Κωδικοποίηση

1.

C - encode(m, n)

```
m := i1;
n := i2;
-- x := (n + m)*(n + m + 1)/2;
x1 := add(m, n);
x2 := x1 + 1;
x := mult(x1, x2);

-- y := 2;
y := 1;
y := y + 1;

x := div(x, y);
o1 := add(x, n);
```

D_1 - decode1(z)

```
-- for D1 we need n = z - f^(-1)(floor(f(z)))
-- f(z) = (sqrt(1 + 8z) - 1) / 2
-- f^(-1)(z) = (z^2 + z) / 2
z := i1;
t := z;
x := 1;
x := x + 1;
x := add(x, x);
x := add(x, x);
z := mult(z, x);
z := z + 1;
z := sqrt(z);
z := z - 1;
x := 1;
x := x + 1;
-- z := z div 2;
z := div(z, x);
w := mult(z, z);
z := add(z, w);
z := div(z, x);
o1 := sub(t, z);
```

D_2 - decode2(z)

```
-- D2 m = floor(f(z)) - decode1
-- f(z) = (sqrt(1+8z) -1 )/2
z := i1;
z1 := z;
t := z;
x := 1;
x := x + 1;
x := add(x, x);
x := add(x, x);
z := mult(z, x);
z := z + 1;
z := sqrt(z);
z := z - 1;
x := 1;
x := x + 1;
-- z := z div 2;
z := div(z, x);
```

```
z1 := decode1(z1);
o1 := sub(z, z1);
```

2.

(α)

Έχουμε για μικρές τιμές του n τις ακόλουθες προϋποθέσεις ώστε να συνάδει το αποτέλεσμα με τις συνήθεις πράξεις.:

$f(x, y, 0) = S(y)$

$$f(x, y, 1) = \begin{cases} f(x, y-1, 1) + 1 & y \neq 0 \\ x & y = 0 \end{cases}$$

$$f(x, y, 2) = \begin{cases} f(x, y-1, 2) + x & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

$$f(x, y, 3) = \begin{cases} f(x, y-1, 3) * x & y \neq 0 \\ 1 & y = 0 \end{cases}$$

$$f(x, y, 4) = \begin{cases} (f(x, y-1, 4))^x & y \neq 0 \\ x & y = 0 \end{cases}$$

Επομένως ο κλειστός τύπος είναι :

$f(x, y, 0) = y + 1$
$f(x, 0, 1) = x$
$f(x, 0, 2) = 0$
$f(x, 0, 3) = 1$
$f(x, 0, n) = x, n > 3$
$f(x, y, n) = f(x, f(x, y-1, n), n-1), y > 0, n > 0$

(β)

Συνάρτηση που την υπολογίζει στην Pascal

```
function f(x, y, n: integer) : integer;
begin
        if n = 0 then
                f := y + 1;
        else
                if y = 0 then
                        case n of
                                1 : f := x;
                                2 : f := 0;
                                3 : f := 1;
                        else f := x;
                        end;
                else
                        f := f(x, f(x, y-1, n), n-1);
end;
```

Στην loop αυτή η συνάρτηση δεν μπορεί να υπολογιστεί γιατί δεν είναι πρωταρχικά αναδρομική.