

# Коалиционная нестабильность в "биполярном мире"

Андрей Гольман

Научный руководитель - Мусатов Д. В.

## 1 Постановка задачи

Задано множество агентов как множество точек расположений агентов на прямой. Необходимо обеспечить всех агентов некоторым благом. Благо поставляется в отдельных пунктах – мощностях, количество и места расположения которых нужно выбрать.

Стоимость поддержания каждой мощности равна 1, вне зависимости от ее положения. Каждая мощность способна удовлетворить потребность любого числа агентов. Все прикрепленные к данной мощности агенты несут равные издержки, в сумме равные стоимости поддержания мощности - *производственные издержки*. Также существуют затраты прикрепления каждого агента к любой из мощностей, равные евклидовому расстоянию между расположением агента и мощности, которой он пользуется - *транспортные издержки*.

*Коалицией* или *группой* будем называть множество агентов, которые пользуются одним и тем же благом. Для каждой коалиции  $S$  ее благо может располагаться в любой медиане  $m(S)$  коалиции, т.е. такой точке, что сумма расстояний от этой точки до всех агентов минимальна.

Таким образом, издержки агента, находящегося в точке  $t$ , принадлежащего коалиции  $S$ , равны

$$costs(a) = \frac{1}{|S|} + |t - m(S)|.$$

Падением издержек агента  $a$  с исходными издержками  $old(a)$  и новыми  $new(a)$  будем считать одну из двух величин:

1. (*абсолютное падение издержек*)  $\Delta_{abs}(a) = old(a) - new(a)$ ;
2. (*относительное падение издержек*)  $\Delta_{rel}(a) = \frac{old(a) - new(a)}{old(a)}$ .

*Нестабильностью разбиения* множества агентов на коалиции назовем  $\varepsilon = \max_{S \in G} \min_{a \in S} \Delta(a)$ , где  $G$  - множество всех подмножеств множества агентов. Другими словами, нестабильность - это минимальное  $\varepsilon$ , т.ч. не существует коалиции  $S$ , при формировании которой каждый агент из  $S$  уменьшает свои издержки (относительно своих издержек в разбиении  $A$ ) более, чем на  $\varepsilon$ .<sup>1</sup>

*Нестабильностью расселения* будем называть наименьшую нестабильность разбиений агентов данного расселения.

Требуется найти расселение с наибольшей нестабильностью.

В этой работе рассматриваются следующие расселения:  $L$  агентов расположены в точке 0,  $R$  агентов в точке  $d$ , при этом  $L \leq R$ . Будем называть такие расселения *биполярными*.

Будем называть группу *неопределенной*, если множеством ее медиан является отрезок.

*Комментарий.* В случае относительного падения издержек стоимость поддержания мощности можно считать равной 1 без ограничения общности - в противном случае можно пропорционально увеличить расстояние между агентами и относительное падение издержек не изменится. В случае абсолютного падения издержек при увеличении в  $k$  раз транспортных и производственных издержек падение издержек возрастет в  $k$  раз, и при произвольной стоимости поддержания мощности нестабильность может быть сколь угодно большой.

## 2 Обзор литературы

Происхождение задачи описано в статье А. Савватеева [1], там же предложено исследование "биполярного мира". В [3], [5] приведены примеры разбиений с ненулевой нестабильностью. В [1] приведен полный анализ существования коалиционной устойчивости (т.е. разбиений нулевой нестабильности) относительно непрерывных  $0 \leq L, R \leq 1$  и  $d = 1$ .

---

<sup>1</sup>Нестабильность - неотрицательная величина, т.к. в коалиции, присутствующей в исходном разбиении, все падения издержек нулевые.

### 3 Основные результаты

Построены и реализованы алгоритмы подсчета нестабильности разбиения, оценки нестабильности расселения. С помощью алгоритма оценки показано, что для функции абсолютного падения издержек нестабильность может превышать 0.01 только для трех пар  $(L, R)$ .

Показано, что для функции относительного падения издержек расселение с наибольшей нестабильностью состоит из не более чем 3 коалиций, из которых не более одной неопределенной. На основании этого построен алгоритм поиска нестабильности биполярного расселения, перебирающий единственный непрерывный параметр.

Найдено расселение с нестабильностью более  $\frac{1}{19}$ . Доказано, что любое биполярное расселение имеет нестабильность, не превосходящую  $\frac{1}{14}$ .

