Коалиционная нестабильность в "биполярном мире"

Андрей Гольман

Научный руководитель - Мусатов Д.В.

1 Постановка задачи

Задано множество агентов как множество точек расположений агентов на прямой. Необходимо обеспечить всех агентов некоторым благом. Благо поставляется в отдельных пунктах – мощностях, количество и места расположения которых нужно выбрать.

Стоимость поддержания каждой мощности равна 1, вне зависимости от ее положения. Каждая мощность способна удовлетворить потребность любого числа агентов. Все прикрепленные к данной мощности агенты несут равные издержки, в сумме равные стоимости поддержания мощности - *производственные издержки.* Также существуют затраты прикрепления каждого агента к любой из мощностей, равные евклидову расстоянию между расположением агента и мощности, которой он пользуется - *транспортные издержки.*

Коалицией или *группой* будем называть множество агентов, которые пользуются одним и тем же благом. Для каждой коалиции S ее благо может располагаться в любой медиане $m(S)$ коалиции, т.е. такой точке, что сумма расстояний от этой точки до всех агентов минимальна.

Таким образом, издержки агента, находящегося в точке t, принадлежащего коалиции S, равны

$$costs(a) = \frac{1}{|S|} + |t - m(S)|.$$

Падением издержек агента a с исходными издержками $old(a)$ и новыми $new(a)$ будем считать одну из двух величин:

1. (*абсолютное падение издержек*) $\Delta_{abs}(a) = old(a) - new(a)$;
2. (*относительное падение издержек*) $\Delta_{rel}(a) = \frac{old(a) - new(a)}{old(a)}$.

Нестабильностью разбиения множества агентов на коалиции назовем $\varepsilon = \max_{S \in G} \min_{a \in S} \Delta(a)$, где G - множество всех подмножеств множества агентов. Другими словами, нестабильность - это минимальное ε, т.ч. не существует коалиции S, при формировании которой каждый агент из S уменьшает свои издержки (относительно своих издержек в разбиении A) более, чем на ε. [1]

Нестабильностью расселения будем называть наименьшую нестабильность разбиений агентов данного расселения.

Требуется найти расселение с наибольшей нестабильностью.

В этой работе рассматриваются следующие расселения: L агентов расположены в точке 0, R агентов в точке d, при этом $L \leq R$. Будем называть такие расселения *биполярными.*

Будем называть группу *неопределенной*, если множеством ее медиан является отрезок.

Комментарий. В случае относительного падения издержек стоимость поддержания мощности можно считать равной 1 без ограничения общности - в противном случае можно пропорционально увеличить расстояние между агентами и относительное падение издержек не изменится. В случае абсолютного падения издержек при увеличении в k раз транспортных и производственных издержек падение издержек возрастет в k раз, и при произвольной стоимости поддержания мощности нестабильность может быть сколь угодно большой.

Также без ограничения общности можно домножать транспортные издержки на некоторую константу и рассматривать расселения агентов с пропорционально увеличенными расстояниями.

[1] Эта величина неотрицательна, т.к. в коалиции, присутствующей в исходном разбиении, все падения издержек нулевые.

2 Обзор литературы todo

3 Основные результаты

Построены и реализованы алгоритмы подсчета нестабильности разбиения, оценки нестабильности расселения. С помощью алгоритма оценки показано, что для функции абсолютного падения издержек нестабильность может превышать 0.01 только для трех пар (L, R).

Показано, что для функции относительного падения издержек расселение с наибольшей нестабильностью состоит из не более чем 3 коалиций, из которых не более одной неопределенной. На основании этого построен алгоритм поиска нестабильности биполярного расселения, перебирающий единственный непрерывный параметр.

Найдено расселение с нестабильностью более $\frac{1}{19}$. Доказано, что любое биполярное расселение имеет нестабильность, не превосходящую $\frac{1}{14}$.

