

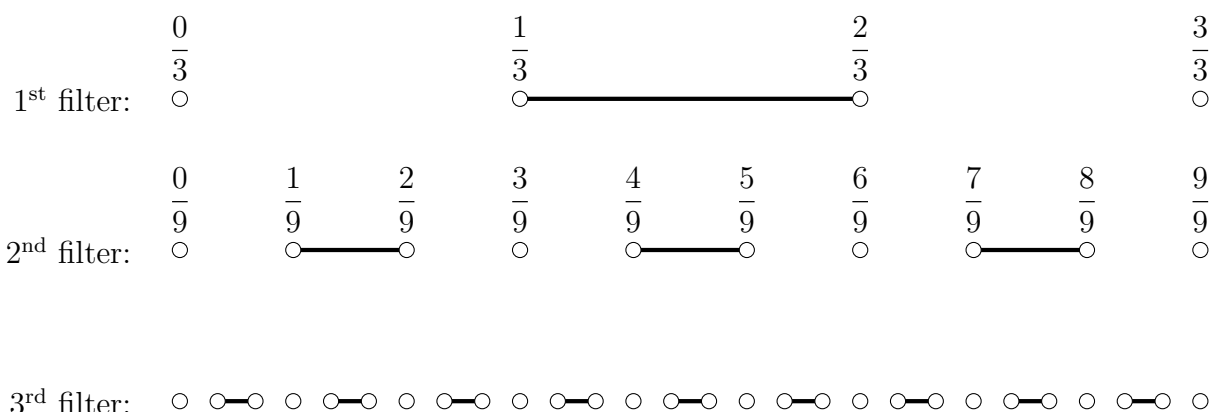
# Problem S5: The Filter

## Problem Description

Alice, the mathematician, likes to study real numbers that are between 0 and 1. Her favourite tool is the *filter*.

A filter covers part of the number line. When a number reaches a filter, two events can happen. If a number is not covered by the filter, the number will pass through. If a number is covered, the number will be removed.

Alice has infinitely many filters. Her first 3 filters look like this:



In general, the  $k$ -th filter can be defined as follows:

- Consider the number line from 0 to 1.
- Split this number line into  $3^k$  equal-sized pieces. There are  $3^k + 1$  points and  $3^k$  intervals.
- The  $k$ -th filter consists of the 2<sup>nd</sup> interval, 5<sup>th</sup> interval, 8<sup>th</sup> interval, and in general, the  $(3i - 1)$ <sup>th</sup> interval. The points are **not** part of the  $k$ -th filter.

Alice has instructions for constructing the *Cantor set*. Start with the number line from 0 to 1. Apply all filters on the number line, and remove the numbers that are covered. The remaining numbers form the Cantor set.

Alice wants to research the Cantor set, and she came to you for help. Given an integer  $N$ , Alice would like to know which fractions  $\frac{x}{N}$  are in the Cantor set.

## Input Specification

The first line contains the integer  $N$ .

The following table shows how the available 15 marks are distributed.

La version française figure à la suite de la version anglaise.

Marks	Bounds on $N$	Additional Constraints
3 marks	$3 \leq N \leq 3^{18}$	$N$ is a power of 3
4 marks	$2 \leq N \leq 10^5$	None
8 marks	$2 \leq N \leq 10^9$	None

### Output Specification

Output all integers  $x$  where  $0 \leq x \leq N$  and  $\frac{x}{N}$  is in the Cantor set.

Output the answers in increasing order. The number of answers will not exceed  $10^6$ .

