

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КІЇВСЬКИЙ ПОЛТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»**

**Методи обчислень
МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО КОМП'ЮТЕРНОГО ПРАКТИКУМУ
Для студентів Фізико-технічного інституту**

Київ 2019

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ
МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО КОМП'ЮТЕРНОГО ПРАКТИКУМУ
Для студентів Фізико-технічного інституту

Затверджено на засіданні
навчально-методичної ради ФТІ
Протокол №8 від 31.08.19

Київ 2019

Числові методи. Методичні вказівки до комп'ютерного практикуму. Для студентів Фізико-технічного інституту /Уклад.: Стьопочкина І.В.- К.:2019.-32 с.

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО КОМПЮТЕРНОГО ПРАКТИКУМУ

Для студентів Фізико-технічного інституту

Укладач: Ірина Валеріївна Стьопочкина, к. техн. наук

Відповідальний редактор Литвинова Т.В., канд. техн. наук

Рецензент: Данилов В.Я., д. техн. наук

ЗМІСТ

ВСТУП	4
1 КОМП'ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ № 1. РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ	5
1.1 Теоретичні відомості	5
1.2 Завдання	6
1.3 Область застосування	7
1.4 Варіанти завдань	7
1.5 Вимоги до звіту	7
1.6 Контрольні запитання	8
2 КОМП'ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ № 2. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ (СЛАР) ПРЯМИМИ МЕТОДАМИ	8
2.1 Теоретичні відомості	8
2.2 Область застосування	9
2.3 Завдання	10
2.4 Варіанти завдань	10
2.5 Вимоги до звіту	11
2.6 Контрольні запитання	12
3 КОМП'ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ № 3. РОЗВ'ЯЗАННЯ СЛАР ІТЕРАЦІЙНИМИ МЕТОДАМИ	12
3.1 Теоретичні відомості	12
3.2 Область застосування	13
3.3 Вимоги до звіту	13
3.4 Завдання	14
3.5 Варіанти завдань	14
3.6 Контрольні запитання	14

4 КОМП'ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ № 4. ОБЧИСЛЕННЯ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ	14
4.1 Теоретичні відомості	14
4.2 Область застосування	17
4.3 Завдання	18
4.4 Вимоги до звіту	18
4.5 Варіанти завдань	18
4.6 Контрольні запитання.....	20
5 Комп'ютерний практикум № 5. Інтерполяція	20
5.1 Теоретичні відомості	20
5.2 Область застосувань	23
5.3 Завдання	23
5.4 Вимоги до звіту	23
5.5 Варіанти завдань	24
5.6 Контрольні запитання.....	24
6 КОМП'ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ № 6. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ МЕТОДАМИ РУНГЕ-КУТТА ТА АДАМСА	24
6.1 Теоретичні відомості	24
6.2 Область застосування	27
6.3 Завдання	27
6.4 Вимоги до звіту	27
6.5 Варіанти завдань	28
6.6 Контрольні запитання.....	28
ЛІТЕРАТУРА	29

ВСТУП

В сучасний період розвитку обчислювальної техніки актуальність числових методів, що дозволяють розв'язувати широкий клас задач за допомогою ЕОМ, продовжує зростати. Розробник повинен вміти відокремлювати у загальній проблемі типові задачі та визначати методи, за допомогою можна їх розв'язати, також він повинен інтегрувати розв'язок задачі до специфічних потреб промисловості.

Завдання цього комп'ютерного практикуму полягає в тому, щоб надати студентам досвід застосування числових методів до типових практичних задач прикладної математики із застосуванням ЕОМ.

В якості інструментарію виконання робіт студентам пропонується використати мови програмування С, С++ та відповідні сучасні середовища програмування. Для перевірки правильності виконання робіт пропонується: а)одержати аналітичний розв'язок задачі (якщо можливо); б)визначити правильність виконання за іншими (непрямими) показниками (нев'язки, характер збіжності ітераційного процесу тощо); в)застосувати середовище Mathcad, яке дозволяє у напівавтоматичному режимі одержати розв'язок задачі числовими методами. У кожній роботі окреслюються типові практичні задачі, які можуть бути розв'язані за допомогою методів, що вивчаються.

Темами комп'ютерних практикумів є розв'язання нелінійних рівнянь, розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, знаходження власних чисел та власних векторів, інтерполяція, розв'язання звичайних диференційних рівнянь, - отже, у якості завдань обрано базові задачі, які є необхідними для розв'язку більш складних задач числового моделювання різноманітних процесів оточуючого середовища та промисловості. Зокрема, результати робіт 2,3,6 можуть бути використані при числовому розв'язанні диференційних рівнянь у часткових похідних параболічного, еліптичного та гіперболічного типів.

1 КОМП'ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ № 1. РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

1.1 Теоретичні відомості

Знаходження коренів рівнянь за допомогою числових методів складається з двох етапів:

- 1) Відокремлення коренів: знаходження сукупності проміжків, кожен з яких містить один з коренів рівняння.
- 2) Уточнення коренів: знаходження приблизного значення коренів із заданою точністю ε .

Розглядається рівняння

$$f(x)=0, \quad (1.1)$$

де $f(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, для якого потрібно знайти його дійсні корені x^* .

Передпрограмовий етап виконується письмово із використанням теорем, які допомагають виділити межі розташування додатніх та від'ємних коренів та знайти проміжки, що містять ці корені.

Теорема про границі усіх (комплексних) коренів рівняння

Нехай $A = \max |a_i|$, $i=0,\dots,n-1$; $B = \max |a_i|$, $i=1,\dots,n$.

Тоді всі (комплексні) корені рівняння (1) лежать у кільці

$$\frac{|a_0|}{B + |a_0|} \leq |x^*| \leq \frac{|a_n| + A}{|a_n|}$$

Теорема про верхню межу додатніх коренів

Нехай $B = \max_i |a_i|$, $a_i < 0$;

$m = \max_i :a_i < 0$.

Тоді $R = 1 + \sqrt[n-m]{\frac{B}{a_n}}$ - верхня межа додатніх коренів: $\forall x^* \leq R, f(x^*) = 0$.

Для визначення нижньої межі додатніх коренів стосовно вихідного поліному робимо заміну $x = 1/y$, для верхньої та нижньої межі від'ємних коренів – відповідно заміни $x = -1/y$ та $x = -y$.

Теорема Гюа про наявність комплексних коренів

Якщо $\exists k: 0 < k < n, a_k^2 < a_{k-1} \cdot a_{k+1}$, то рівняння має хоча б одну пару комплексноспряжених коренів.

Теорема Штурма про чередування коренів.

