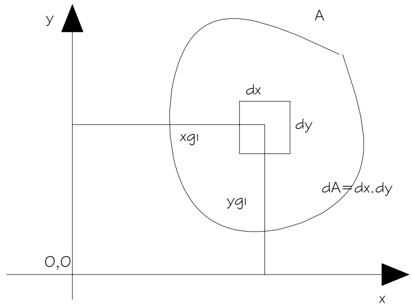
Capítulo II - GEOMETRIA DE MASSAS

II.1 Baricentro ou centro de gravidade de figuras planas



Seja a figura plana qualquer representada na figura acima, posicionada em relacção a um par de eixos de referência (X e Y). Nela define-se o seu baricentro, de coordenadas (x;y):

$$x_g = \frac{M_{sy}}{A} \text{ e } y_g = \frac{M_{sx}}{A}$$

Da definição acima, pode-se concluir, qualquer que seja a figura plana:

$$M_{sy} = \int x d_A = x_g.A \text{ e } M_{sx} = \int y d_A = y_g.A$$

Em que:

G é baricentro ou centro de gravidade

X_G e Y_G são eixos baricentricos

M_{sx} e M_{sy} são momentos estáticos

A é a área da figura plana

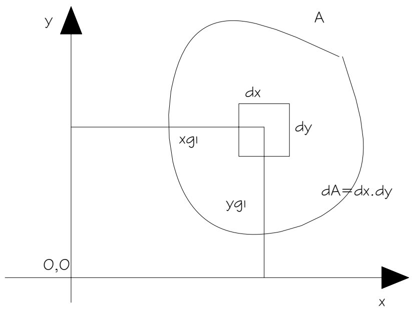
Se a figura plana for composta por diversas figuras básicas, os resultados dos momentos estáticos são a soma algébrica dos momentos das figuras componentes, bem como a área total da figura composta é a soma das áreas das figuras componentes. Portanto, para qualquer figura plana, o cálculo de G=(xg;yg), será:

$$x_g = \frac{\sum M_{syi}}{\sum A_i} \; e \; y_g = \frac{\sum M_{sxi}}{\sum A_i}$$

O momento estático em relação a um determinado eixo pode ser positivo, negativo ou nulo se o centro de gravidade da área em que estão está sobre um eixo coordenado, o momento estático em relação a esse eixo é nulo; por outras, os momentos estáticos relativos a quaisquer eixos centrais (eixos que passam pelo centro de gravidade) são nulos.

II.2 Momento de inércia ou momento de Segunda ordem

Seja uma figura plana qualquer posicionada em relação a um par de eixos de referência.



Define-se:

$$dI_x = y^2 dA \; e \; dI_y = x^2 dA$$

Considerando momento de Segunda ordem, momento de primeira ordem é o estático.

Aplicando-se as definiçoes acima para todos os dA, e somando-os temos:

$$I_x = \int y^2 dA \; e \; I_y = \int x^2 dA$$

Considerações:

- Apesar de ser usado um par de eixos de referência (X e Y), o cálculo do momento de inércia (I_{eixo}) é feito em relação a cada um deles separadamente, podendo os eixos serem quaisquer ou baricentricos.
- De acordo com a distribuição da área da figura plana ao redor do eixo de referência, o momento de inércia sempre resultará um número positivo.
- Se, o eixo de referência for um eixo de simetria, o eixo será baricentrico. O inverso não é verdadeiro.
- Á medida que o eixo de referência se afasta do baricentro da figura plana, o resultado do momento de inércia, em relação ao eixo de referência aumenta.

II.3 TEOREMA DE STEINER

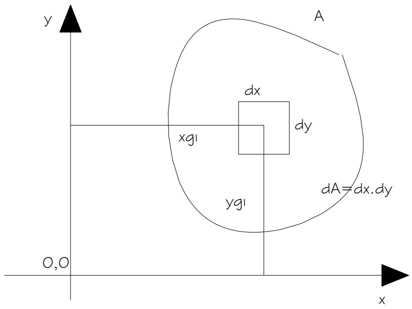
Teorema da translação de eixos ou teorema dos eixos paralelos

O momento de Inércia de uma figura plana, em relação a um eixo qualquer, é igual a soma do momento de inércia da figura, em relação ao seu eixo baricentrico paralelo ao eixo qualquer, com o produto da distância ao quadrado entre eixos, pela área da figura.

