Коалиционная нестабильность в «биполярном мире»

Андрей Гольман

Научный руководитель - Мусатов Д. В.

Материалы работы и актуальная версия данного текста доступны по ссылке.

1 Постановка задачи

Задано конечное множество агентов — точек на прямой. Необходимо обеспечить всех агентов некоторым благом. Благо поставляется в отдельных пунктах – мощностях, количество и места расположения которых нужно выбрать.

Стоимость поддержания каждой мощности равна 1, вне зависимости от ее положения. Каждая мощность способна удовлетворить потребность любого числа агентов. Все прикрепленные к данной мощности агенты несут равные издержки, в сумме равные стоимости поддержания мощности — *производственные издержки*. Также существуют затраты прикрепления каждого агента к любой из мощностей, равные евклидовому расстоянию между расположениями агента и мощности, которой он пользуется, — *транспортные издержки*.

Коалицией или *группой* будем называть множество агентов, которые получают благо из одного и того же источника. Для каждой коалиции S ее благо может располагаться в любой медиане $m(S)$ коалиции, т.е. такой точке, что сумма расстояний от этой точки до всех агентов минимальна.

Таким образом, издержки агента, находящегося в точке t, принадлежащего коалиции S, равны

$$costs(a) = \frac{1}{|S|} + |t - m(S)|.$$

Падением издержек агента a с исходными издержками $old(a)$ и новыми $new(a)$ будем считать одну из двух величин:

1. (*абсолютное падение издержек*) $\Delta_{abs}(a) = old(a) - new(a)$;

2. (*относительное падение издержек*) $\Delta_{rel}(a) = \frac{old(a)-new(a)}{old(a)}$.

Нестабильностью разбиения множества агентов на коалиции назовем $\varepsilon = \max_{S\in G}\min_{a\in S}\Delta(a)$, где G — множество всех подмножеств множества агентов, Δ — функция падения издержек. Другими словами, нестабильность — это минимальное ε, т.ч. не существует коалиции S, при формировании которой каждый агент из S уменьшает свои издержки (относительно своих издержек в разбиении A) более, чем на ε. [1]

Нестабильностью расселения будем называть наименьшую нестабильность разбиений агентов данного расселения.

Требуется описать расселение с наибольшей нестабильностью.

В этой работе рассматриваются следующие расселения: L агентов расположены в точке 0, R агентов в точке d, при этом $L \leq R$. Будем называть такие расселения *биполярными*.

Будем называть группу *неопределенной*, если множеством ее медиан является отрезок.

Комментарий. В случае относительного падения издержек стоимость поддержания мощности можно считать равной 1 без ограничения общности — в противном случае можно пропорционально увеличить расстояние между агентами и относительное падение издержек не изменится. В случае абсолютного падения издержек при увеличении в k раз транспортных и производственных издержек падение издержек возрастет в k раз, и при произвольной стоимости поддержания мощности нестабильность может быть сколь угодно большой.

Также мы без ограничения общности считаем, что коэффициент перед величиной транспортных издержек $|t-m(S)|$ равен единице. В противном случае можно пропорционально изменить расстояния между агентами так, чтобы их транспортные издержки стали равны указанной величине.

[1] Нестабильность — неотрицательная величина, т.к. в коалиции, присутствующей в исходном разбиении, все падения издержек нулевые.

2 Обзор литературы

Происхождение задачи описано в статье А. Савватеева [1], там же предложено исследование "биполярного мира". В [3], [5] приведены примеры разбиений с ненулевой нестабильностью. В [1] приведен полный анализ существования коалиционной устойчивости (т.е. разбиений нулевой нестабильности) относительно непрерывных $0 \leq L, R \leq 1$ и $d = 1$.

3 Основные результаты

Построены и реализованы алгоритмы подсчета нестабильности разбиения, оценки нестабильности расселения. С помощью алгоритма оценки показано, что для функции абсолютного падения издержек нестабильность может превышать 0.01 только для трех пар (L, R).

Показано, что для функции относительного падения издержек расселение с наибольшей нестабильностью состоит из не более чем 3 коалиций, из которых не более одной неопределенной. На основании этого построен алгоритм поиска нестабильности биполярного расселения, перебирающий единственный непрерывный параметр.

