ALGEBRA LINEARE E ANALISI NUMERICA

Aritmetica di macchina e stabilità numerica

Andrea Franceschetti – 4357070

RELAZIONE LABORATORIO 2

Esercizio 1

L'esercizio richiede di calcolare la "Norma Infinito ∞" di quattro matrici:

- Due matrici A (4x4), come da specifica;
- Una matrice di Pascal "P" (10x10);
- Una matrice Tridiagonale "T" (NxN).

Come da specifica, N è fissato considerando il numero di matricola dell'ultimo componente del gruppo, in ordine alfabetico. Si indichi con d0 e d1, rispettivamente, l'ultima e la penultima cifra di tale numero di matricola; si ponga n = 10(d1 + 1) + d0.

La "Norma Infinito" si definisce algebricamente come il valore in modulo più alto, tra le somme delle righe di una matrice.

$$||A||_\infty = max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Dopo aver costruito le matrici automaticamente, ovvero senza il bisogno che vengano inserite dall'utente e di tipo di dato `<vector><vector>` di tipo statico `float`, calcoliamo le "Norme Infinito" per le rispettive matrici:

- $||A1||_\infty$ = 14 *(prima riga)*;
- $||A2||_\infty$ = 8 *(prima riga)*;
- $||P||_\infty$ = 92378 *(ultima riga)*;
- $||T||_\infty$ = 4 *(qualsiasi riga eccetto prima e ultima)*;

OUTPUT:

```
- La norma della prima Matrice A è: 14
- La norma della seconda Matrice A è: 8


- Matrice di Pascal 'P' generata
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
1 3 6 10 15 21 28 36 45 55
1 4 10 20 35 56 84 120 165 220
1 5 15 35 70 126 210 330 495 715
1 6 21 56 126 252 462 792 1287 2002
1 7 28 84 210 462 924 1716 3003 5005
1 8 36 120 330 792 1716 3432 6435 11440
1 9 45 165 495 1287 3003 6435 12870 24310
1 10 55 220 715 2002 5005 11440 24310 48620
- La norma della Matrice di PASCAL P è: 92378
```

```
- Matrice di Tridiagonale 'T' generata
2 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 […] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
-1 2 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 […] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 -1 2 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 […] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 -1 2 -1 0 0 0 0 0 0 0 […]0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
[ … ]
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 […] 0 0 0 0 0 0 0 -1 2 -1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 […] 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 2 -1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 […] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 2 -1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 […] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 2
- La norma della Matrice di TRIDIAGONALE T è: 4
```

…. Altri output nella cartella /output

Esercizio 2

L'esercizio richiede di risolvere il sistema $Ax = b$, definito come segue:

- A sono le quattro matrici generate all'esercizio precedente;
- Assumiamo noto il vettore $\bar{x} = (1,1,\ldots,1)_t$ e di conseguenza calcoliamo il termine noto B dato dal prodotto $b = A \cdot \bar{x}$.

Il sistema deve essere risolto in singola precisione e tramite l'algoritmo di eliminazione Gaussiana, la soluzione attesa $\bar{x}$ e la soluzione calcolata x dovrebbero essere "vicine".

Iniziamo calcolando il termine noto b, grazie alla funzione `matrixProduct` che prende per parametro la matrice A generica e la moltiplica per il vettore $\bar{x}$ di dimensione pari alla dimensione della matrice A.

Ottenuto il termine noto b, svolgiamo l'algoritmo di eliminazione con funzione `riduzioneGaussiana` che prende per parametri la matrice A e il termine noto b, applica il `pivotingParziale` che prende per parametri la matrice A e il termine noto b e la riga k, la funzione quindi scambia la riga k-esima con una r-esima tale che il valore assoluto di a_{ik} sia il più grande tra tutti gli a_{ik} della sottomatrice, la ricerca avviene sulla colonna della sottomatrice.

Calcolato quindi il valore del pivot e ridotta interamente la matrice A, applichiamo `sostituzioneIndietro` che esegue l'algoritmo di sostituzione all'indietro per trovare il valore di x calcolata.