$$I_x = I_{xg} + y_g^2.A \;\; e \;\; I_y = I_{yg} + x_g^2.A$$

II.4 Produto de Inércia de uma figura plana

Seja uma figura plana qualquer, posicionada em relação a um par de eixos de referência. Define-se:



$$dI_{xy} = x.y.dA$$

Aplicando-se as definiçoes acima para todos os dA, e somando-os temos:

$$I_{xy} = \iint xydA$$

Consideraçoes:

- O produto de inércia é calculado simultaneamente em relação a um par de eixos de referência.
- De acordo com a distribuição da área da figura plana ao redor dos eixos de referência, o produto de inércia poderá resultar em um número positivo, negativo ou nulo.
- O teoroma de Steiner também é válido para o produto de inércia.
- Se, pelo menos um eixo de referência for de simetria, o produto de inércia resultará nulo.
- O resultado do produto de inércia de uma figura composta, em relação a um par de eixos, é igual à soma dos produtos de inércia das figuras planas, componentes da figura composta, em relação ao mesmo par de eixos.

Teorema de Steiner aplicado ao produto de inércia

Admitindo a figura plana acima posicionada em relação aos eixos de referência (X e Y),pode-se definir seu produto de inércia, de coordenedas (x;y), como sendo que, obedece simultaneamente a duas condiçoes:

$$I_{xy} = I_{x_g y_g} + A.(x.y) \ \ e \ \ I_{xy} = I_{x_g y_g} - A.(x.y)$$

Da definição acima, pode-se concluir, qualquer que seja a figura plana:

$$I_{xy} = I_{x_g y_g} + A.(x_g.y_g)$$

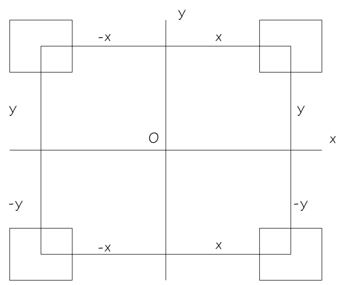
Se a figura plana for composta por diversas figuras básicas, o resultado do produto de inércia será a soma algébrica dos produtos de inércia das figuras componentes:

$$I_{xy} = I_{xy_1} + I_{xy_2} + I_{xy_3} + \ldots + I_{xy_n}$$

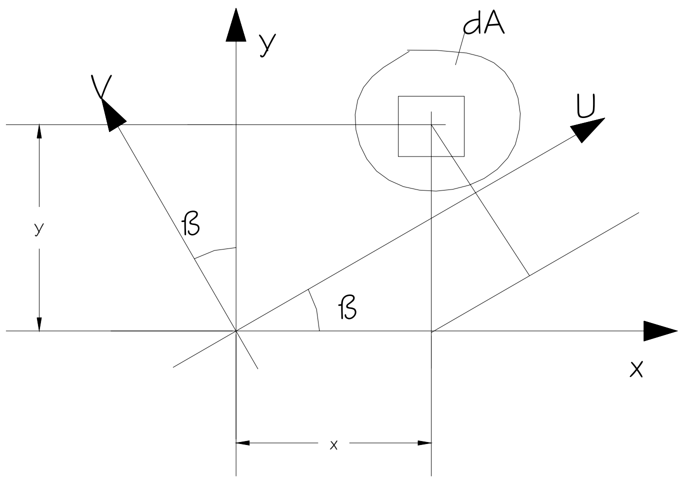
Referência de Sinais para Produtos de inércia:

$$1° \text{ e } 3° \text{ quadrantes - } I_{xy} > 0$$
$$2° \text{ e } 4° \text{ quadrantes - } I_{xy} < 0$$

Veja no desenho esquamático abaixo, notar a posição dos pontos (x;y) em relação a origem do sistema de eixos.



II.5 Transposição angular de eixos de inércia



O problema transposição angular de eixos de inércia consiste em conhecidos os momentos e produto de inércia duma área, A, em relação a um sistema de eixos (x_g e y_g), calcular os momentos e produto de inércia em relação a um outro sistema de eixo U e V, obtidos por meio duma rotação φ relativamente ao sistema inicial.

$$I_U = \int V^2 dA; I_V = \int U^2 dA; I_{UV} = \int UV dA$$

$$I_U=\{(I_{xg}+I_{yg})/2\}+\{[(I_{xg}-I_{yg}).\cos 2\varphi]/2\}-I_{xgyg}.\mathrm{sen}2\varphi$$

$$I_V=\{(I_{xg}+I_{yg})/2\}-\{[(I_{xg}-I_{yg}).\cos 2\varphi]/2\}+I_{xgyg}.\mathrm{sen}2\varphi$$

$$I_U+I_V=I_{xg}+I_{yg}=I_\delta$$

Vê-se que o somatório dos momentos de inércia é independente do ângulo φ e por conseguinte invariável perante a rotação do sistema de coordenadas.

