

**Автоматизированный способ поиска оптимального метода  
установления параметров преобразования плоских прямоугольных  
систем координат**

Будо А.Ю.

Белорусский национальный технический университет

Спутниковые методы измерений плотно вошли в повседневную жизнь топографо-геодезических предприятий и активно используются при инженерном обеспечении дорожного строительства. Вместе с этим возрастает роль методов установления параметров связи между плоскими прямоугольными системами координат. Например, всё чаще появляется необходимость установить параметры преобразования между координатами пунктов государственной системы координат и местной (локальной) системы либо между координатами пунктов локальной системы и строительной системы координат.

Для решения задач подобного рода можно воспользоваться большим количеством методов, выбор в пользу одного из которых зачастую обусловлен лишь возможностями используемого спутникового полевого контроллера или программы постобработки измерений. Между тем, вычислительные возможности современного геодезического оборудования позволяют в кратчайшие временные промежутки выполнить необходимые расчёты по каждому из списка предполагаемых методов преобразования и установить параметры связи одновременно с их оценкой точности и определением результирующих ошибок в положении пунктов. А затем в автоматизированном режиме на основе выполненных расчётов подсказать пользователю какой из методов является оптимальным для двух наборов координат пунктов и предложить для дальнейших работ использовать именно его.

Для простоты изложения материала в данной статье ограничимся случаем, когда известны лишь плановые координаты десяти пунктов в двух следующих системах координат:

1. Государственная система координат 1995 года (СК-95 зона 5);
2. Локальная система координат;

В расчётах воспользуемся тремя наиболее известными и широко применяемыми в коммерческом ПО [1, с.24] методами установления параметров связи между плоскими СК:

- 1) по Гельмерту;
- 2) аффинное преобразование;
- 3) параллельный сдвиг.

Во всех трёх методах установление параметров выполним классическим методом наименьших квадратов (МНК). С выводом формул для расчётов можно ознакомиться, например, в [2].

Схема расположения пунктов в рассматриваемом примере представлена на рис.1.

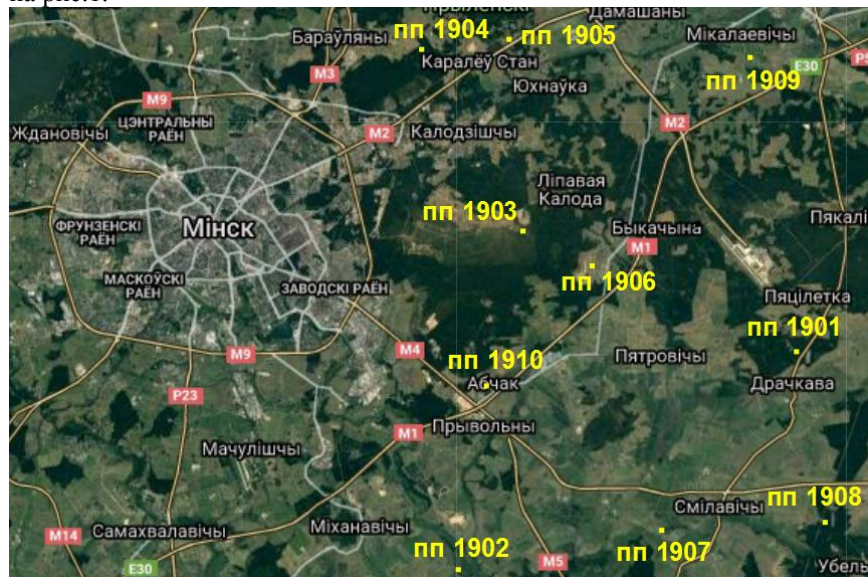


Рисунок 1 – Схема расположения пунктов

Плановые координаты всех десяти пунктов в обеих системах координат представлены в табл. 1.

Таблица 1. Плановые координаты пунктов в двух системах координат

| №<br>п/п | Название<br>пункта | СК-95 зона 5 |             | Локальная СК |           |
|----------|--------------------|--------------|-------------|--------------|-----------|
|          |                    | X, м         | Y, м        | X, м         | Y, м      |
| 1        | пп 1901            | 5968133.715  | 5571220.059 | -7444.535    | 34604.949 |
| 2        | пп 1902            | 5954960.221  | 5551300.312 | -20617.821   | 14685.132 |
| 3        | пп 1903            | 5975044.327  | 5554909.575 | -533.857     | 18294.435 |
| 4        | пп 1904            | 5985700.939  | 5548793.641 | 10122.799    | 12178.531 |
| 5        | пп 1905            | 5986352.860  | 5553960.724 | 10774.690    | 17345.614 |
| 6        | пп 1906            | 5973036.526  | 5559036.576 | -2541.626    | 22421.456 |
| 7        | пп 1907            | 5957441.402  | 5563367.017 | -18136.732   | 26751.847 |
| 8        | пп 1908            | 5958054.333  | 5573079.570 | -17523.903   | 36464.420 |
| 9        | пп 1909            | 5985470.638  | 5568215.978 | 9892.378     | 31600.888 |
| 10       | пп 1910            | 5965869.114  | 5552848.693 | -9708.994    | 16233.543 |