### 4 Алгоритм подсчета нестабильности разбиения

Будем говорить, что группа агентов  $S$  хочет отделиться с *желанием*  $\delta$ , если после образования этой группы для всех агентов  $a \in S$ :  $\Delta(a) \geq \delta$ . Тогда нестабильность разбиения - это наибольшее возможное желание отделиться среди всех групп агентов.

**Утверждение 1.** Из всех групп из  $l$  агентов *слева* (в точке 0) и  $r$  агентов *справа* (в точке  $d$ ) наибольшее желание отделиться имеет группа из  $l$  агентов с наибольшими издержками слева и  $r$  агентов с наибольшими издержками справа.

◀ Так как издержки агентов группы падают не меньше, чем агентов группы произвольной удовлетворяющей условию утверждения группы. ▶

**Утверждение 2.** Максимальным желанием отделения группы является величина  $\min(\Delta(a_l), \Delta(a_r))$ , где  $a_l$  - агент с наибольшими издержками среди отделяющихся агентов точки 0,  $a_r$  - аналогичная величина для точки  $d$ .

Таким образом, для поиска группы с наибольшим желанием отделиться достаточно рассмотреть группы из  $l$  агентов слева с наибольшими издержками и  $r$  агентов справа с наибольшими издержками для всех  $0 \leq l \leq L$  и  $0 \leq r \leq R$ . В каждой группе для каждой из точек 0,  $d$  достаточно рассмотреть агента с наибольшими исходными издержками в этой точке.

**Алгоритм 1.** Алгоритм подсчета нестабильности разбиения за  $O(LR)$ .

◀

1. Вычислим издержки агентов в данном разбиении. Время работы этого шага -  $O(R)$ .
2. Отсортируем агентов в каждой точке по убыванию издержек. Время работы этого шага -  $O(R \log R)$ .  
Теперь отдельно переберем группы с единственным центром в точках 0 и  $d$  и отдельно неопределенные группы.
3. Перебор неопределенных групп.

По утверждениям 1 и 2, для группы из  $k$  агентов слева и  $k$  агентов справа с медианой  $m$ , желание группы отделиться не более:

$$\min(\Delta(a_k), \Delta(b_k))$$

где  $a_k$  - агент с  $k$ -ми наибольшими издержками среди агентов в точке 0,  $b_k$  - такой же агентов в точке  $d$ .

Исходные издержки известны, поэтому  $\Delta(a_k), \Delta(b_k)$  - линейные функции от  $m$ .<sup>2</sup> Их максимум их минимума на отрезке  $[0, d]$  ищется за  $O(1)$ .

Переберем  $k$  от 1 до  $L$  Время этого шага -  $O(L)$  - перебор  $L$  значений  $k$ , обработка каждого из них за  $O(1)$ .

4. Перебор групп с центром в точке 0.

В силу утверждений 1 и 2 желание отделиться группы из  $l$  агентов слева и  $r$  агентов справа определяется издержками  $l$ -го агента с наибольшими издержками слева и  $r$ -го агента с наибольшими издержками справа.

Найдем группу, у которой желание отделиться наибольшее. Для всех пар  $(l, r)$  явно посчитаем эти издержки и выберем максимум из минимумов пар. Подсчет издержек происходит за  $O(1)$ , число пар -  $O(LR)$ , время работы этого шага на этом шаге -  $O(LR)$ .

---

<sup>2</sup>В случае функции относительного падения издержек -  $\Delta(a_k) = 1 - \frac{\frac{1}{2k} + m}{old(a_k)}$ ,  $\Delta(b_k) = 1 - \frac{\frac{1}{2k} + d - m}{old(b_k)}$ , функция абсолютного падения издержек всегда линейно зависит от  $m$

Каждый из 3 пунктов работает за  $O(LR)$ , так же можно оценить время работы всего алгоритма.

►

## 5 Анализ неустойчивости относительно функции абсолютного падения издержек

Неустойчивость расселения - минимум неустойчивостей всех его разбиений. В частности, неустойчивость расселения не превосходит минимума неустойчивостей трех разбиений:

Union - объединение всех агентов в одну коалицию;

Federation - разбиение агентов на две коалиции в соответствии с их координатами;

MaxUndef( $m$ ) - две коалиции: одна состоит из  $L$  агентов в точке 0 и  $L$  агентов в точке  $d$  с медианой в точке  $m$ , вторая - из  $R - L$  агентов в точке  $d$ .