4 Алгоритм подсчета нестабильности разбиения

Будем говорить, что группа агентов S хочет отделиться *с желанием* δ, если после образования этой группы для всех агентов $a \in S$: $\Delta(a) \geq \delta$. Тогда нестабильность разбиения - это наибольшее возможное желание отделиться среди всех групп агентов.

Утверждение 1. Из всех групп из l агентов *слева* (в точке 0) и r агентов *справа* (в точке d) наибольшее желание отделиться имеет группа из l агентов с наибольшими издержками слева и r агентов с наибольшими издержками справа.

◄ Так как издержки агентов группы падают не меньше, чем агентов группы произвольной удовлетворяющей условию утверждения группы. ►

Утверждение 2. Максимальным желанием отделения группы является величина $\min(\Delta(a_l), \Delta(a_r))$, где a_l - агент с наибольшими издержками среди отделяющихся агентов точки 0, a_r - аналогичная величина для точки d.

Таким образом, для поиска группы с наибольшим желанием отделиться достаточно рассмотреть группы из l агентов слева с наибольшими издержками и r агентов справа с наибольшими издержками для всех $0 \leq l \leq L$ и $0 \leq r \leq R$. В каждой группе для каждой из точек 0, d достаточно рассмотреть агента с наибольшими исходными издержками в этой точке.

Алгоритм 1. Алгоритм подсчета нестабильности разбиения за $O(LR)$.

◄

1. Вычислим издержки агентов в данном разбиении. Время работы этого шага - $O(R)$.

2. Отсортируем агентов в каждой точке по убыванию издержек. Время работы этого шага - $O(R \log R)$.

   Теперь отдельно переберем группы с единственным центром в точках 0 и d и отдельно неопределенные группы.

3. Перебор неопределенных групп.

   По утверждениям 1 и 2, для группы из k агентов слева и k агентов справа с медианой m, желание группы отделиться не более:

   $$\min(\Delta(a_k), \Delta(b_k))$$

   где a_k - агент с k-ми наибольшими издержками среди агентов в точке 0, b_k - такой же агентов в точке d.

   Исходные издержки известны, поэтому $\Delta(a_k), \Delta(b_k)$ - линейные функции от m. [2] Их максимум их минимума на отрезке $[0, d]$ ищется за $O(1)$.

   Переберем k от 1 до L Время этого шага - $O(L)$ - перебор L значений k, обработка каждого из них за $O(1)$.

4. Перебор групп с центром в точке 0.

   В силу утверждений 1 и 2 желание отделиться группы из l агентов слева и r агентов справа определяется издержками l-го агента с наибольшими издержками слева и r-го агента с наибольшими издержками справа.

[2] В случае функции относительного падения издержек - $\Delta(a_k) = 1 - \frac{\frac{1}{2k}+m}{old(a_k)}, \Delta(b_k) = 1 - \frac{\frac{1}{2k}+d-m}{old(b_k)}$, функция абсолютного падения издержек всегда линейно зависит от m

Найдем группу, у которой желание отделиться наибольшее. Для всех пар (l, r) явно посчитаем эти издержки и выберем максимум из минимумов пар. Подсчет издержек происходит за $O(1)$, число пар - $O(LR)$, время работы этого шага на этом шаге - $O(LR)$.

Каждый из 3 пунктов работает за $O(LR)$, так же можно оценить время работы всего алгоритма. ▶

5 Анализ нестабильности относительно функции абсолютного падения издержек

Нестабильность расселения - минимум нестабильностей всех его разбиений. В частности, нестабильность расселения не превосходит минимума нестабильностей трех разбиений:

Union - объединение всех агентов в одну коалицию

Federation - разбиение агентов на две коалиции в соответствии с их координатами

MaxUndef(m) - одна коалиция содержит L агентов в точке 0 и L агентов в точке d с медианой в точке m, вторая коалиция - $R - L$ агентов в точке d.

Алгоритм 2. Алгоритм оценки нестабильности расселения.