### Метод преобразования координат по Гельмерту.

В данном методе углы не изменяются, а длины линий изменяются по всем направлениям с учётом единого масштабного коэффициента. При этом преобразование координат осуществляется по формулам

$$X = x_2 + m \cdot \cos(\alpha) \cdot (x - x_1) - m \cdot \sin(\alpha) \cdot (y - y_1), \quad (1)$$

$$Y = y_2 + m \cdot \sin(\alpha) \cdot (x - x_1) + m \cdot \cos(\alpha) \cdot (y - y_1), \quad (2)$$

где  $m$  – масштаб (отношение расстояний во второй СК к соответствующим расстояниям в первой СК);

$\alpha$  – угол разворота второй СК относительно первой;

$x_1, y_1$  – центр тяжести первой СК (средние арифметические значения координат по абсциссам и ординатам соответственно);

$x_2, y_2$  – центр тяжести второй СК (локальной СК для рассматриваемого примера);

$x, y$  – координаты пунктов первой СК (для рассматриваемого примера координаты десяти пунктов в СК-95 зона 5);

$X, Y$  – рассчитанные координаты во второй СК (локальной).

По исходным данным из табл.1 с использованием формул МНК из [2] вычислим параметры преобразования:

$$x_1 = 5971006.4075 \text{ м}; \quad x_2 = -4571.7601 \text{ м}; \quad m = 0.999998890708;$$

$$y_1 = 5559673.2145 \text{ м}; \quad y_2 = 23058.0815 \text{ м}; \quad \alpha = 0^\circ 00' 01''.$$

Подставив найденные параметры в (1) и (2), выполним расчёт координат  $X, Y$  для десяти точек из СК-95 в локальную СК. Затем вычислим разность (невязки  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ ) исходных координат в локальной СК (представленных в табл.1) и вычисленных по формулам (1) и (2), а также плановую невязку для каждого пункта по формуле

$$\varepsilon^2 = (\varepsilon_x)^2 + (\varepsilon_y)^2. \quad (3)$$

Результаты расчётов представлены в сводной табл.2.

### Метод аффинного преобразования координат.

В данном методе преобразования в зависимости от положения пункта изменяются длины линий и углы. Аффинное преобразование координат из одной плоской прямоугольной системы в другую производится по формулам

$$X = x_2 + a_1 \cdot (x - x_1) + b_1 \cdot (y - y_1), \quad (4)$$

$$Y = y_2 + a_2 \cdot (x - x_1) + b_2 \cdot (y - y_1), \quad (5)$$

где  $a_1, a_2, b_1, b_2$  – коэффициенты аффинного преобразования;

$x_1, y_1, x_2, y_2, x, y, X, Y$  – величины, аналогичные применяемым в методе преобразования координат по Гельмерту, описанному выше.

По исходным данным из табл.1 с использованием формул МНК из [2] вычислим параметры преобразования:

$$x_1 = 5971006.4075 \text{ м} \quad a_1 = 0.999996734750$$

$$y_1 = 5559673.2145 \text{ м} \quad a_2 = 0.000002365750$$

$$\begin{aligned}x_2 &= -4571.7601 \text{ м} & b_1 &= -0.000007195224 \\ y_2 &= 23058.0815 \text{ м} & b_2 &= 1.000001405150\end{aligned}$$

По аналогии с предыдущим методом подставим найденные параметры в (4) и (5), выполним расчёт координат X, Y для десяти точек из СК-95 в локальную СК, а также вычислим невязки по осям  $\epsilon_X$ ,  $\epsilon_Y$  и общую плановую невязку для каждого пункта по формуле (3). Результаты запишем в сводную табл.2.

### Преобразование координат методом параллельного сдвига осей.

В данном методе преобразование координат выполняется по формулам

$$X = x + (x_2 - x_1), \quad (6)$$

$$Y = y + (y_2 - y_1), \quad (7)$$

где x, y – координаты пунктов первой СК (СК-95 зона 5);

X, Y – рассчитанные координаты во второй СК (локальной).

$x_1, y_1$  – центр тяжести первой СК;

$x_2, y_2$  – центр тяжести второй СК.

По исходным данным из табл.1 вычислим координаты центров тяжести и их разности dX, dY:

$$x_1 = 5971006.4075 \text{ м}; \quad x_2 = -4571.7601 \text{ м}; \quad dX = -5975578.1676 \text{ м};$$

$$y_1 = 5559673.2145 \text{ м}; \quad y_2 = 23058.0815 \text{ м}; \quad dY = -5536615.1330 \text{ м}.$$

Выполним расчёт координат X, Y для десяти точек из СК-95 в локальную СК по формулам (6), (7), также невязки  $\epsilon_X$ ,  $\epsilon_Y$ ,  $\epsilon$  для каждого пункта и запишем их в табл.2.