**Алгоритм 2.** Алгоритм оценки неустойчивости расселения.

◄ С помощью алгоритма 1 вычислить неустойчивость расселений Union, Federation и MaxUndef( $\frac{d}{2}$ ). Вернуть минимум. Время работы, как и у алгоритма 1 -  $O(LR)$ . ►

Будем называть группу *отделяющейся*, если у нее положительное желание отделиться.

**Утверждение 3.** При  $LR > 1$ ,  $d > 1$  стабильно разбиение Federation.

◄ Пусть  $d > 1$  и Federation неустойчиво. Если в отделяющейся группе были агенты только из одной точки, то издержки каждого агента в новой группе не меньше издержек в старой. Поэтому в отделяющейся группе есть агенты из разных точек, и есть агент  $a$ , находящийся на расстоянии не менее  $\frac{1}{2}$  от медианы.

Транспортные издержки  $a$  составляют не менее  $\frac{1}{2}$ . Издержки  $a$  упали, в Federation транспортные издержки агентов нулевые, поэтому исходные производственные издержки  $a$  в Federation превосходили  $\frac{1}{2}$ , а, значит, были равны 1. Тогда  $L = 1$ , т.к.  $R = 1$  влечет  $L = 1$ .

Центр новой группы не может находиться в точке  $d$ , т.к. исходные издержки  $a$  равны 1, и новые издержки должны быть меньше 1. Поэтому отделяющаяся группа включает не более одного агента справа, а, значит, ровно одного агента справа. Новые издержки этого агента справа составляют не менее  $\frac{1}{2}$ , значит, исходные производственные были более  $\frac{1}{2}$ , т.е. 1, и  $R = 1$ . ►

**Алгоритм 3.** Алгоритм оценки максимума неустойчивости всех биполярных расселений относительно падения издержек  $\Delta_{abs}$ .

◄ Если  $L = R = 1$ , вернуть 0.

Для  $d$  от 0 до 1 с шагом  $\theta = 0.001$  применим алгоритм 2 к соответствующему расселению. Вернем максимум, увеличенный на  $\frac{\theta}{2}$ . ►

*Доказательство корректности.*

◄ При  $L = R = 1$  стабильно либо разбиение Federation, либо MaxUndef( $\frac{d}{2}$ ) - издержки агентов в этих разбиениях совпадают, и стабильно то, где издержки меньше.

Для остальных случаев достаточно рассмотреть в силу симметрии  $d \geq 0$  и в силу утверждения 3  $d \leq 1$ . Пусть максимум неустойчивости лежит в расселении с положением правых агентов в точке  $d$ .

Обозначим через  $d'$  ближайшее к  $d$  рассмотренное алгоритмом положение правых агентов. Тогда в расселении с  $d'$  в каждом разбиении исходные издержки каждого агента отличаются не более, чем на  $|d - d'|$ . Тогда все падения издержек агентов, а, значит, и желания групп отделиться, а, значит, и неустойчивости разбиений отличаются не более, чем на  $|d - d'| \leq \frac{\theta}{2}$ . ►

Применение алгоритма 3 позволяет сделать некоторые выводы о допустимых значениях неустойчивости расселений. В частности, при переборе <sup>3</sup>  $L, R = 1 \dots 100$  для функции абсолютного падения издержек, неустойчивость может быть больше 0.01 только для трех пар  $(L, R)$ :

$L = 2, R = 3, \varepsilon \leq 0.013$

$L = 3, R = 4, \varepsilon \leq 0.022$

$L = 4, R = 5, \varepsilon \leq 0.015$

Первый из этих случаев подробно описан в предыдущем [отчете](#) (доказано, что  $\varepsilon \leq \frac{1}{90}$ ).

**Теорема 1.** При  $L, R > 100$  неустойчивость любого биполярного расселения относительно функции абсолютного падения издержек не может превышать 0.01.

◄ Неустойчивость расселения - минимум неустойчивостей всех его разбиений. Докажем, что неустойчивость разбиения Federation не превосходит 0.01. В силу  $L, R \geq 100$ , издержки каждого агента не превышают 0.01. Но если неустойчивость больше 0.01, то есть группа, при отделении которой издержки всех агентов падают не менее, чем на 0.01, и тогда существует агент с неположительными издержками.

►

**Следствие.** Неустойчивость любого биполярного расселения относительно функции абсолютного падения издержек не может превышать 0.01, за исключением трех случаев, описанных выше.

<sup>3</sup>case\_1 из [кода](#), результаты без поправки в 0.001 - [здесь](#). Аналогичные результаты для случая относительного падения издержек - [здесь](#).

