

极限

1. 数列极限的定义

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = L$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = L \iff \forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, |X_n - L| < \epsilon$$

2. 函数极限的定义

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), |f(x) - L| < \epsilon$$

3. 函数极限的定义 2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall x > N, |f(x) - L| < \epsilon$$

4. 函数极限的计算的相关定理

1. 极限可以进行加减乘除运算，即有理式的计算仅需带入数值
2. 有限个无穷小（0）数的和为无穷小
3. 有界函数和无穷小数的乘积为无穷小

5. 计算技巧

1. 对于 $0/0$ 型需要寻求消元
2. ∞/∞ 型尝试除以 x^n

6. 两个特殊函数

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/x} = 1$$

7. 特殊定理

1. 夹逼定理
2. 单调有界函数必有极限（数列必定收敛）