Таблица 2. Плановые невязки пунктов, полученные в трёх методах

| Название пункта     | Гельмерт         |                  |                | Аффинное         |                  |                | Параллельный сдвиг |                  |                |
|---------------------|------------------|------------------|----------------|------------------|------------------|----------------|--------------------|------------------|----------------|
|                     | $\epsilon_X$ , м | $\epsilon_Y$ , м | $\epsilon$ , м | $\epsilon_X$ , м | $\epsilon_Y$ , м | $\epsilon$ , м | $\epsilon_X$ , м   | $\epsilon_Y$ , м | $\epsilon$ , м |
| пп 1901             | 0.045            | -0.046           | 0.064          | 0.009            | -0.014           | 0.016          | 0.082              | -0.023           | 0.086          |
| пп 1902             | -0.079           | 0.000            | <b>0.079</b>   | -0.013           | -0.003           | 0.013          | -0.126             | 0.047            | <b>0.134</b>   |
| пп 1903             | 0.029            | 0.026            | 0.039          | 0.037            | 0.010            | <b>0.039</b>   | 0.016              | 0.007            | 0.018          |
| пп 1904             | -0.006           | 0.040            | 0.041          | 0.003            | -0.004           | 0.004          | -0.028             | -0.023           | 0.036          |
| пп 1905             | 0.005            | 0.037            | 0.037          | -0.007           | 0.005            | 0.008          | 0.002              | -0.023           | 0.023          |
| пп 1906             | -0.016           | -0.005           | 0.016          | -0.018           | -0.009           | 0.020          | -0.016             | -0.013           | 0.020          |
| пп 1907             | -0.031           | -0.014           | 0.035          | -0.016           | 0.010            | 0.019          | -0.034             | 0.037            | 0.050          |
| пп 1908             | 0.036            | -0.043           | 0.056          | 0.014            | 0.005            | 0.015          | 0.068              | 0.017            | 0.070          |
| пп 1909             | 0.047            | -0.002           | 0.047          | -0.016           | 0.003            | 0.017          | 0.092              | -0.043           | 0.102          |
| пп 1910             | -0.030           | 0.007            | 0.031          | 0.006            | -0.005           | 0.008          | -0.060             | 0.017            | 0.062          |
| $\Sigma \epsilon^2$ |                  |                  | 0.0227         |                  |                  | 0.0034         |                    |                  | 0.0495         |
| $\mu$               |                  |                  | <b>0.0502</b>  |                  |                  | <b>0.0193</b>  |                    |                  | <b>0.0742</b>  |

В табл.2 максимальные невязки планового положения для каждого из методов выделены полужирным шрифтом, а также приведены вычисленные

по формуле Бесселя среднеквадратические погрешности  $\mu$  общих отклонений координат между рассчитанными по установленным параметрам и исходными координатами локальной системы. Анализ полученных тремя методами значений  $\epsilon$  и  $\mu$  приводит к выводу о целесообразности использования метода аффинного преобразования координат для рассмотренного объекта.

Описанный в статье способ поиска оптимального метода установления параметров преобразования плоских прямоугольных систем координат может быть легко автоматизирован путём разработки небольшого приложения на одном из высокоуровневых языков программирования и в дальнейшем использоваться в контроллерах спутникового оборудования или других мобильных устройствах для расчёта в режиме реального времени параметров между системами и пересчёта координат из одной плоской прямоугольной системы координат в другую. Рассмотренный подход позволяет дополнять описанные способы поиска параметров связи другими методами, например, конформными или полиномиальными второго или более высоких порядков.

В представленных в статье формулах вместо вычисления центров тяжести  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$  могут назначаться координаты каждого из пунктов последовательным перебором с автоматизированным поиском пункта, для которого величины  $\epsilon$  и  $\mu$  окажутся наименьшими. Также требует отдельного исследования ситуация, когда в координатах одного или нескольких пунктов будут содержаться грубые ошибки – модифицированный алгоритм должен отыскивать такие пункты и исключать их из дальнейших расчётов.

Для полноценной работы с трёхмерными объектами должны быть учтены не только плановые, но и высотные координаты пунктов. Поэтому заслуживает отдельного внимания разработка алгоритмов автоматизированного поиска оптимальных методов установления высотных параметров связи между системами: линейное смещение по высоте, аппроксимация точек плоскостью, параболой или другой поверхностью с последующим пересчётом высот по формулам выбранного метода.

### **Литература:**

1. Руководство пользователя ТРАНСКОР 3.0. [электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://credo-dialogue.ru/media/downloads/Documentation/ТРАНСКОР.%20Руководство%20пользователя.pdf>. Дата доступа: 21.10.2020.
2. Михайлович, К. Геодезия: (уравнительные вычисления) / Михайлович К.; пер. с серб.-хорват. С. В. Лебедева ; под ред. В. Д. Большакова. - Москва : Недра, 1984. - 448 с. : ил. - Библиогр.: с. 445 (36 назв.).