## 6 Оценки $d$ для не 0-стабильных расселений для функции относительного падения издержек

Гораздо более интересен случай относительного падения издержек  $\Delta_{rel}(new, old) = \frac{old - new}{old}$ .

**Теорема 2.** Если расселение не 0-стабильно, то  $\frac{R}{L(R+L)} < d < \frac{1}{R}$

◀

Если расселение не 0-стабильно, то в каждом разбиении есть группа, при отделении которой издержки каждого агента этой группы падают. Для двух разбиений покажем, какие группы хотят отделиться с наибольшим желанием, и запишем условия, при которых это желание положительно.

*Доказательство левого неравенства.*

В разбиении Union издержки каждого агента в точке  $d$  - минимально возможные издержки для данного разбиения (и производственные, и транспортные), поэтому группа отделяющихся агентов может состоять только из агентов слева.

**Утверждение.** Группа агентов слева с максимальным желанием отделиться состоит из  $L$  агентов.

◀ У этой группы наименьшие возможные издержки для групп из агентов слева, а исходные издержки всех агентов слева равны. ▶

Условие наличия положительного желания:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} &< \frac{1}{L+R} + d \\ d &> \frac{1}{L} - \frac{1}{L+R} = \frac{R}{L(L+R)} \end{aligned} \tag{1}$$

*Доказательство правого неравенства.*

Посмотрим, какая группа может отделяться в разбиении Federation. Рассмотрим три случая: это неопределенная группа, группа с центром в точке 0 или группа с центром в точке  $d$ . Пусть в этой группе  $l$  агентов слева и  $r$  агентов справа.

1. Неопределенная группа.

Тогда существует  $m \in [0, d]$  такое, что:

$$\begin{cases} \frac{1}{L} > \frac{1}{l+r} + m \\ \frac{1}{R} > \frac{1}{l+r} + d - m \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} + \frac{1}{R} &> \frac{2}{l+r} + d \\ d &< \frac{1}{L} + \frac{1}{R} - \frac{2}{l+r} \leq \frac{1}{R} \end{aligned}$$

Последнее неравенство верно в силу  $l+r = 2l \leq 2L$ .

2. Центр в точке  $d$ . Наличие в отделяющейся группе агента слева противоречит (1), поэтому она состоит только из агентов справа, и издержки каждого агента не менее  $\frac{1}{R}$ , что не меньше текущих издержек разбиения Federation.
3. Центр в точке 0. Если в отделяющейся группе нет агентов справа, то, аналогично предыдущему случаю, издержки каждого агента не менее  $\frac{1}{L}$ , что не меньше текущих издержек разбиения Federation. Добавим в группу  $l-r$  агентов справа: изменение издержек добавленных агентов будет совпадать с изменением издержек  $r$  агентов справа. Издержки всех остальных агентов не увеличатся, так как производственные издержки упадут, а транспортные сохранятся. Поэтому минимум желаний отделиться в этой группе не изменится. В новой группе  $l$  агентов слева и  $l$  агентов справа, и задача сведена к случаю 1.

▶

**Следствие 1.**  $d > \frac{1}{2R}$

◀ Так как  $L \leq R$  и  $\frac{R}{L(R+L)} \geq \frac{R}{R(R+R)} = \frac{1}{2R}$  ▶

**Следствие 2.**  $R < \frac{\sqrt{5}+1}{2} L$

◀ Так как  $\frac{R}{L(R+L)} \leq \frac{1}{R}$  ▶

## 7 Устройство коалиций в разбиении с наибольшей нестабильностью

**Лемма 1 (аналог леммы 3 из [1]).** Для каждого расселения существует разбиение с наименьшей нестабильностью, в котором не более одной группы с каждым центром.

**Лемма 2.** Для каждого расселения если существует разбиение с наименьшей нестабильностью, в котором есть группы с центрами в точках 0 и  $d$ , то есть разбиение с наименьшей нестабильностью с ровно одной группой с центром в точке 0 и ровно одной группой с центром в точке  $d$ , при этом не более одной из этих двух групп содержат агентов из разных точек.

**Лемма 3.** Для каждого расселения существует разбиение с наименьшей нестабильностью, в котором не более одной неопределенной группы.

При уменьшении издержек какого-либо агента желание отделиться каждой группы не увеличивается.

Покажем, что для каждого разбиения, не удовлетворяющего условию лемм 1-3, существует другое разбиение, удовлетворяющее условию, в котором издержки каждого агента не превосходят издержек в исходном разбиении.

