de fase na direção x.

4.1 Validação da Malha

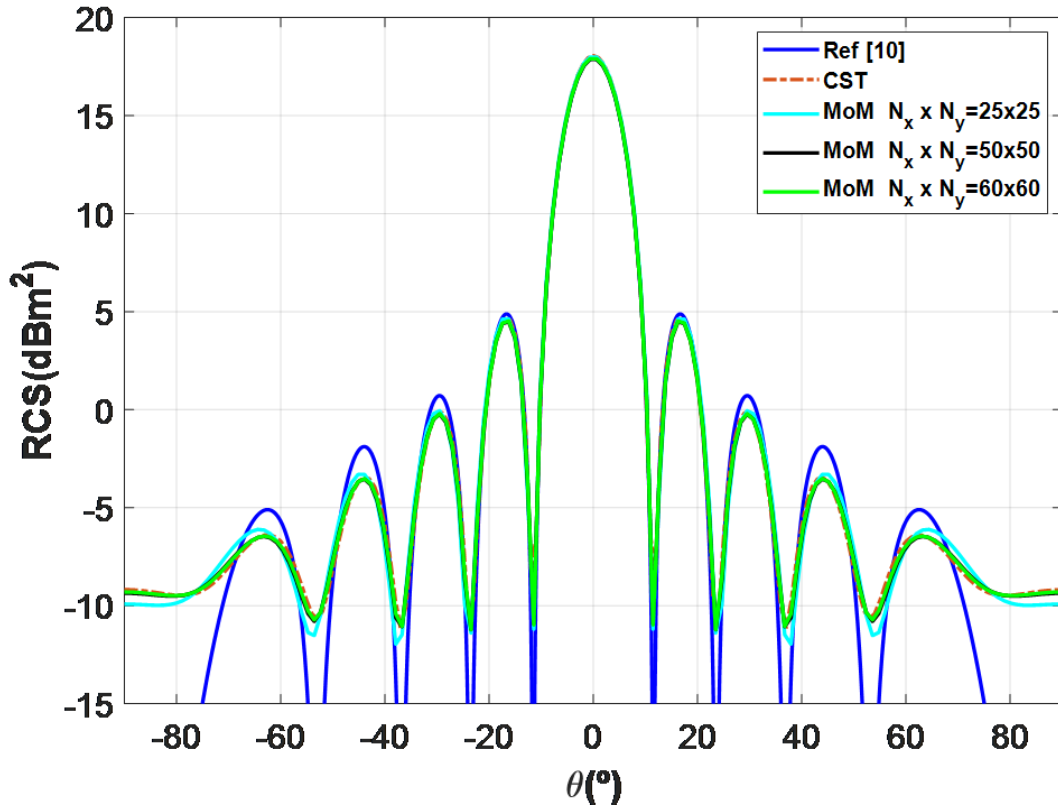
A validação da malha é realizada comparando com o AFM [10], que é muito semelhante aos resultados da óptica física, e do CST. Os resultados numéricos do nosso modelo estão muito bem com as saídas CST e AFM conforme mostrado na Fig. 4, para planos de corte xoz e yoz relacionados à origem o. Consideramos uma placa quadrada de 5×5 , em 3,3GHz, composta apenas por um condutor elétrico perfeito (PEC), portanto $Z(N, M) = 0$ sobre toda a incidência normal da superfície, ou seja, $E_i(i = 0, i = 0)$.

Figura 1. Ilustração da discretização com a função base pulso



Fonte: Produzido pelos autores

Figura 2. Ilustração da discretização com a função base pulso



Fonte: Produzido pelos autores

Para analisar o espalhamento de controle do feixe, típico de aplicações reais de IRS, conforme eq. (4), a incidência normal também é presumida. Aplicamos uma sintonia de fase apenas na direção x em 5 e 10 impedâncias diferentes, escolhendo a direção alvo como $(\theta_{s,\phi_s} = 0)$ e mantendo a mesma área da seção anterior, $N_z s W = 1$ e $N_y Z s = 50$. A discretização da malha é mostrada na Fig. 5.

4.2 Direcionamento do Feixe

Assim, à medida que alteramos o ângulo desejado s , a capacidade de controle do feixe é bem comprovada com MoM e modelo de impedância de superfície da teoria da linha de transmissão, como mostrado na Fig. 4. Além disso, podemos notar o efeito correto da faixa invisível e ondas superficiais. Uma vez aumentado o ângulo, observa-se uma modificação maior. Mesmo próximo ao intervalo de meio comprimento de onda, ou seja, $N_z s L = 10$, o nível do lóbulo lateral é afetado.