Найдено расселение с нестабильностью более $\frac{1}{19}$. Доказано, что любое биполярное расселение имеет нестабильность, не превосходящую $\frac{1}{14}$.

4 Алгоритм подсчета нестабильности разбиения

Будем говорить, что группа агентов S хочет отделиться *с желанием* δ, если после образования этой группы для всех агентов $a \in S$: $\Delta(a) \geq \delta$ [2] . Тогда нестабильность разбиения — это наибольшее возможное желание отделиться среди всех групп агентов.

Утверждение 1. Из всех групп из l агентов *слева* (в точке 0) и r агентов *справа* (в точке d) наибольшее желание отделиться имеет группа из l агентов с наибольшими издержками слева и r агентов с наибольшими издержками справа.

Утверждение 2. Максимальным желанием отделения группы является величина $\min(\Delta(a_l), \Delta(a_r))$, где a_l — агент с наибольшими издержками среди отделяющихся агентов точки 0, a_r — аналогичная величина для точки d.

Таким образом, для поиска группы с наибольшим желанием отделиться достаточно рассмотреть группы из l агентов слева с наибольшими издержками и r агентов справа с наибольшими издержками для всех $0 \leq l \leq L$ и $0 \leq r \leq R$. В каждой группе для каждой из точек 0, d достаточно рассмотреть агента с наибольшими исходными издержками в этой точке.

Алгоритм 1. Алгоритм подсчета нестабильности разбиения за $O(LR)$.

◀

1. Вычислим издержки агентов в данном разбиении. Время работы этого шага — $O(R)$.

2. Отсортируем агентов в каждой точке по убыванию издержек. Время работы этого шага — $O(R \log R)$.

   Теперь отдельно переберем группы с единственным центром в точках 0 и d и отдельно неопределенные группы.

3. Перебор неопределенных групп.

   По утверждениям 1 и 2, для группы из k агентов слева и k агентов справа с медианой m, желание группы отделиться не более:

   $$\min[\Delta(a_k), \Delta(b_k)]$$

   где a_k — агент с k-ми наибольшими издержками среди агентов в точке 0, b_k — такой же агентов в точке d.

   Исходные издержки известны, поэтому $\Delta(a_k), \Delta(b_k)$ — линейные функции от m. [3] Максимум их минимума на отрезке $[0, d]$ ищется за $O(1)$.

   Переберем k от 1 до L. Время этого шага — $O(L)$ — перебор L значений k, обработка каждого из них за $O(1)$.

[2]Здесь и далее в этом разделе под Δ подразумевается одна из функций падения издержек: Δ_{abs} или Δ_{rel}

[3]В случае функции относительного падения издержек — $\Delta(a_k) = 1 - \frac{\frac{1}{2k}+m}{old(a_k)}, \Delta(b_k) = 1 - \frac{\frac{1}{2k}+d-m}{old(b_k)}$, функция абсолютного падения издержек всегда линейно зависит от m

4. Перебор групп с центром в точке 0.

   В силу утверждений 1 и 2 желание отделиться группы из l агентов слева и r агентов справа определяется издержками l-го агента с наибольшими издержками слева и r-го агента с наибольшими издержками справа.

   Найдем группу, у которой желание отделиться наибольшее. Для всех пар (l, r) явно посчитаем эти издержки и выберем максимум из минимумов пар. Подсчет издержек происходит за $O(1)$, число пар — $O(LR)$, время работы этого шага на этом шаге — $O(LR)$.

Каждый из 3 пунктов работает за $O(LR)$, так же можно оценить время работы всего алгоритма. ►

5 Анализ нестабильности относительно функции абсолютного падения издержек

В этом разделе рассматривается нестабильность расселений относительно функции Δ_{abs} и показывается, что нестабильность только трех расселений может превосходить $\frac{1}{100}$.