*Доказательство леммы 1.*

► Пусть в разбиении с наименьшей нестабильностью существует несколько групп с каким-то центром. Объединим эти группы в одну. Медиану новой группы определим как равную медиане старых. Транспортные издержки всех агентов не изменятся, а производственные издержки не возрастут. ►

*Доказательство леммы 2.*

► По лемме 1 можно объединить все группы с одним центром в одну. После объединения остается не более одной группы с центром в точке 0 и не более одной группы с центром в точке  $d$ .

Пусть утверждение леммы не выполнено. Тогда есть группа  $A$  с центром слева с  $a$  агентами справа и группа  $B$  с центром справа и  $b$  агентами слева. Если  $a \leq b$ , перенесем  $a$  агентов справа из  $A$  в группу  $B$ , а  $a$  агентов слева из  $B$  в группу  $A$ . Производственные издержки всех агентов от этого не изменятся, а транспортные издержки перенесенных агентов упадут. После переноса группа  $B$  состоит из агентов из одной точки.

Аналогично сделаем, если  $b < a$ .

►

*Доказательство леммы 3.*

►

Пусть в разбиении больше двух неопределенных групп, в которых в сумме  $2a$  агентов. Если при их слиянии в одну группу размера  $2a$  с медианой в точке  $\frac{d}{2}$  издержки каждого агента не возрастают, то лемма доказана.

Пусть не так, и найдется агент  $x$  из группы  $B$  размера  $2b$ , издержки которого возрастают.

**Утверждение 1.** В таком случае  $b > \frac{a}{2}$ .

► Из условия убывания издержек:

$$\frac{1}{2a} + \frac{d}{2} > \frac{1}{2b} + \delta \geq \frac{1}{2b}$$

где  $\delta$  - транспортные издержки  $x$  в  $B$ .

В силу теоремы 2

$$\frac{1}{2a} + \frac{d}{2} \leq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2r} < \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{a}$$

Откуда  $\frac{1}{2b} < \frac{1}{a}$  и  $b > \frac{a}{2}$ . ►

**Утверждение 2.** Каждая группа  $C$  размера  $c \leq \frac{a}{2}$  агентами может слиться с группой  $A$  размера не меньше  $a$  так, чтобы издержки каждого агента не увеличились.

► Из теоремы 2 для каждого агента  $c \in C$  падение издержек до и после слияния:

$$old(c) \geq \frac{1}{a} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{r} \geq \frac{1}{a} + d \geq new(c)$$

►

Таким образом, все группы размера меньше  $\frac{a}{2}$  можно слить с группой  $B$ . Если после слияния остается группа размера не менее  $a$  и  $k$  групп размера не менее  $\frac{a}{2}$ , то  $k = 1$ , так как в неопределенных группах всего  $2a$  агентов.

Таким образом, можно оставить две группы, большая из них размера от  $a$  до  $\frac{3}{2}a$ .

**Утверждение 3.** Существует  $m \in [0, d]$ , т.ч. эти две группы можно слить в одну с медианой  $m$ , т.ч. издержки каждого агента не увеличились.

Пусть две группы имеют размер  $2ak$  и  $2a(1-k)$ ,  $k \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ . Условие того, что издержки их агентов после слияния не больше старых при сдвигах медианы от этих агентов на  $\delta m_1$  и  $\delta m_2$  (падения издержек для агентов тех же групп из противоположных точек в этом случае еще больше, т.к. медиана сдвигается в их сторону):

$$\frac{1}{2ak} - \frac{1}{2a} - \delta m_1 \geq 0$$

$$\frac{1}{2a(1-k)} - \frac{1}{2a} - \delta m_2 \geq 0$$

$\delta m_1$  и  $\delta m_2$  можно корректно выбрать согласно двум предыдущим неравенствам, если расстояние  $m$  между исходными медианами групп не превосходит:

$$m \leq \frac{1}{2ak} - \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a(1-k)} - \frac{1}{2a} = \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{k(1-k)} - 2 \right)$$

Что верно в силу цепочки неравенств (использованы теорема 2 и неравенство о средних):

$$m \leq \frac{1}{R} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{k(1-k)} - 2 \right)$$

►►

Объединение лемм 1, 2, 3 составляет следующую теорему.

**Теорема 3.** Для любого расселения существует разбиение с наименьшей нестабильностью, состоящее из:

1. не более одной неопределенной группы;
2. не более одной группы с центром в точке 0, не более одной группы с центром в точке  $d$ ; из этих двух групп не более одной содержит агентов, живущих в разных точках.

