Коалиционная нестабильность в «биполярном мире»

Андрей Гольман

Научный руководитель - Мусатов Д. В.

Материалы работы и актуальная версия данного текста доступны по ссылке.

1 Постановка задачи

Задано конечное множество агентов — точек на прямой. Необходимо обеспечить всех агентов некоторым благом. Благо поставляется в отдельных пунктах – мощностях, количество и места расположения которых нужно выбрать.

Стоимость поддержания каждой мощности равна 1, вне зависимости от ее положения. Каждая мощность способна удовлетворить потребность любого числа агентов. Все прикрепленные к данной мощности агенты несут равные издержки, в сумме равные стоимости поддержания мощности — *производственные издержки*. Также существуют затраты прикрепления каждого агента к любой из мощностей, равные евклидовому расстоянию между расположениями агента и мощности, которой он пользуется, — *транспортные издержки*.

Коалицией или *группой* будем называть множество агентов, которые получают благо из одного и того же источника. Для каждой коалиции S ее благо может располагаться в любой медиане $m(S)$ коалиции, т.е. такой точке, что сумма расстояний от этой точки до всех агентов минимальна.

Таким образом, издержки агента, находящегося в точке t, принадлежащего коалиции S, равны

$$costs(a) = \frac{1}{|S|} + |t - m(S)|.$$

Падением издержек агента a с исходными издержками $old(a)$ и новыми $new(a)$ будем считать одну из двух величин:

1. (*абсолютное падение издержек*) $\Delta_{abs}(a) = old(a) - new(a)$;
2. (*относительное падение издержек*) $\Delta_{rel}(a) = \frac{old(a)-new(a)}{old(a)}$.

Нестабильностью разбиения множества агентов на коалиции назовем $\varepsilon = \max_{S\in G}\min_{a\in S}\Delta(a)$, где G — множество всех подмножеств множества агентов, Δ — функция падения издержек. Другими словами, нестабильность — это минимальное ε, т.ч. не существует коалиции S, при формировании которой каждый агент из S уменьшает свои издержки (относительно своих издержек в разбиении A) более, чем на ε. [1]

Нестабильностью расселения будем называть наименьшую нестабильность разбиений агентов данного расселения.

Требуется описать расселение с наибольшей нестабильностью.

В этой работе рассматриваются следующие расселения: L агентов расположены в точке 0, R агентов в точке d, при этом $L \le R$. Будем называть такие расселения *биполярными*.

Будем называть группу *неопределенной*, если множеством ее медиан является отрезок.

Комментарий. В случае относительного падения издержек стоимость поддержания мощности можно считать равной 1 без ограничения общности — в противном случае можно пропорционально увеличить расстояние между агентами и относительное падение издержек не изменится. В случае абсолютного падения издержек при увеличении в k раз транспортных и производственных издержек падение издержек возрастет в k раз, и при произвольной стоимости поддержания мощности нестабильность может быть сколь угодно большой.

Также мы без ограничения общности считаем, что коэффициент перед величиной транспортных издержек $|t - m(S)|$ равен единице. В противном случае можно пропорционально изменить расстояния между агентами так, чтобы их транспортные издержки стали равны указанной величине.

[1] Нестабильность — неотрицательная величина, т.к. в коалиции, присутствующей в исходном разбиении, все падения издержек нулевые.

2 Обзор литературы

Происхождение задачи описано в статье А. Савватеева [1], там же предложено исследование "биполярного мира". В [3], [5] приведены примеры разбиений с ненулевой нестабильностью. В [1] приведен полный анализ существования коалиционной устойчивости (т.е. разбиений нулевой нестабильности) относительно непрерывных $0 \leq L, R \leq 1$ и $d = 1$.

3 Основные результаты

Построены и реализованы алгоритмы подсчета нестабильности разбиения, оценки нестабильности расселения. С помощью алгоритма оценки показано, что для функции абсолютного падения издержек нестабильность может превышать 0.01 только для трех пар (L, R).

Показано, что для функции относительного падения издержек расселение с наибольшей нестабильностью состоит из не более чем 3 коалиций, из которых не более одной неопределенной. На основании этого построен алгоритм поиска нестабильности биполярного расселения, перебирающий единственный непрерывный параметр.

Найдено расселение с нестабильностью более 0.054. Доказано, что любое биполярное расселение имеет нестабильность, не превосходящую 0.071.

4 Алгоритм подсчета нестабильности разбиения

Будем говорить, что группа агентов S хочет отделиться *с желанием* δ, если после образования этой группы для всех агентов $a \in S$: $\Delta(a) \geq \delta$. [2] Тогда нестабильность разбиения — это наибольшее возможное желание отделиться среди всех групп агентов.

Утверждение 1. Из всех групп из l агентов *слева* (в точке 0) и r агентов *справа* (в точке d) наибольшее желание отделиться имеет группа из l агентов с наибольшими издержками слева и r агентов с наибольшими издержками справа.