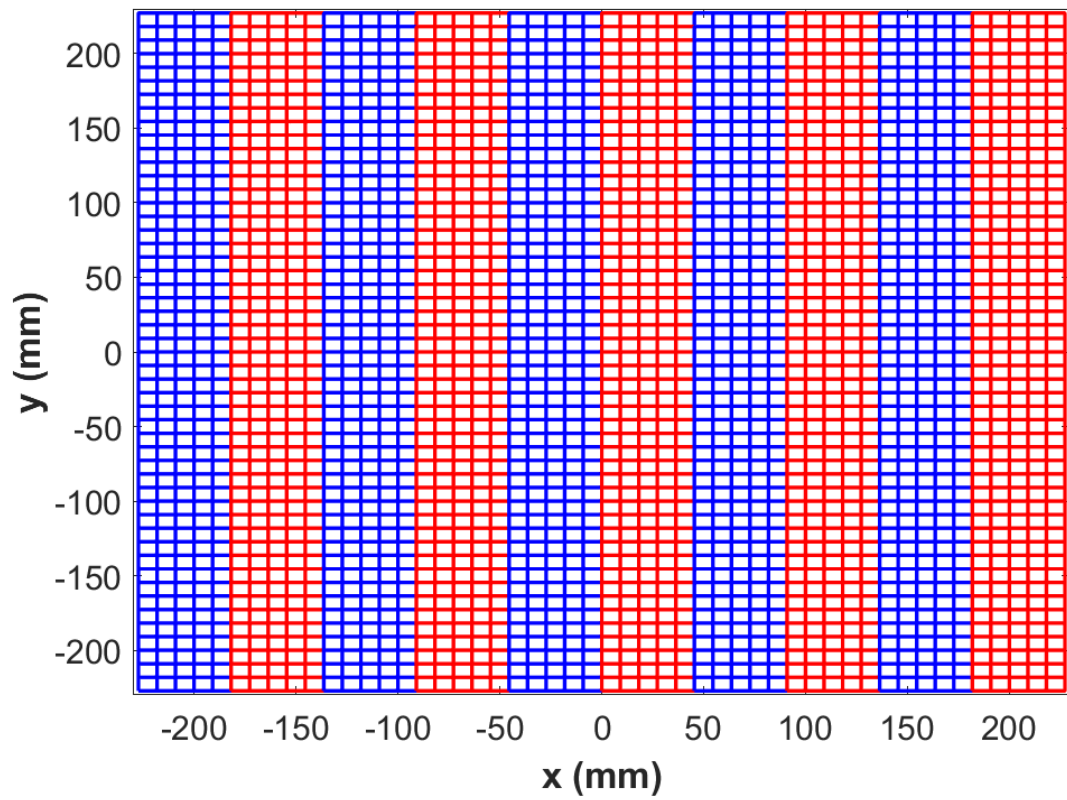
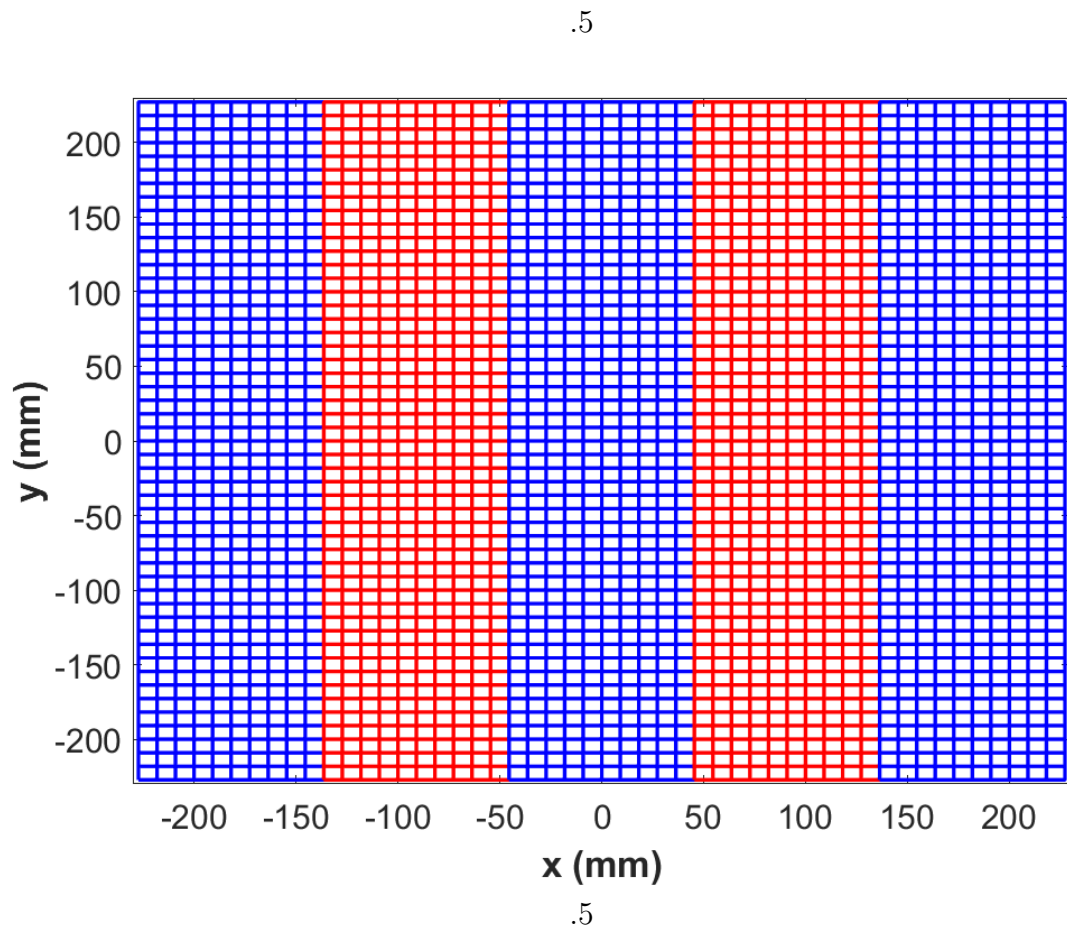
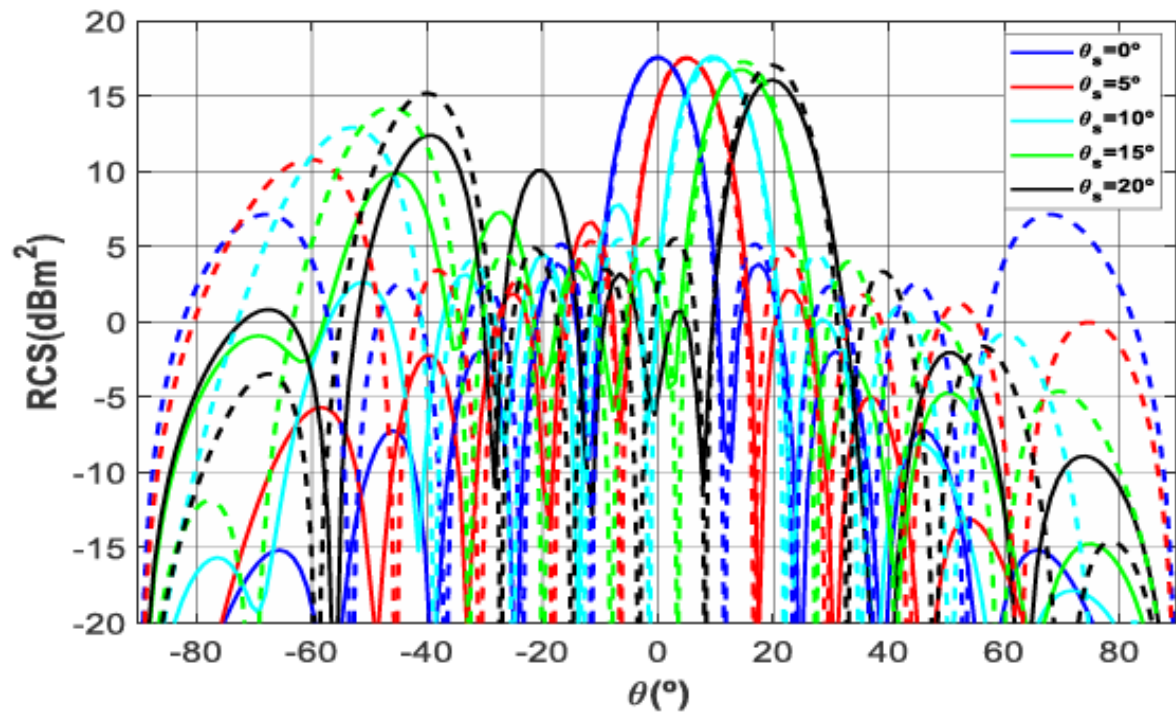