Из теоремы 3 тривиально следует алгоритм определения нестабильности расселения, перебирающий единственный непрерывный параметр.

**Алгоритм 4.** Алгоритм определения примерной нестабильности расселения за  $O(L^4 M)$ , где  $M$  - количество перебираемых медиан неопределенной группы в исходном разбиении.

◀

Вход:  $L, R, d$

Group( $l, r, m$ ) - группа из  $l$  агентов слева и  $r$  агентов справа с медианой  $m$ .

Используется algo\_1 – алгоритм 1.

Если не выполнено условие теоремы 2:

return 0

instability := 0

Для всех целых  $a$  из  $[0, L]$ : // количество агентов в неопределенной группе

Для всех целых  $i$  из  $[0, M]$

$m := i * d / M$  // медиана неопределенной группы

Для всех целых  $l$  из  $[0, L-a]$ : // количество ‘чужих’ агентов в группе с центром  $d$

groups := (a, a, m), (l, R, d), (L-l, 0, 0)

instability := min(instability, algo\_1(groups))

Для всех целых  $r$  из  $[0, R-a]$ : // количество ‘чужих’ агентов в группе с центром 0

groups := (a, a, m), (0, R-r, d), (L, r, 0)

instability := min(instability, algo\_1(groups))

return instability

Оценка времени работы: 3 вложенных цикла с  $L, M, O(L)$  итерациями, тело цикла работает за  $O(L^2)$  в силу оценки алгоритма 1 и теоремы 2.

►

## 8 Численная оценка нестабильности

**Теорема 4.** Существует расселение с  $\varepsilon > \frac{1}{19}$ .

◀

Применяя алгоритм 4 к  $d = 0.022$ ,  $L = 29$ ,  $R = 38$  с 200 пробами медиан, получаем  $\varepsilon \approx 0.0550$ <sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup>case\_2 из кода

Оценим точность результата. Желание произвольной группы отделиться является минимумом падений издержек агентов, а нестабильность - максимумом желаний групп. Значит, нестабильность не могла измениться сильнее, чем падения издержек агентов.

Пусть наибольшая нестабильность достигается в разбиении  $A$  с медианой неопределенной группы  $m$ , а ближайшая к  $m$  рассмотренная алгоритмом в этом разбиении медиана -  $m'$ . Падение издержек агента  $a$  может измениться не более, чем на:

$$\begin{aligned} \left| \left(1 - \frac{new(a)}{old(a)}\right) - \left(1 - \frac{new(a)}{old'(a)}\right) \right| &= \left| \frac{new(a)}{old'(a)} - \frac{new(a)}{old(a)} \right| = new(a) \frac{|old'(a) - old(a)|}{old(a)old'(a)} \leq \frac{new(a)}{old(a)} \frac{|m - m'|}{old'(a)} \leq \\ &\leq \frac{new(a)}{old(a)} \frac{\frac{0.022}{200}}{old(a) - \frac{0.022}{200}} \leq \frac{new(a)}{old(a)} \frac{1}{66} \end{aligned}$$

Последнее неравенство верно в силу  $old(a) \geq \frac{1}{67}$ , так как производственные издержки любого агента не менее  $\frac{1}{L+R} = \frac{1}{67}$ .

Рассуждая аналогично теореме 1, получаем, что новая нестабильность отличается не более, чем в  $1 + \frac{1}{66}$  раз от исходной, то есть  $\varepsilon \geq \frac{1}{0.056} \frac{1}{1 + \frac{1}{66}} > \frac{1}{19}$ .

►

**Теорема 5.** Для любого биполярного расселения нестабильность  $\varepsilon < \frac{1}{14}$ .

◄ ◄

Аналогично алгоритму 2, проанализируем угрозы разбиений Union, Federation и MaxUndef( $\frac{d}{2}$ ). Положим  $k = \frac{R}{L}, \gamma = Ld$ .

**Утверждение 1.** Если в  $S$  можно добавить несколько агентов, так что:

1. медиана  $S$  остается на месте;
2. падение издержек добавленных агентов совпадало с падением издержек каких-то агентов, уже присутствовавших в группе,

то желание отделиться у новой группы не меньше желания отделиться у  $S$ .