Напоминим, что нестабильность расселения — минимум нестабильностей всех его разбиений. В частности, нестабильность расселения не превосходит минимума нестабильностей трех разбиений:

1. Union — объединение всех агентов в одну коалицию;

2. Federation — разбиение агентов на две коалиции в соответствии с их координатами;

3. MaxUndef(m) — две коалиции: одна состоит из L агентов в точке 0 и L агентов в точке d с медианой в точке m, вторая — из $R - L$ агентов в точке d.

Алгоритм 2. Алгоритм оценки нестабильности расселения.

◄ С помощью алгоритма 1 вычислить нестабильность расселений Union, Federation и MaxUndef($\frac{d}{2}$). Вернуть минимум. Время работы, как и у алогоритма 1 — $O(LR)$. ►

Будем называть группу *отделяющейся*, если у нее положительное желание отделиться.

Утверждение 3. При $LR > 1$, $d > 1$ стабильно разбиение Federation.

◄ Пусть $d > 1$ и Federation нестабильно. Если в отделяющейся группе были агенты только из одной точки, то издержки каждого агента в новой группе не меньше издержек в старой. Поэтому в отделяющейся группе есть агенты из разных точек и есть агент a, находящийся на расстоянии не менее $\frac{1}{2}$ от медианы.

Транспортные издержки a составляют не менее $\frac{1}{2}$. Издержки a упали, в Federation транспортные издержки агентов нулевые, поэтому исходные производственные издержки a в Federation превосходили $\frac{1}{2}$, а значит, были равны 1. Тогда $L = 1$, т.к. $R = 1$ влечет $L = 1$.

Центр новой группы не может находиться в точке d, т.к. исходные издержки a равны 1, и новые издержки должны быть меньше 1. Поэтому отделяющаяся группа включает не более одного агента справа, а значит, ровно одного агента справа. Новые издержки этого агента справа составляют не менее $\frac{1}{2}$, значит, исходные производственные были более $\frac{1}{2}$, т.е. 1, и $R = 1$. ►

Алгоритм 3. Алгоритм оценки максимума нестабильности всех биполярных расселений относительно падения издержек Δ_{abs}.

◄ Если $L = R = 1$, вернуть 0.

Для d от 0 до 1 с шагом $\theta = 0.001$ применим алгоритм 2 к соответствующему расселению. Вернем максимум, увеличенный на $\frac{\theta}{2}$. ►

Доказательство корректности.

◄ При $L = R = 1$ стабильно либо разбиение Federation, либо MaxUndef($\frac{d}{2}$) — издержки обоих агентов в этих разбиениях совпадают, и стабильно то, где издержки меньше.

Для остальных случаев достаточно рассмотреть $d \geq 0$ в силу симметрии и $d \leq 1$ в силу утверждения 3. Пусть максимум нестабильности лежит в расселении с положением правых агентов в точке d.

Обозначим через d' ближайшее к d рассмотренное алгоритмом положение правых агентов. Тогда в расселении с d' в каждом разбиении исходные издержки каждого агента отличаются не более, чем на $|d - d'|$. Тогда все падения издержек агентов, а значит, и желания групп отделиться, а значит, и нестабильности разбиений отличаются не более, чем на $|d - d'| \leq \frac{\theta}{2}$. ►

Применение алгоритма 3 позволяет сделать некоторые выводы о допустимых значениях нестабильности расселений. В частности, при переборе [4] $L, R = 1 \ldots 100$ для функции абсолютного падения издержек, нестабильность может быть больше 0.01 только для трех пар (L, R):

[4] $case\_1$ из кода, результаты без поправки в 0.001 — здесь. Аналогичные результаты для случая относительного падения издержек — здесь.

$L = 2, R = 3, \varepsilon \leq 0.013$;
$L = 3, R = 4, \varepsilon \leq 0.022$;
$L = 4, R = 5, \varepsilon \leq 0.015$.

Первый из этих случаев подробно описан в предыдущем отчете (доказано, что $\varepsilon \leq \frac{1}{90}$).

Теорема 1. При $L, R > 100$ нестабильность любого биполярного расселения относительно функции абсолютного падения издержек не может превышать 0.01.