Figure 3. A figure with two subfigures

Figura 4. Ilustração da discretização com a função base pulso

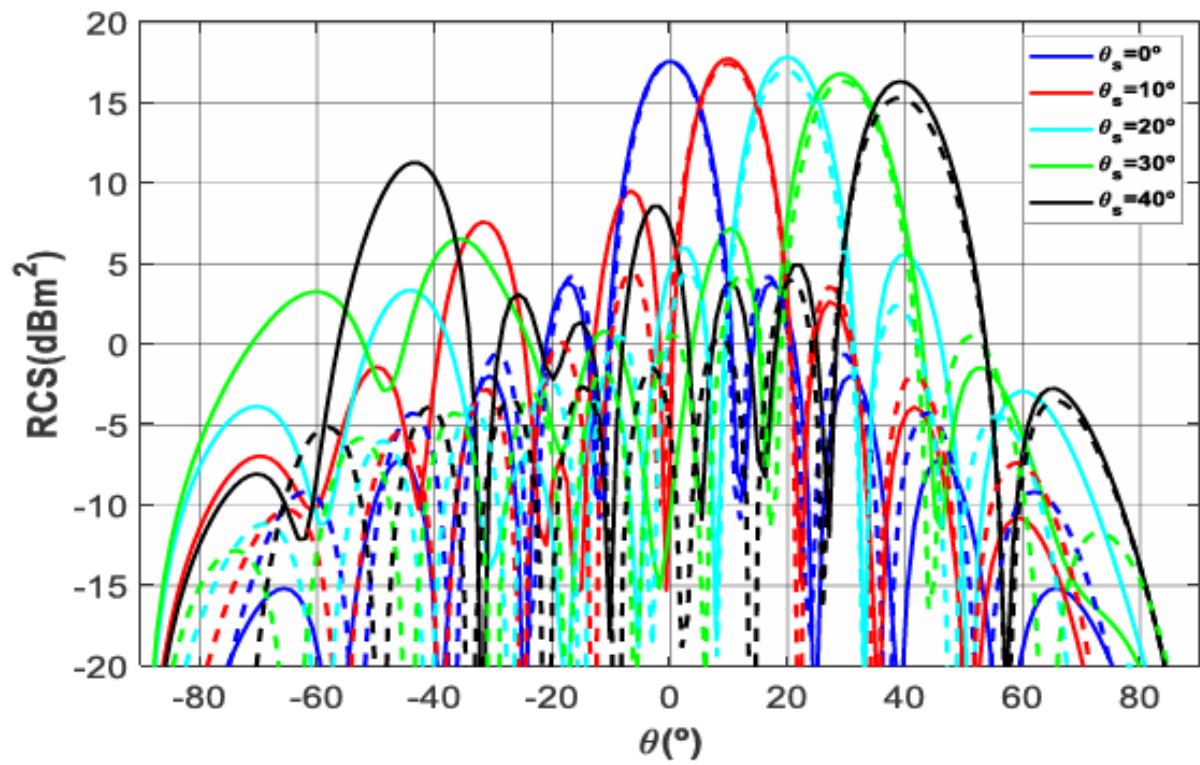


Fonte: Produzido pelos autores

4.3 Direcionamento Ativo

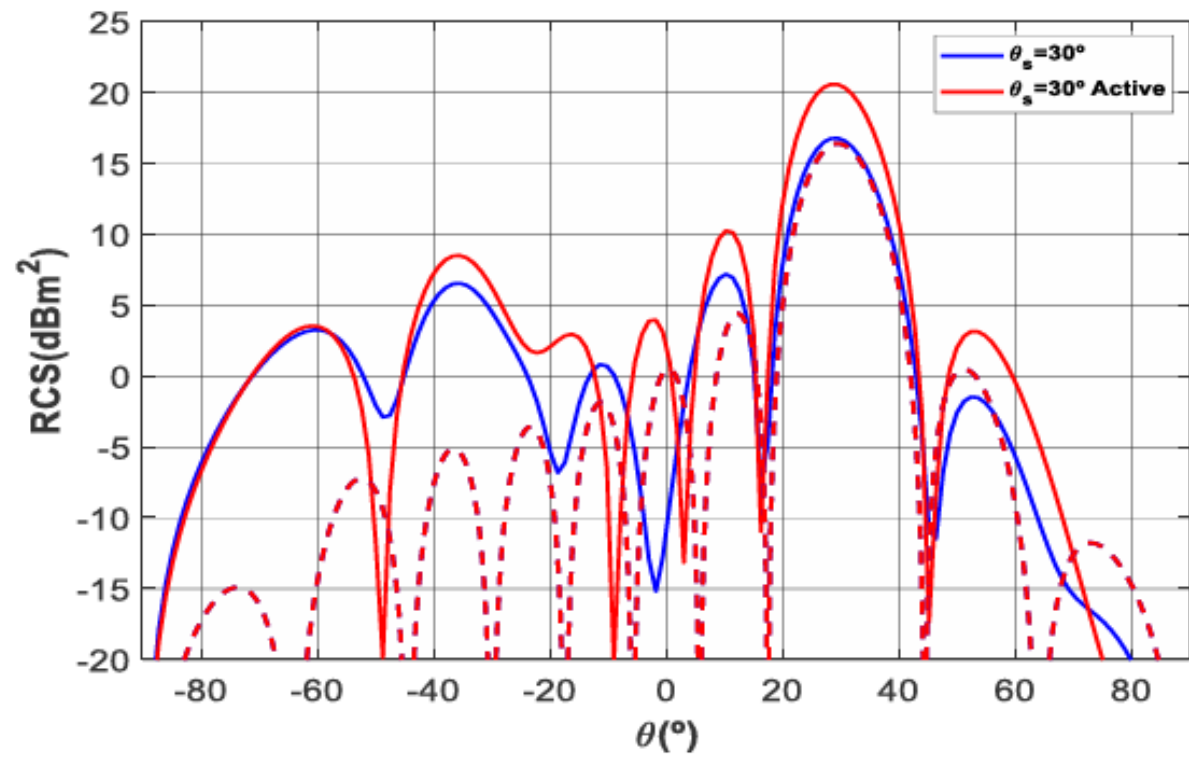
O comportamento ativo foi testado na Fig. 5 para um ganho de potência de 3dB, ou seja, $A=1,5$. A forma geral do feixe não muda em comparação com a caixa reflexiva perfeita. Se aplicados outros tipos de coeficientes de matriz, como binomial e Tschhebscheff [11], isso pode levar a um formato de feixe personalizado.

Figura 5. Ilustração da discretização com a função base pulso



Fonte: Produzido pelos autores

Figura 6. Ilustração da discretização com a função base pulso



Fonte: Produzido pelos autores

5 Conclusão

Sed consequat tellus et tortor. Ut tempor laoreet quam. Nullam id wisi a libero tristique semper. Nullam nisl massa, rutrum ut, egestas semper, mollis id, leo. Nulla ac massa eu risus blandit mattis. Mauris ut nunc. In hac habitasse platea dictumst. Aliquam eget tortor. Quisque dapibus pede in erat. Nunc enim. In dui nulla, commodo at, consectetur nec, malesuada nec, elit. Aliquam ornare tellus eu urna. Sed nec metus. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas.

Phasellus id magna. Duis malesuada interdum arcu. Integer metus. Morbi pulvinar pellentesque mi. Suspendisse sed est eu magna molestie egestas. Quisque mi lorem, pulvinar eget, egestas quis, luctus at, ante. Proin auctor vehicula purus. Fusce ac nisl aliquam ante hendrerit pellentesque. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Morbi wisi. Etiam arcu mauris, facilisis sed, eleifend non, nonummy ut, pede. Cras ut lacus tempor metus mollis placerat. Vivamus eu tortor vel metus interdum malesuada.

Sed eleifend, eros sit amet faucibus elementum, urna sapien consectetur mauris, quis egestas leo justo non risus. Morbi non felis ac libero vulputate fringilla. Mauris libero eros, lacinia non, sodales quis, dapibus porttitor, pede. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Morbi dapibus mauris condimentum nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Etiam sit amet erat. Nulla varius. Etiam tincidunt dui vitae turpis. Donec leo. Morbi vulputate convallis est. Integer aliquet. Pellentesque aliquet sodales urna.

APÊNDICE A . Método de Ondas Planas e Linhas de Transmissão

Os elementos da RIS podem ser descritos pelo vetor posição na superfície é dado por

$$\bar{p} = x\bar{x} + y\bar{y} \quad (\text{A.1})$$

$$\bar{k}_i = k_x\bar{a}_x + k_y\bar{a}_y + k_z\bar{a}_z \quad (\text{A.2})$$

$$\bar{k}_s = k_x\bar{a}_x + k_y\bar{a}_y - k_z\bar{a}_z \quad (\text{A.3})$$

$$\bar{k}_i = k_0(\sin \theta \sin \phi \bar{a}_x + \sin \theta \cos \phi \bar{a}_y + \cos \theta \bar{a}_z) \quad (\text{A.4})$$

Para incidência de uma onda plana TM , Campos Incidentes,

$$\bar{E}_i = (E_\theta \cos \theta_i \bar{a}_x - E_\theta \sin \theta_i \bar{a}_z) e^{jk(x \sin \theta \cos \phi + y \sin \theta \sin \phi + z \cos \theta)} \quad (\text{A.5a})$$

$$\bar{H}_i = \frac{E_\theta}{\eta_1} \bar{a}_y e^{-jk(\sin \theta_i x + \cos \theta_i z)} \quad (\text{A.5b})$$

Campos Espalhados,

$$\bar{E}_s = \Gamma(E_\theta \cos \theta_i \bar{a}_x + E_\theta \sin \theta_i \bar{a}_z) e^{-jk(\sin \theta_i x + \cos \theta_i z)} \quad (\text{A.6a})$$

$$\bar{H}_s = -\Gamma \frac{E_\theta}{\eta_1} \bar{a}_y e^{-jk(\sin \theta_i x + \cos \theta_i z)} \quad (\text{A.6b})$$

Campos Transmitidos,

$$\bar{E}_{tr} = (E_\theta^{tr} \cos \theta_2 \bar{a}_x - E_\theta^{tr} \sin \theta_2 \bar{a}_z) e^{-jk(\sin \theta_2 x + \cos \theta_2 z)} \quad (\text{A.7a})$$

$$\bar{H}_{tr} = \frac{E_\theta^{tr}}{\eta_2} \bar{a}_y e^{-jk(\sin \theta_2 x + \cos \theta_2 z)} \quad (\text{A.7b})$$

Considerando 2 meios contínuos com a presença de uma impedância superficial na sua fronteira. Logo pela continuidade dos campos e do conjunto de equações ??-?? tem-se, levando em conta que $\theta_i = \theta_r$,

$$(E_1 + E_2) \cdot \bar{a}_t = E_\theta \cos \theta_i + \Gamma E_\theta \cos \theta_i = E_\theta^{tr} \cos \theta_2 \quad (\text{A.8})$$

$$(H_i + H_s) \cdot \bar{a}_t = \left[\frac{E_\theta}{\eta_1} - \Gamma \frac{E_\theta}{\eta_1} \right] \quad (\text{A.9})$$