Утверждение 2. Максимальным желанием отделения группы является величина $\min(\Delta(a_l), \Delta(a_r))$, где a_l — агент с наибольшими издержками среди отделяющихся агентов точки 0, a_r — аналогичная величина для точки d.

Таким образом, для поиска группы с наибольшим желанием отделиться достаточно рассмотреть группы из l агентов слева с наибольшими издержками и r агентов справа с наибольшими издержками для всех $0 \leq l \leq L$ и $0 \leq r \leq R$. В каждой группе для каждой из точек 0, d достаточно рассмотреть агента с наибольшими исходными издержками в этой точке.

Алгоритм 1. Алгоритм подсчета нестабильности разбиения за $O(LR)$.

◀

1. Вычислим издержки агентов в данном разбиении. Время работы этого шага — $O(R)$.

2. Отсортируем агентов в каждой точке по убыванию издержек. Время работы этого шага — $O(R \log R)$.

   Теперь отдельно переберем группы с единственным центром в точках 0 и d и отдельно неопределенные группы.

3. Перебор неопределенных групп.

   По утверждениям 1 и 2, для группы из k агентов слева и k агентов справа с медианой m, желание группы отделиться не более:

   $$\min[\Delta(a_k), \Delta(b_k)]$$

   где a_k — агент с k-ми наибольшими издержками среди агентов в точке 0, b_k — такой же агентов в точке d.

   Исходные издержки известны, поэтому $\Delta(a_k), \Delta(b_k)$ — линейные функции от m. [3] Максимум их минимума на отрезке $[0, d]$ ищется за $O(1)$.

   Переберем k от 1 до L. Время этого шага — $O(L)$ — перебор L значений k, обработка каждого из них за $O(1)$.

[2] Здесь и далее в этом разделе под Δ подразумевается одна из функций падения издержек: Δ_{abs} или Δ_{rel}

[3] В случае функции относительного падения издержек — $\Delta(a_k) = 1 - \frac{\frac{1}{2k} + m}{old(a_k)}, \Delta(b_k) = 1 - \frac{\frac{1}{2k} + d - m}{old(b_k)}$, функция абсолютного падения издержек всегда линейно зависит от m

4. Перебор групп с центром в точке 0.

   В силу утверждений 1 и 2 желание отделиться группы из l агентов слева и r агентов справа определяется издержками l-го агента с наибольшими издержками слева и r-го агента с наибольшими издержками справа.

   Найдем группу, у которой желание отделиться наибольшее. Для всех пар (l, r) явно посчитаем эти издержки и выберем максимум из минимумов пар. Подсчет издержек происходит за $O(1)$, число пар — $O(LR)$, время работы этого шага на этом шаге — $O(LR)$.

Каждый из 3 пунктов работает за $O(LR)$, так же можно оценить время работы всего алгоритма. ▶

5 Анализ нестабильности относительно функции абсолютного падения издержек

В этом разделе рассматривается нестабильность расселений относительно функции Δ_{abs} и показывается, что нестабильность только трех расселений может превосходить $\frac{1}{100}$.

Напоминим, что нестабильность расселения — минимум нестабильностей всех его разбиений. В частности, нестабильность расселения не превосходит минимума нестабильностей трех разбиений:

1. Union — объединение всех агентов в одну коалицию;

2. Federation — разбиение агентов на две коалиции в соответствии с их координатами;

3. MaxUndef(m) — две коалиции: одна состоит из L агентов в точке 0 и L агентов в точке d с медианой в точке m, вторая — из $R - L$ агентов в точке d.

Алгоритм 2. Алгоритм оценки нестабильности расселения.

◀ С помощью алгоритма 1 вычислить нестабильность расселений Union, Federation и MaxUndef($\frac{d}{2}$). Вернуть минимум. Время работы, как и у алогоритма 1 — $O(LR)$. ▶

Будем называть группу *отделяющейся*, если у нее положительное желание отделиться.

Утверждение 3. При $LR > 1$, $d > 1$ стабильно разбиение Federation.

◀ Пусть $d > 1$ и Federation нестабильно. Если в отделяющейся группе были агенты только из одной точки, то издержки каждого агента в новой группе не меньше издержек в старой. Поэтому в отделяющейся группе есть агенты из разных точек и есть агент a, находящийся на расстоянии не менее $\frac{1}{2}$ от медианы.

Транспортные издержки a составляют не менее $\frac{1}{2}$. Издержки a упали, в Federation транспортные издержки агентов нулевые, поэтому исходные производственные издержки a в Federation превосходили $\frac{1}{2}$, а значит, были равны 1. Тогда $L = 1$, т.к. $R = 1$ влечет $L = 1$.

Центр новой группы не может находиться в точке d, т.к. исходные издержки a равны 1, и новые издержки должны быть меньше 1. Поэтому отделяющаяся группа включает не более одного агента справа, а значит, ровно одного агента справа. Новые издержки этого агента справа составляют не менее $\frac{1}{2}$, значит, исходные производственные были более $\frac{1}{2}$, т.е. 1, и $R = 1$. ▶

Алгоритм 3. Алгоритм оценки максимума нестабильности всех биполярных расселений относительно падения издержек Δ_{abs}.