◀ Нестабильность расселения — минимум нестабильностей всех его разбиений. Докажем, что нестабильность разбиения Federation не превосходит 0.01. В силу $L, R \geq 100$, издержки каждого агента не превышают 0.01. Но если нестабильность больше 0.01, то есть группа, при отделении которой издержки всех агентов падают не менее, чем на 0.01, и тогда существует агент с неположительными издержками. ▶

Следствие. Нестабильность любого биполярного расселения относительно функции абсолютного падения издержек не может превышать 0.01, за исключением трех случаев, описанных выше.

6 Оценки d для нестабильных расселений для относительного падения издержек

We call the bipolar society with a positive instability the *unstable society.*

The case of relative costs reduction is more interesting to study. In this section and further on the costs reduction for each agent is $\Delta_{rel}(new, old) = \frac{old-new}{old}$.

Theorem 2. If a society is unstable, then $\frac{R}{L(R+L)} < d < \frac{1}{R}$.

◀

Let the society be unstable. Then in every its partition there is a group, such that in case of its forming every agent reduces his costs. In particular, there are such groups in partitions Federation and Union.

Proof of left inequality.

In partition Union the costs of every right agent (both transport and production costs) are the least possible. Therefore, a separating group can include only left agents.

The group of left agents with the maximal separation desire consists of all L left agents, as it has the least new costs of all groups that include only left agents. As was stated above, this separation desire is positive, which implies:

$$\frac{1}{L} < \frac{1}{L+R} + d. \tag{1}$$

Then

$$d > \frac{1}{L} - \frac{1}{L+R} = \frac{R}{L(L+R)}.$$

Proof of right inequality.

Consider the partition Federation and the group S with the maximal separation desire. We consider three cases: S is undefined, S has the median at point 0 or at d. Let S include l left agents and r right agents.

1. S is undefined.

   Let m be the median of S. The condition of S having the positive separation desire:

   $$\begin{cases} \frac{1}{L} > \frac{1}{l+r} + m \\ \frac{1}{R} > \frac{1}{l+r} + d - m \end{cases}$$

   Then

   $$\frac{1}{L} + \frac{1}{R} > \frac{2}{l+r} + d$$

   $$d < \frac{1}{L} + \frac{1}{R} - \frac{2}{l+r} \leq \frac{1}{R}$$

   The last inequality follows from $l + r = 2l \leq 2L$.

2. S has median at d

   There is no left agent in S, as his costs can not reduce because of (1). Therefore, S includes only right agents and their new costs are at least $\frac{1}{R}$, which coincides with the initial costs in Federation.

3. S has the median at 0.

   If S does not include any right agents, then the new costs for left agents are at least $\frac{1}{L}$ and do not reduce. Then we add $l-r$ right agents into S. The costs reduction of the added agents coincide with the costs reduction of right agents that had already been in S. The costs for all other agents drop even further, as their production costs reduce with adding new agents. Therefore, the minimum of costs reduction in S does not decrease after adding agents. In the new group there are l agents on both left and right, which is the case 1.

►

Corollary 1. $d > \frac{1}{2R}$.

◄ Because $L \leq R$ and $\frac{R}{L(R+L)} \geq \frac{R}{R(R+R)} = \frac{1}{2R}$. ►

Corollary 2. $R < \frac{\sqrt{5}+1}{2}L$.

◄ Because $\frac{R}{L(R+L)} \leq \frac{1}{R}$. ►

7 Устройство коалиций в разбиении с наименьшей нестабильностью

We call the least stable partition of each bipolar society into groups the *optimal partition*.

Lemma 1. For each bipolar society there is an optimal partition that has at most one group with each median.

Lemma 2. If a bipolar society has an optimal partition with groups that have medians at 0 and d, it also has an optimal partition with one group having the median at 0 and one group having the median at d, such that at most one of these two groups include agents at both points.

Lemma 3. For each bipolar society there is an optimal partition that has at most one undefined group.

If an agent reduces his costs, the separation desire of his group does not increase. Using this fact, for each partition, that does not satisfy the conditions of lemmas 1–3, we construct another partition, that satisfies these conditions and that has costs for every agent not exceeding costs in the initial partition.

Proof of lemma 1.