◀ С помощью алгоритма 1 вычислить нестабильность расселений Union, Federation и MaxUndef($\frac{d}{2}$). Вернуть минимум. Время работы, как и у алогоритма 1 - $O(LR)$. ▶

Будем называть группу *отделяющейся*, если у нее положительное желание отделиться.

Утверждение 3. При $LR > 1$, $d > 1$ стабильно разбиение Federation.

◀ Пусть $d > 1$ и Federation нестабильно. Если в отделяющейся группе были агенты только из одной точки, то издержки каждого агента в новой группе не меньше издержек в старой. Поэтому в отделяющейся группе есть агенты из разных точек, и есть агент a, находящийся на расстоянии не менее $\frac{1}{2}$ от медианы.

Транспортные издержки a составляют не менее $\frac{1}{2}$. Издержки a упали, в Federation траспортные издержки агентов нулевые, поэтому исходные производственные издержки a в Federation превосходили $\frac{1}{2}$, а, значит, были равны 1. Тогда $L = 1$, т.к. $R = 1$ влечет $L = 1$.

Центр новой группы не может находиться в точке d, т.к. исходные издержки a равны 1, и новые издежки должны быть меньше 1. Поэтому отделяющаяся группа включает не более одного агента справа, а, значит, ровно одного агента справа. Новые издержки этого агента справа составляют не менее $\frac{1}{2}$, значит, исходные производственные были более $\frac{1}{2}$, т.е. 1, и $R = 1$. ▶

Алгоритм 3. Алгоритм оценки максимума нестабильности всех биполярных расселений относительно падения издержек Δ_{abs}.

◀ Если $L = R = 1$, вернуть 0.

Для d от 0 до 1 с шагом $\delta = 0.001$ применим алгоритм 2 к соответствующему расселению. Вернем максимум, увеличенный на 0.001. ▶

Доказательство корректности.

◀ При $L = R = 1$ стабильно либо разбиение Federation, либо MaxUndef($\frac{d}{2}$) - издержки агентов в этих разбиениях совпадают, и стабильно то, где издержки меньше.

Для остальных случаев достаточно рассмотреть в силу симметрии $d \geq 0$ и в силу утверждения 3 $d \leq 1$. Пусть максимум нестабильности лежит в расселении с положением правых агентов в точке d.

Обозначим через d' наибольшее рассмотренное алгоритмом положение правых агентов, не превосходящее d. В каждом разбиении исходные издержки каждого агента увеличились не более, чем на $d - d'$. Тогда все падения издержек агентов, а, значит, и желания групп отделиться, изменились не более, чем на $d - d' = 0.001$. ▶

Применение алгоритма 3 позволяет сделать некоторые выводы о допустимых значениях нестабильности расселений. В частности, при переборе [3] $L, R = 1 \ldots 100$ для функции абсолютного падения издержек, нестабильность может быть больше 0.01 только для трех пар (L, R):

$L = 2, R = 3, \varepsilon \leq 0.013$

$L = 3, R = 4, \varepsilon \leq 0.022$

$L = 4, R = 5, \varepsilon \leq 0.015$

Первый из этих случаев подробно описан в предыдущем отчете (доказано, что $\varepsilon \leq \frac{1}{90}$).

Теорема 1. При $L, R > 100$ нестабильность любого биполярного расселения относительно функции абсолютного падения издержек не может превышать 0.01.

◀ Нестабильность расселения - минимум нестабильностей всех его разбиений. Докажем, что нестабильность разбиения Federation не превосходит 0.01. В силу $L, R \geq 100$, издержки каждого агента не превышают 0.01. Но если нестабильность больше 0.01, то есть группа, при отделении которой издержки

[3] *case*_1 из кода, результаты без поправки в 0.001 - здесь. Аналогичные результаты для случая относительного падения издержек - здесь.

всех агентов падают не менее, чем на 0.01, и тогда существует агент с неположительными издержками. ►

Следствие. Нестабильность любого биполярного расселения относительно функции абсолютного падения издержек не может превышать 0.01, за исключением трех случаев, описанных выше.