◀ Если $L = R = 1$, вернуть 0.

Для d от 0 до 1 с шагом $\theta = 0.001$ применим алгоритм 2 к соответствующему расселению. Вернем максимум, увеличенный на $\frac{\theta}{2}$. ▶

Доказательство корректности.

◀ При $L = R = 1$ стабильно либо разбиение Federation, либо MaxUndef($\frac{d}{2}$) — издержки обоих агентов в этих разбиениях совпадают, и стабильно то, где издержки меньше.

Для остальных случаев достаточно рассмотреть $d \geq 0$ в силу симметрии и $d \leq 1$ в силу утверждения 3. Пусть максимум нестабильности лежит в расселении с положением правых агентов в точке d.

Обозначим через d' ближайшее к d рассмотренное алгоритмом положение правых агентов. Тогда в расселении с d' в каждом разбиении исходные издержки каждого агента отличаются не более, чем на $|d - d'|$. Тогда все падения издержек агентов, а значит, и желания групп отделиться, а значит, и нестабильности разбиений отличаются не более, чем на $|d - d'| \leq \frac{\theta}{2}$. ▶

Применение алгоритма 3 позволяет сделать некоторые выводы о допустимых значениях нестабильности расселений. В частности, при переборе [4] $L, R = 1 \ldots 100$ для функции абсолютного падения издержек, нестабильность может быть больше 0.01 только для трех пар (L, R):

[4] *case*_1 из кода, результаты без поправки в 0.001 — здесь. Аналогичные результаты для случая относительного падения издержек — здесь.

$L=2, R=3, \varepsilon \leq 0.013;$
$L=3, R=4, \varepsilon \leq 0.022;$
$L=4, R=5, \varepsilon \leq 0.015.$
Первый из этих случаев подробно описан в предыдущем отчете (доказано, что $\varepsilon \leq \frac{1}{90}$).

Теорема 1. При $L, R > 100$ нестабильность любого биполярного расселения относительно функции абсолютного падения издержек не может превышать 0.01.

◀ Нестабильность расселения — минимум нестабильностей всех его разбиений. Докажем, что нестабильность разбиения Federation не превосходит 0.01. В силу $L, R \geq 100$, издержки каждого агента не превышают 0.01. Но если нестабильность больше 0.01, то есть группа, при отделении которой издержки всех агентов падают не менее, чем на 0.01, и тогда существует агент с неположительными издержками. ▶

Следствие. Нестабильность любого биполярного расселения относительно функции абсолютного падения издержек не может превышать 0.01, за исключением трех случаев, описанных выше.

6 Оценки d для нестабильных расселений для относительного падения издержек

Нестабильным расселением будем называть расселение с положительной нестабильностью.

Гораздо более интересен случай относительного падения издержек $\Delta_{rel}(new, old) = \frac{old-new}{old}$.

Теорема 2. Если расселение нестабильно, то $\frac{R}{L(R+L)} < d < \frac{1}{R}$.

◀

Если расселение нестабильно, то в каждом разбиении есть группа, при отделении которой издержки каждого агента этой группы падают. Для двух разбиений покажем, какие группы хотят отделиться с наибольшим желанием, и запишем условия, при которых это желание положительно.

Доказательство левого неравенства.

В разбиении Union издержки каждого агента в точке d - минимально возможные для данного разбиения (и производственные, и транспортные), поэтому группа отделяющихся агентов может состоять только из агентов слева.

Утверждение. Группа агентов слева с максимальным желанием отделиться состоит из L агентов.

◀ У этой группы наименьшие возможные издержки для групп из агентов слева, а исходные издержки всех агентов слева равны. ▶

Условие наличия положительного желания:

$$\frac{1}{L} < \frac{1}{L+R} + d. \tag{1}$$

Тогда

$$d > \frac{1}{L} - \frac{1}{L+R} = \frac{R}{L(L+R)}.$$

Доказательство правого неравенства.

Посмотрим, какая группа может отделяться в разбиении Federation. Рассмотрим три случая: это неопределенная группа, группа с центром в точке 0 или группа с центром в точке d. Пусть в этой группе l агентов слева и r агентов справа.

1. Неопределенная группа.

   Тогда существует $m \in [0, d]$, такое что:

$$\begin{cases} \frac{1}{L} > \frac{1}{l+r} + m \\ \frac{1}{R} > \frac{1}{l+r} + d - m \end{cases}$$

   Тогда

$$\frac{1}{L} + \frac{1}{R} > \frac{2}{l+r} + d$$

$$d < \frac{1}{L} + \frac{1}{R} - \frac{2}{l+r} \leq \frac{1}{R}$$

   Последнее неравенство верно в силу $l + r = 2l \leq 2L$.

2. Центр в точке d. Наличие в отделяющейся группе агента слева противоречит (1), поэтому она состоит только из агентов справа, и издержки каждого агента не менее $\frac{1}{R}$, что не меньше текущих издержек разбиения Federation.

