CAPÍTULO I

GEOMETRIA DAS MASSAS

I. ASPECTOS GERAIS

Apesar de não estar incluida dentro dos nossos objetivos principais, vamos estudar algumas grandezas características da geometria das massas com a finalidade de conhecermos alguns valores necessários ao estudo das solicitações que provoquem a rotação, como o Momento Fletor e o Momento Torsor.

Vamos nos ater ao cálculo das propriedades das seções planas.

II. MOMENTOS ESTÁTICOS E BARICENTROS DE SUPERFÍCIES PLANAS

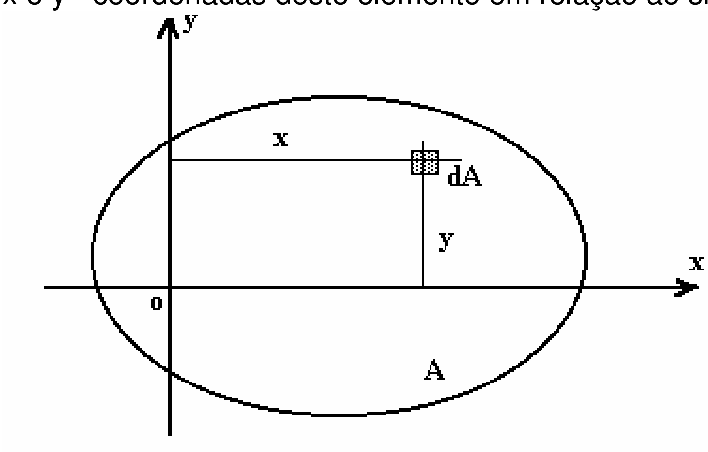
A. CONCEITO

Admitimos uma superfície plana qualquer de área "A", referida à um sistema de eixos ortogonais x,y.

Sejam:

dA - elemento de área componente da superfície

x e y - coordenadas deste elemento em relação ao sistema de eixos



Define-se:

Momento estático de um elemento de área dA em relação a um eixo é o produto da área do elemento por sua orddenada em relação ao eixo considerado.

Notação : s

Expressão analítica :

$$s_x = y.\ dA \qquad\qquad s_y = x.\ dA$$

Define-se:

Momento estático de uma superfície é a soma dos momentos estáticos em relação a um mesmo eixo dos elementos que a constituem.

Notação : S
Expressão analítica:

$$S_x = \int_A y.\ dA \qquad\qquad S_y = \int_A x.\ dA$$

OBSERVAÇÕES:

1. unidade: cm^3, m^3, ...

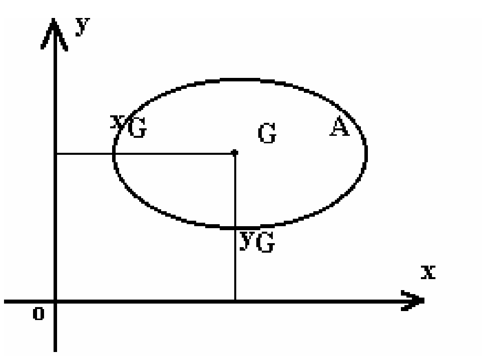
2. sinal : O momento estático pode admitir sinais positivos ou negativos, dependendo do sinal da ordenada envolvida.

3. O momento estático de uma superfície é nulo em relação à qualquer eixo que passe pelo centro de gravidade desta superfície.

B. DETERMINAÇÃO DO BARICENTRO DE SUPERFÍCIE

A utilização dos conceitos de momento estático se dá no cálculo da posição do centro de gravidade de figuras planas.

