ALGEBRA LINEARE E ANALISI NUMERICA

Aritmetica di macchina e stabilità numerica

Andrea Franceschetti – 4357070

RELAZIONE LABORATORIO 3 - MatLab

Esercizio 1

L'esercizio richiede di calcolare in due modi gli autovalori di due matrici e confrontarne i risultati ottenuti.

Generiamo una matrice A di Jordan (n x n), con n fissato considerando il numero di matricola dell'ultimo componente del gruppo, in ordine alfabetico. Si indichi con d0 e d1, rispettivamente, l'ultima e la penultima cifra di tale numero di matricola e si ponga n = 10*(d1 + 1) + d0.

La matrice A viene calcolata nel seguente modo:

$$\mathrm{A} = \mathrm{diag}(\mathrm{ones}(1, \mathrm{n}-1),1) + \mathrm{eye}(\mathrm{n})$$

Calcoliamo la matrice $B = A + E$, con E matrice ad elementi nulli escluso $E(n,1) = 2^{-n}$.

Passiamo a calcolare gli autovalori di A e B nei seguenti modi:

- Applicando alle matrici la funzione ***eig*** che ritorna un vettore di autovalori di A;
- Risolvendo tramite il comando: ***double(solve(det(A-lambda*eye(n))==0, lambda))***.

Confrontiamo ora i risultati ottenuti dai comandi applicati precedentemente sia ad A che B:

- Puntualmente attraverso il comando ***isequal*** al quale si passano i vettori ottenuti dai comandi precedenti;
- Per mezzo delle norme.

Si osserva che:

- Con il comando ***isequal*** per la matrice A i risultati ottenuti nei due metodi sono uguali, mentre per la matrice B no.
- Con il metodo delle norme si ottengono i seguenti risultati:
  - `normaBA = norm(B-A)/norm(A)= 4.1367e-25`
  - `normaVAVB = norm(VB-VA)/norm(VA) = 0`

Ripetiamo l'esercizio per A^tA e B^tB, i confronti hanno dato i seguenti risultati:

- Con il comando ***isequal*** per la matrice A^tA i risultati ottenuti nei due metodi sono uguali, mentre per la matrice B^tB no.
- Con il metodo delle norme si ottengono i seguenti risultati:

- `normaAtA = norm(At-A)/norm(A)= 0.9994`
- `normaBtB = norm(Bt-B)/norm(B) = 0.9994`
- `normaAtA = norm(VAt-VA)/norm(VA)= 0`
- `normaAtA = norm(VBt-B)/norm(VB)= 0`

Nota: output completi nella cartella /output

Esercizio 2

L'esercizio richiede di generare la matrice A $(n \times n)$ delle adiacenze dato il grafo con n nodi, tale che $A_{ij} = 1$ se il nodo j è connesso con il nodo i e $A_{ij} = 0$ se il nodo j non è connesso con il nodo i.

Il grafo da cui generare A è relativo alle ferrovie lombarde ed è riportato in figura.

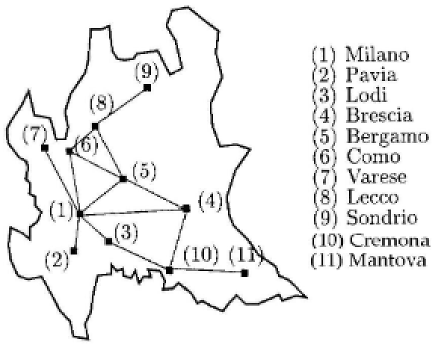

Fig. 6.2. Rappresentazione schematica delle connessioni ferroviarie per la sola Lombardia

Generata A, passiamo a calcolare la matrice $D = diag(g_1, \dots, g_n)$ dove g_i è il numero di archi uscenti dal dono j, quindi calcoliamo $G = A \cdot D^{-1}$ con i suoi autovettori e autovalori.

