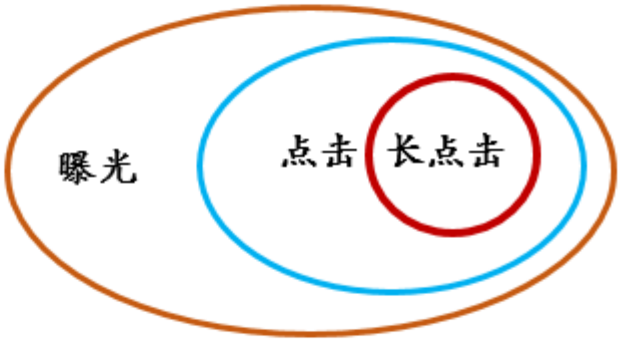
一：建模思想

按照用户的点击行为可以知道。先有点击，然后有长点击。

集合大小如下：



记排序类特征，点击，长点击为变量X, Y, Z。每个样本的值为x, y, z。有

$$\begin{cases} P(z=1|x) = P(y=1|x) \times P(z=1|y=1,x) \\ P(z=0|x) = P(y=1|x) \times P(z=0|y=1,x) + P(y=0|x) \end{cases}$$

我们对 $P(z=1|x) = P(y=1|x) \times P(z=1|y=1,x)$ 为建模对象。

二：求解推导

因此我们有下面的三个优化函数

CTR-LOSS:

$$\mathcal{L}_{ctr}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} L(f_c(x_i), y_i)$$

LCVR-LOSS:

$$\mathcal{L}_{lcvr}(X,Z) = \sum_{i=1}^{n} L(f_l(x_i), z_i)$$

CTLCVR-LOSS:

$$\mathcal{L}_{ctlcvr}(X,Y,Z)=\sum_{i=1}^{n}L(f_c(x_i)\times f_{cl}(x_i,y_i),z_i)$$

MCTLCVR-LOSS:

$$\mathcal{L}_{mctlcvr}(X,Y,Z)=\sum_{i=1}^{n}L(f_c(x_i),y_i)+L(f_c(x_i)\times f_{cl}(x_i,y_i),z_i)$$

建立如下的损失函数。

$$J(X,Y,Z)=\sum_{i=1}^{n}L(f_c(x_i),y_i)+L(f_l(x_i),z_i)+L(f_c(x_i)\times f_{cl}(x_i,y_i),z_i)$$

其中，$f_c(x_i)$ 为点击模型，$f_l(x_i)$ 为长点击模型，$f_{cl}(x_i,y_i)$ 为点击点击下转化为长点击的概率。即

$$f_{cl}(x_i,y_i)=\begin{cases}f_{cl}(x_i,y_i), y_i=1\\ 0, otherwise\end{cases}$$

最小化$J(X,Y,Z)$，等同于各自优化 $\mathcal{L}_{lcvr}(X,Z)$ 和 $\mathcal{L}_{mctlcvr}(X,Y,Z)$。

对于$\mathcal{L}_{mctlcvr}(X,Y,Z)$的损失我们选择平方损失。展开没项目可得：

$$\begin{aligned}L(f_c(x_i),y_i)&+L(f_c(x_i)\times f_{cl}(x_i,y_i),z_i)\\&=(f_c(x_i)-y_i)^2+(f_c(x_i)\times f_{cl}(x_i,y_i)-z_i)^2\\&=(1+f_{cl}(x_i,y_i)^2)\left(f_c(x_i)-\frac{y_i+z_if_{cl}(x_i,y_i)}{1+f_{cl}(x_i,y_i)^2}\right)^2\\&-\frac{\left(y_i+z_if_{cl}(x_i,y_i)\right)^2}{1+f_{cl}(x_i,y_i)^2}+{z_i}^2+{y_i}^2\end{aligned}$$

当$f_{cl}(x_i,y_i)$确定后，那么$C=-\frac{\left(y_i+z_if_{cl}(x_i,y_i)\right)^2}{1+f_{cl}(x_i,y_i)^2}+{z_i}^2+{y_i}^2$。所以优化$\mathcal{L}_{mctlcvr}(X,Y,Z)$ 就等同于优化下面的算式：

$$\sum_{i=1}^{n}\left(f_c(x_i)-\frac{y_i+z_if_{cl}(x_i,y_i)}{1+f_{cl}(x_i,y_i)^2}\right)^2$$

我们记$\frac{y_i+z_i f_{cl}(x_i,y_i)}{1+f_{cl}(x_i,y_i)^2}$为标签$w_i$。

我们有 Bayesian CTR-LOSS:

$$\mathcal{L}_{bctr}(X,W)=\sum_{i=1}^{n} L(f_c(x_i),w_i)$$

在求得$f_c(x_i)$和$f_l(x_i)$之后。在由 Bayesian 公式可得：

$$f_l(x_i)=f_c(x_i)\times f_{cl}(x_i,y_i)$$

由此可以反算出$f_{cl}(x_i,y_i)$，看满不满足在$y_i=1$的情况下，两种方式算出来的$f_{cl}(x_i,y_i)$是否比较要一致。

需要更新$f_{cl}(x_i,y_i)=\alpha f_{cl}(x_i,y_i)+(1-\alpha)f_{cl}(x_i,y_i)$

前面的为当前步对整体的占比。

然后在基于 $f_{cl}(x_i,y_i)$ 对$f_c(x_i)$和$f_l(x_i)$。

三：迭代步骤

1: 输入X, Y, Z, $\alpha\in[0,0.1]$。

step1: 求解得到转移函数$f_{cl}(x_i,y_i)$, $f_l(x_i)$；

step2: 按照 $\frac{y_i+z_i f_{cl}(x_i,y_i)}{1+f_{cl}(x_i,y_i)^2}$ 计算等到新标签 W；

step3: 按照 Bayesian CTR-LOSS 求得$f_c(x_i)$；

step4: 由 Bayesian 公式反算出$f_{ncl}(x_i,y_i)$, 按照 如下的公式更新$y_i=1$的时候$f_{cl}(x_i,y_i=1)$。

$$f_{cl}(x_i,y_i=1)=\alpha f_{ncl}(x_i,y_i=1)+(1-\alpha)f_{cl}(x_i,y_i=1)$$

step5: 重复 step2-step4,直到求得的$f_c(x_i)$收敛。

2: 输出$f_c(x_i)$和$f_l(x_i)$。混合公式就是$2*f_l(x_i)+f_c(x_i)$