3. Центр в точке 0. Если в отделяющейся группе нет агентов справа, то, аналогично предыдущему случаю, издержки каждого агента не менее $\frac{1}{L}$, что не меньше текущих издержек разбиения Federation. Добавим в группу $l - r$ агентов справа: изменение издержек добавленных агентов будет совпадать с изменением издержек r агентов справа. Издержки всех остальных агентов не увеличатся, так как производственные издержки упадут, а транспортные сохранятся. Поэтому минимум желаний отделиться в этой группе не изменится. В новой группе l агентов слева и l агентов справа, и задача сведена к случаю 1.

►

Следствие 1. $d > \frac{1}{2R}$.
◄ Так как $L \leq R$ и $\frac{R}{L(R+L)} \geq \frac{R}{R(R+R)} = \frac{1}{2R}$. ►
Следствие 2. $R < \frac{\sqrt{5}+1}{2}L$.
◄ Так как $\frac{R}{L(R+L)} \leq \frac{1}{R}$. ►

7 Устройство коалиций в разбиении с наименьшей нестабильностью

Для каждого расселения будем называть его разбиение с наименьшей нестабильностью *оптимальным*.
Лемма 1 (аналог леммы 3 из [1]). Для каждого расселения существует оптимальное разбиение, в котором не более одной группы с каждым центром.

Лемма 2. Для каждого расселения если существует оптимальное разбиение, в котором есть группы с центрами в точках 0 и d, то существует оптимальное разбиение с ровно одной группой с центром в точке 0 и ровно одной группой с центром в точке d, при этом не более одной из этих двух групп содержат агентов из разных точек.

Лемма 3. Для каждого расселения существует оптимальное разбиение, в котором не более одной неопределенной группы.

При уменьшении издержек какого-либо агента желание отделиться каждой группы не увеличивается.

Покажем, что для каждого разбиения, не удовлетворяющего условию лемм 1–3, существует другое разбиение, удовлетворяющее условию, в котором издержки каждого агента не превосходят издержек в исходном разбиении.

Доказательство леммы 1.

◄ Пусть в оптимальном разбиении существует несколько групп с каким-то центром. Объединим эти группы в одну с тем же центром. Транспортные издержки всех агентов не изменятся, а производственные издержки не возрастут. ►

Доказательство леммы 2.

◄ По лемме 1 можно объединит`[U+FFFD][U+FFFD]` все группы с одним центром в одну. После объединения остается не более одной группы с центром в точке 0 и не более одной группы с центром в точке d.

Пусть утверждение леммы не выполнено. Тогда есть группа A с центром слева с a агентами справа и группа B с центром справа и b агентами слева. Если $a \leq b$, перенесем a агентов справа из A в группу B, а a агентов слева из B в группу A. Производственные издержки всех агентов от этого не изменятся, а транспортные издержки перенесенных агентов упадут. После переноса группа B состоит из агентов из одной точки.

Аналогично сделаем, если $b < a$. ►

Доказательство леммы 3.

◄ ◄

Пусть в разбиении больше двух неопределенных групп, в которых в сумме $2a$ агентов. Если при их слиянии в одну группу размера $2a$ с медианой в точке $\frac{d}{2}$ издержки каждого агента не возрастают, то лемма доказана.

Пусть не так, и найдется агент x из группы B размера $2b$, издержки которого возрастают.

Утверждение 1. В таком случае $b > \frac{a}{2}$.

◄ Из условия убывания издержек:

$$\frac{1}{2a} + \frac{d}{2} > \frac{1}{2b} + \delta \geq \frac{1}{2b},$$

где δ — транспортные издержки x в B.

В силу теоремы 2

$$\frac{1}{2a} + \frac{d}{2} \le \frac{1}{2a} + \frac{1}{2r} < \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{a}.$$

Откуда $\frac{1}{2b} < \frac{1}{a}$ и $b > \frac{a}{2}$. ►

Утверждение 2. Каждая группа C размера $c \le \frac{a}{2}$ может слиться с группой A размера не меньше a так, чтобы издержки каждого агента не увеличились.

◄ Из теоремы 2 для каждого агента $c \in C$ падение издержек до и после слияния:

$$old(c) \ge \frac{1}{\frac{a}{2}} \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{r} \ge \frac{1}{a} + d \ge new(c)$$

►

Таким образом, все группы размера меньше $\frac{a}{2}$ можно слить с группой B. Если после слияния остается группа размера не менее a и k групп размера не менее $\frac{a}{2}$, то $k = 1$, так как в неопределенных группах всего $2a$ агентов.

Таким образом, можно оставить две группы, большая из них размера от a до $\frac{3}{2}a$.

Утверждение 3. Существует $m \in [0, d]$, т.ч. эти две группы можно слить в одну с медианой m, т.ч. издержки каждого агента не увеличились.