◄ Let the optimal partition have several groups with the same median. We merge these groups into one group with this median. Transport costs of each agent do not change and production costs decrease. ►

Proof of lemma 2.

◄ Using lemma 1, we merge all the groups with every median into one group. After the merge there is at most 1 group with the median at 0 and at most 1 group with the median at d.

If the formed partition does not satisfy the lemma statement, there is a group A with the median at 0, that includes $a > 0$ right agents, and a group B with the median at d that includes $b > 0$ left agents. Let $a \leq b$ (the proof for the opposite case is the same). We move a right agents from A into B and a left agents from B into A. The costs for moved agents decrease and for other agents do not change. After the move the group B includes only right agents.

►

Proof of lemma 3.

◄ ◄

Let the partition have at least two undefined groups, that include $2a$ agents in total. If they can be merged into one group with the median at $\frac{d}{2}$ with all the agents not increasing their costs, we make a merge and have one undefined group.

Otherwise there is an agent x whose costs would increase after the described merge. Let x be in a group B with the size of $2b$.

Proposition 1. Then $b > \frac{a}{2}$.

◄ Costs for x increase:

$$\frac{1}{2a} + \frac{d}{2} > \frac{1}{2b} + \delta \geq \frac{1}{2b},$$

where δ is transport costs x in B.

By Th.2:

$$\frac{1}{2a} + \frac{d}{2} \leq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2r} < \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{a}.$$

Which implies $\frac{1}{2b} < \frac{1}{a}$ and $b > \frac{a}{2}$. ►

Corollary. If the merge of all undefined groups into one with the median at $\frac{d}{2}$ increases costs for some agents, then one of undefined groups is bigger than the unity of all other undefined groups.

Proposition 2. Let C be the group with the size of $c \le \frac{a}{2}$, B be the group with the size of at least a. Then B and C can be merged into the group with the median of the group B, such that the costs for every agent do not increase.

◀ Using Th.2, we get that costs reduction for each agent $c \in C$ after the merge is positive:

$$old(c) \ge \frac{1}{\frac{a}{2}} \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{r} \ge \frac{1}{a} + d \ge new(c)$$

▶

Thus, all groups that are not bigger then $\frac{a}{2}$ can be merged with the group B.

Proposition 3. After these merges there are at most two groups.

◀ There is one group with the size at least a. After the merges there are groups of size at least $\frac{a}{2}$ left, and there can not be 2 of them, as undefined groups include $2a$ agents in total. ▶

Proposition 4. There is $m \in [0, d]$, such that the two remaining groups can be merged into one group with the median at m, with all the agents do not increasing their costs.

Let $0 < k < \frac{1}{2}$ and the two remaining groups have sizes $2ak$ and $2a(1-k)$. $k \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ because groups with $k < \frac{1}{2}$ are already merged into the larger group.

Let δm_1 and δm_2 be the distances between the old and the new medians. The condition of not increasing costs for agents, that are getting further from new medians:

$$\frac{1}{2ak} - \frac{1}{2a} - \delta m_1 \ge 0$$

$$\frac{1}{2a(1-k)} - \frac{1}{2a} - \delta m_2 \ge 0.$$

Those agents getting closer to the new median decrease their costs anyway, so there is no need to consider them here.

δm_1 и δm_2 can be chosen in accordance to these two inequalities when the distance m between two medians of the initial groups does not exceed:

$$m \le \frac{1}{2ak} - \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a(1-k)} - \frac{1}{2a} = \frac{1}{2a}\Big(\frac{1}{k(1-k)} - 2\Big).$$

Which is correct because of: (here we use Th.2 and inequality of means)

$$m \le \frac{1}{R} \le \frac{1}{a} \le \frac{1}{2a}\Big(\frac{1}{k(1-k)} - 2\Big).$$

▶ ▶

The combination of lemmas 1–3 brings us the the following theorem.

Theorem 3. For each bipolar society exists an optimal partition that has:

1. at most one undefined group;
2. at most one group with the median at 0 and at most one group with the median at d; at most one of these two groups include agents from several points.

From Th.3 trivially follows the algorithm for finding the instability of the bipolar society, that considers brute-force (??? - перебирает) the single continuous parameter.

