Оценки коалиционной устойчивости в задаче многомерного расселения

Андрей Гольман, гр. 699

Научный руководитель: Мусатов Д. В.

1 Постановка задачи

Задано множество агентов как множество точек расположений агентов на прямой. Необходимо обеспечить всех агентов некоторым благом. Благо поставляется в отдельных пунктах – мощностях, количество и места расположения которых нужно выбрать.

Стоимость поддержания каждой мощности равна 1, вне зависимости от ее положения. Каждая мощность способна удовлетворить потребность любого числа агентов. Все прикрепленные к данной мощности агенты несут равные издержки, в сумме равные стоимости поддержания мощности. Также существуют затраты прикрепления каждого агента к любой из мощностей, равные евклидовому расстоянию между расположением агента и мощности, которой он пользуется.

Коалицией будем называть множество агентов, которые пользуются одним и тем же благом. Для каждой коалиции S ее благо может располагаться в любой медиане $m(S)$ коалиции, т.е. такой точке, что сумма расстояний от этой точки до всех агентов минимальна.

Таким образом, издержки агента, находящегося в точке t, принадлежащего коалиции S, равны $\frac{1}{|S|} + |t - m(S)|$.

ε-стабильным разбиением множества агентов на коалиции будем называть такое разбиение A, что для любой коалиции S, не лежащей в этом разбиении, существует агент $t \in S$, т.ч. издержки t в S не более, чем на ε меньше издержек в t в разбиении A. Другими словами, не существует коалиции S, при формировании которой каждый агент из S уменьшает свои издержки (относительно своих издержек в разбиении A) более, чем на ε.

Нестабильностью расселения будем называть такое минимальное ε, что существует ε-стабильное разбиение для агентов данного расселения.

Требуется найти расселение с наибольшей нестабильностью.

2 Предельные оценки

Теорема 1 (А. Савватеев, [1]). Для $N \leq 4$ для любого расселения существует 0-стабильное разбиение.

Теорема 2 (А. Савватеев, [1]). Для $N = 5$ существует расселение, для которого не существует 0-стабильного разбиения.

Утверждение 1. Разбиение любого расселения на коалиции мощности 1 является 1-стабильным.

◀ При таком разбиении издержки каждого агента равны 1, поэтому не существует коалиции, при вхождении в которую издержки какого-то агента уменьшатся более, чем на 1. ▶

Таким образом, ответ нужно искать на отрезке [0, 1].

3 Тривиальный алгоритм приближенного нахождения нестабильности по расселению

Из определения ε-стабильности явно следует

Утверждение 2. Разбиение не является ε-стабильным если и только если для какой-то коалиции S наименьшее падение издержек агентов из S при формировании S превосходит ε.

Будем вычислять нестабильность расселения по определению, т.е. найдем ε-стабильное разбиение с минимальным ε, верхнюю оценку которого вычислим согласно утверждению 1.

```
ans := INF
Для A из множества всех разбиений:
   Для {m} из множества всех множеств медиан A:
      eps_for_partition := 0
      Для S из множества коалиций, не принадлежащих A:
         Для m' из множества медиан S:
            min_delta_for_coalition = INF
            Для t из множества агентов из S:
         min_delta_for_coalition := min(min_delta_for_coalition,
издержки t в A с медианами m - издержки t в коалиции S с медианой m')
         eps_for_partition := max(eps_for_partition, min_delta_for_coalition)
      ans := min(ans, eps_for_partition)
```

При реализации данного алгоритма задается перебор, разумеется, не континуума медиан. Однако при переборе медиан с шагом 0.01 можно достичь достаточной точности для некоторых оценок.

Оптимизация тривиального алгоритма. Вместо перебора медиан m' отделяющейся коалиции S достаточно составить систему линейных неравенств вида

$$a_i - \frac{1}{|S|} - |m(S) - t_i| < \delta,$$

где a_i - исходные издержки агента i, собирающегося присоединиться к S,

t_i - координата агента i,

$m(S)$ - пока еще не известная медиана S,

δ - минимизируемое падение издержек агентов из S.