Substituindo ??-?? em ??

$$\cos \theta_i + \Gamma \cos \theta_i = Z_s \left[-\frac{\cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_2} - \frac{\Gamma \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_2} - \left(-\frac{1}{\eta_1} + \Gamma \frac{1}{\eta_1} \right) \right] \quad (\text{A.10})$$

$$\eta_1 \cos \theta_i + \Gamma \eta_1 \cos \theta_i = Z_s \left[-\frac{\eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_2} - \frac{\Gamma \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_2} + 1 - \Gamma \right] \quad (\text{A.11})$$

$$\Gamma(\eta_1 \cos \theta_i + \frac{Z_s \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_2} + Z_s) = -\eta_1 \cos \theta_i - \frac{Z_s \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_2} + Z_s \quad (\text{A.12})$$

Assumindo que, $\eta_1^{TM} = \eta_1 \cos \theta_i$ e $\eta_2^{TM} = \eta_2 \cos \theta_2$ e rearranjando as equações

$$\Gamma(1 + \frac{Z_s}{\eta_2^{TM}} + \frac{Z_s}{\eta_1^{TM}}) = -1 - \frac{Z_s}{\eta_2^{TM}} + \frac{Z_s}{\eta_1^{TM}} \quad (\text{A.13})$$

$$\Gamma = \frac{-\eta_1^{TM} \eta_2^{TM} - Z_s \eta_1^{TM} + Z_s \eta_2^{TM}}{\eta_1^{TM} \eta_2^{TM} + Z_s \eta_1^{TM} + Z_s \eta_2^{TM}} \quad (\text{A.14})$$

$$\Gamma = \frac{-\eta_1^{TM}(\eta_2^{TM} + Z_s) + Z_s \eta_2^{TM}}{\eta_1^{TM}(\eta_2^{TM} + Z_s) + Z_s \eta_2^{TM}} \quad (\text{A.15})$$

Dividindo por $(\eta_2^{TM} + Z_s)$

$$\Gamma = \frac{\frac{Z_s \eta_2^{TM}}{\eta_2^{TM} + Z_s} - \eta_1^{TM}}{\frac{Z_s \eta_2^{TM}}{\eta_2^{TM} + Z_s} + \eta_1^{TM}} \quad (\text{A.16})$$

Se olharmos pelo ponto de vista de linhas de transmissão, o coeficiente de reflexão é calculado em relação a impedância intrínseca do meio 1 e a impedância de entrada vista na superfície ou impedância de entrada, o circuito paralelo entre Z_s e a impedância intrínseca da onda incidente η_2^{TM} . Logo a impedância vista da RIS representada pela impedância superficial e o meio 2 que pode ser considerada uma linha de transmissão, é dada por,

$$Z_{in} = \frac{Z_s \eta_2^{TM}}{\eta_2^{TM} + Z_s} \quad (\text{A.17})$$

Se o meio 2 é o idêntico ao meio 1, e todos os dois, o espaço Livre, o caso da RIS, pois a impedância superficial encapsula toda estrutura, temos $\eta_2^{TM} = \eta_1^{TM} = \eta_0^{TM}$

E o coeficiente de reflexão se deduz como,

$$\Gamma = \frac{Z_{in} - \eta_1^{TM}}{Z_{in} + \eta_1^{TM}} \quad (\text{A.18})$$

Se os dois meios forem o espaço livre,

$$\Gamma = \frac{-\eta_0}{2Z_s + \eta_0} \quad (\text{A.19})$$

A impedância superficial em relação ao coeficiente de reflexão

APÊNDICE B . MoMCSL

B.0.1 Representação Numérica

O MoM bidimensional por [Costa] resolve o problema completamente considerando-o como um sistema linear discreto, por ser um método numérico. A solução do sistema é a corrente de excitação, dada pela constantes complexas não conhecidas $J_{x,y}^{n,m}$. Logo, a densidade de corrente pode ser expandida em termos de uma função base, que no caso, é a função pulso retangular com dimensão , de acordo com os procedimentos do MoM bidimensional. A escolha por essa base, no meu entendimento, se dá por ser mais simples a implementação numérica, ter uma alta acurácia, além de ser conforme com as seções retangulares que encapsulam as características de cada elemento da IRS. Então se discretizarmos a superfície S com comprimento L e largura W , de acordo com a ilustração da Fig. ??, com $N_x - 1$ colunas e N_y linhas de tensão para a excitação J_x , e N_x colunas e $N_y - 1$ linhas de tensão para a excitação J_y , igualmente espaçadas Δl_x em x e Δl_y em y . Logo, tem-se,

$$L = N_x \Delta l_x \quad (\text{B.1a})$$

$$W = N_y \Delta l_y \quad (\text{B.1b})$$

A densidade de corrente pode ser escrita como,

$$\bar{J}(\bar{p}) \cdot \bar{a}_x = J_x(n, m) = \sum_{m=1}^{N_x-1} \sum_{n=1}^{N_y} J_x^{n,m} P_{J_x}^{n,m}(\bar{p}) \quad (\text{B.2})$$

$$\bar{J}(\bar{p}) \cdot \bar{a}_y = J_y(n, m) = \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y-1} J_y^{n,m} P_{J_y}^{n,m}(\bar{p}) \quad (\text{B.3})$$

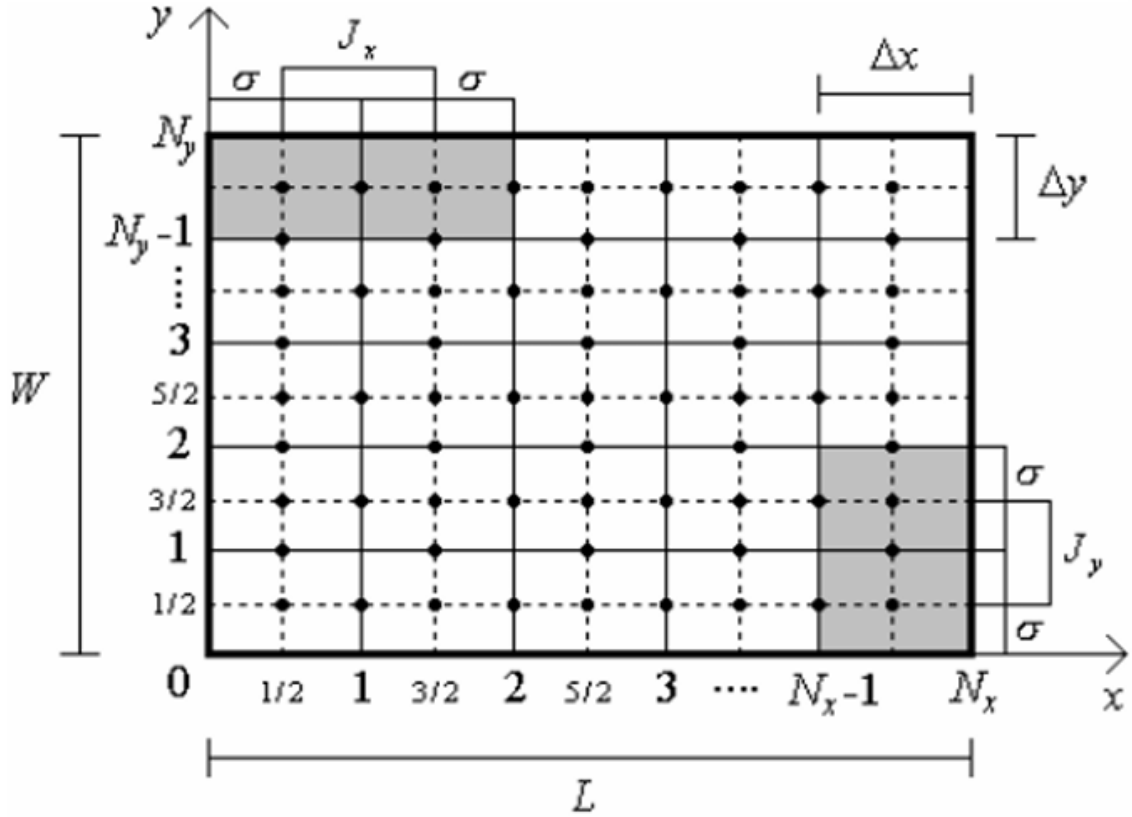
Sendo N_x , o número de discretizações em x , N_y o número de discretizações em y , e as condições de contorno da função pulso,

$$P_{J_x}^{n,m}(\bar{p}) = \begin{cases} 1 & x_{n,m}^- \leq x < x_{n,m}^+, \quad y_{(n-1),m} \leq y < y_n \\ 0 & \text{fora do limite} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

$$P_{J_y}^{n,m}(\bar{p}) = \begin{cases} 1 & x_{n,(m-1)} \leq x < x_{n,m}, \quad y_{n,m}^- \leq y < y_{n,m}^+ \\ 0 & \text{fora do limite} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