Otteniamo i seguenti risultati:

- Autovalori di G:

```
1.0000    0       0       0       0       0       0       0       0       0       0
   0    0.7640    0       0       0       0       0       0       0       0       0
   0      0    0.5774     0       0       0       0       0       0       0       0
   0      0       0    0.2241     0       0       0       0       0       0       0
   0      0       0       0   -0.8824     0       0       0       0       0       0
   0      0       0       0       0   -0.7255     0       0       0       0       0
   0      0       0       0       0       0   -0.5774     0       0       0       0
   0      0       0       0       0       0       0   -0.3802     0       0       0
   0      0       0       0       0       0       0       0   -0.0000     0       0
   0      0       0       0       0       0       0       0       0    0.0000     0
   0      0       0       0       0       0       0       0       0       0   -0.0000
```

- Autovettori di G:

```
-0.6124 -0.0521 -0.7385 -0.2314  0.6272  0.3765  0.7385  0.0708  0.0000  0.0000 -0.0000
-0.1021 -0.0114 -0.2132 -0.1721 -0.1185 -0.0865 -0.2132 -0.0310 -0.4453  0.4161  0.3412
-0.2041 -0.2634  0.0000 -0.2283 -0.3212  0.0441 -0.0000 -0.1304  0.3699  0.5333 -0.0747
-0.3062 -0.1727  0.0000  0.4857 -0.3307  0.1606 -0.0000  0.3644 -0.5318 -0.1023 -0.5885
-0.4082  0.2772 -0.0000  0.6400  0.0335 -0.3382 -0.0000 -0.7525  0.0000  0.0000  0.0000
-0.3062  0.3086 -0.0000  0.2539 -0.1622 -0.2735  0.0000  0.5011  0.5318  0.1023  0.5885
-0.1021 -0.0114 -0.2132 -0.1721 -0.1185 -0.0865 -0.2132 -0.0310  0.2603 -0.6828 -0.3038
-0.3062  0.5255  0.3693 -0.1936  0.0905  0.6606 -0.3693 -0.0425 -0.0000 -0.0000  0.0000
-0.1021  0.2293  0.2132 -0.2880 -0.0342 -0.3036  0.2132  0.0373 -0.1773 -0.0341 -0.1962
-0.3062 -0.5776  0.3693 -0.0378  0.5367 -0.2842 -0.3693  0.1133 -0.0000 -0.0000 -0.0000
-0.1021 -0.2520  0.2132 -0.0562 -0.2028  0.1306  0.2132 -0.0994 -0.0077 -0.2326  0.2335
```

Possiamo verificare che:

- un autovalore di G è pari a 1 (il primo) mentre gli altri sono tutti minori di 1;
- esiste l'autovettore relativo all'autovalore 1 ha tutte le componenti tra 0 e 1, inoltre nonostante l'autovalore sia 1 tutti di valori dell'autovettore sono negativi e per rispettare la richiesta basta moltiplicare per -1;
- per ogni altro autovalore, l'autovettore ha componenti sia positive che negative.

Osservazioni aggiuntive:

Osservando G si nota che leggendo la matrice per colonne si trova quanta importanza una stazione cede ad un'altra, mentre leggendo per righe l'esatto opposto, ovvero quanta importanza riceve dalle altre.

Con riferimento a quanto detto, possiamo concludere che la stazione più importante della rete è Milano, mentre all'opposto ci sono le stazioni di Lecco e Pavia.

Nota: output completi nella cartella /output

Esercizio 3

L'esercizio richiede di applicare il metodo delle potenze sulla matrice A usando come vettori iniziali $(1,\ 1,\ 1)^t$ e $(3,\ 10,\ 4)^t$ e osservare il comportamento dei risultati. Successivamente applica sempre su A determinare con il metodo delle potenze inverse l'autovalore massimo. Infine, confrontare le convergenze dei due metodi.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \\ 6 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Il metodo delle potenze è un metodo iterativo per l'approssimazione dell'autovalore λ_1 di massimo modulo di una matrice conseguentemente anche l'autovettore a esso legato.