В этом случае можно разбить каждое неравенство на два раскрытием модуля и за линейное от числа уравнений время минимизировать δ.

Дальнейшие исследования. Пока что алгоритм работает за экспоненциальное от числа агентов время с огромной константой, получающейся за счет выбора медиан. При этом при построении алгоритма не учтены свойства разбиений, например:

Утверждение 3 ([1]). При присоединении агента к коалиции из нечетного количества агентов, все издержки агентов, находившихся в этой коалиции, уменьшаются.

Возможно, удастся ограничить рассматриваемые разбиения до таких разбиений, что минимальные отрезки, покрывающие агентов каждой коалиции, пересекаются не более, чем в одной точке. Если же при этом рассматривать формирующиеся коалиции только из подряд идущих агентов, время работы алгоритма будет полиномиальным.

Алгоритм оценки нестабильности расселения. Вместе с тем, если отказаться от перебора всех медиан разбиения и минимизировать δ в системе линейных неравенств, описанной выше, считая медианы исходного разбиения неизвестными, можно оценить нестабильность разбиения сверху: для каждой пары разбиения и коалиции будут выбираться оптимальные медианы, но для некоторого разбиения множества его медиан, возможно, будет меняться для разных коалиций, и полученная оценка не будет достигаться. Вместе с тем, такой алгоритм намного эффективнее предыдущего и был применен для оценки следующего случая.

4 Расселение пяти агентов в двух точках прямой

По алгоритму, схожему с описанным, строго оценим нестабильность следующего случая:

Теорема. Пусть 2 агента расположены в точке 0, 3 агента - в точке a. Тогда неустойчивость разбиения не превосходит $\frac{1}{90}$.

◀

Через $\varepsilon(A)$ будем обозначать минимальное ε, т.ч. A является ε-стабильным разбиением.

Лемма. Если разбиения A и B таковы, что издержки каждого агента в A не превышают издержек каждого агента в B, $\varepsilon(A) \leq \varepsilon(B)$ (тривиально следует из определения $\varepsilon()$).

Обозначим агентов числами от 1 до 5 в порядке возрастания их координат. Переберем возможные мощности N наибольшей коалиции в разбиении A:

1. N=5. Медиана единственной группы расположена в точке a. Издержки агентов, расположенных в точке a, равны $\frac{1}{5}$, и это минимально возможные издержки для этих агентов, поэтому им невыгодно менять группу. Поэтому отделиться могут только агенты 1 и 2: в случае отделения их издержки составят хотя бы $\frac{1}{2}$. Таким образом, их издержки уменьшаются не более чем на

   $\frac{1}{5} + a - \frac{1}{2} = a - \frac{3}{10}$.

   Отметим, что при $a \leq \frac{3}{10}$ разбиение A будет 0-стабильным.

2. N=4. Наибольшая коалиция содержит агентов и с координатой 0, и с координатой a.

   А. При переходе в группу размера 4 издержки одного из агентов не изменяются.

   Б. При переходе в группу размера меньше 4 издержки агента уменьшаются, если только если его новая группа состоит только из агентов с одной координатой. Тогда падения издержек агентов в точках 0 и a равны

   $\frac{1}{4} + m - \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4} + a - m - \frac{1}{3}$.

   Тогда минимум из них не превосходит $\frac{a}{2} - \frac{1}{6}$. При этом он достигается при $m = \frac{5}{12} - \frac{a}{2}$, и m лежит в допустимом промежутке при $\frac{3}{10} \leq a \leq \frac{1}{3}$.

   В. При переходе в группу размера 5 падения издержек агентов:

   $\frac{1}{4} + m - \frac{1}{5}$ и $\frac{1}{4} + a - m - \frac{1}{5}$.