As disposição das correntes e da função pulso retangular impõem a condição de contorno ao problema, de que as correntes normais nas bordas devem se anular, e que existam sim, densidades de corrente tangenciais a borda. Assim como assegura que as cargas que originam e/ou terminam, tanto a densidade de corrente em J_x , quanto a densidade corrente em J_y se sobreponham, respeitando as equações de Maxwell no domínio numérico

Figura 7. Ilustração da discretização com a função base pulso



Fonte: Produzido pelos autores

tanto para rotação do campos como para divergência. Um exemplo da borda inferior esquerda com os vetores posições e distância está ilustrada na Fig. ?? . A função de teste é escolhida de maneira que porta as características da discretização espacial para o caminho de integração da diferença de potencial em x ou em y . Para a integração em x temos

$$w_m(\bar{p}) = P_{J_x}^{n,m}(\bar{p})\delta(\bar{p} - \bar{p}_{J_y}^{m,n})\bar{a}_x = \begin{cases} 1, & x_{n,m}^- \leq x < x_{n,m}^+, \quad y = y_{n,m}^- \\ 0, & \text{fora do limite} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Sendo que $x_{n,m}^+ = \frac{x_{n,m+1} - x_{n,m}}{2}$ Enquanto para a integração em y

$$w_m(\bar{p}) = P_{J_y}^{n,m}(\bar{p})\delta(\bar{p} - \bar{p}_{J_x}^{m,n})\bar{a}_y = \begin{cases} 1 & x = x_{n,m}^-, \quad y_{n,m}^- \leq y < y_{n,m}^+ \\ 0 & \text{fora do limite} \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

sendo que as coordenadas discretas são definidas,

$$x_{n,m} = m\Delta l_x \quad (\text{B.8a})$$

$$x_{n,m}^- = x_{n,m} - \frac{\Delta l_x}{2} \quad (\text{B.8b})$$

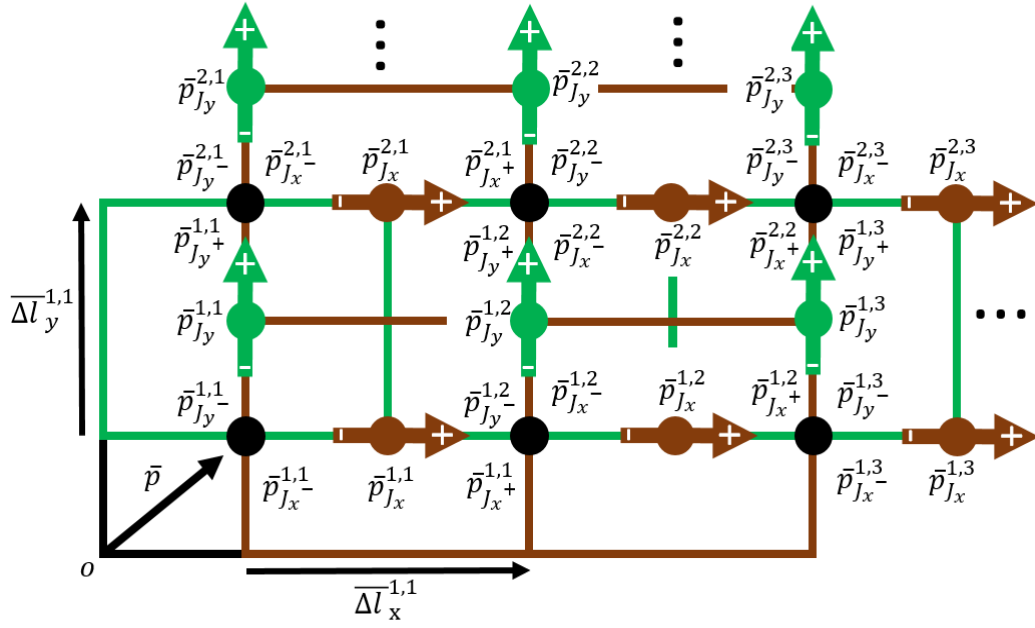
$$x_{n,m}^+ = x_{n,m} + \frac{\Delta l_x}{2} \quad (\text{B.8c})$$

$$y_{n,m} = n\Delta l_y \quad (\text{B.8d})$$

$$y_{n,m}^- = y_{n,m} - \frac{\Delta l_y}{2} \quad (\text{B.8e})$$

$$y_{n,m}^+ = y_{n,m} + \frac{\Delta l_y}{2} \quad (\text{B.8f})$$

Figura 8. Exemplo da Discretização com o Vetor Posição da Função Pulso



Fonte: Produzido pelos autores

Portanto, ao efetuar a integração com a função teste, transforma-se parcialmente a continuidade do problema para o domínio numérico. Aproximando a continuidade da superfície, sem desconsiderar a interação dos elementos. A tensão em cada elemento em x pode ser escrita, substituindo as expansões da densidade de corrente ?? e a função de teste ?? em ??

$$\begin{aligned} \Delta V_x^{n,m} = & Z_s^{n,m} \int_{x_{n,m}^-}^{x_{n,m}^+} (J_x^{n,m} P_{J_x}^{n,m}(\bar{p}) \delta(\bar{p} - \bar{p}_{J_y}^{mn})) dx \\ & + \int_{x_{n,m}^-}^{x_{n,m}^+} j\omega\mu \iint_S J_x(\bar{p}') P_{J_x}^{n,m}(\bar{p}) \delta(\bar{p} - \bar{p}_{J_y}^{mn}) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dS' dx \\ & - \int_{x_{n,m}^-}^{x_{n,m}^+} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{j\omega\epsilon} \iint_S \left(\sum_{n'=1}^{N_x-1} \sum_{m'=1}^{N_y} \frac{\partial(J_x^{n',m'} P_{J_x}^{n',m'}(\bar{p}'))}{\partial x} \right) P_{J_x}^{n,m}(\bar{p}) \delta(\bar{p} - \bar{p}_{J_y}^{mn}) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dS' \right] dx \\ & - \int_{x_{n,m}^-}^{x_{n,m}^+} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{j\omega\epsilon} \iint_S \left(\sum_{n'=1}^{N_x} \sum_{m'=1}^{N_y-1} \frac{\partial(J_y^{n',m'} P_{J_y}^{n',m'}(\bar{p}'))}{\partial y} \right) P_{J_x}^{n,m}(\bar{p}) \delta(\bar{p} - \bar{p}_{J_y}^{mn}) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dS' \right] dx \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Onde,

$$\Delta V_x^{n,m} = \int_{\overline{\Delta l_x}} E_x \cdot w_m dx \quad (\text{B.10})$$

Usando integração numérica do ponto médio na integral do produto interno com a função de teste, tem-se,