### Sample Input

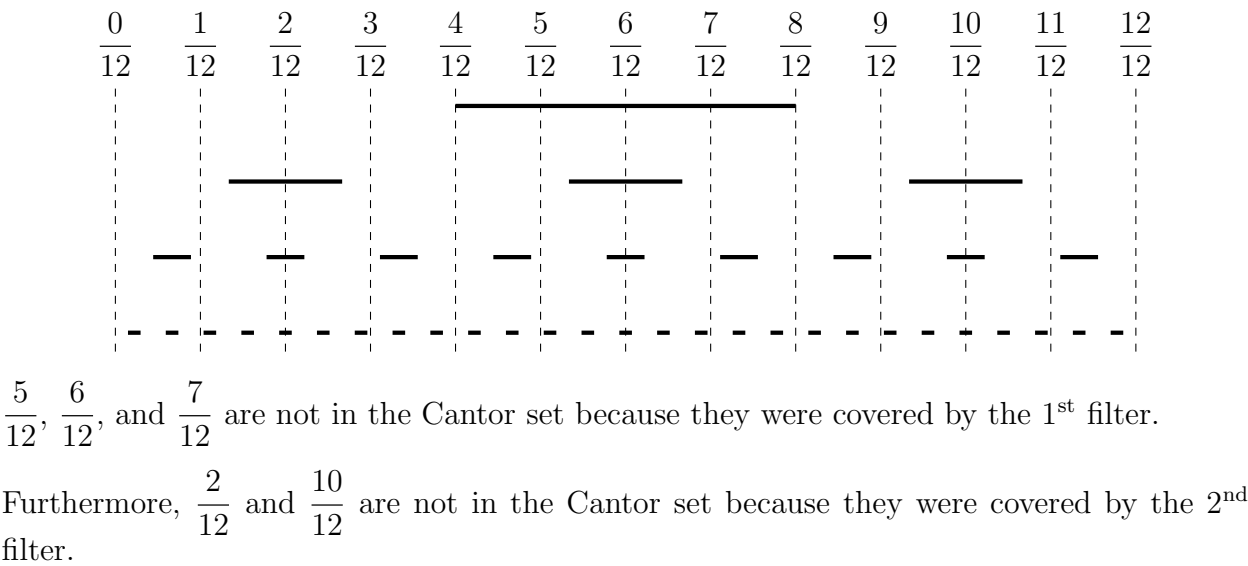
12

### Output for Sample Input

0  
1  
3  
4  
8  
9  
11  
12

### Explanation of Output for Sample Input

Here is a diagram of the fractions and the first 4 filters. In reality, there are infinitely many filters.



It can be shown that the remaining fractions will pass through all filters.

La version française figure à la suite de la version anglaise.

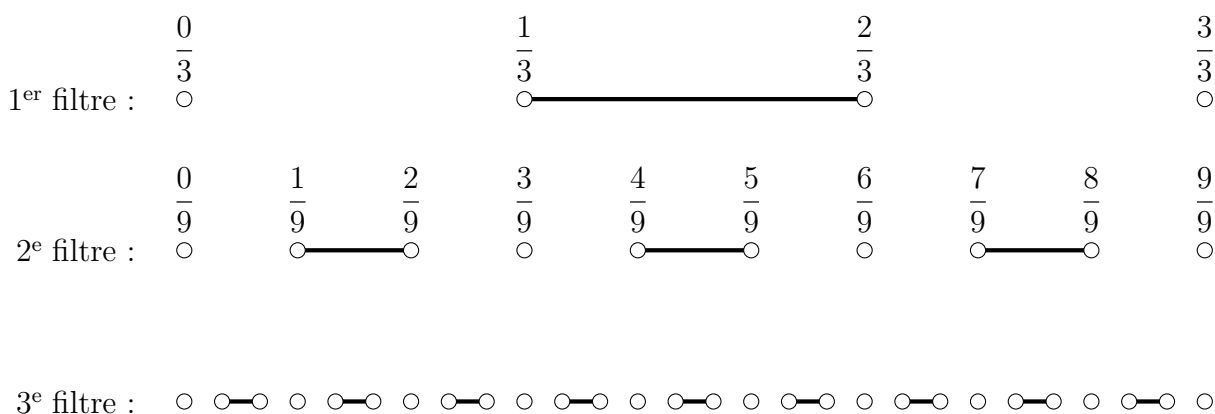
## Problème S5 : Le filtre

### Énoncé du problème

Alice, la mathématicienne, aime étudier les nombres réels compris entre 0 et 1. Son outil préféré est le *filtre*.

Un filtre couvre une partie de la droite numérique. Lorsqu'un nombre atteint un filtre, deux événements peuvent se produire. Si le nombre n'est pas dans l'intervalle « couvert » par le filtre, le nombre passera à travers le filtre. Si un nombre est situé dans l'intervalle « couvert » par le filtre, le nombre est supprimé.