Il metodo delle potenze converge solo quando si verificano le 3 seguenti proprietà:

- La matrice A è diagonalizzabile;
- Il vettore iniziale ha almeno una componente non nulla lungo l'autovettore v_1 corrispondente a λ_1;
- L'autovettore di modulo massimo è separato da tutti gli altri, ovvero $|\lambda_1| > |\lambda_i|, i = 2, \dots, n$.

Iniziamo la risoluzione dal vettore $(1,\ 1,\ 1)^t$ si ottengono i seguenti risultati:

1. Lambda $\lambda_1 = 5.0000$
2. Autovettore $x = [\,1.3889,\ 4.4444,\ 5.000]$;
3. Iterazioni $iter = 45$

Con la risoluzione dal vettore $(1,\ 1,\ 1)^t$ si ottengono i seguenti risultati:

1. Lambda $\lambda_1 = 3.0000$
2. Autovettore $x = [\,0.5000,\ 3.0000,\ 2.000]$;
3. Iterazioni $iter = 24$

La velocità di convergenza per il metodo delle potenze è pari a:

$$\left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right)^k \text{ con } |\lambda_1| > |\lambda_2|$$

$$\left(\frac{|3|}{|5|}\right)^k = \frac{3^k}{5^k} = (0.6)^k$$

Ora eseguiamo l'esercizio usando il metodo delle potenze inverse.

Questo algoritmo permette di stimare un autovettore quando è già conosciuta un'approssimazione dell'autovalore collegato.

Per la risoluzione introduciamo il parametro μ, utile per il calcolo della matrice $(A - \mu I)$, esso verrà utilizzato con due valori diversi per i due test.

Per la prima risoluzione utilizziamo il valore $\mu = 4$ e otteniamo i seguenti risultati:

1. Lambda $\lambda_1 = 4.06038$
2. Iterazioni $iter = 1001$

Per la seconda risoluzione utilizziamo il valore $\mu = 4.5$ e otteniamo i seguenti risultati:

1. Lambda $\lambda_2 = 5.0000$

2. Iterazioni $iter = 57$

La velocità di convergenza per il metodo delle potenze è pari a:

$$|\,\mu\,| = \frac{1}{\lambda - \mu} \rightarrow \left(\frac{|\,u_2|}{|\,u_1\,|}\right)^k \quad \text{con } |\,u_1\,| > \;|\,u_2\,|$$

$$|\,u_1\,| = \frac{1}{\lambda_1 - \mu_1} = \frac{1}{4.06038 - 4} = 16.56177$$

$$|\,u_2| = \frac{1}{\lambda_2 - \mu_2} = \frac{1}{5 - 4.5} = 2$$

$$\left(\frac{|\,16.56177|}{|\,2\,|}\right)^k = \frac{2^k}{16.56177^k} = (0.12076)^k$$

Si osserva che a parità di k per i due metodi, il metodo delle potenze converge più lentamente rispetto al metodo delle potenze.

OUTPUT:

```
Il valore di lambda per [1, 1, 1] è: 5.00000
Il numero di iterazioni per [1, 1, 1] è: 45.00000
eig_vect1 = [1.3889, 4.4444, 5.0000]

Il valore di lambda per [3, 10, 4] è: 3.00000
Il numero di iterazioni per [3, 10, 4] è: 24.00000
eig_vect2 = [0.5000, 3.0000, 2.0000]
La convergenza lambda2/lambda1 è: 0.60000

Metodo delle potenze inverse con mu = 4
Il valore di lambda per mu = 4 è: 4.06038
Il numero di iterazioni per mu = 4 è: 1001.00000

Metodo delle potenze inverse con mu=4.5
Il valore di lambda per mu = 4.5 è: 5.00000
```

Il numero di iterazioni per mu = 4.5 è: 57.00000

La convergenza per il metodo delle potenze inverse e lambda2/lambda1 è: 0.12075