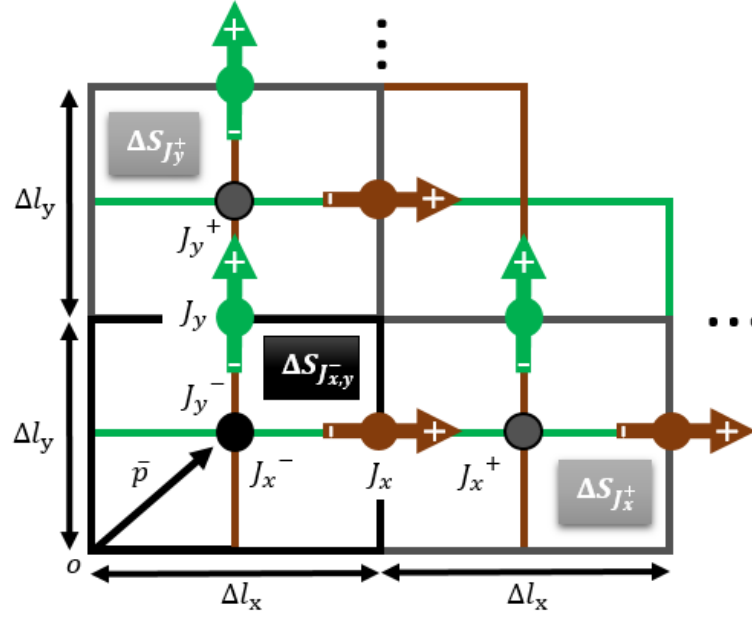
$$\begin{aligned} \Delta V_x^{n,m} = & Z_s^{n,m} J_x^{n,m} \Delta l_x + j\omega\mu\Delta l'_x \sum_{m'=1}^{N_x-1} \sum_{n'=1}^{N_y} J_x^{n',m'} \iint_S P_{J_x}^{n',m'}(\overline{p'}) \frac{e^{-jk|\overline{p}_{J_x}^{n,m} - \overline{p'}|}}{4\pi|\overline{p}_{J_x}^{n,m} - \overline{p'}|} dS' \\ & + \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[\iint_S \sum_{n'=1}^{N_x-1} \sum_{m'=1}^{N_y} \frac{\partial(J_x^{n',m'} P_{J_x}^{n',m'}(\overline{p'}))}{\partial x} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dS' \right] \Big|_{\overline{p}_{J_x}^{n,m}}^{\overline{p}_{J_x}^{n,m}} \\ & + \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[\iint_S \sum_{n'=1}^{N_x} \sum_{m'=1}^{N_y-1} \frac{\partial(J_y^{n',m'} P_{J_y}^{n',m'}(\overline{p'}))}{\partial y} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dS' \right] \Big|_{\overline{p}_{J_x}^{n,m}}^{\overline{p}_{J_x}^{n,m}} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Expandindo mais a equação,

$$\begin{aligned} \Delta V_i^{n,m} = & Z_s^{n,m} J_x^{n,m} \Delta l_x + j\omega\mu\Delta l'_x \sum_{m'=1}^{N_x-1} \sum_{n'=1}^{N_y} J_x^{n',m'} \iint_S P_{J_x}^{n',m'}(\overline{p'}) \frac{e^{-jk|\overline{p}_{J_x}^{n,m} - \overline{p'}|}}{4\pi|\overline{p}_{J_x}^{n,m} - \overline{p'}|} dS' \\ & + \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[\sum_{m'=1}^{N_x-1} \sum_{n'=1}^{N_y} J_x^{n',m'} \iint_S \frac{\partial(P_{J_x}^{n',m'}(\overline{p'}))}{\partial x} \frac{e^{-jk|\overline{p}_{J_x}^{n,m} - \overline{p'}|}}{4\pi|\overline{p}_{J_x}^{n,m} - \overline{p'}|} dS' \right] \\ & - \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[\sum_{m'=1}^{N_x-1} \sum_{n'=1}^{N_y} J_x^{n',m'} \iint_S \frac{\partial(P_{J_x}^{n',m'}(\overline{p'}))}{\partial x} \frac{e^{-jk|\overline{p}_{J_x}^{n,m} - \overline{p'}|}}{4\pi|\overline{p}_{J_x}^{n,m} - \overline{p'}|} dS' \right] \\ & + \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[\sum_{m'=1}^{N_x} \sum_{n'=1}^{N_y-1} J_y^{n',m'} \iint_S \frac{\partial(P_{J_y}^{n',m'}(\overline{p'}))}{\partial y} \frac{e^{-jk|\overline{p}_{J_x}^{n,m} - \overline{p'}|}}{4\pi|\overline{p}_{J_x}^{n,m} - \overline{p'}|} dS' \right] \\ & - \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[\sum_{m'=1}^{N_x} \sum_{n'=1}^{N_y-1} J_y^{n',m'} \iint_S \frac{\partial(P_{J_y}^{n',m'}(\overline{p'}))}{\partial y} \frac{e^{-jk|\overline{p}_{J_x}^{n,m} - \overline{p'}|}}{4\pi|\overline{p}_{J_x}^{n,m} - \overline{p'}|} dS' \right] \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Aplicando a derivada da função pulso, e definindo a condição de contorno das áreas de integração das cargas discretas de acordo com a Fig. ??,

Figura 9. Área de integração das Cargas do Potencial Escalar



Fonte: Produzido pelos autores

$$\begin{aligned}
 \Delta V_i^{n,m} = & Z_s^{n,m} J_x^{n,m} \Delta l_x + j\omega\mu\Delta l'_x \sum_{m'=1}^{N_x-1} \sum_{n'=1}^{N_y} J_x^{n',m'} \iint_S P_{J_x}^{n',m'}(\bar{p}') \frac{e^{-jk|\bar{p}_{J_x}^{n,m}-\bar{p}'|}}{4\pi|\bar{p}_{J_x}^{n,m}-\bar{p}'|} dS' \\
 & + \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[\sum_{n=1}^{N_x-1} \sum_{m=1}^{N_y} J_x^{n',m'} \left(\iint_{\Delta S'_{J_x^-}} \frac{\delta(\bar{p}' - \bar{p}_{J_x^-}^{n',m'})}{\Delta l'_x} - \iint_{\Delta S'_{J_x^+}} \frac{\delta(\bar{p}' - \bar{p}_{J_x^+}^{n',m'})}{\Delta l'_x} \right) \frac{e^{-jk|\bar{p}_{J_x^-}^{n,m}-\bar{p}'|}}{4\pi|\bar{p}_{J_x^-}^{n,m}-\bar{p}'|} dS' \right] \\
 & - \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[\sum_{n=1}^{N_x-1} \sum_{m=1}^{N_y} J_x^{n',m'} \left(\iint_{\Delta S'_{J_x^-}} \frac{\delta(\bar{p}' - \bar{p}_{J_x^-}^{n',m'})}{\Delta l'_x} - \iint_{\Delta S'_{J_x^+}} \frac{\delta(\bar{p}' - \bar{p}_{J_x^+}^{n',m'})}{\Delta l'_x} \right) \frac{e^{-jk|\bar{p}_{J_x^+}^{n,m}-\bar{p}'|}}{4\pi|\bar{p}_{J_x^+}^{n,m}-\bar{p}'|} dS' \right] \quad (B.13) \\
 & + \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[\sum_{n=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y-1} J_y^{n',m'} \left(\iint_{\Delta S'_{J_y^-}} \frac{\delta(\bar{p}' - \bar{p}_{J_y^-}^{n',m'})}{\Delta l'_y} - \iint_{\Delta S'_{J_y^+}} \frac{\delta(\bar{p}' - \bar{p}_{J_y^+}^{n',m'})}{\Delta l'_y} \right) \frac{e^{-jk|\bar{p}_{J_y^-}^{n,m}-\bar{p}'|}}{4\pi|\bar{p}_{J_y^-}^{n,m}-\bar{p}'|} dS' \right] \\
 & - \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[\sum_{n=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y-1} J_y^{n',m'} \left(\iint_{\Delta S'_{J_y^-}} \frac{\delta(\bar{p}' - \bar{p}_{J_y^-}^{n',m'})}{\Delta l'_y} - \iint_{\Delta S'_{J_y^+}} \frac{\delta(\bar{p}' - \bar{p}_{J_y^+}^{n',m'})}{\Delta l'_y} \right) \frac{e^{-jk|\bar{p}_{J_y^+}^{n,m}-\bar{p}'|}}{4\pi|\bar{p}_{J_y^+}^{n,m}-\bar{p}'|} dS' \right]
 \end{aligned}$$