Seja:
G - baricentro da superfície com coordenadas à determinar (x_G; y_G)



por definição:

$$S_x = \int_A y.\ dA$$

se o baricentro da superfície fosse conhecido poderíamos calcular o momento estático desta superfície pela definição:

$$S_x = y_G \cdot A \qquad \therefore \qquad y_G = \frac{S_x}{A} \qquad \text{ou}$$

como A (área total) pode ser calculado pela soma dos elementos de área que a constituem:

$$A = \int_A dA$$ então :

$$y_G = \frac{\int_A y.\, dA}{\int_A dA}$$

análogamente:

$$x_G = \frac{\int_A x.\, dA}{\int_A dA}$$

Estas expressões nos permitem determinar as coordenadas do centro de gravidade de qualquer seção desde que se conheça um elemento dA representativo da superfície toda.

São chamadas genéricamente de **"teorema dos momentos estáticos".**

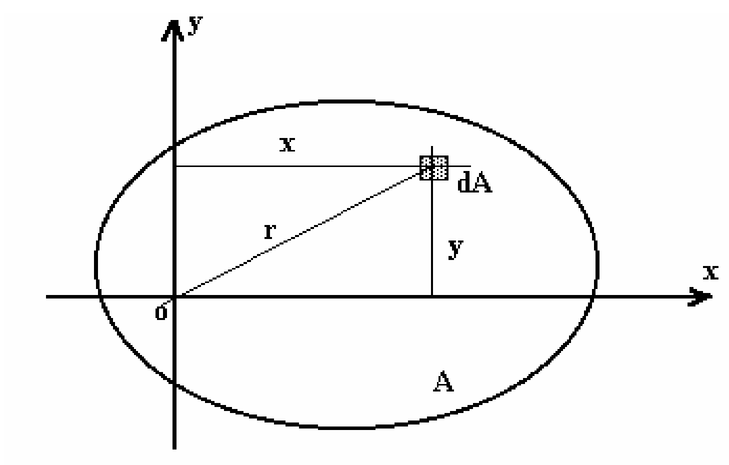
Nos casos mais comuns, quando a superfície em estudo for a seção transversal de um elemento estrutural, normalmente seções constituidas por elementos de área conhecidos (perfilados), podemos substituir nas equações a integral por seu similar que é o somatório, e as expressões ficam:

$$\boxed{y_G = \frac{\sum_1^n A_i . y_i}{\sum_1^n A_i}} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{x_G = \frac{\sum_1^n A_i . x_i}{\sum_1^n A_i}}$$

OBS: Quando a figura em estudo apresentar eixo de simetria, o seu centro de gravidade estará obrigatóriamente neste eixo.

III. MOMENTOS E PRODUTOS DE INÉRCIA

Podemos definir momentos e produtos de inércia de uma superfície , usando como referencia a mesma superfície de área A referida à um sistema de eixos x,y:



A. MOMENTO DE INÉRCIA AXIAL

Define-se:

"Momento de inércia de um elemento de área em relação a um eixo é o produto da área deste elemento pelo quadrado de sua distância ao eixo considerado."

Notação : j (índice com o nome do eixo)
Expressão analítica:

$j_x = y^2 . dA$ $\qquad$ $j_y = x^2 . dA$

Unidade : cm^4 , m^4, ...
Sinal : sempre positivo

Define-se :

"Momento de inércia de uma superfície em relação a um eixo é a soma dos momentos de inércia em relação ao mesmo eixo dos elementos de área que a constituem."

$$J_x = \int_A y^2 . dA \qquad \text{ou} \qquad J_y = \int_A x^2 . dA$$

OBS: Sendo o momento de inércia axial de uma superfície o somatório de valores sempre positivos, ele só admite valores positivos também.

B. MOMENTO DE INÉRCIA POLAR

Define-se:

"Momento de inércia de um elemento de área em relação a um ponto é o produto da área deste elemento pelo quadrado de sua distância ao ponto considerado."