Нехай $f(x) = P_n(x)$ - поліном без кратних коренів. Утворимо послідовність многочленів:

$f_0 = f(x); f_1 = f'(x); f_{i+1} = -[f_{i-1} \bmod f_i], i=1,\dots,n-1$, тобто кожний наступний многочлен є залишком від ділення двох попередніх многочленів, взятым з протилежним знаком. Тоді кількість дійсних коренів полінома $f_0(x)$ на довільному відрізку $[a; b]$ дорівнює різниці між кількістю змін знаку у цій послідовності при $x=a$ та $x=b$.

Програмний етап передбачає застосування одного з нижченаведених методів до кожного з проміжків, отриманих на першому етапі.

Метод бісекції. Нехай відомі кінці інтервалу a та b , який містить лише один корінь функції. Задано точність ϵ . На кожному кроці інтервал ділять навпіл: $c=(a+b)/2$, та залишають той підінтервал, до якого належить корінь. Якщо $f(a)f(c) \leq 0$, то, вочевидь, корінь належить інтервалу (a,c) (в цьому разі слід пересунути точку b до точки c : $b=c$). Якщо $f(b)f(c) \leq 0$, відповідно, слід залишити (c, b) (в цьому разі пересуваємо точку a до точки c : $a=c$). Тепер працюємо із звуженим відрізком $[a,b]$. Цей процес повторюють, поки поточний відрізок не буде звужено до заданих розмірів $|a-b| < \epsilon$. За наближене значення кореня приймають середину останнього відрізку або один з його кінців.

Метод хорд. Сутність методу схожа до методу бісекції, однак, в цьому разі відрізок ділиться не навпіл, а у певній пропорції. Проводиться січна до графіку функції. Точкою перетину її з віссю абсцис ділять відрізок: $c=(af(b)-bf(a))/(f(b)-f(a))$, та залишають той підінтервал, до якого належить корінь. Після звуження відрізку знову проводять січну і т.д. Процес повторюють до тих пір, поки не буде виконано: $|c - c_{prev}| < \epsilon$ або $|f(c)| < \epsilon$. Для успішної роботи методу рекомендовано, щоб на відрізку, який містить шуканий корінь, функція була монотонна та друга її похідна не змінювала знак.

Метод Ньютона (дотичних). Задають початкове наближення x_0 . Проводять дотичні до графіку функції, що дає формулу $x_{k+1} := x_k - f(x_k)/f'(x_k)$. Для успішної роботи методу рекомендовано, щоб на відрізку, який містить шуканий корінь, функція була монотонна та друга її похідна не змінювала знак. В якості початкового наближення обирають один із кінців відрізку, причому відслідковують, щоб дотична, проведена у відповідній точці, не перетнула вісь абцис поза заданим відрізком. Критерій завершення ітерацій: $|x_k - x_{k-1}| < \epsilon$ або $|f(x_k)| < \epsilon$.

Детальний опис методів розвязання нелінійних рівнянь наведено в [1].

1.2 Завдання

1. Здійснити в якості допограмового етапу аналіз та відокремлення коренів за допомогою теорем. Зокрема, визначити кількість дійсних коренів рівняння (теорема Гюа, теорема Штурма), відокремити дійсні корені рівняння (теорема про верхню межу). До аналізу комплексних коренів застосувати теорему про кільце. Результатом цього етапу повинна бути послідовність проміжків, кожен із яких містить лише один дійсний корінь рівняння.

Примітка. Щоб полегшити знаходження поліномів Штурма, дозволяється використовувати функцію `deconv()` системи Matlab, яка реалізує ділення поліномів із залишком. Довідки про функції цього математичного пакета можна знайти в [2].

2. Програмний етап полягає в тому, щоб уточнити корені рівняння методом бісекції, методом хорд, методом дотичних.
3. Порівняти отримані результати, зробити висновки, який метод приводить до меншої кількості ітерацій і чим це зумовлено.

1.3 Область застосування

Задачі, що вимагають розвязання нелінійних рівнянь, зустрічаються у багатьох сферах оточуючого середовища та промисловості. А саме, якщо закони функціонування моделі нелінійні, а процес чи система мають один ступінь свободи (одну незалежну змінну), то ця модель, як правило, буде описуватись одним нелінійним рівнянням. Наприклад, розв'язання нелінійних рівнянь часто зустрічається в рамках математичного моделювання хімічних систем та процесів.

1.4 Варіанти завдань

№ вар.	Вигляд рівняння
1	$2x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 2x + 1 = 0$
2	$x^5 - 3x^4 + 7x^2 - 3 = 0$
3	$x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x - 4 = 0$
4	$-x^4 + 3x^3 - 2x + 4 = 0$
5	$4x^5 - 3x^4 - x^3 + 12 = 0$
6	$2x^3 - 4x^2 - x + 2 = 0$
7	$6x^5 - 3x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x + 2 = 0$
8	$2x^5 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$
9	$x^5 + x^4 - 2x^3 - 9x^2 - 3x - 2 = 0$
10	$-2x^4 + x^3 + 5x^2 - 2x + 7 = 0$

1.5 Вимоги до звіту

Звіт повинен містити:

1. Вихідні дані.
2. Письмове виконання допрограмового етапу, результатом якого повинні бути проміжки, щодо яких проводиться уточнення.

3. Лістинг програми уточнення коренів за методами бісекції, хорд, дотичних (вхідними даними для цієї програми є координати проміжків $[a_i, b_i]$ та коефіцієнти поліному) та результати дії програми. На кожній ітерації методу слід виводити такі дані: номер ітерації, наближене значення кореня, критерій завершення ітерації.

1.6 Контрольні запитання

1. Яку властивість мають корені поліномів Штурма?
2. Який метод уточнення коренів не залежить від виду функції?
3. У яких випадках застосування методів хорд, Ньютона не рекомендовано?
4. Який кінець відрізку слід брати в якості початкового наближення для методу дотичних?
5. Наведіть графічні інтерпретації методів уточнення коренів.

2 КОМП'ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ № 2. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ (СЛАР) ПРЯМИМИ МЕТОДАМИ

2.1 Теоретичні відомості

Будемо розглядати системи вигляду

$$Ax = b, \quad (2.1)$$

де $A (n \times n)$ - матриця системи, b - вектор правої частини, x - вектор розв'язку.

Метод Гауса

Метод складається з двох етапів: а) прямого хода методу (приведення системи (2.1) до еквівалентної системи з трикутною матрицею), б) зворотного ходу (визначення невідомого вектору x). Існує декілька варіантів методу Гауса – схема з вибором головного елемента, схема єдиного ділення та ін (<http://www.mathros.net.ua/metod-gaussa-z-vyborom-golovnogo-elementa.html>).

Метод квадратного кореня.

Метод використовується для розв'язання СЛАР виду (2.1), у яких матриця A є симетричною.