Uma vez que podemos escrever as integrais do potencial escalar como,

$$\Phi_{xx}(n', m', n, m) = \iint_{\Delta S'} P_{J_x}^{n',m'}(\bar{p}') \frac{e^{-jk|\bar{p}_{J_x}^{n,m}-\bar{p}'|}}{4\pi|\bar{p}_{J_x}^{n,m}-\bar{p}'|} dS' = \iint_{\Delta S'} \frac{e^{-jk|\bar{p}_{J_x}^{n,m}-\bar{p}_{J_x}^{n',m'}|}}{4\pi|\bar{p}_{J_x}^{n,m}-\bar{p}_{J_x}^{n',m'}|} dS' \quad (B.14a)$$

$$\Phi_{xx}^{--}(n', m', n, m) = \iint_{\Delta S'_{J_x^-}} \frac{\delta(\bar{p}' - \bar{p}_{J_x^-}^{n', m'})}{\Delta l'_x} \frac{e^{-jk|\bar{p}_{J_x^-}^{n, m} - \bar{p}'|}}{4\pi|\bar{p}_{J_x^-}^{n, m} - \bar{p}'|} dS' = \iint_{\Delta S'_{J_x^-}} \frac{e^{-jk|\bar{p}_{J_x^-}^{n, m} - \bar{p}_{J_x^-}^{n', m'}|}}{4\pi\Delta l'_x|\bar{p}_{J_x^-}^{n, m} - \bar{p}_{J_x^-}^{n', m'}|} dS' \quad (\text{B.14b})$$

$$\Phi_{xx}^{+-}(n', m', n, m) = \iint_{\Delta S'_{J_x^+}} \frac{\delta(\bar{p}' - \bar{p}_{J_x^+}^{n', m'})}{\Delta l'_x} \frac{e^{-jk|\bar{p}_{J_x^+}^{n, m} - \bar{p}'|}}{4\pi|\bar{p}_{J_x^+}^{n, m} - \bar{p}'|} dS' = \iint_{\Delta S'_{J_x^+}} \frac{e^{-jk|\bar{p}_{J_x^+}^{n, m} - \bar{p}_{J_x^+}^{n', m'}|}}{4\pi\Delta l'_x|\bar{p}_{J_x^+}^{n, m} - \bar{p}_{J_x^+}^{n', m'}|} dS' \quad (\text{B.14c})$$

$$\Phi_{xx}^{-+}(n', m', n, m) = \iint_{\Delta S'_{J_x^-}} \frac{\delta(\bar{p}' - \bar{p}_{J_x^-}^{n', m'})}{\Delta l'_x} \frac{e^{-jk|\bar{p}_{J_x^+}^{n, m} - \bar{p}'|}}{4\pi|\bar{p}_{J_x^+}^{n, m} - \bar{p}'|} dS' = \iint_{\Delta S'_{J_x^-}} \frac{e^{-jk|\bar{p}_{J_x^+}^{n, m} - \bar{p}_{J_x^-}^{n', m'}|}}{4\pi\Delta l'_x|\bar{p}_{J_x^+}^{n, m} - \bar{p}_{J_x^-}^{n', m'}|} dS' \quad (\text{B.14d})$$

$$\Phi_{xx}^{++}(n', m', n, m) = \iint_{\Delta S'_{J_x^+}} \frac{\delta(\bar{p}' - \bar{p}_{J_x^+}^{n', m'})}{\Delta l'_x} \frac{e^{-jk|\bar{p}_{J_x^+}^{n, m} - \bar{p}'|}}{4\pi|\bar{p}_{J_x^+}^{n, m} - \bar{p}'|} dS' = \iint_{\Delta S'_{J_x^+}} \frac{e^{-jk|\bar{p}_{J_x^+}^{n, m} - \bar{p}_{J_x^+}^{n', m'}|}}{4\pi\Delta l'_x|\bar{p}_{J_x^+}^{n, m} - \bar{p}_{J_x^+}^{n', m'}|} dS' \quad (\text{B.14e})$$

Analogamente para as partes contendo as soluções das correntes em y . Entende-se fisicamente que a função δ representaria a presença e posição da densidade de cargas discretas negativas e positivas que originam e terminam, tanto as densidade de corrente discretas J_x como as densidades de correntes discretas J_y . Reorganizando a equação ??

$$\begin{aligned} \Delta V_x^{n, m} &= Z_s^{n, m} J_x^{n, m} \Delta l_x + j\omega\mu\Delta l_x \sum_{n'=1}^{N_y} \sum_{m'=1}^{N_x-1} \Phi_{xx}(n', m', n, m) \\ &+ \frac{1}{j\omega\epsilon} \sum_{n'=1}^{N_y} \sum_{m'=1}^{N_x-1} (\Phi_{xx}^{++}(n', m', n, m) - \Phi_{xx}^{+-}(n', m', n, m) - \Phi_{xx}^{-+}(n', m', n, m) + \Phi_{xx}^{--}(n', m', n, m)) \\ &+ \frac{1}{j\omega\epsilon} \sum_{n'=1}^{N_y-1} \sum_{m'=1}^{N_x} (\Phi_{xy}^{++}(n', m', n, m) - \Phi_{xy}^{+-}(n', m', n, m) - \Phi_{xy}^{-+}(n', m', n, m) + \Phi_{xy}^{--}(n', m', n, m)) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Onde os termos com expoente xx referem ao efeito da convolução entre elementos de densidade de carga ou corrente x em x , os termos com expoente xy , o efeito da convolução dos elementos de densidade de carga em ou corrente y em x . Seguindo procedimento analogo, a tensão ΔV_y pode ser encontrada.

B.0.2 Representação Matricial

Os índices n, m referentes, respectivamente, as linhas e colunas da discretização, tanto para a densidade de corrente em x quanto em y , serão transformados em um índice único I ou J . No caso o J se refere ao elemento analisado, e I referente a contribuição dos outros elementos.

$$\begin{cases} I, J = (n-1)N_x + m, \text{ sendo } J_x^{nm} = J_J \text{ ou } J_I \\ I, J = N_y(N_x - 1) + (n-1)N_x + m, \text{ sendo } J_y^{nm} = J_J \text{ ou } J_I \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

Os termos com somatórios, representam o campo espalhado, que em sua essência possui a convolução da função de green com os outros elementos de corrente em x e/ou y , representados como Z_{JI} . Logo, a tensão no elemento J em função dos outros elementos, pode ser expressa como a seguir,

$$\Delta V_J = Z_s^J J_I \Delta l_J - \sum_{I=1}^{N_t} Z_{JI} J_I \quad (\text{B.17})$$

Um obstáculo para essa formulação é que o potencial magnético em x não depende da corrente em y e, vice-versa. Para remediar, utiliza-se um produto escalar do vetor comprimento $\overline{\Delta l}_J$ do elemento de densidade de corrente J com o vetor comprimento $\overline{\Delta l}_I$ do elemento de densidade de corrente I , para assim, anular o efeito da componente ortogonal. Portanto, temos,

$$Z_{JI} = -j\omega\mu\overline{\Delta l}_J \cdot \overline{\Delta l}_I \Phi_{JI} - \frac{1}{j\omega\epsilon}(\Phi_{JI}^{++} - \Phi_{JI}^{+-} - \Phi_{JI}^{-+} + \Phi_{JI}^{--}) \quad (\text{B.18})$$