Notação: j (índice com o nome do ponto)
Expressão analítica:

$j_O = r^2 . dA$

Unidade : cm^4 , m^4 , ...
Sinal: sempre positivo

Define-se:

"Momento de inércia de uma superfície em relação a um ponto é a soma dos momentos de inércia, em relação ao mesmo ponto dos elementos qua a constituem."

$$J_o = \int_A r^2 . dA$$

OBS: Se levarmos em conta o teorema de Pitágoras:

$r^2 = x^2 + y^2$ então:

$$J_o = \int_A (x^2 + y^2).dA = \int_A x^2.dA + \int_A y^2.dA$$

$$\boxed{J_o = J_x + J_y}$$

Conclusão:

O momento de inércia de uma superfície em relação a um ponto é a soma dos momentos de inércia em relação a dois eixos ortogonais que passem pelo ponto considerado.

C. PRODUTO DE INÉRCIA

Define-se:

"O produto de inércia de um elemento de área em relação a um par de eixos é o produto da área deste elemento por suas coordenadas em relação aos eixos considerados."

Notação : j (índice o par de eixos)
Expressão analítica :

$j_{x,y} = x.y.dA$

Sinal: admite sinais positivos e negativos, de acôrdo com o sinal do produto das coordenadas.
Unidade : cm^4,m^4 , ...

Define-se:

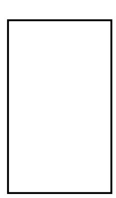
"O produto de inércia de uma superfície é a soma dos produtos de inércia, em relação ao mesmo par de eixos, dos elementos que a constituem."

$$J_{x,y} = \int_A x.y.dA$$

OBS : O produto de inércia de uma superfície por ser o somatório do produto dos elementos que a constituem pode resultar em um valor negativo,positivo ou nulo.

Exemplo:

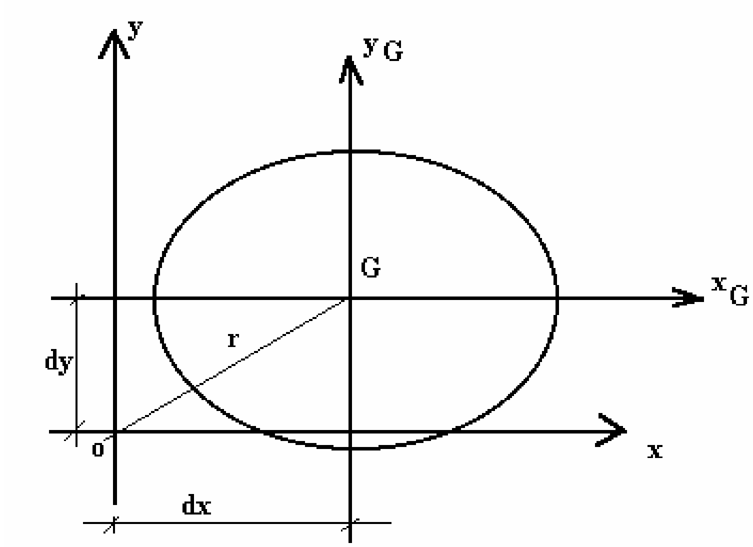
Determine o momento de inércia de um retangulo b x h , em relação ao eixo horizontal coincidente com a base.



$\longrightarrow$ **x**

IV. TRANSLAÇÃO DE EIXOS (TEOREMA DE STEINER)

Este teorema nos permite relacionar momentos e produtos de inércia em relação a eixos quaisquer com momentos e produtos de inércia relativos a eixos baricêntricos, desde que eles sejam paralelos.



FORMULÁRIO:

$$J_x = J_{xG} + A.dy^2$$

$$J_y = J_{yG} + A.dx^2$$

$$J_o = J_G + A\,.\,r^2$$

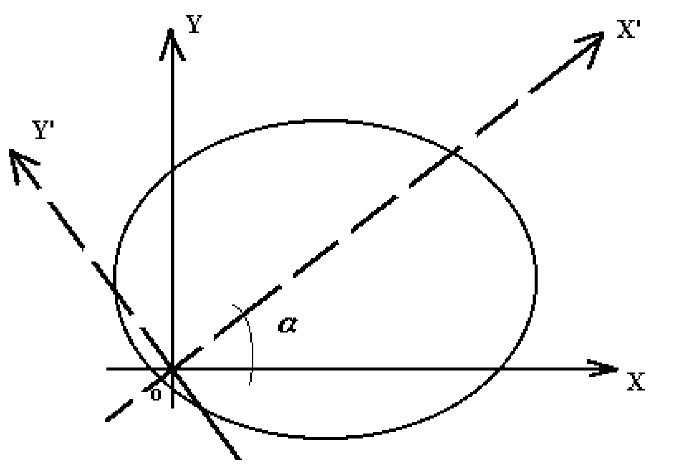
$$J_{x,y} = J_{xG,yG} + A.dx.dy$$

OBS: PARA A UTILIZAÇÃO DO TEOREMA DE STEINER, OS EIXOS BARICENTRICOS DEVEM <u>NECESSÁRIAMENTE</u> ESTAR ENVOLVIDOS NA TRANSLAÇÃO.

V. ROTAÇÃO DE EIXOS

A. SEGUNDO UMA INCLINAÇÃO QUALQUER (α)

O teorema à seguir nos permite calcular momentos e produtos de inércia em relação a eixos deslocados da referência de um angulo α, conforme mostra a figura :



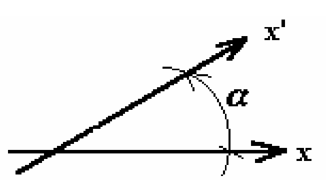
FORMULÁRIO:

$$J_{x'} = J_x . \cos^2 \alpha + J_y . \operatorname{sen}^2\alpha - J_{x,y} . \operatorname{sen} 2\alpha$$

$$J_{y'} = J_y . \cos^2 \alpha + J_x . \operatorname{sen}^2\alpha + J_{x,y} . \operatorname{sen} 2\alpha$$

$$J_{x',y'} = J_{x,y} . \cos 2\alpha + \frac{1}{2} (J_x - J_y).\operatorname{sen} 2\alpha$$

OBS: A convenção adotada para se medir o angulo α segue a convenção adotada no círculo trigonométrico



mede-se o angulo α de x à x' no sentido anti horário.

B. EIXOS E MOMENTOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA

Podemos notar que ao efetuarmos a rotação dos eixos que passam por um ponto 'o', os momentos e produtos variam em função do angulo de rotação α.

Em problemas práticos, normalmente nos interessa a inclinação 'α', em relação à qual os valores do momento de inércia é máximo, para então aproveitarmos integralmente as características geométricas da seção transversal que deve ser adotada.

Para a determinação do máximo de uma função , por exemplo $J_{X'}$, podemos utilizar os conceitos de cálculo diferencial, onde sabemos que uma função é máxima ou mínima no ponto em que sua primeira derivada for nula.

Então: $$\frac{dJ_{x'}}{d\alpha} = 0$$

Efetuando as derivações e com algumas simplificações algébricas chegamos à expressão:

$$\boxed{tg\ 2\alpha = \frac{2.J_{xy}}{J_y - J_x}}$$

Esta expressão nos permite calcular dois valores para o angulo α, que caracterizam a posição dos eixos em relação aos quais o momento de inércia assume valores extremos (máximo e mínimo).

Vamos observar que estes eixos são:

1. Ortogonais entre si.
2. O produto de inércia em relação a este par de eixos é nulo.
3. Na rotação dos eixos a soma dos momentos de inércia é constante.

   $J_X + J_y = J_{X'} + J_{y'}$

Os dois eixos determinados chamam-se de eixos principais de inércia e os momentos correspondentes momentos principais de inércia.