Algorithm 4. Algorithm for finding approximate instability of the bipolar society with time complexity $O(L^4 M)$, where M is the number of probes (???) for median of the undefined group in the initial partition.

◀

Input: `L, R, d`

`Group(l, r, m)` — group of l left agents and r right agents with the median at m.

Using `algo_1` – algorithm 1.

```
If the society does not satisfy the condition of Th.2:
   return 0
instability := 0
For all integer a in [0, L]: // number of agents in the undefined group
   For all integer i in [0, M]
   m := i * d / M // the median of the undefined group
      For all integer l in [0, L-a]: // number of left agents in the group with the median at d
         groups := (a, a, m), (l, R, d), (L-l, 0, 0)
         instability := min(instability, algo_1(groups))
      For all integer r in [0, R-a]: // number of right agents in the group with the median at 0
```

```
        groups := (a, a, m), (0, R-r, d), (L, r, 0)
        instability := min(instability, algo_1(groups))
    return instability
```

Time complexity: 3 nested loops with $L, M, O(L)$ iterations. Loop body complexity is $O(LR)$ as was shown for algorithm 1, which equals to $O(L^2)$ because of Th.2.

►

8 Численная оценка нестабильности

Теорема 4. Существует расселение с $\varepsilon > \frac{1}{19}$.

◄

Применяя алгоритм 4 к $d = 0.022$, $L = 29$, $R = 38$ с 200 пробами медиан, получаем $\varepsilon \approx 0.0550$ [5].

Оценим точность результата. Желание произвольной группы отделиться является минимумом падений издержек агентов, а нестабильность — максимумом желаний групп. Значит, нестабильность не могла измениться сильнее, чем падения издержек агентов.

Пусть наибольшая нестабильность достигается в разбиении A с медианой неопределенной группы m, а ближайшая к m рассмотренная алгоритмом в этом разбиении медиана — m'. Падение издержек агента a может измениться не более, чем на:

$$|(1 - \frac{new(a)}{old(a)}) - (1 - \frac{new(a)}{old'(a)})| = |\frac{new(a)}{old'(a)} - \frac{new(a)}{old(a)}| = new(a)\frac{|old'(a) - old(a)|}{old(a)old'(a)} \leq \frac{new(a)}{old(a)}\frac{|m - m'|}{old'(a)} \leq$$

$$\leq \frac{new(a)}{old(a)}\frac{\frac{0.022}{200}}{old(a) - \frac{0.022}{200}} \leq \frac{new(a)}{old(a)}\frac{1}{66}$$

В этой цепочке неравенств:

Первое неравенство: $|old'(a) - old(a)| \leq |m - m'|$, так как меняются только транспортные издержки за счет сдвига медианы.

Вторoe неравенство: $|m - m'| \leq \frac{d}{200}$ в силу выбора m, а также $old'(a) \geq old(a) - \frac{d}{200}$ аналогично первому неравенству.

Третье неравенство верно в силу: $old(a) \geq \frac{1}{67}$, так как производственные издержки любого агента не менее $\frac{1}{L+R} = \frac{1}{67}$.

Рассуждая аналогично теореме 1, получаем, что новая нестабильность отличается не более, чем в $1 + \frac{1}{66}$ раз от исходной, то есть $\varepsilon \geq \frac{1}{0.056}\frac{1}{1+\frac{1}{66}} > \frac{1}{19}$.

►

Left agents = agents at 0 Right agents = agents at d

Теорема 5. Для любого биполярного расселения нестабильность $\varepsilon < \frac{1}{14}$.

◄

Theorem 5. Every bipolar society has instability $\varepsilon < 0,60$

Similarly to the process described in algorithm 2, we take several partitions and calculate the minimum of their instabilities δ, that depends on parameters L, R and d. Then we maximize $\delta(L, R, d)$, its maximum is the maximal possible instability for all bipolar societies.

We analyze the following partitions:

1. Union
2. Federation
3. MaxUndef($\frac{d}{2}$)

Let $k = \frac{R}{L}, \gamma = Ld$.