Ottenuti i risultati possiamo notare immediatamente che le matrici $A1$, $A2$ e T hanno tutti valori molto vicini tra loro e vicini alla soluzione attesa $\bar{x}$, come da ipotesi. Invece per la matrice di Pascal le soluzioni sono molto distanti dalla soluzione attesa, poiché o suoi elementi variano crescendo da 1 a 48620.

OUTPUT:

```
- Calcolo vettori termini noti b=A•x¯

 - Risultato del sistema A1x = B: 1 1 1 1

 - Risultato del sistema A2x = B: 1 1 1 1


 - Risultato del sistema Px = B: 0.889657 2.01476 -2.95937 9.80958 -11.4429
12.6291 -6.21429 3.87035 0.334513 1.06856


 - Risultato del sistema Tx = B: 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0.999999
0.999999 0.999999 0.999999 0.999999 0.999999 0.999999 0.999999 0.999999
0.999999 0.999999 0.999999 0.999999 0.999999 0.999999 0.999999 0.999999
0.999999 0.999999 0.999999 0.999999 0.999999 0.999999 0.999999 0.999999
0.999999 0.999999 0.999998 0.999998 0.999998 0.999998 0.999998 0.999998
0.999998 0.999998 0.999999 0.999999 0.999999 0.999999 0.999999 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

Esercizio 3

L'esercizio richiede di risolvere il sistema $Ax = b + \delta b$, definito come segue:

- A sono le quattro matrici generate all'esercizio precedente;
- Consideriamo per ogni termine noto b il vettore perturbato
$$\delta b = \left||b|\right|_\infty \cdot (-0.01, 0.01, -0.01, \dots ,\ 0.01)^t$$

Il sistema deve essere risolto in singola precisione e tramite l'algoritmo di eliminazione Gaussiana, la soluzione attesa $\bar{x}$ e la soluzione calcolata x dovrebbero essere diverse, ma vicine, a causa della perturbazione di b.

Ottenuti i risultati, come da procedimento dell'esercizio precedente, osserviamo che essi sono molto simili e vicini a quelli della soluzione attesa, eccezion fatta per la matrice di Pascal che già nell'esercizio precedente senza perturbazione otteneva risultati molto distanti dalla soluzione attesa e ora quest'ultimi subiscono cambiamenti notevoli.

Tutto ciò che è stato osservato, fa riferimento al fatto che il condizionamento b è piccolo e quindi si ha un errore sulla soluzione piccolo, conseguentemente il problema è ben condizionato.

Concludiamo che nel nostro caso il problema è ben condizionato per le sole matrici $A1$, $A2$ e T, mentre nel caso di P il problema è mal condizionato e quindi un condizionamento piccolo nei dati porta a grandi errori nella soluzione.

OUTPUT:

```
- Risultato del sistema A1x = (B + δB): 0.975868 1.0057 0.993306 0.991322

- Risultato del sistema A2x = (B + δB): 0.95 1.015 1.005 1.055

- Risultato del sistema Px = (B + δB): 329426 -3.09625e+06 1.24236e+07 -2.84855e+07 4.14708e+07 -3.99429e+07 2.55278e+07 -1.04598e+07 2.4965e+06 -264676


- Risultato del sistema Tx = (B + δB): 0.995062 1.00012 0.995185 1.00025 0.995308 1.00037 0.995432 1.00049 0.995555 1.00062 0.995679 1.00074 0.995802 1.00086 0.995925 1.00099 0.996049 1.00111 0.996172 1.00123 0.996295 1.00136 0.996419 1.00148 0.996542 1.0016 0.996665 1.00173 0.996789 1.00185 0.996913 1.00197 0.997036 1.0021 0.99716 1.00222 0.997283 1.00234 0.997406 1.00247 0.997529 1.00259 0.997652 1.00271 0.997775 1.00284 0.997899 1.00296 0.998023 1.00308 0.998146 1.00321 0.99827 1.00333 0.998394 1.00346 0.998518 1.00358 0.998642 1.0037 0.998765 1.00383 0.998889 1.00395 0.999013 1.00407 0.999136 1.0042 0.99926 1.00432 0.999383 1.00444 0.999507 1.00457 0.99963 1.00469 0.999753 1.00481 0.999877 1.00494
```