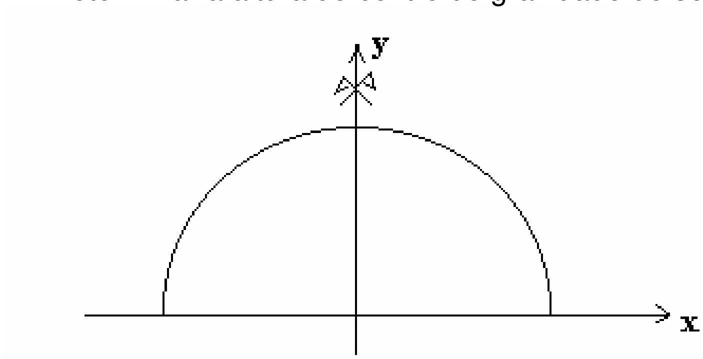
Observações:

1. Se o ponto "o" em tôrno do qual se fez a rotação coincidir com o centro de gravidade da seção, os eixos passarão a ser chamados de principais centrais de inércia e a eles corresponderão os momentos principais centrais de inércia.

2. Se a seção tiver eixo de simetria, este será, **necessáriamente** , um eixo principal central de inércia.

EXERCÍCIOS:

1. Determinar a altura do centro de gravidade do semi-círculo de raio R da figura

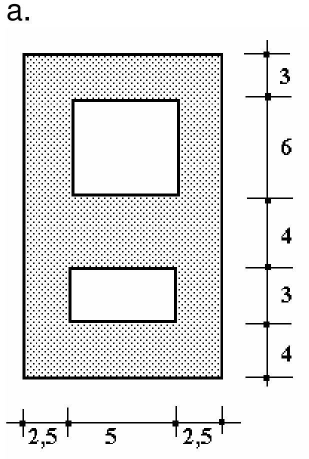


$$y_G = \frac{4.R}{3.\pi}$$

R :

2. Determinar a posição do centro de gravidade das figuras achuriadas abaixo (medidas em cm):

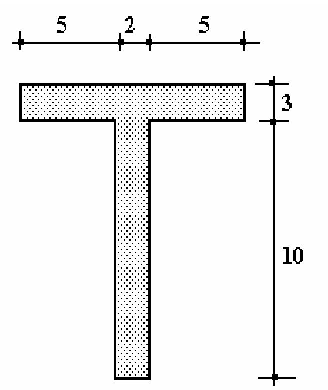
a.



R: $X_G = 5,00$

$Y_G = 9,66$

b.

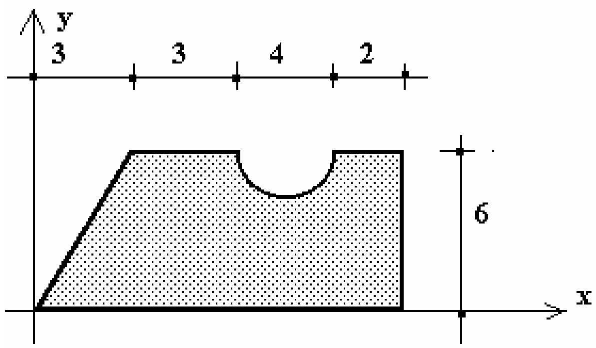


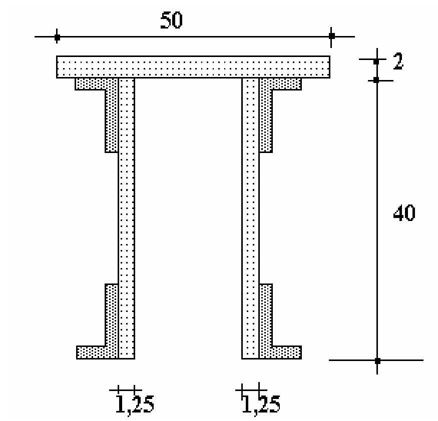
R: $X_G = 6,00$

$Y_G = 9,17$

c.

d.