Proposition 1. If a new group is formed by adding several agents into the community S in such way that:

1. the median of the new community coincides with the median of S

2. costs reduction of every new agent coincides with a costs reduction of some agent from S

then the separation desire of the new group is not less that the separation desire of S.

◄ With new agents added, production costs of all agents decrease, therefore costs reduction of each agent and group's separation desire do not decrease. ►

To calculate the instability of each partition, we search a community with the biggest separation desire.

We split this search into several cases, each of them is characterized with:

1. the initial partition;

[5] $case\_2$ из кода

2. the median of the new community.

In each case, we add several agents into the community S within the restrictions of proposition 1, which means that the separation desire of S does not decrease. Thus, only the new communities with added agents should be considered.

For each case, we write the condition of separation desire not exceeding δ, and then construct $\delta(L, R, d)$ from these conditions.

1. Union, median of S is at the left point

   Agents on the right have the least possible costs and can not belong to a separating community. We add into S all agents on the right. The condition of separation desire not exceeding δ is:

$$\delta \geq 1 - \frac{\frac{1}{L}}{\frac{1}{L+R} + d} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{1+k} + \gamma} \tag{2}$$

2. Union, median of S is not at the left point

   If median of S is not on the left, S includes a right agent, which is impossible as right agents have the least possible costs.

3. Federation, S is undefined

   As S is undefined, it includes both left and right agents, so any agent can be added into S. We add into S all left agents and several right agents, such that there are L agents on both left and right.

   Let t be the median of S. Let $\eta = Lt$. The condition of separation desire of the new group not exceeding δ is:

$$\left[\begin{array}{c} \delta \geq 1 - \dfrac{\frac{1}{2L} + t}{\frac{1}{L}} = 1 - \dfrac{\frac{1}{2} + \eta}{1} \\ \delta \geq 1 - \dfrac{\frac{1}{2L} + d - t}{\frac{1}{R}} = 1 - \dfrac{\frac{1}{2} + \gamma - \eta}{\frac{1}{k}} \end{array}\right. \tag{3}$$

4. Federation, median of S is at the left point

   If S does not include any right agents, costs of left agents do not reduce. This means that there is a right agent in S and we can add several right agents into S.

   Let S include r right agents. We add into S all left agents and $L - r$ right agents and get the previous case with $m = 0$.

5. Federation, median of S is at the right point

   If S does not include any left agents, costs of right agents do not reduce. This means that there is a right agent in S and we can add all agents into S. The condition of separation desire of the new group not exceeding δ is:

$$\left[\begin{array}{l} \delta \geq 1 - \dfrac{\frac{1}{L+R} + d}{\frac{1}{L}} = 1 - \dfrac{\frac{1}{1+k} + \gamma}{1} \\ \delta \geq 1 - \dfrac{\frac{1}{L+R}}{\frac{1}{R}} = 1 - \dfrac{\frac{1}{1+k}}{\frac{1}{k}} = \dfrac{1}{1+k} \end{array}\right. \tag{4}$$

6. MaxUndef(m), S is undefined

   We add into S all left agents and several right agents such that there are L agents on both left and right. Due to corollary 2 of th. 2 $R < 2L$, so in the new group there is a right agent which belonged to the biggest group of $2L$ agents in the initial partition. This implies the existence of a left agent and a right agent who did not reduce their production costs. This means that they both reduced their transportation costs, which is impossible as the median could get nearer to only one of them.

7. MaxUndef(m), median of S is at the left point

   We add into S all left agents. If S includes a right agent, we add several right agents such that there are L agents on both left and right. This is the previous case with $m = 0$.

   Otherwise S does not include a right agent. The condition of separation desire not exceeding δ for the community of L left agents is:

$$\delta \geq 1 - \frac{\frac{1}{L}}{\frac{1}{2L} + \frac{1}{2L} + m} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2} + \gamma - \mu} \tag{5}$$

8. MaxUndef(m), median of S is at the right point

   Let $\mu = Lm$.