II.6 Momentos e eixos principais de inércia

Designa-se por <u>momentos principais de inércia</u> os valores máximo e mínimo que o momento de inércia num certo ponto toma ao variar a posição angular do sistema de coordenadas que tem a sua origem nesse ponto. Os eixos para os quais os momentos de inércia alcançam os seus valores extremos chamam-se <u>Eixos principais de inércia</u>. Se a origem daquele sistema de coordenadas for o centro de gravidade da superfície, os momentos principais de inércia designam-se <u>momentos principais centrais de inércia (MPCI)</u> e os eixos correspondentes por <u>eixos principais centrais de inércia</u>.

Atendendo à sua definição a posição dos eixos principais de inércia pode determinar-se atravês da derivada de I_U ou I_V em relação a φ. Os eixos principais de inércia correspondem aos valores de $\varphi = \varphi_0$ para os quais a derivada se anula.

$$dI_U/d\varphi=0;\ -(I_{xg}-I_{yg})\text{sen}2\varphi-2I_{xgyg}\cos2\varphi=0$$

$$tg2\square=\frac{2I_{xy}}{I_y-I_x} \quad \text{– equação da posição dos eixos}$$

$$I_{max,min}=\frac{I_{xg}+I_{yg}}{2}\pm\frac{\sqrt{((I_{xg}-I_{yg})^2+4I_{xgyg}^2)}}{2}$$

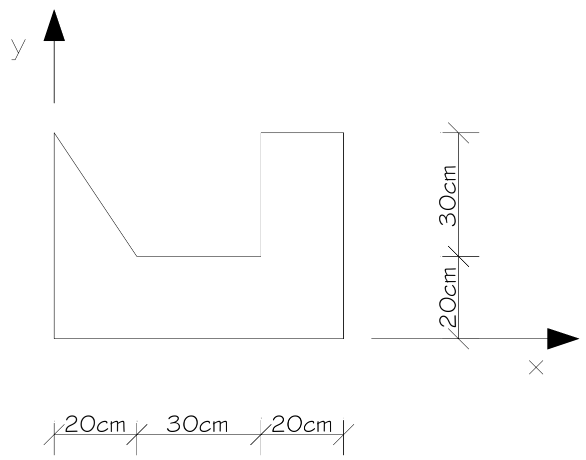
$$I_{xg}+I_{yg}=I_{max}+I_{min}$$

<u>EXERCÍCIOS RESOLVIDOS</u>

Para as figuras planas compostas abaixo representadas, determine:

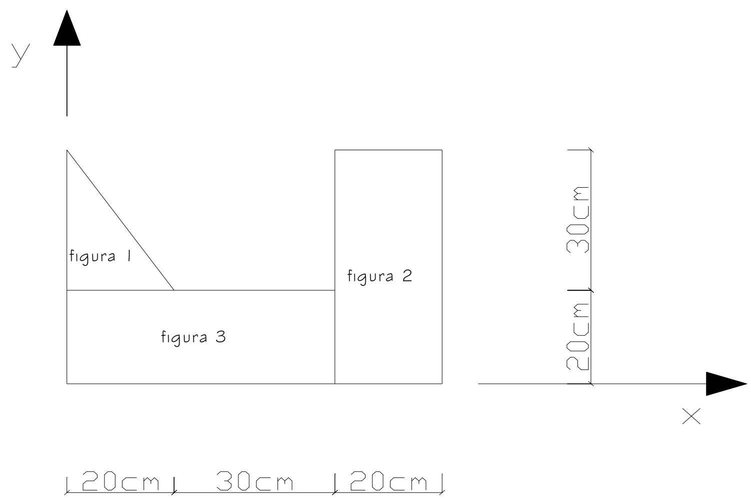
a) As coordenadas do centro de gravidade;
b) Os momentos centrais de inércia;
c) O produto de inércia;
d) Os momentos principais e centrais de inércia;
e) A posição dos eixos principais e centrais de inércia e o seu respectivo traçado.