Метод полягає у наступному:

1) Прямий хід: факторизація $A = TT'$, де

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}, \quad T' = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

1.1) Знаходимо елементи t_{ij} матриці T :

$$t_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad t_{1j} = \frac{a_{1j}}{t_{11}} \quad (j > 1),$$

$$t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ik}^2} \quad (1 < i \leq n),$$

$$t_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} t_{ik} t_{jk}}{t_{jj}} \quad (i > j),$$

$$t_{ij} = 0 \quad (j > i).$$

Відповідну транспоновану матрицю T' не формуємо, а використовуємо відповідні компоненти матриці T . Усі наведені далі формули стосуються елементів t_{ij} матриці T .

1.2) Замість вихідної системи розв'язуємо дві наступні системи:

$$Ty = b, \quad T'x = y.$$

Оскільки відповідні матриці трикутні, одразу можна виконати зворотний хід.

2) Зворотний хід.

2.1) Послідовно знаходимо:

$$y_1 = \frac{b_1}{t_{11}}, \quad y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ik} y_k}{t_{ii}} \quad (i > 1),$$

$$x_n = \frac{y_n}{t_{nn}}, \quad x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^n t_{ik} x_k}{t_{ii}} \quad (i < n).$$

Детальний опис цих та інших методів розвязання СЛАР наведено в [1,3,4].

2.2 Область застосування

СЛАР зустрічаються і як самостійні моделі, і як складові моделей (наприклад, при розв'язанні лінійного диференційного рівняння у часткових похідних методом скінчених різниць із неявною схемою приходимо до СЛАР).

Приклад

СЛАР зустрічаються при розв'язанні задач лінійного програмування загального виду для моделювання різних виробничих процесів, транспортних та економічних задач; при розв'язанні задач апроксимації за методом найменших квадратів (СЛАР розв'язують відносно невідомих параметрів апроксимуючої функції).

Нехай n одиниць продукції виготовляється із m різних видів сировини, при цьому на виготовлення одиниці j -го виду продукції витрачається a_{ij} одиниць сировини i -го виду. Загальні витрати сировини i -го виду повинні складати $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = a_i$ (у загальному випадку

замість знаку рівності ставлять \leq). Сумарний прибуток від реалізації продукції z за планом повинен бути максимальним ($z = p_1x_1 + \dots + p_nx_n \rightarrow \max$, де p_i - прибуток від i -го виду продукції).

Отже, слід відшукати таку кількість одиниць кожного виду продукції $x_1,..x_n$, за якої такий прибуток досягається. Далі шукають максимум цієї функції при обмеженнях у виді СЛАР виду:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = a_2;$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = a_m.$$

2.3 Завдання

Розв'язати систему рівнянь з кількістю значущих цифр $m = 6$. Якщо матриця системи симетрична, то розв'язання проводити за методом квадратних коренів, якщо матриця системи несиметрична, то використати метод Гауса. Вивести всі проміжні результати (матриці А, що отримуються в ході прямого ходу методу Гауса, матрицю зворотного ходу методу Гауса, або матрицю T та вектор u для методу квадратних коренів), та розв'язок системи. Навести результат перевірки: вектор нев'язки $r = |b - Ax|$, де x - отриманий розв'язок.

2.4 Варіанти завдань

№ вар.	Матриця системи A	Вектор правої частини b
1	3,81 0,25 1,28 0,75 2,25 1,32 4,58 0,49 5,31 6,28 0,98 1,04 9,39 2,45 3,35 2,28	4,21 6,47 2,38 10,48
2	1,00 0,42 0,54 0,66 0,42 1,00 0,32 0,44 0,54 0,32 1,00 0,22 0,66 0,44 0,22 1,00	0,3 0,5 0,7 0,9
3	8,30 2,62 4,10 1,90 3,92 8,45 8,78 2,46 3,77 7,21 8,04 2,28 2,21 3,65 1,69 6,99	-10,65 12,21 15,45 -8,35

4	2,12 0,42 1,34 0,88 0,42 3,95 1,87 0,43 1,34 1,87 2,98 0,46 0,88 0,43 0,46 4,44	11,172 0,115 0,009 9,349
5	6,92 1,28 0,79 1,15 -0,66 0,92 3,5 1,3 -1,62 1,02 1,15 -2,46 6,1 2,1 1,483 1,33 0,16 2,1 5,44 -18 1,14 -1,68 -1,217 9 -3	11,172 0,115 0,009 9,349 9,249
6	5,5 7,0 6,0 5,5 7,0 10,5 8,0 7,0 6,0 8,0 10,5 9 5,5 7 9 10,5	23 32 33 31
7	7,03 1,22 0,85 1,135 -0,81 0,98 3,39 1,3 -1,63 0,57 1,09 -2,46 6,21 2,1 1,033 1,345 0,16 2,1 5,33 -12 1,29 -1,23 -0,767 6 1	2,1 0,84 2,58 11,96 -1,47
8	3,81 0,25 1,28 1,75 2,25 1,32 5,58 0,49 5,31 7,28 0,98 1,04 10,39 2,45 3,35 2,28	4,21 7,47 2,38 11,48
9	3,81 0,25 1,28 1,75 2,25 1,32 5,58 0,49 5,31 7,28 0,98 1,04 10,39 2,45 3,35 2,28	4,21 8,97 2,38 12,98
10	6,59 1,28 0,79 1,195 -0,21 0,92 3,83 1,3 -1,63 1,02 1,15 -2,46 5,77 2,1 1,483 1,285 0,16 2,1 5,77 -18 0,69 -1,68 -1,217 9 -6	2,1 0,36 3,89 11,04 -0,27

2.5 Вимоги до звіту

Звіт має містити:

- вихідну систему,
- результати по кроках приведення до трикутної форми матриці,
- кінцевий результат (розв'язок рівняння),

- вектор нев'язки,
- лістинг програми.

2.6 Контрольні запитання

1. В чому полягає відмінність схеми Гауса із вибором головного елементу та схеми єдиного ділення?
2. В чому переваги схеми Гауса із вибором головного елементу порівняно із схемою єдиного ділення, схемою повного виключення?
3. Коли факторизація за методом квадратного кореня неможлива для симетричної матриці?

3 КОМП'ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ № 3. РОЗВ'ЯЗАННЯ СЛАР ІТЕРАЦІЙНИМИ МЕТОДАМИ

3.1 Теоретичні відомості

Ітераційними методами є такі, що навіть у припущеннях, що обчислення ведуться без округлень, дозволяють отримати розв'язок системи лише із заданою точністю. До таких методів відносяться метод простої ітерації та метод Зейделя.

Метод простої ітерації

Систему $Ax = b$ приводять до вигляду

$$x = Cx + d, \quad (3.1)$$

де C - деяка матриця, для якої виконується

$$\sum_{j=1}^n |c_{ij}| \leq q < 1 \text{ або } \sum_{i=1}^n |c_{ij}| \leq q < 1, \quad (3.2)$$

d - вектор-стовпець. Умову (3.2) буде виконано, якщо матриця A є матрицею з діагональною

перевагою, для якої $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Елементи матриці шукаємо як $c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, i \neq j$. Діагональні

елементи матриці C дорівнюють нулю. Якщо матриця A не забезпечує виконання (3.2), тобто не є матрицею з діагональною перевагою, її приводять до такої за допомогою еквівалентних перетворень.