Já as equações do potencial escalar são similares, tanto para a J_x quanto para J_y , dependentes apenas do vetor posição positivo ou negativo das cargas. Logo, generaliza-se a convolução do vetor magnético e do potencial escalar para os elementos JJ

$$\Phi_{JI} = \frac{1}{j\omega\epsilon\Delta l_I} \iint_{\Delta S'} \frac{e^{-jkR_{JI}}}{4\pi R_{JI}} dS' \bigg|_{P_{J_I}^{+}}^{P_{J_I}^{-}} \quad (\text{B.19a})$$

$$\Phi_{JI}^{++} = \frac{1}{j\omega\epsilon\Delta l_I} \iint_{\Delta S'} \frac{e^{-jkR_{JI}^{++}}}{4\pi R_{JI}^{++}} dS' \bigg|_{P_{J_I}^{+}}^{P_{J_J}^{+}} \quad (\text{B.19b})$$

$$\Phi_{JI}^{+-} = \frac{1}{j\omega\epsilon\Delta l_I} \iint_{\Delta S'} \frac{e^{-jkR_{JI}^{+-}}}{4\pi R_{JI}^{+-}} dS' \bigg|_{P_{J_I}^{+}}^{P_{J_J}^{-}} \quad (\text{B.19c})$$

$$\Phi_{JI}^{-+} = \frac{1}{j\omega\epsilon\Delta l_I} \iint_{\Delta S'} \frac{e^{-jkR_{JI}^{-+}}}{4\pi R_{JI}^{-+}} dS' \bigg|_{P_{J_I}^{-}}^{P_{J_J}^{+}} \quad (\text{B.19d})$$

$$\Phi_{JI}^{--} = \frac{1}{j\omega\epsilon\Delta l_I} \iint_{\Delta S'} \frac{e^{-jkR_{JI}^{--}}}{4\pi R_{JI}^{--}} dS' \bigg|_{P_{J_I}^{-}}^{P_{J_J}^{-}} \quad (\text{B.19e})$$

Os pontos (+ou-) significam o vetor posição das cargas negativas e positivas do elemento de densidade de corrente I ou J , e R_{JI} a distâncias entre elas. As integrais são aproximadas numericamente para $kR \ll 1$

$$\Phi = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\Delta l} \left[\Delta l \times \ln \frac{(\sqrt{\Delta l^2 + \Delta^2} + \Delta)}{(\sqrt{\Delta l^2 + \Delta^2} - \Delta)} + \Delta \times \ln \frac{(\sqrt{\Delta l^2 + \Delta^2} + \Delta)}{(\sqrt{\Delta l^2 + \Delta^2} - \Delta)} - jk\Delta l \times \Delta \right], & I = J \\ \frac{1}{4\pi\Delta l} \frac{e^{-jkR}}{R} (\Delta l \times \Delta), & I \neq J \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

Deste modo, pode-se construir um sistema matricial. No caso teremos a transformação de uma matriz de tensão $[\Delta V_x^{n,m}]_{N_y \times (N_x - 1)}$ e uma matriz $[\Delta V_y^{n,m}]_{(N_y - 1) \times N_x}$, como matrizes colunas em uma única matriz coluna com $N_t = N_y(N_x - 1) + N_x(N_y - 1) = N_{xx} + N_{yy}$ elementos;

$$[\Delta V_J]_{N_t \times 1} = \begin{bmatrix} [\Delta V_J^x]_{N_{xx} \times 1} \\ [\Delta V_J^y]_{N_{yy} \times 1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

Analogamente, para os elementos de densidade de corrente, uma única matriz coluna,

$$[J_I]_{N_t \times 1} = \begin{bmatrix} [J_I^x]_{N_{xx} \times 1} \\ [J_I^y]_{N_{yy} \times 1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

O termo da impedância superficial é representada por uma matriz diagonal, pois considera-se um elementos isotrópicos e simétricos,

$$[Z_s] = \begin{bmatrix} [Z_s^{xx}]_{N_{xx} \times N_{xx}} & [O]_{N_{xx} \times N_{yy}} \\ [O]_{N_{yy} \times N_{xx}} & [Z_s^{yy}]_{N_{yy} \times N_{yy}} \end{bmatrix} [\Delta l_J]_{N_t \times N_t} \quad (\text{B.23})$$

Onde,

$$[Z_s^{xx}] = [\text{diag}((Z_s^x)_J)]_{N_{xx} \times N_{xx}} \quad (\text{B.24})$$

$$[Z_s^{yy}] = [\text{diag}((Z_s^y)_J)]_{N_{yy} \times N_{yy}} \quad (\text{B.25})$$

mas no caso de anisotropia, a matriz não seria diagonal,

$$[Z_s] = \begin{bmatrix} [Z_s^{xx}]_{N_{xx} \times N_{xx}} & [Z_s^{xy}]_{N_{xx} \times N_{yy}} \\ [Z_s^{yx}]_{N_{yy} \times N_{xx}} & [Z_s^{yy}]_{N_{yy} \times N_{yy}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.26})$$

A matriz impedância do campo espalhado $[Z_{IJ}]_{N_t \times N_t}$ pode ser decomposta entre a Matriz $[M]$ do vetor magnético e a matriz $[C]$ do potencial escalar das cargas elétricas. Os elementos dessas matrizes são definidas a seguir,

$$M_{JI} = j\omega\mu\bar{\Delta l}_J \cdot \bar{\Delta l}_I \Phi_{JI} \quad (\text{B.27})$$

$$C_{JI} = \frac{1}{j\omega\epsilon} (\Phi_{JI}^{++} - \Phi_{JI}^{+-} - \Phi_{JI}^{-+} + \Phi_{JI}^{--}) \quad (\text{B.28})$$

Logo,

$$[Z_{JI}]_{N_t \times N_t} = -[M_{JI}]_{N_t \times N_t} - [C]_{N_t \times N_t} \quad (\text{B.29})$$

$$[Z_{JI}]_{N_t \times N_t} = - \begin{bmatrix} [M_{JI}^{xx}]_{N_{xx} \times N_{xx}} & [O]_{N_{xx} \times N_{yy}} \\ [O]_{N_{yy} \times N_{xx}} & [M_{JI}^{yy}]_{N_{yy} \times N_{yy}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [C_{JI}^{xx}]_{N_{xx} \times N_{xx}} & [C_{JI}^{xy}]_{N_{xx} \times N_{yy}} \\ [C_{JI}^{yx}]_{N_{yy} \times N_{xx}} & [C_{JI}^{yy}]_{N_{yy} \times N_{yy}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.30})$$

Portanto temos, a tensão pode ser escrita na forma matricial

$$[\Delta V_J]_{N_t \times 1} = \{[Z_s^J \Delta l_J] - [Z_{JI}]\}_{N_t \times N_t} \times [J_I]_{N_t \times 1} \quad (\text{B.31})$$

e a densidade de corrente,

$$[J_I]_{N_t \times 1} = \{[Z_s^J \Delta l_J] - [Z_{JI}]\}_{N_t \times N_t}^{-1} \times [\Delta V_J]_{N_t \times 1} \quad (\text{B.32})$$

Se representarmos com matrizes de acomplamento para vizualizar,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [J_I^x]_{N_{xx} \times 1} \\ [J_I^y]_{N_{yy} \times 1} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} [Z_s^{xx} \Delta l_J]_{N_{xx} \times N_{xx}} & [O]_{N_{xx} \times N_{yy}} \\ [O]_{N_{yy} \times N_{xx}} & [Z_s^{yy} \Delta l_J]_{N_{yy} \times N_{yy}} \end{bmatrix} \right. \\ & + \begin{bmatrix} [M_{JI}^{xx}]_{N_{xx} \times N_{xx}} & [O]_{N_{xx} \times N_{yy}} \\ [O]_{N_{yy} \times N_{xx}} & [M_{JI}^{yy}]_{N_{yy} \times N_{yy}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{JI}^{xx}]_{N_{xx} \times N_{xx}} & [C_{JI}^{xy}]_{N_{xx} \times N_{yy}} \\ [C_{JI}^{yx}]_{N_{yy} \times N_{xx}} & [C_{JI}^{yy}]_{N_{yy} \times N_{yy}} \end{bmatrix} \left. \right\}^{-1} \begin{bmatrix} [\Delta V_J^x]_{N_{xx} \times 1} \\ [\Delta V_J^y]_{N_{yy} \times 1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.33}) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} [J_I^x]_{N_{xx} \times 1} \\ [J_I^y]_{N_{yy} \times 1} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} [Y_{IJ}^{xx}]_{N_{xx} \times N_{xx}} & [Y_{IJ}^{xy}]_{N_{xx} \times N_{yy}} \\ [Y_{IJ}^{yx}]_{N_{yy} \times N_{xx}} & [Y_{IJ}^{yy}]_{N_{yy} \times N_{yy}} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} [\Delta V_J^x]_{N_{xx} \times 1} \\ [\Delta V_J^y]_{N_{yy} \times 1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.34})$$