◄ После добавления агентов падение издержек агентов, изначально находившихся в группе, увеличится (их новые транспортные и старые издержки остались прежними, а новые производственные уменьшились). Значит, желание группы отделиться не уменьшится. ►

Для нахождения нестабильности разбиения будем искать группу с наибольшим желанием отделиться. Разберем несколько случаев, каждый из которых характеризуется исходным расселением и положением центра некоторой отделяющейся группы  $S$ . В каждом случае добавим несколько агентов в  $S$  согласно утверждению 1, от чего желание  $S$  отделиться не уменьшится, и в переборе отделяющихся групп можно рассматривать только новую группу.

После этого выпишем ограничение для  $\delta$  исходя из падения издержек агентов группы  $S$ .

1. Union, центр  $S$  находится слева.

Агенты справа имеют минимально возможные издержки, не могут находиться в отделяющейся группе. Добавим в  $S$  всех агентов слева, не принадлежащих  $S$ . Условие отделения  $S$  с желанием не больше  $\delta$ :

$$\delta \geq 1 - \frac{\frac{1}{L}}{\frac{1}{L+R} + d} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{1+k} + \gamma} \quad (2)$$

2. Union, центр  $S$  находится не слева

Если центр  $S$  не слева, то в ней есть агент справа. Но агенты справа имеют минимально возможные издержки и не могут находиться в отделяющейся группе.

3. Federation,  $S$  - неопределенная.

В  $S$  есть агенты из обеих точек, поэтому туда можно добавлять любых агентов.

Добавим в  $S$  всех агентов слева, не принадлежащих  $S$ , и несколько агентов справа, чтобы в  $S$  стало  $L$  агентов справа.

Обозначим через  $t$  центр  $S$ , положим  $\eta = Lt$ . Условие отделения группы из  $L$  агентов слева и  $L$  агентов справа с желанием не больше  $\delta$ :

$$\left[ \begin{array}{l} \delta \geq 1 - \frac{\frac{1}{2L} + t}{\frac{1}{L}} = 1 - \frac{\frac{1}{2} + \eta}{1} \\ \delta \geq 1 - \frac{\frac{1}{2L} + d - t}{\frac{1}{R}} = 1 - \frac{\frac{1}{2} + \gamma - \eta}{\frac{1}{k}} \end{array} \right. \quad (3)$$

4. Federation, центр  $S$  находится слева.

Если в группе нет агентов справа, то издержки агентов слева не падают. Поэтому в  $S$  можно добавлять агентов справа.

Пусть в  $S$  есть  $r$  агентов справа. Добавим в группу всех агентов слева, не состоящих в ней. Добавим в  $S$   $L - r$  агентов справа. Задача сведена к предыдущему случаю для  $m = 0$ .

5. Federation, центр  $S$  находится справа.

Если в группе нет агентов слева, то издержки агентов справа не падают. Поэтому в отделяющейся группе  $S$  есть агент слева, и туда можно добавить всех агентов. Условие отделения группы из всех агентов с желанием не больше  $\delta$ :

$$\begin{cases} \delta \geq 1 - \frac{\frac{1}{L+R} + d}{\frac{1}{L}} = 1 - \frac{\frac{1}{1+k} + \gamma}{1} \\ \delta \geq 1 - \frac{\frac{1}{L+R}}{\frac{1}{R}} = 1 - \frac{\frac{1}{1+k}}{\frac{1}{k}} = \frac{1}{1+k} \end{cases} \quad (4)$$

6. MaxUndef( $m$ ), центр  $S$  не определен.

Добавим в  $S$  всех агентов слева и несколько агентов справа, чтобы в группе стало  $L$  агентов справа. По следствию 2 из теоремы 2  $R < 2L$ , поэтому в группе найдется агент справа, который в исходном разбиении был в группе из  $2L$  агентов. Тогда есть агент слева и агент справа, производственные издержки которых не меняются в новом разбиении.

Чтобы группа была отделяющейся, у этих двух агентов должны упасть издержки. Значит, у них должны упасть транспортные издержки, что невозможно одновременно - при сдвиге медианы в сторону одного агента, она отдаляется от другого.

7. MaxUndef( $m$ ), центр  $S$  находится слева.

Добавим в  $S$  всех агентов слева, не состоящих в ней. Если в  $S$  есть агента справа, добавим в  $S$  несколько агентов справа, так чтобы справа стало  $L$  агентов. Задача сведена к предыдущему случаю.

Иначе запишем условие отделения группы из  $L$  агентов слева с желанием не больше  $\delta$ :

$$\delta \geq 1 - \frac{\frac{1}{L}}{\frac{1}{2L} + \frac{1}{2L} + m} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2} + \gamma - \mu} \quad (5)$$

8. MaxUndef( $m$ ), центр  $S$  находится справа.

Положим  $\mu = Lm$ .