6 Оценки d для не 0-стабильных расселений для функции относительного падения издержек

Гораздо более интересен случай относительного падения издержек $\Delta_{rel}(new, old) = \frac{old-new}{old}$.

Теорема 2. Если расселение не 0-стабильно, то $\frac{R}{L(R+L)} < d < \frac{1}{R}$

◄

Если расселение не 0-стабильно, то в каждом разбиении есть группа, при отделении которой издержки каждого агента этой группы падают. Для двух разбиений покажем, какие группы хотят отделиться с наибольшим желанием, и запишем условия, при которых это желание положительно.

Доказательство левого неравенства.

В разбиении Union издержки каждого агента в точке d - минимально возможные издержки для данного разбиения (и производственные, и транспортные), поэтому группа отделяющихся агентов может состоять только из агентов слева.

Утверждение. Группа агентов слева с максимальным желанием отделиться состоит из L агентов.

◄ У этой группы наименьшие возможные издержки для групп из агентов слева, а исходные издержки всех агентов слева равны. ►

Условие наличия положительного желания:

$$\frac{1}{L} < \frac{1}{L+R} + d \tag{1}$$

$$d > \frac{1}{L} - \frac{1}{L+R} = \frac{R}{L(L+R)}$$

Доказательство правого неравенства.

Посмотрим, какая группа может отделяться в разбиении Federation. Рассмотрим три случая: это неопределенная группа, группа с центром в точке 0 или группа с центром в точке d. Пусть в этой группе l агентов слева и r агентов справа.

1. Неопределенная группа.

   Тогда существует $m \in [0, d]$ такое, что:

   $$\begin{cases} \frac{1}{L} > \frac{1}{l+r} + m \\ \frac{1}{R} > \frac{1}{l+r} + d - m \end{cases}$$

   Тогда

   $$\frac{1}{L} + \frac{1}{R} > \frac{2}{l+r} + d$$

   $$d < \frac{1}{L} + \frac{1}{R} - \frac{2}{l+r} \le \frac{1}{R}$$

   Последнее неравенство верно в силу $l + r = 2l \le 2L$.

2. Центр в точке d. Наличие в отделяющейся группе агента слева противоречит (1), поэтому она состоит только из агентов справа, и издержки каждого агента не менее $\frac{1}{R}$, что не меньше текущих издержек разбиения Federation.

3. Центр в точке 0. Если в отделяющейся группе нет агентов справа, то, аналогично предыдущему случаю, издержки каждого агента не менее $\frac{1}{L}$, что не меньше текущих издержек разбиения Federation. Добавим в группу $l - r$ агентов справа: изменение издержек добавленных агентов будет совпадать с изменением издержек r агентов справа. Издержки всех остальных агентов не увеличатся, так как производственные издержки упадут, а транспортные сохранятся. Поэтому минимум желаний отделиться в этой группе не изменится. В новой группе l агентов слева и l агентов справа, и задача сведена к случаю 1.

▶

Следствие 1. $d > \frac{1}{2R}$

◀ Так как $L \le R$ и $\frac{R}{L(R+L)} \ge \frac{R}{R(R+R)} = \frac{1}{2R}$ ▶

Следствие 2. $R < \frac{\sqrt{5}+1}{2}L$

◀ Так как $\frac{R}{L(R+L)} \le \frac{1}{R}$ ▶

7 Устройство коалиций в разбиении с наибольшей нестабильностью

Лемма 1 (аналог леммы 3 из [1]). Для каждого расселения существует разбиение с наименьшей нестабильностью, в котором не более одной группы с каждым центром.

Лемма 2. Для каждого расселения если существует разбиение с наименьшей нестабильностью, в котором есть группы с центрами в точках 0 и d, то есть разбиение с наименьшей нестабильностью с ровно одной группой с центром в точке 0 и ровно одной группой с центром в точке d, при этом не более одной из этих двух групп содержат агентов из разных точек.