Пусть две группы имеют размер $2ak$ и $2a(1-k)$, $k \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. Условие того, что издержки их агентов после слияния не больше старых при сдвигах медианы от этих агентов на δm_1 и δm_2 (падения издержек для агентов тех же групп из противоположных точек в этом случае еще больше, т.к. медиана сдвигается в их сторону):

$$\frac{1}{2ak} - \frac{1}{2a} - \delta m_1 \ge 0$$

$$\frac{1}{2a(1-k)} - \frac{1}{2a} - \delta m_2 \ge 0.$$

δm_1 и δm_2 можно корректно выбрать согласно двум предыдущим неравенствам, если расстояние m между исходными медианами групп не превосходит

$$m \le \frac{1}{2ak} - \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a(1-k)} - \frac{1}{2a} = \frac{1}{2a}\Big(\frac{1}{k(1-k)} - 2\Big).$$

Что верно в силу цепочки неравенств (использованы теорема 2 и неравенство о средних):

$$m \le \frac{1}{R} \le \frac{1}{a} \le \frac{1}{2a}\Big(\frac{1}{k(1-k)} - 2\Big).$$

► ►

Объединение лемм 1, 2, 3 составляет следующую теорему.

Теорема 3. Для любого расселения существует оптимальное разбиение, состоящее из:

1. не более одной неопределенной группы;

2. не более одной группы с центром в точке 0, не более одной группы с центром в точке d; из этих двух групп не более одной содержит агентов, живущих в разных точках.

Из теоремы 3 тривиально следует алгоритм определения нестабильности расселения, перебирающий единственный непрерывный параметр.

Алгоритм 4. Алгоритм определения примерной нестабильности расселения за $O(L^4 M)$, где M — количество перебираемых медиан неопределенной группы в исходном разбиении.

◄

```
Вход: L, R, d
Group(l, r, m) — группа из l агентов слева и r агентов справа с медианой m.
Используется algo_1 – алгоритм 1.
Если не выполнено условие теоремы 2:
  return 0
instability := 0
Для всех целых a из [0, L]: // количество агентов в неопределенной группе
  Для всех целых i из [0, M]
  m := i * d / M // медиана неопределенной группы
    Для всех целых l из [0, L-a]: // количество 'чужих' агентов в группе с центром d
      groups := (a, a, m), (l, R, d), (L-l, 0, 0)
```

```
      instability := min(instability, algo_1(groups))
    Для всех целых r из [0, R-a]: // количество 'чужих' агентов в группе с центром 0
      groups := (a, a, m), (0, R-r, d), (L, r, 0)
      instability := min(instability, algo_1(groups))
return instability
```

Оценка времени работы: 3 вложенных цикла с $L, M, O(L)$ итерациями, тело цикла работает за $O(L^2)$ в силу оценки алгоритма 1 и теоремы 2.

▶

Теорема. У любого биполярного мира существует оптимальное разбиение из не более, чем двух групп.

Если мир стабилен, см. результат Савватеева.

Пусть не так, рассмотрим оптимальное разбиение из трех групп. Положим a - размер половины неопределенной группы.

Утверждение 1. $a > 0.5$. <несколько случаев>

Утверждение 2. Если есть группа из агентов слева размера не больше, чем $1 - a$, то ее объединение с оставшейся группой не увеличит издержки никаких агентов.

◀

Согласно WolframAlpha, уравнение падения издержек агентов слева при объединении $1/(R+1-2a)+d > 1/(1-a)$ не имеет решений в условиях $0.5 < a < 1, 1 < R < 1.7, \frac{R}{1+R} < d < 1/R$. Поэтому при объединении этой группы с другой с центром справа издержки агентов слева упадут, а издержки агентов справа также упадут на величину падения производственных издержек.

▶

Вычислительная проверка остальных случаев говорит, что либо можно сделать переход к другому разбиению, чтобы издержки упали, либо можно сделать MaxUndef, т.ч. при формировании любой другой группы желание определялось через падение издержек другого факторкласса.

Возможно, распишу позже, если ничего лучше не придумается.

Следствие 1. Одно из оптимальных разбиений любого биполярного мира - это Union, Federation, MaxUndef или Pseudofederation.

Следствие 2. Существует оптимальное разбиение, в котором издержки любого агента не превышают $\max(\frac{1}{R-L}, \frac{1}{R} + d)$.

Т.к. это максимальные издержки для агентов в описанных четырех разбиениях.

8 Алгоритм подсчета нестабильности разбиения для произвольного непрерывного мира

Утверждение 1. Если в S можно добавить несколько агентов, так что:

1. медиана S остается на месте;

2. падение издержек добавленных агентов совпадало с падением издержек каких-то агентов, уже присутствовавших в группе,

то желание отделиться у новой группы не меньше желания отделиться у S.

◀ В результате добавления агентов уменьшатся новые производственные издержки агентов. Поэтому падение издержек увеличится, и желание группы S отделиться не уменьшится. ▶

Научимся считать нестабильность разбиения произвольного мира.

Пусть A – число групп в разбиении, n - число городов в данном мире. Тогда применим следующий алгоритм.