   При этом издержки агента, не принадлежащего наибольшей коалиции, падают значительно, хотя бы на $1 - \frac{1}{3}$.

   Аналогично предыдущему пункту, минимум падения издержек по агентам равен $\min(\frac{a}{2} + \frac{1}{20}, \frac{2}{3}) = \frac{a}{2} + \frac{1}{20}$ для $\frac{3}{10} \leq a \leq \frac{1}{3}$.

   Таким образом, $\varepsilon(A) = \max(\frac{a}{2} + \frac{1}{20}, \frac{a}{2} - \frac{1}{6}) = \frac{a}{2} + \frac{1}{20}$.

3. N=3.

   Если A состоит из трех коалиций, то либо два агента с одинаковыми координатами лежат в коалициях мощности 1 и могут объединиться в одну коалицию без уменьшения ε по лемме, либо A эквивалентно разбиению ([1, 3, 4], [2], [5]), и $\varepsilon(A) \leq \varepsilon([1,3,4,5],[2])$ по лемме, т.к. издержки падают для агентов 1, 3, 4 на $\frac{1}{12}$, для агента 5 - на $\frac{3}{4}$.

   Если коалиций две, $\varepsilon(A)$ не превосходит $\varepsilon([1,2],[3,4,5])$ по лемме.

   Теперь рассмотрим разбиение $\varepsilon([1,2],[3,4,5])$.

   А. Формировать коалиции мощности меньше 4 агентам невыгодно.

   Б. При формировании коалиции мощности 4 с медианой m уменьшение издержек входящих в коалицию агентов равно увеличению издержек в случае 2Б, минимум по агентам равен

   $\frac{1}{6} - \frac{a}{2}$.

   В. При формировании коалиции мощности 5:

   Издержки агентов уменьшаются на

   $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} - a = \frac{3}{10} - a$ и $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$, и

   $\varepsilon(A) = \max(\min(\frac{2}{15}, \frac{3}{10} - \frac{a}{2}), \frac{1}{6} - \frac{a}{2}, 0)$.

   Отметим, что при $a \geq \frac{1}{3}$ разбиение A является 0-стабильным.

4. N=2. Если существуют две коалиции агентов в одной точке, объединим их. Иначе разбиение эквивалентно разбиению ([1, 3], [2, 4], [5]), и $\varepsilon([1,3],[2,4],[5]) \leq \varepsilon([1,2],[3,4],[5]) \leq \varepsilon([1,2],[3,4,5])$.

5. N=1. Тогда $\varepsilon(A) < \varepsilon([1, 2], [3, 4, 5])$.

Нестабильность расселения будет равна $\min(\varepsilon(A)) = \min(a - \frac{3}{10}, \frac{1}{6} - \frac{a}{2})$. Максимум этого выражения равен $\frac{1}{90}$ и достигается в точке $\frac{14}{45}$, что завершает доказательство теоремы.

►

Отметим, что компьютерный перебор с помощью алгоритма оценки нестабильности расселения, описанного в п.3, для 5 агентов не выявил разбиений с нестабильностью большей, чем $\frac{1}{90}$, при небольших смещениях агентов относительно рассмотренного в этом пункте случая, а также в ряде других случаев.

Дальнейшие исследования Еще одно направление дальнейших исследований заключается в построении примеров разбиений с нестабильностью большей, чем известный пример с $\frac{1}{90}$. В частности, можно оценить нестабильности для расселений, где произвольное число агентов проживает в двух точках (что будет обобщением теоремы из п.4) или в трех точках.

5 Список литературы

[1] A. Savvateev. Achieving stability in heterogeneous societies. Multi-jurisdictional structures, and redistribution policies. Economics Education and Research Consortium Working Paper Series, No 04/13.

[2] А. Савватеев. Задача многомерного размещения и ее приложения: теоретико-игровой подход. ЦЭМИ РАН, М., 2013