Виходячи з довільного вектора $x^{(0)}$ будують ітераційний процес:

$$x^{(k+1)} := Cx^{(k)} + d.$$

Критерій закінчення ітераційного процесу:

$$\frac{1}{1-q} \max_j |x_j^{k+1} - x_j^k| < \varepsilon.$$

Метод Зейделя.

Цей метод – модифікація методу простої ітерації.

Обчислення за методом Зейделя ведуться за формулами:

$$x_1^{(k+1)} = c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + \dots + c_{1n}x_n^{(k)} + d_1;$$

$$x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k+1)} + c_{22}x_2^{(k)} + \dots + c_{2n}x_n^{(k)} + d_2;$$

$$\dots$$

$$x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k+1)} + c_{n2}x_2^{(k+1)} + \dots + c_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + c_{nn}x_n^{(k)} + d_n.$$

Для застосування методу Зейделя діагональна перевага матриці А бажана, але не необхідна.

Показано, що процес Зейделя збігається для будь-якої симетричної додатньо визначеної матриці.

Критерій закінчення ітерацій: $\max_j |x_j^{k+1} - x_j^k| < \varepsilon$.

3.2 Область застосування

Ітераційні методи розвязання СЛАР зручні для реалізації на ЕОМ. Але не завжди їхнє застосування характеризується обчислювальною ефективністю. Збіжність ітераційних методів може бути досить повільною, особливо у випадках, коли система має велику розмірність та є пагано обумовленою ($\|A\| \|A^{-1}\|$ - велике). Заздалегідь для великої системи це важко передбачити.

Діагональну перевагу для системи, що розвязується, забезпечити теж не завжди вдається. Отже, в деяких випадках доцільніше використати прямі методи розвязку систем, які мають передбачуваний час виконання. Наприклад, метод Гауса, що має обчислювальну складність $O(n^3)$, де n - розмірність матриці.

3.3 Вимоги до звіту

Для методу простої ітерації навести письмовий етап приведення матриці до діагональної переваги; лістинг програми та результати її дії (на кожній ітерації вивести номер ітерації, наближене значення розв'язку, значення критерію).

Для методу Зейделя навести письмовий етап приведення системи до а)діагональної переваги та б)виду $A^T Ax = A^T b$. Виконати розрахунки для цих двох варіантів вхідних матриць. Порівняти швидкість збіжності. Вміст звіту такий самий, як і для методу простої ітерації.

Таким чином, звіт має містити:

- письмовий етап приведення матриці до діагональної переваги,
- результати перших трьох та останньої ітерацій методу,
- вектор нев'язки на кожній ітерації,
- лістинг програми.

3.4 Завдання

Якщо матриця не є матрицею із діагональною перевагою, привести систему до еквівалентної, у якій є діагональна перевага (письмово). Реалізувати програму, що реалізує розв'язання за ітераційним методом, який відповідає заданому варіантові. Обчислення проводити з $\varepsilon = 10^{-4}$. Для кожної ітерації розраховувати вектор нев'язки $r = |b - Ax|$, де x - отриманий розв'язок.

3.5 Варіанти завдань

Систему для розв'язання взяти таку саму, як у варіанті для комп. практ. 2. Метод розв'язання визначається так: метод простої ітерації для парних варіантів та метод Зейделя для непарних варіантів.

3.6 Контрольні запитання

1. В чому полягає основна відмінність прямих та ітераційних методів розв'язання СЛАР?
2. Який метод буде збігатись швидше при однакових вихідних даних – метод Зейделя чи метод простої ітерації?
3. Чи необхідний для методу Зейделя етап приведення до діагональної переваги? Чому?
4. Виведіть оцінку точності для метода простої ітерації.

4 КОМП'ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ № 4. ОБЧИСЛЕННЯ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ

4.1 Теоретичні відомості

Власним вектором \bar{x}_i матриці A , якому відповідає власне значення λ_i , називається ненульовий розв'язок системи рівнянь $(A - \lambda_i I)\bar{x}_i = 0$. Рівняння $\det(A - \lambda I) = 0$ називається характеристичним. Коренями цього рівняння є власні числа.

Метод Крілова

Метод базується на теоремі Гамільтона-Келі про те, що кожна матриця є коренем свого характеристичного полінома, тобто

$$(-1)^n A^n + p_1 A^{n-1} + \dots + p_n I = 0.$$

Тому для довільного вектора $\bar{y}_0 \neq 0$ виконується рівність:

$$(-1)^n A^n \bar{y}_0 + p_1 A^{n-1} \bar{y}_0 + \dots + p_n \bar{y}_0 = 0. \quad (4.1)$$

Це спiввiдношення представляє собою систему лiнiйних рiвнянь вiдносно невiдомих p_1, p_2, \dots, p_n - коефiцiєнтiв характеристичного полiнома. Позначимо $A^k \bar{y}_0 = \bar{y}_k = (y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{nk})'$.

Одержано систему вiдносно невiдомих p_1, \dots, p_n , використовуючи (4.1):

$$\left. \begin{array}{l} y_{1n-1}p_1 + y_{1n-2}p_2 + \dots + p_n y_{10} = (-1)^{n+1} y_{1n} \\ y_{2n-1}p_1 + y_{2n-2}p_2 + \dots + p_n y_{20} = (-1)^{n+1} y_{2n} \\ \dots \\ y_{nn-1}p_1 + y_{nn-2}p_2 + \dots + p_n y_{n0} = (-1)^{n+1} y_{nn} \end{array} \right\}. \quad (4.2)$$

Таким чином, задають довiльний вектор \bar{y}_0 i будують вектори $\bar{y}_k = A\bar{y}_{k-1}$. Наприклад, для тривимiрного випадку можна задати $\bar{y}_0 = (1, 0, 0)^\top$. Початковий вектор потрiбно задавати так, щоб система (4.2) була невиродженою. Метод не працює, якщо матриця A має кратнi власнi значення.

Результатом розв'язання системи є значення коефiцiєнтiв, за якими будують характеристичний полiном та розв'язують вiдповiдне рiвняння, знаходячи власнi числа.

Метод Данилевського

За цим методом матриця A подiбними перетвореннями $M = M_{n-1}M_{n-2}\dots M_1$ приводиться до вигляду у формi Фробенiуса $P = M^{-1}AM$, причому $\det M \neq 0$:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

У матрицi (4.3) елементи пiд головною дiагоналлю - одиницi. Характеристичний полiном для (4.3) будується розкриттям характеристичного визначника матрицi P по першому рядку. Вiн, внаслiдок подiбностi матриць A та P, є також i характеристичним полiномом матрицi A.