1. Факторизовать множество агентов по паре «исходные издержки – положение агента».

2. Для каждого подмножества F факторклассов ($O(2^{An})$):

   (a) Для каждой точки, в которой есть агенты: ($O(n)$):

   1. Найти размер наибольшей группы с центром в этой точке, в которую входят агенты из всех факторклассов из F (1). ($O(A)$)

   2. вычислить желание этой группы отделиться, явно посчитав падения издержек для каждого факторкласса. ($O(A)$)

   (b) Для каждого отрезка между двумя соседними точками с агентами: ($O(n)$):

   1. найти наибольший размер группы с медианой на этом отрезке, т.ч. в группу входят агенты из всех факторклассов из F (1). ($O(A)$)

   2. вычислить наибольшее желание отделиться среди всех таких групп такого размера (2). ($O(A \log A)$)

3. Вернуть максимум из вычисленных желаний отделиться.

Корректность в предположении корректности подалгоритмов (1) и (2).

◀

Пусть G - группа с наибольшим желанием отделиться. Ее желание - минимум по падениям издержек агентов из G. Падения издержек для всех агентов внутри каждого факторкласса совпадают, поэтому достаточно посчитать падения издержек для произвольного агента из каждого входящего в G факторкласса.

Если в G можно добавить несколько агентов из факторклассов, агенты из которых уже входят в G, не меняя при этом медиану, то желание новой группы G' больше желания G, т.к. производственные издержки в G' меньше. Но мы предполагали, что желание G максимально - противоречие.

Поэтому для каждого множества факторклассов и медианы достаточно рассмотреть группу набольшего размера.

Алгоритм рассматривает все подмножества факторклассов и всевозможные центры групп, поэтому желание G будет учтено алгоритмом.

▶

Асимптотика

◀

2 вложенных цикла: первый цикл перебирает все подмножества из не более, чем An факторклассов, т.к. каждая группа распадается на не более, чем n классов; второй цикл перебирает n точек и $n-1$ отрезок. Тело цикло работает за $O(A)+T_1+T_2$, где T_1 и T_2 - времена работы подалгоритмов (1) и (2).

Общее время работы: $O(2^{An}(A+T_1+T_2)$.

▶

Подалгоритм (1) - поиск группы наибольшего размера с центром в точке m

1. Добавить в группу всех агентов в m из допустимых факторклассов. Пусть их q.
2. Найти число агентов l слева от m из допустимых факторклассов.
3. Найти число агентов r справа от m из допустимых факторклассов.
4. В дискретном случае: убедиться, что $\min(l,r)+c$ не меньше числа факторклассов с противоположной стороны - иначе при выборе хотя бы одного агента из каждого факторкласса с одной из сторон, медиана будет не в m, а с этой стороны от m, и группу выбрать невозможно.
5. Вернуть $c+l+\min(l+c,r)$.

◀

Пусть агентов слева от медианы l, в медиане c, справа от медианы r.

Пусть, не умаляя общности, $l \leq r$. Тогда есть группа $(l,c,min(l+c,r))$ с медианой в m.

Пусть есть группа большего размера, тогда агентов справа больше, чем $l+c$, и медиана группы будет правее m, противоречие. Сначала добавим всех агентов в медиане в группу.

Все подсчеты делаются за $O(A)$.

▶

Подалгоритм (2) - поиск наибольшего желания отделиться для группы известного размера с медианой на отрезке l,r

Пусть число факторклассов - B.

1. Для каждого факторкласса построить линейную от m функцию $f_i(m)$ падения издержек. ($O(B)$)
2. Построить полуплоскости вида $y < f_i(x)$, а также полуплоскости $x > l, x < r$. ($O(B)$)
3. Построить пересечение полуплоскостей. ($O(B \log B)$)
4. Вернуть наибольшую координату y для точек из полученного пересечения. ($O(B)$)

◀

На плоскости будем откладывать медианы по оси x, падения издержек по оси y. Для каждой медианы желание группы отделиться - минимум падений издержек, т.е. минимум $f_i(m)$. Поэтому пара (m_{opt},максимальное падение издержек) на плоскости лежит под каждой из прямых $f_i(m)$, а, значит, и в пересечении полуплоскостей.

Пересечение полуплоскостей строится за $O(BgB)$.

▶

Итоговая асимптотика алгоритма: $O(2^{An}nA\log A)$

9 Численная оценка нестабильности

Теорема 4. Существует расселение с $\varepsilon > 0.061$.

◀

Применяя алгоритм 4 к $d = 0.022$, $L = 29$, $R = 38$ с 200 пробами медиан, получаем $\varepsilon \approx 0.0550$ [5].

Оценим точность результата. Желание произвольной группы отделиться является минимумом падений издержек агентов, а нестабильность — максимумом желаний групп. Значит, нестабильность не могла измениться сильнее, чем падения издержек агентов.