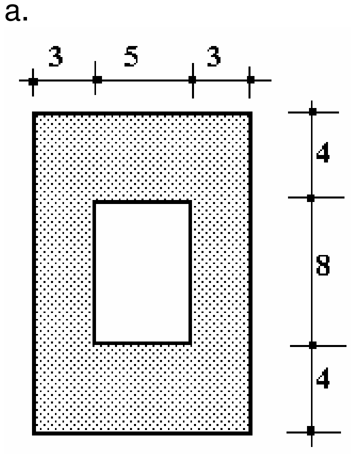


R: $Y_G = 2,60$
$X_G = 6,57$

R: $Y_G = 27$
$X_G = 25$

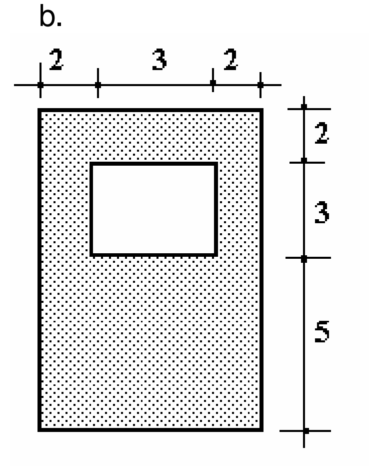
3. Determinar o momento de inércia das figuras em relação aos eixos baricentricos horizontail e vertical.
(medidas em cm)

a.



R: $J_x = 3.541,33 \text{ cm}^4$
$J_y = 1.691,33 \text{ cm}^4$

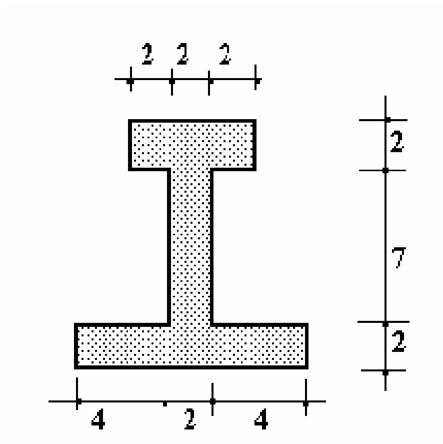
b.

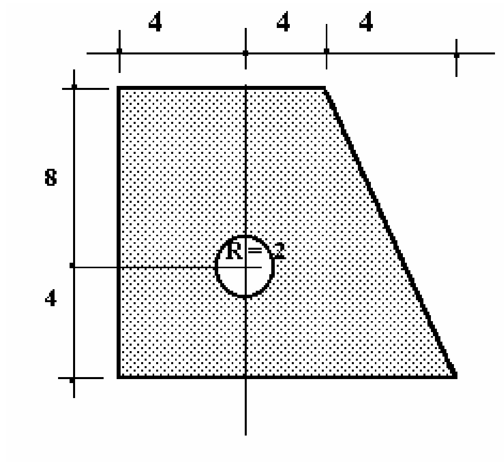


R: $J_x = 553 \text{ cm}^4$
$J_y = 279,08 \text{ cm}^4$

c.

d.



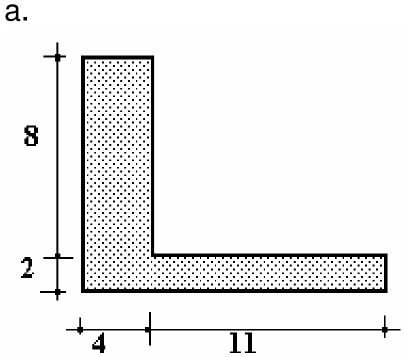


R: J_x = 687,65 cm^4
J_y= 207,33 cm^4

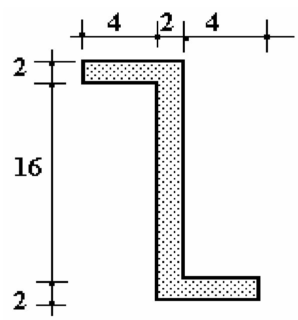
R: J_x = 1.372,29 cm^4
J_y= 1.050,27 cm^4

4. Para as figuras abaixo, determine os seus eixos principais centrais de inércia, bem como os momentos correspondentes (momentos principais centrais de inércia) (medidas em cm).

a.