Приведення до вигляду (4.3) здiйснюється послiдовним перетворенням рядкiв, починаючи з останнього. На першому кроцi множимо матрицю A справа на матрицю

$$M_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn-1}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn-1}} & \dots & \dots & \frac{1}{a_{nn-1}} & -\frac{a_{nn}}{a_{nn-1}} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

При цьому останнiй рядок матрицi AM_{n-1} матиме вигляд

$$(0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0).$$

Для збереження подiбностi множимо AM_{n-1} злiва на матрицю

$$M_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & .. & 0 & 0 \\ 0 & 1 & .. & .. & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & .. & a_{nn-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & .. & .. & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Останній рядок при цьому не змінюється. Аналогічно слід перетворити і інші рядки матриці

A. Наприклад, перетворення M_{n-2}, M_{n-2}^{-1} будуть мати вид:

$$M_{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & .. & 0 & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{n-11}}{a_{n-1n-2}} & -\frac{a_{n-12}}{a_{n-1n-2}} & .. & \frac{1}{a_{n-1n-2}} & -\frac{a_{n-1n-1}}{a_{n-1n-2}} & -\frac{a_{n-1n}}{a_{n-1n-2}} \\ 0 & 0 & .. & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & .. & .. & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{n-2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & 1 & .. & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{n-11} & a_{n-12} & .. & .. & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & .. & .. & 1 & 0 \\ 0 & 0 & .. & .. & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ітераційний метод Якобі

Метод діє для симетричних матриць.

Обертанням будемо називати перетворення координат за допомогою матриці

$$T_{ij} = \begin{cases} t_{kk} = 1, k \neq i, k \neq j \\ t_{ii} = c, t_{jj} = c, \\ t_{ij} = s, t_{ji} = -s \end{cases}, \quad c^2 + s^2 = 1. \quad (4.4)$$

$T_{ij}, i < j$ – матриця обертання.

Метод заснований на підборі нескінченної послідовності обертань, які перетворюють вихідну матрицію на діагональну. На діагоналі цієї матриці містяться відповідні власні числа матриці.

Сферичною нормою матриці A будемо називати величину

$$S_A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2. \quad (4.5)$$

Розіб'ємо (4.5) на діагональну та недіагональну частини:

$$S_d = \sum_{i=1}^n a_{ii}^2, S_{nd} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n a_{ij}^2.$$

Ітераційний метод Якобі передбачає збереження сферичної норми при обертаннях при зменшенні недіагональної частини.

При елементарному перетворенні $C = T_j^T A T_j$ недіагональні елементи a_{ki}, a_{kj} та a_{ik}, a_{jk} при $k \neq i, j$ змінюються так, що попарні суми їхніх квадратів зберігаються. Окрім цих елементів ззовні діагоналі змінюється ще a_{ij} . Щоб максимально зменшити S_{nd} за одне обертання, підберемо елементи c, s обертання (4.4) таким чином, щоб анулювати елемент c_{ij} ($c_{ij} = 0$). Оскільки $c_{ij} = c(-sa_{ii} + ca_{ij}) + s(-sa_{ji} + ca_{jj}) = cs(a_{jj} - a_{ii}) + (c^2 - s^2)a_{ij}$, то для визначення c, s маємо систему:

$$\left. \begin{array}{l} (c^2 - s^2)a_{ij} = cs(a_{ii} - a_{jj}) \\ c^2 + s^2 = 1 \end{array} \right\} \text{для знаходження } c, s \quad (\text{http://mathhelpplanet.com/static.php?p=metody-resheniya-zadach-o-sobstvennykh-znacheniyakh-i-vektorakh-matritys}).$$

На кожному обертанні потрібно перетворювати на нуль максимальний за модулем недіагональний елемент, або, що є більш ефективним з обчислювальної точки зору, обирати найбільшу із сум квадратів недіагональних елементів за кожним рядком $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}^2$, та у відповідному рядку визначати найбільший за модулем елемент.

Ці та інші методи знаходження власних пар детально описані в [1,3,4].

4.2 Область застосування

Знаходження власних чисел необхідне у багатьох задачах. Серед них – задачі проектування електричних схем, що супроводжуються розрахунком передаткових функцій, є також і нові, нетрадиційні застосування, наприклад в криптографії.

Приклад

Розглянемо циркулянт P , де p_j – частота зустрічань j -го символа в тексті:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ p_n & p_1 & \dots & p_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n & p_{n-1} & \dots & p_1 \end{pmatrix}.$$

При обчисленні модулів власних чисел цієї матриці було визначено, що власні числа мов однієї мовної групи є корельованими. Отже, вважається, що власні числа циркулянтів можна

прийняти за характеристику мови. Ці властивості можуть бути використані при статистичних атаках на криптографічні системи.

4.3 Завдання

Для методу Данилевського: привести матрицю до вигляду Фробеніуса, розв'язати отриману систему за допомогою методу із практикуму 2 або 3, отримати коефіцієнти характеристичного рівняння. Розв'язати характеристичне рівняння за допомогою одного з методів із практикуму 1 і отримати власні числа.

Для методу Крилова: побудувати систему (4.2), розв'язати її за допомогою методу із практикуму 2 або 3, отримати коефіцієнти характеристичного рівняння, яке розв'язати за допомогою одного з методів із практикуму 1 і отримати власні числа.

Для методу Якобі: привести вихідну матрицю за допомогою подібних обертань (4.4) до майже діагонального вигляду (сума недіагональних елементів має дорівнювати нулю із точністю 10^{-5}), на головній діагоналі будуть міститись наближені значення власних чисел.

Для всіх варіантів: виконати перевірку отриманих результатів за допомогою математичного пакета (наприклад, можна використати функцію Matlab eig()).

4.4 Вимоги до звіту

Звіт має містити:

- для методу Данилевського: матриці M_i та M_i^{-1} ; результиуючу матрицю у формі Фробеніуса, отримане характеристичне рівняння, власні числа.
- для методу Крилова: вихідний вектор, вектори $\bar{y}_k = A\bar{y}_{k-1}$, систему (4.2), отримане характеристичне рівняння, власні числа.
- для методу Якобі: на кожному кроці вивести матриці обертань T_{ij} , $T_{ij}^{'}$, значення сферичної норми, її діагональної та недіагональної частин.

Для всіх варіантів у звіті потрібно навести перевірку у Mathcad чи Matlab.