1.



Resolução:

- Divisão da figura composta em figuras elementares e básicas:



- Construção da tabela

	X_{gi}	Y_{gi}	A_i	$X_{gi}xA_i$	$Y_{gi}xA_i$
Figura 1 (Rectângulo cheio)	42,00	47,50	900,00	37.800,00	42.750,00
Figura 2 (Rectângulo cheio)	22,00	35,00	1.400,00	30.800,00	49.000,00
Figura 3 (triângulo oco)	18,67	65,00	150,00	2.800,50	9.750,00
Figura 4 (Cantoneira L120x80x12)	8,00	2,03	22,70	181,60	46,08
			2.172,70	65.981,10	82.046,08

Passo 1: Coordenadas do centro de gravidade da figura;

$$X_G = \frac{\sum X_{gi} x A_i}{\sum A_i} = \frac{4.5332,22}{678,87}$$

$$X_G = 6,38 \text{ cm}$$

$$Y_G = \frac{\sum Y_{gi} x A_i}{\sum A_i} = \frac{33.846,7}{678,87}$$

$$Y_G = -5,67 \text{ cm}$$

Passo2: Momentos de inércia em relação aos eixos de referência (x e Y);

$$I_{x1} = \frac{40 \times 15^3}{3} = 45.000,00 \text{ cm}^4$$

$$I_{X2} = 0,055 \times 15^4 + (\;\; 8,63)^2 \times 176,71 = 15.945,19 \text{ cm}^4$$

$$I_{X3} = \frac{\square \times 15^4}{16} = 9.940,20 \text{ cm}^4$$

$$I_{X4} = \frac{15 \times 10^3}{12} = 1.250,00 \text{ cm}^4$$

$$I_{X5} = 4,14 + 1,08^2 \times 3,87 = 8,65 \text{cm}^4$$

$$I_X = I_{X1} \;\; I_{X2} + I_{X3} + I_{X4} + I_{X5} = 40.253,66 \text{cm}^4$$

$$I_{y1} = \frac{15 \times 40^3}{3} = 320.000 \text{ cm}^4$$

$$I_{y2} = 0,055 \times 15^4 + (\;\; 33,63)^2 \times 176,71 = 202.639,30 \text{ cm}^4$$

$$I_{y3} = \frac{\square \times 15^4}{16} = 9.940,20 \text{ cm}^4$$

$$Iy_4 = \frac{15 \times 10^3}{36} + 10^2 \times 75 = 8.437,50 \text{ cm}^4$$

$$I_{Y5} = 4,14 + 38,92^2 \times 3,87 = 5.866,29 \text{cm}^4$$

$$I_Y = I_{Y1} \;\; I_{Y2} + I_{Y3} + I_{Y4} + I_{Y5} = 141.604,69 \text{cm}^4$$

Passo2: Momentos de inércia baricêntricos

$$I_{XG} = I_X - Y_G^{\;2} \times AT = 40.253,66 - (\;\; 5,66)^2 \times 678,87 = 18.505,65 \text{ cm}^4$$

$$I_{XG} = 18.505,65 \text{ cm}^4$$

$$I_{YG} = I_Y - \;\; X_G^{\;2} \times A_T = 141.604,69 \;\;\; (\;\; 6,38)^2 \times 678,87 = 113.971,69 \text{ cm}^4$$

$$I_{YG} = 113.971,69 \text{ cm}^4$$

Passo3: Produtos de inércia em relação aos eixos de referência;

$$I_{XY1}=\frac{40^2\times 15^2}{4}=90.000\ cm^4$$

$$I_{XY2}=\ 0.0165\times 15^4+(\ \ 33,63)\times(\ \ 8,63)\times 176,71=50.450,68\ cm^4$$

$$I_{XY3}=\ \frac{15^4}{8}=\ \ 6.328,13\ cm^4 \qquad I_{XY4}=\frac{15^2\times 10^2}{72}+10\times 3,33\times 75=2.812,25cm^4$$