Alice a un nombre infini de filtres. Voici ses 3 premiers filtres :



En général, on peut définir le  $k^{\text{ième}}$  filtre comme suit :

- Considérons la droite numérique de 0 à 1.
- Diviser cette droite en  $3^k$  sections de taille égale. Il y a  $3^k + 1$  points et  $3^k$  intervalles.
- Le  $k^{\text{ième}}$  filtre est composé du 2<sup>e</sup> intervalle, du 5<sup>e</sup> intervalle, du 8<sup>e</sup> intervalle et, de manière générale, du  $(3i - 1)^{\text{e}}$  intervalle. Les points **ne font pas** partie du  $k^{\text{ième}}$  filtre.

Alice a des instructions pour construire *l'ensemble de Cantor* : commencer d'abord avec la droite numérique de 0 à 1, appliquer tous les filtres sur la droite numérique et supprimer les nombres qui sont couverts. Les nombres restants forment l'ensemble de Cantor.

Alice veut mener des recherches sur l'ensemble de Cantor, elle vient donc susciter votre aide. Étant donné un entier  $N$ , Alice aimerait savoir quelles fractions  $\frac{x}{N}$  sont dans l'ensemble de Cantor.

### Précisions par rapport aux données d'entrée

Le première ligne des données d'entrée contient l'entier  $N$ .

Le tableau suivant indique la manière dont les 15 points disponibles sont répartis.

English version appears before the French version

Points	Bornes de $N$	Contraintes additionnelles
3 points	$3 \leq N \leq 3^{18}$	$N$ est une puissance de 3
4 points	$2 \leq N \leq 10^5$	Aucune
8 points	$2 \leq N \leq 10^9$	Aucune

### Précisions par rapport aux données de sortie

Les données de sortie devraient afficher tous les entiers  $x$  ( $0 \leq x \leq N$ ) pour lesquels  $\frac{x}{N}$  est dans l'ensemble de Cantor.

Les données de sortie devraient afficher les entiers en ordre croissant. Le nombre de réponses ne devrait pas dépasser  $10^6$ .

### Exemple de données d'entrée

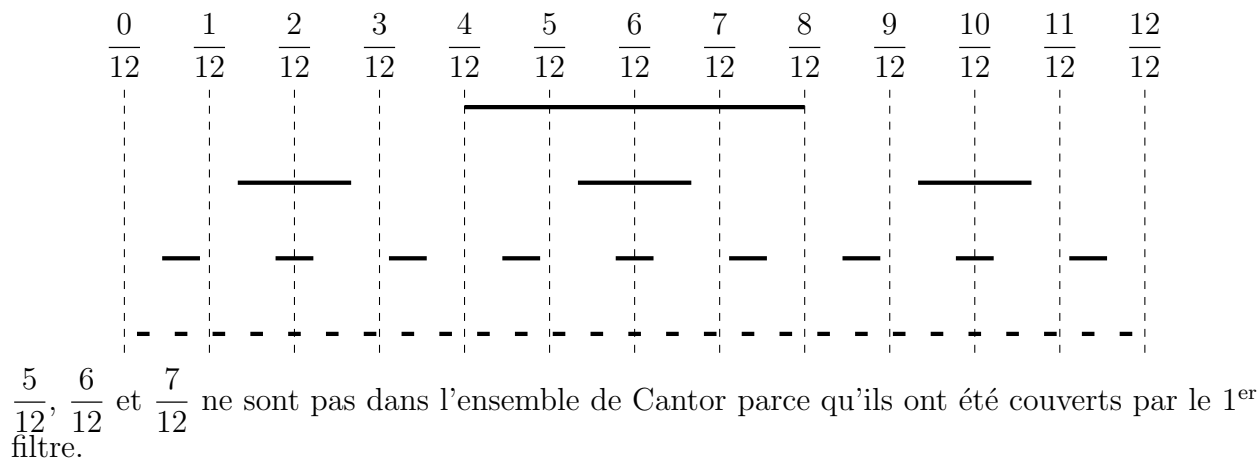
12

### Exemple de données de sortie

0  
1  
3  
4  
8  
9  
11  
12

### Justification des données de sortie

Dans la figure ci-dessous, on voit les fractions et les 4 premiers filtres. Remarquons qu'il y a en réalité un nombre infini de filtres.



De plus,  $\frac{2}{12}$  et  $\frac{10}{12}$  ne sont pas dans l'ensemble de Cantor parce qu'ils ont été couverts par le 2<sup>e</sup> filtre.

Il est possible de démontrer que les fractions restantes passeront à travers tous les filtres.

English version appears before the French version