4.5 Варіанти завдань

№ вар.	Матриця	Метод
--------	---------	-------

1	6,00 1,10 0,97 1,24 1,10 4,00 1,30 0,16 0,97 1,30 5,00 2,10 1,24 0,16 2,10 7,00	Крилова
2	6,26 1,10 0,98 1,25 1,10 4,16 1,00 0,16 0,98 1,00 5,44 2,12 1,25 0,16 2,12 6,00	Данілевського
3	6,29 0,97 1,00 1,1 0,97 4,13 1,30 0,16 1,00 1,30 5,47 2,10 1,1 0,16 2,10 6,07	Якобі
4	6,3 1,07 0,99 1,20 1,07 4,12 1,30 0,16 0,99 1,30 5,48 2,10 1,20 0,16 2,10 6,06	Крилова
5	6,26 1,11 0,78 1,21 1,11 4,16 1,30 0,16 0,78 1,30 5,44 2,10 1,21 0,16 2,10 6,10	Данілевського
6	7,00 0,88 0,93 1,21 0,88 4,16 1,30 0,15 0,93 1,30 6,44 2,00 1,21 0,15 2,00 9,00	Якобі
7	7,22 0,85 0,96 1,23 0,85 4,64 1,40 0,15 0,96 1,40 11,43 2,00 1,23 0,15 2,00 6,10	Крилова
8	5,26 0,10 0,55 1,28 1,10 4,44 1,30 0,16 0,55 1,30 6,44 2,10 1,28 0,16 2,10 8,10	Данілевського
9	7,41 1,13 0,93 1,22 1,13 8,31 1,30 0,16 0,93 1,30 5,42 2,10 1,22 0,16 2,10 11,10	Якобі

10	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>6,20</td><td>1,10</td><td>0,94</td><td>1,21</td></tr> <tr><td>1,10</td><td>4,10</td><td>1,30</td><td>0,16</td></tr> <tr><td>0,94</td><td>1,30</td><td>7,40</td><td>1,10</td></tr> <tr><td>1,21</td><td>0,16</td><td>1,10</td><td>9,10</td></tr> </table>	6,20	1,10	0,94	1,21	1,10	4,10	1,30	0,16	0,94	1,30	7,40	1,10	1,21	0,16	1,10	9,10	Данілевського
6,20	1,10	0,94	1,21															
1,10	4,10	1,30	0,16															
0,94	1,30	7,40	1,10															
1,21	0,16	1,10	9,10															

4.6 Контрольні запитання

1. Які рядки та стовпці матриці C змінюють обертання T_{ij} порівняно із вихідною A в методі Якобі?
2. Як за методом Якобі визначити власні вектори матриці A за результуючою матрицею C , знаючи сукупність перетворень $\{T_{ij}\}$?
3. Які елементи матриці будуть зменшуватися при обертаннях за методом Якобі, а які будуть збільшуватися?
4. Коли метод Данилевського неможливо застосувати?
5. У яких випадках система (4.2) буде виродженою?
6. Показати, що характеристичні поліноми матриці Фробеніуса та вихідної матриці будуть однаковими.

5 Комп'ютерний практикум № 5. Інтерполяція

5.1 Теоретичні відомості

Сформулюємо задачу інтерполяції. Нехай на $[a, b]$ задано $n + 1$ точок – вузлів інтерполяції x_0, x_1, \dots, x_n та значень функції у цих вузлах $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$.

Потрібно побудувати інтерполяційну функцію $F(x)$ так, щоб $F(x_i) = f(x_i)$.

При загальному виді $F(x)$ така задача може:

- а) не мати розв'язків;
- б) мати безліч розв'язків.

Для того щоб задача мала розв'язок та лише єдиний, будемо шукати функцію F як поліном ступеня не вище n : $F = P_n(x)$, такий, що $P_n(x_0) = y_0, P_n(x_1) = y_1, \dots, P_n(x_n) = y_n$.

Одержаній поліном $P_n(x)$ використовують для обчислення значень $f(x_j)$: $x_j \neq x_i, i = 0, 1, \dots, n$ (не співпадають із вузлами інтерполяції).

При цьому відрізняють

- а) інтерполяція: $x_j \in [a = x_0, \dots, x_n = b]$;
- б) екстраполяція: $x_j \notin [a = x_0, \dots, x_n = b]$.

У широкому розумінні випадки а) та б) називають інтерполяцією.

Єдиність інтерполяційного поліному

Нехай $\tilde{P}_n(x)$ - поліном, відмінний від $P_n(x)$ степеня, не вищого n , і такий, що

$$\tilde{P}_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Тоді поліном $Q_m(x) = \tilde{P}_n(x) - P_n(x)$, ступінь якого $m \leq n$, перетворюється на нуль в $n+1$ точці x_0, x_1, \dots, x_n . А це значить $Q_m \equiv 0$. Звідси $\tilde{P}_n(x) \equiv P_n(x)$.

Інтерполяційний поліном Лагранжа

Задано таблицю значень y_k функції $y = f(x)$ у вузлах x_k . Необхідно побудувати інтерполяційний поліном за цією таблицею значень. Поліном Лагранжа використовується як для рівномірних ($x_{i+1} - x_i = const$), так і для нерівномірних вузлів ($x_{i+1} - x_i \neq const$).

Поліном шукається у вигляді:

$$L_n(x) = c_i(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n), \quad c_i = const.$$

З умови $L_n(x_i) = 1$ знаходимо $c_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}$.

Для більш загальної задачі необхідно, щоб $L_n(x_i) = y_i$. Звідси

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^n y_k \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_k)(x - x_{k+1})\dots(x - x_n)}{(x_k - x_1)(x_k - x_2)\dots(x_k - x_k)(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)}.$$

Похибка інтерполяції при застосуванні поліному Лагранжа n -го степеня становить:

$$R_n(x) = \frac{\max_{x \in (x_0, x_n)} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n).$$

Інтерполяційний поліном Ньютона

Нехай для $y = f(x)$ задано $y_i = f(x_i)$. Поліном шукають у виді:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

Введемо поняття розділених різниць:

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \text{ - першого порядку;}$$

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i} \text{ - другого порядку і т.д.}$$

Із використанням цього поняття інтерполяційний поліном запишеться у вигляді:

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

Формула Ньютона більш зручна, ніж формула Лагранжа, оскільки при додаванні m нових вузлів потребує обчислення m нових членів, тоді як формула Лагранжа потребує повного перерахунку.

Сплайн-інтерполяція

Сплайном називається визначена у деякій області $G \subset R^n$ кусково-поліноміальна функція класу $C^r(G)$. Інтерполяція може виконуватись також і за допомогою сплайнів.

Широко використовується сплайн-інтерполяція за допомогою кубічних сплайнів класа C^2 ($r=2$). Нехай відомі значення деякої функції $f(x)$ задані таблицею на відрізку $[a,b]$, где $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$

Табл 5.1. Таблиця значень функції

X	x_0	\dots	x_N
f	f_0	\dots	f_N

Необхідно побудувати по цій таблиці інтерполяційний кубічний сплайн. Ця функція має задовольняти вимогам:

- 1) $S(x) \in [a, b]$;
- 2) на будь-якому відрізку $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, N$ функція $S(x)$ є поліномом третього степеня;
- 3) $S(x_i) = f_i$, $i = 0, \dots, N$.