Лемма 3. Для каждого расселения существует разбиение с наименьшей нестабильностью, в котором не более одной неопределенной группы.

При уменьшении издержек какого-либо агента желание отделиться каждой группы не увеличиватся.

Покажем, что для каждого разбиения, не удовлетворяющего условию лемм 1-3, существует другое разбиение, удовлетворяющее условию, в котором издержки каждого агента не превосходят издержек в исходном разбиении.

Доказательство леммы 1.

◀ Пусть в разбиении с наименьшей нестабильностью существует несколько групп с каким-то центром. Объединим эти группы в одну. Медиану новой группы определим как равную медиане старых. Транспортные издержки всех агентов не изменятся, а производственные издержки не возрастут. ▶

Доказательство леммы 2.

◀ По лемме 1 можно объединить все группы с одним центром в одну. После объединения остается не более одной группы с центром в точке 0 и не более одной группы с центром в точке d.

Пусть утверждение леммы не выполнено. Тогда есть группа A с центром слева с a агентами справа и группа B с центром справа и b агентами слева. Если $a \le b$, перенесем a агентов справа из A в группу B, а a агентов слева из B в группу A. Производственные издержки всех агентов от этого не изменятся, а транспортные издержки перенесенных агентов упадут. После переноса группа B состоит из агентов из одной точки.

Аналогично сделаем, если $b < a$.

▶

Доказательство леммы 3.

◀ ◀

Пусть в разбиении больше двух неопределенных групп, в которых в сумме $2a$ агентов. Если при их слиянии в одну группу размера $2a$ с медианой в точке $\frac{d}{2}$ издержки каждого агента не возрастают, то лемма доказана.

Пусть не так, и найдется агент x из группы B размера $2b$, издержки которого возрастают.

Утверждение 1. В таком случае $b > \frac{a}{2}$.

◀ Из условия убывания издержек:

$$\frac{1}{2a} + \frac{d}{2} > \frac{1}{2b} + \delta \ge \frac{1}{2b}$$

где δ - транспортные издержки x в B.

В силу теоремы 2

$$\frac{1}{2a} + \frac{d}{2} \le \frac{1}{2a} + \frac{1}{2r} < \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{a}$$

Откуда $\frac{1}{2b} < \frac{1}{a}$ и $b > \frac{a}{2}$. ▶

Утверждение 2. Каждая группа C размера $c \le \frac{a}{2}$ агентами может слиться с группой A размера не меньше a в группу с группы A так, чтобы издержки каждого агента не увеличились.

◀ Из теоремы 2 для каждого агента $c \in C$

$$old(c) \ge \frac{1}{\frac{a}{2}} \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{r} \ge \frac{1}{a} + d \ge new(c)$$

▶

Таким образом, все группы размера меньше $\frac{a}{2}$ можно слить с группой B. Если после слияния остается группа размера не менее a и k групп размера не менее $\frac{a}{2}$, то $k = 1$, так как в неопределенных группах всего $2a$ агентов.

Таким образом, можно оставить две группы, большая из них размера от a до $\frac{3}{2}a$.

Утверждение 3. Существует $m \in [0, d]$, т.ч. эти две группы можно слить в одну с медианой m, т.ч. издержки каждого агента не увеличились.

Пусть две группы имеют размер $2ak$ и $2a(1-k)$, $k \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.

$$\frac{1}{2ak} - \frac{1}{2a} - \delta m_1 \geq 0$$

$$\frac{1}{2a(1-k)} - \frac{1}{2a} - \delta m_2 \geq 0$$

δm_1 и δm_2 можно корректно выбрать согласно двум предыдущим неравенствам, если расстояние m между исходными медианами групп не превосходит:

$$m \leq \frac{1}{2ak} - \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a(1-k)} - \frac{1}{2a} = \frac{1}{2a}(\frac{1}{k(1-k)} - 2)$$

Что верно в силу цепочки неравенств (использованы теорема 2 и неравенство о средних):

$$m \leq \frac{1}{R} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{2a}(\frac{1}{k(1-k)} - 2)$$

► ►

Объединение лемм 1, 2, 3 составляет следующую теорему.