   If S includes a left agent, we add into S all agents. The condition of separation desire not exceeding δ for the community of all agents is:

$$\left[\begin{array}{l} \delta \geq 1 - \dfrac{\frac{1}{L+R} + d}{\frac{1}{2L} + m} = 1 - \dfrac{\frac{1}{1+k} + \gamma}{\frac{1}{2} + \mu} \\ \delta \geq 1 - \dfrac{\frac{1}{L+R}}{\frac{1}{2L} + d - m} = 1 - \dfrac{\frac{1}{1+k}}{\frac{1}{2} + \gamma - \mu} \end{array}\right. \tag{6}$$

   Otherwise S consists of right agents only. We add all right agents into S. The condition of separation desire not exceeding δ for the community of all right agents is:

$$\left[\begin{array}{l} \delta \geq 1 - \dfrac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{2L} + m} = 1 - \dfrac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{2} + \mu} \\ \delta \geq 1 - \dfrac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R-L}} = 1 - \dfrac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k-1}} = \dfrac{1}{k} \end{array}\right. \tag{7}$$

По определению,

$$\varepsilon \leq \min(2, \max(\min(3.1, 3.2), \min(4.1, 4.2)), \max(5, \min(6.1, 6.2), \min(7.1, 7.2))),$$

где через n.i обозначена правая часть i-го уравнения системы (n).

Maximizing $\min(3.1, 3.2)$:

$$1 - \frac{\frac{1}{2} + \eta}{1} = 1 - \frac{\frac{1}{2} + \gamma - \eta}{\frac{1}{k}}$$

$$\eta = \frac{\frac{k-1}{2} + k\gamma}{1 + k}$$[6]

Let $\mu = \frac{\gamma}{2}$. We find such k и γ to maximize ε. Due to th. 2 and its corollary 2 only k from 1 to 1.62 and d from $\frac{k}{1+k}$ to $\frac{1}{k}$ should be considered.

We maximize ε by calculating the function for all points from the above range with the step 0.0001 for k and $\frac{\frac{k}{1+k} - \frac{1}{k}}{10000}$ for γ. The result is:[7]

$$\varepsilon \approx 0.069$$

$$\frac{R}{L} \approx 1.309$$

$$\frac{d}{L} \approx 0.642$$

Let us estimate the accuracy of the result. The error of $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{k+1}$, γ does not exceed 0.0003. At calculation of $\frac{new}{old}$, the numerator and denominator are at least 0.5, so the total error is no more than 0.001. Therefore $\varepsilon < 0.060$ for any k, γ, q.e.d.

▶

9 Дальнейшие исследования

Гипотеза. Множество расселений с максимально возможной нестабильностью содержит биполярные расселения.

В рамках дальнейшей работы планируется проверка приведенной гипотезы, оптимизация приведенных в работе алгоритмов и получение результатов для непрерывных параметров L и R.

[6] Easy to check that $0 \leq \eta \leq \gamma$

[7] $case\_3$ из кода

10 Список литературы

1. А. Савватеев. Анализ коалиционной устойчивости "биполярного мира". Журнал Новой Экономической Ассоциации 2013, No 17, с. 10-44

2. A. Savvateev. Achieving stability in heterogeneous societies. Multi-jurisdictional structures, and redistribution policies. Economics Education and Research Consortium Working Paper Series, No 04/13.

3. А. Савватеев. Задача многомерного размещения и ее приложения: теоретико-игровой подход. ЦЭМИ РАН, М., 2013.

4. D. Musatov, A. Savvateev, S. Weber. Gale–Nikaido–Debreu and Milgrom–Shannon: Communal interactions with endogenous community structures. Journal of Economic Theory, No 11/16, 282-303.

5. A. Savvateev, Uni-dimensional models of coalition formation: non-existence of stable partitions. Mosc. J. Comb. Number Theory 2 (2012), No 4, 49-62.

6. Bogomolnaia A., Le Breton M., Savvateev, S. Weber. Stability under unanimous consent, free mobility and core, International Journal of Game Theory 2007. Vol. 35. 185-204.

7. Bogomolnaia A., Le Breton M., Savvateev, S. Weber. Stability of jurisdiction structures under the equal share and median rules, Economic Theory 2008. Vol. 3. 523-543.