Ці умови слід доповнити, щоб кількість рівнянь була достатня для знаходження коефіцієнтів сплайну. Для цього будемо вимагати:

- 4) $S''(a) = S''(b) = 0$.

Існування та єдиність функції $S(x)$ слідують із способу її побудови.

Спосіб одержання коефіцієнтів сплайна описано тут: <http://www.mathros.net.ua/znahodzhennjanablyzhenogo-znachennja-tablychno-zadanoj-funkcii-vykorystovujuchy-kubichnu-splajn-interpolaciju.html>

Примітка. Сплайн зазвичай обчислюється на кожному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, N$ за формулою (5.3) із використанням таблиці значень функції, співвідношень (5.6) та розв'язку системи (5.7).

Похибка кубічної сплайн-інтерполяції при рівномірному розбитті ($h = h_i = const$) оцінюється наступним співвідношенням:

$$\max_{x \in [a,b]} |R(x)| \leq \frac{5M_3 h^3}{2}, \text{ де } M_3 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(3)}(x)|.$$

Відповідні методи інтерполяції детально розглянуто в [1, 4, 5].

5.2 Область застосувань

Область застосувань інтерполяції включає будь-які задачі, у яких необхідно знайти наближений аналітичний вираз функції за точковим рядом її значень. Зокрема, інтерполяція широко застосовується у задачах комп’ютерної графіки, коли необхідно моделювати рельєфи різних форм, представлені у постановці задачі сукупністю значень у вузлах (багатовимірна інтерполяція), при проектуванні автошляхів, контурів будівель тощо.

Інколи за допомогою інтерполяції знаходять розв’язок нелінійних рівнянь $f(x) = 0$. Для цього за функцією, що знаходиться у лівій частині рівняння, знаходить таблицю значень у заданих вузлах, потім будують «зворотний» інтерполяційний поліном $x = L(y)$, і знаходить $x = L(0)$, який наближено є розв’язком вихідного рівняння.

5.3 Завдання

Відрізок інтерполяції розбити не менш ніж на 10 вузлів. Використовуючи аналітичне задання функції, визначене варіантом, побудувати таблицю значень функції у вузлах на відповідному відрізку інтерполяції (табл.5.1).

Побудувати за таблично заданою функцією:

- інтерполяційний поліном $P_n(x)$ у формі Ньютона або Лагранжа;
- здійснити інтерполяцію сплайнами (другого чи третього порядку);
- побудувати графік похибки інтерполяції.

Примітка. У даному практикумі функція, яка інтерполюється, задана аналітично, отже, похибку інтерполяції можна визначити безпосередньо як максимум різниць між значеннями точної функції та інтерполюючої функції у ряді точок (точки не повинні співпадати із вузлами інтерполяції).

5.4 Вимоги до звіту

Звіт має містити графіки:

- інтерполяційного полінома із позначенням вузлів інтерполяції;
- інтерполюючої сплайн-функції;
- значення похибки $\varepsilon = |P_n(x) - f(x)|$. Потрібно вивести на графік із кроком, меншим у 5-6 разів, ніж крок інтерполяції, відповідні значення поліному та сплайн-функції та точної функції.

Якщо похибка дуже мала, застосувати масштабування. Порівняти одержаний результат із теоретичною оцінкою похибки.

5.5 Варіанти завдань

№ вар.	Функція	Відрізок інтерполяції
1	$x^2 \sin x$	$[-\pi, \pi]$
2	$x^2 \cos x$	$[-\pi/2, \pi]$
3	$x^2 e^x$	$[-3, 4]$
4	$x\sqrt{x}$	$[0, 4]$
5	$(x^2 + 2)\sqrt{x-1}$	$[1, 5]$
6	$xtgx$	$[-\pi/3, \pi/3]$
7	$\frac{1}{\cos x}$	$[0, \pi/3]$
8	$\frac{1}{\sin x}$	$[\pi/6, \pi/2]$
9	$2 \sin^2 \frac{x}{2}$	$[-\pi, \pi]$
10	$\frac{1}{\sin^2 x} - 1$	$[\pi/6, \pi/2]$

5.6 Контрольні запитання

- Чи будуть відрізнятись поліноми Ньютона та Лагранжа одного степеня, побудовані для однієї системи вузлів?
- В чому перевага побудови поліному Ньютона порівняно з поліномом Лагранжа?
- Яка кількість вузлів необхідна для побудови інтерполяційного поліному порядку n ?
- Запишіть систему рівнянь для знаходження коефіцієнтів сплайнів 2 порядку на двох сусідніх відрізках.

6 КОМП'ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ № 6. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ МЕТОДАМИ РУНГЕ-КУТТА ТА АДАМСА

6.1 Теоретичні відомості

Розглянемо задачу Коші:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (6.1)$$

Числове розв'язання задачі полягає в побудові таблиці наближених значень y_1, y_2, \dots, y_n розв'язку $y(x)$ в заданих точках x_1, x_2, \dots, x_n . Найчастіше $x_i = x_0 + ih$, $i=1,2,\dots$. Точки x_i називаються вузлами сітки з кроком h . Для розв'язування задачі застосовують як однокрокові (Ейлера, Рунге-Кутта), так і багатокрокові методи (Адамса та його модифікації).

Однокрокові методи

Однокроковий метод – метод, у якому y_{k+1} визначається виключно через x_k, y_k, h та не залежить від y_{k-1}, y_{k-2}, \dots . Загальна формула: $y_{k+1} = y_k + h\varphi(x_k, y_k)$, або

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \varphi(x_k, y_k).$$

Метод Ейлера

Якщо $y = y(x)$ – шуканий розв'язок задачі (6.1), то підставляючи його в рівняння (6.1), одержимо:

$$y'(x) \equiv f(x, y(x)). \quad (6.2)$$

Співвідношення методу легко одержати із визначення похідної:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0), \\ y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1), \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}), \end{aligned} \quad (6.4)$$

де $y_i \approx y(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Метод Рунге-Кутта

Формули методу r -го порядку для наближеного обчислення розв'язку задачі Коші в точках x_1, x_2, \dots, x_n мають наступний вигляд:

$$y_{i+1} = y_i + p_{r1}k_1 + p_{r2}k_2 + \dots + p_{rr}k_r, \quad (6.5)$$

де

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = hf(x_i, y_i), \\ k_2 = hf(x_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{21}k_1), \\ k_3 = hf(x_i + \alpha_3 h, y_i + \beta_{31}k_1 + \beta_{32}k_2), \\ \vdots \\ k_r = hf(x_i + \alpha_r h, y_i + \beta_{r1}k_1 + \beta_{r2}k_2 + \dots + \beta_{r,r-1}k_{r-1}). \end{array} \right. \quad (6.6)$$