Теорема 3. Для любого расселения существует разбиение с наименьшей нестабильностью, состоящее из:

1. не более одной неопределенной группы;
2. не более одной группы с центром в точке 0, не более одной группы с центром в точке d; из этих двух групп не более одной содержит агентов, живущих в разных точках.

Из теоремы 3 тривиально следует алгоритм определения нестабильности расселения, перебирающий единственный непрерывный параметр.

Алгоритм 4. Алгоритм определения примерной нестабильности расселения за $O(L^4M)$, где M - количество перебираемых медиан неопределенной группы в исходном разбиении.

◄

Вход: `L, R, d`

`Group(l, r, m)` - группа из l агентов слева и r агентов справа с медианой m.

Используется `algo_1` – алгоритм 1.

```
Если не выполнено условие теоремы 2:
   return 0
instability := 0
Для всех целых a из [0, L]: // количество агентов в неопределенной группе
   Для всех целых i из [0, M]
   m := i * d / M // медиана неопределенной группы
      Для всех целых l из [0, L-a]: // количество ‘чужих’ агентов в группе с центром d
         groups := (a, a, m), (l, R, d), (L-l, 0, 0)
         instability = min(instability, algo_1(groups))
      Для всех целых r из [0, R-a]: // количество ‘чужих’ агентов в группе с центром 0
         groups := (a, a, m), (0, R-r, d), (L, r, 0)
         instability = min(instability, algo_1(groups))
return instability
```

Оценка времени работы: 3 вложенных цикла с $L, M, O(L)$ итерациями, тело цикла работает за $O(L^2)$ в силу оценки алгоритма 1 и теоремы 2.

►

8 Численная оценка нестабильности

Теорема 4. Существует расселение с $\varepsilon > \frac{1}{19}$.

◀

Применяя алгоритм 4 к $d = 0.022$, $L = 29$, $R = 38$ с 200 пробами медиан, получаем $\varepsilon \approx 0.0550$ [4].

Оценим точность результата. Желание произвольной группы отделиться является минимумом падений издержек агентов, а нестабильность - максимумом желаний групп. Значит, нестабильность не могла измениться сильнее, чем падения издержек агентов.

Пусть наибольшая нестабильность достигается в разбиении A с медианой неопределенной группы m, а ближайшая к m рассмотренная алгоритмом в этом разбиении медиана - m'. Падение издержек агента a может измениться не более, чем на:

$$|(1 - \frac{new(a)}{old(a)}) - (1 - \frac{new(a)}{old'(a)})| = |\frac{new(a)}{old'(a)} - \frac{new(a)}{old(a)}| = new(a)\frac{|old'(a) - old(a)|}{old(a)old'(a)} \leq \frac{new(a)}{old(a)}\frac{|m - m'|}{old'(a)} \leq$$

$$\leq \frac{new(a)}{old(a)}\frac{\frac{0.022}{200}}{old(a) - \frac{0.022}{200}} \leq \frac{new(a)}{old(a)}\frac{1}{66}$$

Последнее неравенство верно в силу $old(a) \geq \frac{1}{67}$, так как производственные издержки любого агента не менее $\frac{1}{L+R} = \frac{1}{67}$.

Получаем, что новая нестабильность отличается не более, чем в $1 + \frac{1}{66}$ раз от исходной, то есть $\varepsilon \geq \frac{1}{0.055}\frac{1}{1+\frac{1}{66}} > \frac{1}{19}$

▶

Теорема 5. Для любого биполярного расселения нестабильность $\varepsilon < \frac{1}{14}$.

◀ ◀

Аналогично алгоритму 2, проанализируем угрозы разбиений Union, Federation и MaxUndef($\frac{d}{2}$). Положим $k = \frac{R}{L}, \gamma = Ld$.