Пусть наибольшая нестабильность достигается в разбиении A с медианой неопределенной группы m, а ближайшая к m рассмотренная алгоритмом в этом разбиении медиана — m'. Падение издержек агента a может измениться не более, чем на:

$$|(1 - \frac{new(a)}{old(a)}) - (1 - \frac{new(a)}{old'(a)})| = |\frac{new(a)}{old'(a)} - \frac{new(a)}{old(a)}| = new(a)\frac{|old'(a) - old(a)|}{old(a)old'(a)} \leq \frac{new(a)}{old(a)}\frac{|m - m'|}{old'(a)} \leq$$

$$\leq \frac{new(a)}{old(a)}\frac{\frac{0.022}{200}}{old(a) - \frac{0.022}{200}} \leq \frac{new(a)}{old(a)}\frac{1}{66}$$

В этой цепочке неравенств:

Первое неравенство: $|old'(a) - old(a)| \leq |m - m'|$, так как меняются только транспортные издержки за счет сдвига медианы.

Второе неравенство: $|m - m'| \leq \frac{d}{200}$ в силу выбора m, а также $old'(a) \geq old(a) - \frac{d}{200}$ аналогично первому неравенству.

Третье неравенство верно в силу: $old(a) \geq \frac{1}{67}$, так как производственные издержки любого агента не менее $\frac{1}{L+R} = \frac{1}{67}$.

Рассуждая аналогично теореме 1, получаем, что новая нестабильность отличается не более, чем в $1 + \frac{1}{66}$ раз от исходной, то есть $\varepsilon \geq \frac{1}{0.056}\frac{1}{1+\frac{1}{66}} > 0.054$.

▶

Теорема 5. Для любого биполярного расселения нестабильность $\varepsilon < 0.063$.

◀ ◀

Аналогично алгоритму 2, проанализируем угрозы следующий разбиений:

1. Union;
2. Federation;
3. MaxUndef($\frac{d}{2}$);
4. LeftFederation(α) - две группы. Первая имеет медиану слева и состоит из L агентов слева и агентов справа. Вторая состоит из оставшихся агентов справа. Будем рассматривать 24 таких разбиения при $\alpha = \frac{a}{25}$, $a = 1, \ldots, 24$.

Положим $k = \frac{R}{L}, \gamma = Ld$.

Воспользуемся алгоритмом подсчета нестабильности разбиения для произвольного непрерывного мира.

При $\mu = \frac{\gamma}{2}$ найдем такие k и γ, что ε максимально. В силу теоремы 2 и следствия 2 из нее, можно перебирать k от 1 до 2 и d от $\frac{k}{1+k}$ до $\frac{1}{k}$.

Попробуем найти максимум ε перебором k, d с шагом 0.0001. Результат: [6]

$$\varepsilon \approx 0.069$$

$$\frac{R}{L} \approx 1.309$$

$$\frac{d}{L} \approx 0.642$$

Оценим точность результата. Погрешность величин $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{k+1}$, γ — не более 0.001. При вычислении $\frac{new}{old}$ числитель и знаменатель не меньше 0.5, поэтому общая погрешность не более 0.002. Поэтому $\varepsilon < 0.071$ для любых k, γ, что и требовалось.

▶ ▶

[5] $case\_2$ из кода

[6] $case\_3$ из кода

10 Дальнейшие исследования

Гипотеза. Множество расселений с максимально возможной нестабильностью содержит биполярные расселения.

В рамках дальнейшей работы планируется проверка приведенной гипотезы, оптимизация приведенных в работе алгоритмов и получение результатов для непрерывных параметров L и R.

11 Нестабильность триполярного мира

Определим триполярный мир как пятерку (L, M, R, dl, dr). На прямой этот мир представим как три города размеров L, M, R, расположенные в точках $0, dl, dr$ соответственно. По-прежнему будем искать мир наибольшей нестабильности.

Также будем считать, что $L \leq R$, в противном случае можно развернуть прямую.

▶

Алгоритм 1 оценки нестабильности триполярного мира.

Аналогично алгоритму оценки нестабильности биполярного мира, взять наименьшую нестабильность из некоторого списка разбиений.

1. Union. 1 группа.
2. Federation. Каждый город - группа.
3. Left Union. Две группы - два левых города и правый.
4. Right Union. Две группы - два правых города и левый.
5. Skip Union. Две группы - средний город и два других.
6. Undef Union. Две группы - наибольшая группа с агентами из всех городов с неопределенной медианой; оставшиеся агенты в одном из городов.
7. Left Undef. Правый город образует отдельную группу, два левых разбиваются как MaxUndef в биполярном мире.
8. Right Undef. Левый город образует отдельную группу, два правых разбиваются как MaxUndef в биполярном мире.
9. Skip Undef. Средний город образует отдельную группу, два других разбиваются как MaxUndef в биполярном мире.

Для неопределенных разбиений можно зафиксировать целую консанту $steps$ и рассматривать в качестве медиан на отрезке $[a, b]$ точки вида $a + \frac{s}{steps}(b - a)$ для $s = 0...steps$.