На практиці найчастіше використовують формули метода Рунге-Кутта четвертого порядку. Вони мають вигляд:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

де

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_i, y_i), \\ k_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1), \\ k_3 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2), \\ k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3). \end{cases}$$

При оцінці похибки можна використовувати правило Рунге. Для цього спочатку проводимо обчислення з кроком $h/2$. Якщо $y_i^{(h)}$ - наближення, обчислене з кроком h , а $y_i^{(h/2)}$ - з кроком $h/2$, то за оцінку похибки обчислень (згідно принципа Рунге визначення похибки числового методу) з кроком $h/2$ можна вважати величину

$\max_i \frac{|y_i^{(h)} - y_{2i}^{(h/2)}|}{15}$. Але цей підхід слід використовувати, коли точний розв'язок невідомий. У

варіантах цієї лабораторної роботи точний розв'язок задається, отже, похибку обчислюють порівнянням точного розв'язку із одержаними за методом Рунге-Кутта та Адамса значеннями.

Багатокрокові методи

Метод Адамса-Башфорта

Формула m - крокового метода Адамса-Башфорта:

$$y_{k+1} = \varphi(y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-m+1}).$$

При $m = 1$ метод однокроковий: $y' = f(x, y)$.

Проінтегруймо це рівняння :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} y' dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx;$$

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx;$$

Суть методів полягає у тому, що $f(x, y(x))$ замінюють на інтерполяційний поліном, що проходить через точки $(x_n, y_n), n = k - m + 1, \dots, k$. Якщо замінити f на інтерполяційний поліном Лагранжа або

Ньютона навколо точки x_k , то матимемо $y_{k+1} - y_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} p_m(x) dx$. В найпростішому випадку, коли

$m=0$ (поліном - константа), метод перетворюється на метод Ейлера. Якщо $m=1$, то p_m – лінійна функція, що проходить через точки (x_{k-1}, f_{k-1}) та (x_k, f_k) , тобто $p_m(x) = -(x-x_k)f_{k-1}/h + (x-x_{k-1})f_k/h$. Інтегруючи цей поліном, одержуємо метод: $y_{k+1} = y_k + h(3f_k - f_{k-1})/2$. Цей метод двокроковий, оскільки використовує інформацію в двох точках x_k та x_{k-1} , метод забезпечує другий порядок точності.

Аналогічно, для кубічного полінома одержуємо відповідний чотирикроковий метод:

$y_{k+1} = y_k + h(55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3})/24$. Метод забезпечує четвертий порядок точності.

Примітка. Для дії метода Адамса-Башфорта необхідно мати відомі значення функції в попередніх точках (одержуються із початкових умов за допомогою методу Рунге-Кутта).

Метод Адамса-Моултона

Якщо інтерполяційний поліном $p(x)$ будується, використовуючи не лише поточну точку та відомі попередні, а й точку x_{k+1} , то приходимо до неявних методів (методи Адамса-Моултона). Таким чином, будують інтерполяційний поліном степеня $N+1$, що задовольняє умовам $p(x_i) = f_i$ ($i = k+1, k, \dots, k-N$). Тоді, наприклад, у випадку $N=0$ (лінійна функція, що проходить через $(x_k, f_k), (x_{k+1}, f_{k+1})$) одержуємо метод Адамса-Моултона другого порядку: $y_{k+1} = y_k + h(f_{k+1} + f_k)/2$.

Питання, що стосуються стійкості методів розв'язання звичайних диференційних рівнянь, розглянуто в [6-8].

6.2 Область застосування

Моделі у вигляді диференційних рівнянь застосовуються для опису багатьох явищ навколошнього середовища. Наприклад, таких явищ як зрост популяцій тварин, коливання концентрації газів, що складають атмосферу, зростання рослинних тканин, деякі хімічні реакції.

Приклад

Система Лоренца, яка описує процес теплової конвекції, має вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x); \\ \frac{dy}{dt} &= -y + x(r - z); \\ \frac{dz}{dt} &= -bz + xy.\end{aligned}$$

При $\sigma = 10$, $b = 8/3$ та $r=1; r=5; r=15; r=25$ система демонструє цікаву поведінку – утворюється так званий дивний атрактор, який має фрактальну структуру. Початкові умови для вказаної системи: $x(0) = 2$, $y(0) = -1$, $z(0) = 0$. Для розв'язання системи можна використати методи Рунге-Кутта.

6.3 Завдання

Методами Рунге-Кутта та Адамса-Башфорта четвертого порядку розв'язати задачу Коші. На початку інтервалу у необхідній кількості точок значення для методу Адамса визначити методом Рунге-Кутта четвертого порядку.

6.4 Вимоги до звіту

Для деякого фіксованого h потрібно навести:

- значення точної функції розв'язку $y(x)$;
- значення наближеного розв'язку $y(x)$ у тих самих точках, одержані обома методами;

- значення функції помилки $e(x)$ для обох методів (порівняти із «теоретичною» точністю);

У звіті наводять:

- графіки точного розв'язку та обох наближених - на одному рисунку;
- графіки обох помилок - на другому рисунку;
- лістинг програми.

6.5 Варіанти завдань

Рівняння має вигляд:

$y' = (1 - x^2)y + F(x)$. Покласти $h = 0,1$, початкові умови $x(0)$ визначити, використовуючи точне значення розв'язку.

Нехай розв'язок відомий та визначається згідно варіантів:

№ вар.	Точний розв'язок
1	$y = \sin x$
2	$y = \cos x$
3	$y = x^2$
4	$y = x \cos x$
5	$y = \cos x - x$
6	$y = \operatorname{tg} x$
7	$y = x \operatorname{tg} x$
8	$y = e^x$
9	$y = e^x + x^2$
10	$y = x \sin x$

Необхідно підставити розв'язок у рівняння та визначити $F(x)$ у правій частині. Таким чином, відомим є вигляд рівняння та його точний розв'язок, за допомогою числових методів далі будуємо наближений розв'язок.

6.6 Контрольні запитання

1. Яким чином визначають початкові точки для методів Адамса?
2. Який порядок точності має метод Ейлера?
3. Що таке однокрокові та багатокрокові методи розв'язання звичайних диференційних рівнянь?

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Лаборатория базовых знаний, 2007. — 636 с.
2. Мэтьюз Дж. Г., Финк К. Д. Численные методы. Использование Matlab. — М.: Вильямс, 2001. — 720 с.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978. — 512 с.
4. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. — М.: Физматгиз, 1960. — 659 с.
5. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн - функций. — М.: Наука, 1980. — 352 с.
6. Самарский А.А., Николаев Е.С Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 590 с.
7. Самарский А.А Теория разностных схем. — М.: Наука, 1983. — 656 с.
8. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1988. — 332 с.