Утверждение 1. Если в S можно добавить несколько агентов, так что:

1. медиана S остается на месте;

2. падение издержек добавленных агентов совпадало с падением издержек каких-то агентов, уже присутствовавших в группе,

то желание отделиться у новой группы не меньше желания отделиться у S.

◀ После добавления агентов падение издержек агентов, изначально находившихся в группе, увеличится (их новые транспортные и старые издержки остались прежними, а новые производственные уменьшились). Значит, желание группы отделиться не уменьшится. ▶

Для нахождения нестабильности разбиения будем искать группу с наибольшим желанием отделиться. Разберем несколько случаев, каждый из которых характеризуется исходным расселением и положением центра некоторой отделяющейся группы S. В каждом случае добавим несколько агентов в S согласно утверждению 1, от чего желание S отделиться не уменьшится, и в переборе отделяющихся групп можно рассматривать только новую группу.

После этого выпишем ограничение для δ исходя из падения издержек агентов группы S.

1. Union, центр S находится слева.

   Агенты справа имеют минимально возможные издержки, не могут находиться в отделяющейся группе. Добавим в S всех агентов слева, не принадлежащих S. Условие отделения S с желанием не больше δ:

$$\delta \geq 1 - \frac{\frac{1}{L}}{\frac{1}{L+R} + d} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{1+k} + \gamma} \tag{2}$$

2. Union, центр S находится не слева

   Если центр S не слева, то в ней есть агент справа. Но агенты справа имеют минимально возможные издержки и не могут находиться в отделяющейся группе.

3. Federation, S - неопределенная.

   Добавим в S всех агентов слева, не принадлежащих S, и несколько агентов справа, чтобы в S стало L агентов справа.

[4] $case\_2$ из кода

Обозначим через t центр S, положим $\eta = Lt$. Условие отделения группы из L агентов слева и L агентов справа с желанием не больше δ:

$$\left[\begin{aligned} \delta \geq 1 - \frac{\frac{1}{2L} + t}{\frac{1}{L}} = 1 - \frac{\frac{1}{2} + \eta}{1} \\ \delta \geq 1 - \frac{\frac{1}{2L} + d - t}{\frac{1}{R}} = 1 - \frac{\frac{1}{2} + \gamma - \eta}{\frac{1}{k}} \end{aligned}\right. \tag{3}$$

4. Federation, центр S находится слева.

   Пусть в S есть r агентов справа. Добавим в группу всех агентов слева, не состоящих в ней. Добавим в S $L - r$ агентов справа. Задача сведена к предыдущему случаю для $m = 0$.

5. Federation, центр S находится справа.

   Добавим в S всех агентов. Условие отделения группы из всех агентов с желанием не больше δ:

$$\left[\begin{aligned} \delta \geq 1 - \frac{\frac{1}{L+R} + d}{\frac{1}{L}} = 1 - \frac{\frac{1}{1+k} + \gamma}{1} \\ \delta \geq 1 - \frac{\frac{1}{L+R}}{\frac{1}{R}} = 1 - \frac{\frac{1}{1+k}}{\frac{1}{k}} = \frac{1}{1+k} \end{aligned}\right. \tag{4}$$

6. MaxUndef(m), центр S не определен.

   Добавим в S всех агентов слева и несколько агентов справа, чтобы в группе стало L агентов справа. По следствию 2 из теоремы 2 $R < 2L$, поэтому в группе найдется агент справа, который в исходном разбиении был в группе из $2L$ агентов. Тогда есть агент слева и агент справа, производственные издержки которых не меняются в новом разбиении.

   Чтобы группа была отделяющейся, у этих двух агентов должны упасть издержки. Значит, у них должны упасть транспортные издержки, что невозможно одновременно - при сдвиге медианы в сторону одного агента, она отдаляется от другого.