Если в  $S$  есть агент слева, добавим в  $S$  всех агентов. Условие отделения группы из всех агентов с желанием не больше  $\delta$ :

$$\begin{cases} \delta \geq 1 - \frac{\frac{1}{L+R} + d}{\frac{1}{2L} + m} = 1 - \frac{\frac{1}{1+k} + \gamma}{\frac{1}{2} + \mu} \\ \delta \geq 1 - \frac{\frac{1}{L+R}}{\frac{1}{2L} + d - m} = 1 - \frac{\frac{1}{1+k}}{\frac{1}{2} + \gamma - \mu} \end{cases} \quad (6)$$

Иначе в  $S$  есть только агенты справа, добавим в  $S$  всех агентов справа. Условие отделения такой группы с желанием не больше  $\delta$ :

$$\begin{cases} \delta \geq 1 - \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{2L} + m} = 1 - \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{2} + \mu} \\ \delta \geq 1 - \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R-L}} = 1 - \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k-1}} = \frac{1}{k} \end{cases} \quad (7)$$

По определению,

$$\varepsilon \leq \min(2, \max(\min(3.1, 3.2), \min(4.1, 4.2)), \max(5, \min(6.1, 6.2), \min(7.1, 7.2))),$$

где через  $n.i$  обозначена правая часть  $i$ -го уравнения системы (n).

Максимизируем  $\min(3.1, 3.2)$ :



$$1 - \frac{\frac{1}{2} + \eta}{1} = 1 - \frac{\frac{1}{2} + \gamma - \eta}{\frac{1}{k}}$$

$$\eta = \frac{\frac{k-1}{2} + k\gamma}{1+k} \text{ }^5$$

При  $\mu = \frac{\gamma}{2}$  найдем такие  $k$  и  $\gamma$ , что  $\varepsilon$  максимально. В силу теоремы 2 и следствия 2 из нее, можно перебирать  $k$  от 1 до 2 и  $d$  от  $\frac{k}{1+k}$  до  $\frac{1}{k}$ .

Попробуем найти максимум  $\varepsilon$  перебором  $k, d$  с шагом 0.0001. Результат: <sup>6</sup>

$$\varepsilon \approx 0.069$$

$$\frac{R}{L} \approx 1.309$$

$$\frac{d}{L} \approx 0.642$$

Оценим точность результата. Погрешность величин  $\frac{1}{k}$ ,  $\frac{1}{k+1}$ ,  $d$  - не более 0.001. При вычислении  $\frac{new}{old}$  числитель и знаменатель не меньше 0.5, поэтому общая погрешность не более 0.002. Поэтому  $\varepsilon < \frac{1}{14}$  для любых  $k, d$ , что и требовалось.

► ►

## 9 Дальнейшие исследования

**Гипотеза.** Множество расселений с максимально возможной нестабильностью содержит биполярные расселения.

В рамках дальнейшей работы планируется проверка приведенной гипотезы, оптимизация приведенных в работе алгоритмов и получение результатов для непрерывных параметров  $L$  и  $R$ .

## 10 Список литературы

1. А. Савватеев. Анализ коалиционной устойчивости "биполярного мира". Журнал Новой Экономической Ассоциации 2013, No 17, с. 10-44
2. A. Savvateev. Achieving stability in heterogeneous societies. Multi-jurisdictional structures, and redistribution policies. Economics Education and Research Consortium Working Paper Series, No 04/13.
3. А. Савватеев. Задача многомерного размещения и ее приложения: теоретико-игровой подход. ЦЭМИ РАН, М., 2013.
4. D. Musatov, A. Savvateev, S. Weber. Gale–Nikaido–Debreu and Milgrom–Shannon: Communal interactions with endogenous community structures. Journal of Economic Theory, No 11/16, 282-303.
5. A. Savvateev, Uni-dimensional models of coalition formation: non-existence of stable partitions. Mosc. J. Comb. Number Theory 2 (2012), No 4, 49-62.
6. Bogomolnaia A., Le Breton M., Savvateev, S. Weber. Stability under unanimous consent, free mobility and core, International Journal of Game Theory 2007. Vol. 35. 185-204.
7. Bogomolnaia A., Le Breton M., Savvateev, S. Weber. Stability of jurisdiction structures under the equal share and median rules, Economic Theory 2008. Vol. 3. 523-543.

<sup>5</sup>Легко видеть, что  $0 \leq \eta \leq \gamma$

<sup>6</sup>case\_3 из кода