Отметим, для каждого из перечисленных видов разбиений существуют миры, где только эти разбиения являются стабильными. Случаи skip-разбиений, например, работают для миров, где средний город настолько мал, что агентам из двух других город выгодно его игнорировать.

Алгоритм 2 оценки нестабильности дискретного триполярного мира. Рассмотреть Federation и все разбиения на не более, чем 2 группы.

Вычисление всех разбиений времязатратно (экспонента от числа агентов), но позволяет найти разбиения с меньшей нестабильностью, чем приведенные в алгоритме 1. Так, для дискретного мира с $L = 10, M = 8, R = 10, dl = dr = 0.087$ претендуют на оптимальность следующие разбиения (медианы для простоты опускаем):

(запись разбиения: список групп через запятую)

(запись группы: (число агентов слева, число агентов в центре, число агентов справа))

(1, 0, 9), (9, 8, 1)

(1, 8, 9), (9, 0, 1)

(9, 0, 1), (1, 8, 9)

(9, 8, 1), (1, 0, 9)

Преобразование 1. Будем рассматривать триполярный мир относительно функции относительного падения издержек. Если разделить размеры городов на L и умножить расстояния на L, все издержки уменьшатся в L раз, а, значит, их отношение не изменятся, и эта операция сохраняет нестабильность мира.

Проведенный перебор.

В силу корректности преобразования 1 можно считать, что $L = 1$. С помощью алгоритма 1 перебором по (M, R, dl, dr) найдем миры с нестабильностью, большей 0.07, и для этих миров применим алгоритм 2.

Параметры перебора:
$M \in [0, 2], step = 0.02$
$R \in [1, 3], step = 0.02$
$dl = dr, dl \in [0, 1], step = 0.01$
В результате не обнаружено миров с нестабильностью, большей 0.05.

Оценка погрешности этого перебора и разбор не входящих в него случаев - впереди.

В случае биполярного мира мы ограничивали сверху параметры $R/L, Ld$ и затем делали перебор миров по этим двум параметрам. Следующий пример показывает, что для триполярного мира так сделать невозможно.

Пример 1. Мир $L = \gamma k, M = 1 + \gamma, R = 1, dl = \frac{d}{\gamma}, dr = 0.5)$ для достаточно малого γ и $k = 1.3, d = 0.65$. нестабилен.

◀

Легко видеть, что разбиения без неопределенной группы размера 2 нестабильны. Если эта группа есть в разбиении, то γ агентов в центральном городе могут образовывать коалиции только с агентами слева. Соотношение между этим остатком агентов и параметрами города справа подобрано так, чтобы они не могли образовать стабильное разбиение (см. диаграмму нестабильности биполярных миров).

▶

Этот пример обобщается на произвольное число городов: города имеют размеры $(1, 1 + \varepsilon, \varepsilon + \varepsilon^2, \ldots)$

В дальнейших рассуждениях будем считать $L = 1$, применив преобразование 1.

Дальше пока что - черновик.

Лемма. Если два города маленьких в сумме, то стабильность разбиения совпадает со стабильностью некоторого биполярного мира.

Лемма. Если есть маленький город, то стабильность разбиения совпадает со стабильностью некоторого биполярного мира.

В результате можно ограничить R.

Назовем разбиение левостабильным, если никакой агент, находящийся в одной группе с агентом из правого города (возможно, с собой), не хочет сменить группу. Назовем мир левостабильным, если у него есть левостабильное разбиение.

Аналогично определим правостабильное разбиение и правостабильный мир.

Утверждение. Нестабильность левостабильного (правостабильного) разбиения не превосходит нестабильности некоторого биполярного мира.

Теорема.

А. Мир левостабилен, если $dr > \frac{1}{|M-L|} + \ldots.$

Б. Мир правостабилен, если $dl > \frac{1}{|R-M|} + \ldots.$

12 Список литературы

1. А. Савватеев. Анализ коалиционной устойчивости "биполярного мира". Журнал Новой Экономической Ассоциации 2013, No 17, с. 10-44

2. A. Savvateev. Achieving stability in heterogeneous societies. Multi-jurisdictional structures, and redistribution policies. Economics Education and Research Consortium Working Paper Series, No 04/13.

3. А. Савватеев. Задача многомерного размещения и ее приложения: теоретико-игровой подход. ЦЭМИ РАН, М., 2013.

4. D. Musatov, A. Savvateev, S. Weber. Gale–Nikaido–Debreu and Milgrom–Shannon: Communal interactions with endogenous community structures. Journal of Economic Theory, No 11/16, 282-303.

5. A. Savvateev, Uni-dimensional models of coalition formation: non-existence of stable partitions. Mosc. J. Comb. Number Theory 2 (2012), No 4, 49-62.

6. Bogomolnaia A., Le Breton M., Savvateev, S. Weber. Stability under unanimous consent, free mobility and core, International Journal of Game Theory 2007. Vol. 35. 185-204.

7. Bogomolnaia A., Le Breton M., Savvateev, S. Weber. Stability of jurisdiction structures under the equal share and median rules, Economic Theory 2008. Vol. 3. 523-543.