7. MaxUndef(m), центр S находится слева.

   Добавим в S всех агентов слева, не состоящих в ней. Если в S есть агента справа, добавим в S несколько агентов справа, так чтобы справа стало L агентов. Задача сведена к предыдущему случаю.

   Иначе запишем условие отделения группы из L агентов слева с желанием не больше δ:

$$\delta \geq 1 - \frac{\frac{1}{L}}{\frac{1}{2L} + \frac{1}{2L} + m} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2} + \gamma - \mu} \tag{5}$$

8. MaxUndef(m), центр S находится справа.

   Положим $\mu = Lm$.

   Если в S есть агент слева, добавим в S всех агентов. Условие отделения группы из всех агентов с желанием не больше δ:

$$\left[\begin{aligned} \delta \geq 1 - \frac{\frac{1}{L+R} + d}{\frac{1}{2L} + m} = 1 - \frac{\frac{1}{1+k} + \gamma}{\frac{1}{2} + \mu} \\ \delta \geq 1 - \frac{\frac{1}{L+R}}{\frac{1}{2L} + d - m} = 1 - \frac{\frac{1}{1+k}}{\frac{1}{2} + \gamma - \mu} \end{aligned}\right. \tag{6}$$

   Иначе в S есть только агенты справа, добавим в S всех агентов справа. Условие отделения такой группы с желанием не больше δ:

$$\left[\begin{aligned} \delta \geq 1 - \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{2L} + m} = 1 - \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{2} + \mu} \\ \delta \geq 1 - \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R-L}} = 1 - \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k-1}} = \frac{1}{k} \end{aligned}\right. \tag{7}$$

По определению,

$$\varepsilon \le \min(2, \max(\min(3.1, 3.2), \min(4.1, 4.2)), \max(5, \min(6.1, 6.2), \min(7.1, 7.2))),$$

где через n.i обозначена правая часть i-го уравнения системы (n).

Максимизируем $\min(3.1, 3.2)$:

$$1 - \frac{\frac{1}{2} + \eta}{1} = 1 - \frac{\frac{1}{2} + \gamma - \eta}{\frac{1}{k}}$$

$$\eta = \frac{\frac{k-1}{2} + k\gamma}{1+k}\text{[5]}$$

При $\mu = \frac{\gamma}{2}$ найдем такие k и γ, что ε максимально. В силу теоремы 2 и следствия 2 из нее, можно перебирать k от 1 до 2 и d от $\frac{k}{1+k}$ до $\frac{1}{k}$.

Попробуем найти максмум ε перебором k, d с шагом 0.0001. Результат: [6]

$$\varepsilon \approx 0.069$$

$$\frac{R}{L} \approx 1.309$$

$$\frac{d}{L} \approx 0.642$$

Оценим точность результата. Погрешность величин $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{k+1}$, d - не более 0.001. При вычислении $\frac{new}{old}$ числитель и знаменатель не меньше 0.5, поэтому общая погрешность не более 0.002. Поэтому $\varepsilon < \frac{1}{14}$ для любых k, d, что и требовалось.

►►

9 Дальнейшие исследования

Гипотеза. Множество расселений с максимально возможной нестабильностью содержит биполярные расселения.

В рамках дальнейшей работы планируется проверка приведенной гипотезы, оптимизация приведенных в работе алгоритмов и получение результатов для непрерывных параметров L и R.

10 Список литературы todo

[1] А. Савватеев. Анализ коалиционной устойчивости "биполярного мира Журнал Новои˘ Экономическои˘ Ассоциации 2013, No 17, с. 10-44.

[2] A. Savvateev. Achieving stability in heterogeneous societies. Multi-jurisdictional structures, and redistribution policies. Economics Education and Research Consortium Working Paper Series, No 04/13.

[3] А. Савватеев. Задача многомерного размещения и ее приложения: теоретико-игровой подход. ЦЭМИ РАН, М., 2013

[5] Легко видеть, что $0 \le \eta \le \gamma$

[6] case 3 из кода