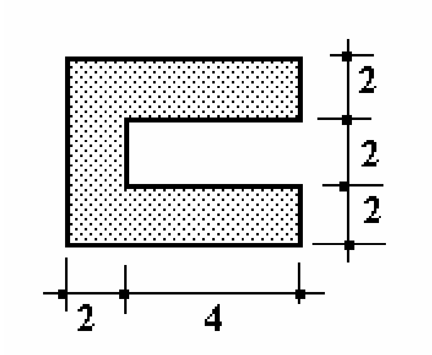
b.



R: $J_{máx}$ = 1.316 cm ^{4}
$J_{mín}$ = 325,5 cm^4

R: $J_{máx}$ = 2.707 cm^4
$J_{mín}$ = 105 cm^4

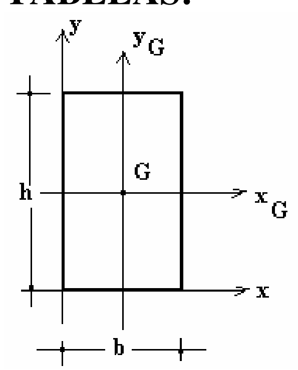
5. Para a figura abaixo determine:
   a. Momentos principais centrais de inércia
   b. Momentos principais de inércia em relação ao ponto O.



R: a. $J_{máx}$ = 105,33 cm^4 $J_{mín}$ = 87,05 cm^4

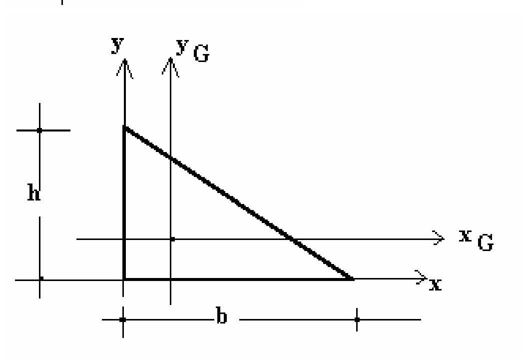
b. $J_{máx}$ = 142,33 cm^4 $J_{mín}$ = 91,70 cm^4

TABELAS:



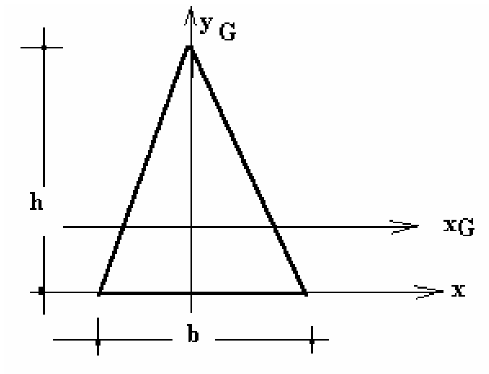
$$J_x = \frac{b.h^3}{3} \qquad J_y = \frac{h.b^3}{3}$$

$$J_{xG} = \frac{b.h^3}{12} \qquad J_{yG} = \frac{h.b^3}{12}$$



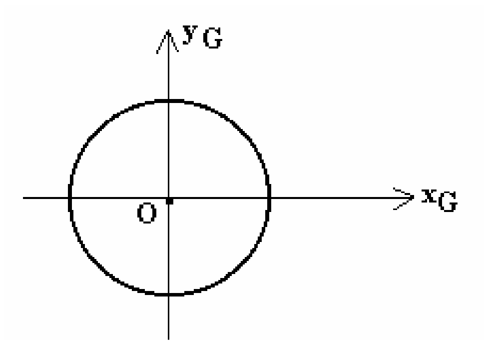
$$J_x = \frac{b.h^3}{12} \qquad J_y = \frac{h.b^3}{12}$$

$$J_{xG} = \frac{b.h^3}{36} \qquad J_{yG} = \frac{h.b^3}{36}$$



$$J_x = \frac{b.h^3}{12}$$

$$J_{xG} = \frac{b.h^3}{36} \qquad J_{yG} = \frac{h.b^3}{48}$$



$$J_x = J_y = \frac{\pi.R^4}{4}$$