$$I_{XY5}=\ \ 2,37+(\ \ 38,92)\times 1,08\times 3,87=\ \ 165,04cm^4$$

$$I_{XY}=I_{XY1}\ \ \ I_{XY2}+I_{XY3}+I_{XY4}+I_{XY5}$$

$$I_{XY}=90.000-50.450,68+(-6.328,125)+2.812,25+(-165,04)=35.837,08\ cm^4$$

$$I_{XY}=35.868,40\ cm^4$$

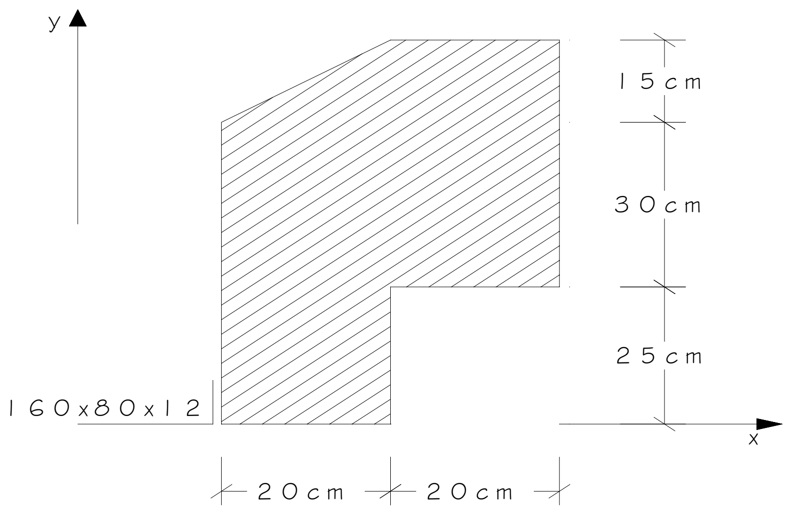
Passo4: Produtos de inércia baricêntricos;

$$I_{XYG}=I_{XY}-X_G\times Y_G\times A_T=35.868,40-(-6,38)\times(-5,66)\times 678,87$$
$$I_{YG}=11.353,86\ cm^4$$

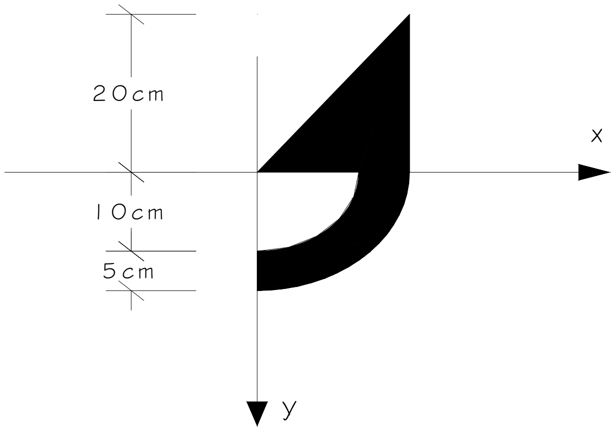
Passo5: Momentos principais e centrais de inércia (MPCI);

$$Imax,min=\frac{IXG+IYG}{2}\pm 0,5\times\sqrt{(I_{XG}-I_{YG})^2+4\times I_{XGYG}{}^2}$$
$$Imax,min=\frac{18.505,65+113.971,69}{2}\pm 0,5\times\sqrt{(18.505,65\ \ \ 113.971,69)^2+4\times(11.353,86)^2}$$
$$I_{max}=115.303,44\ cm^4$$
$$I_{min}=17.173,90\ cm^4$$

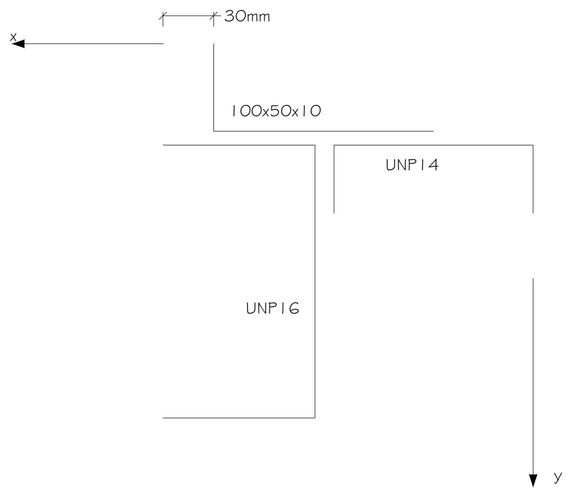
2.



3.



4.



<u>EXERCÍCIOS PROPOSTOS</u>

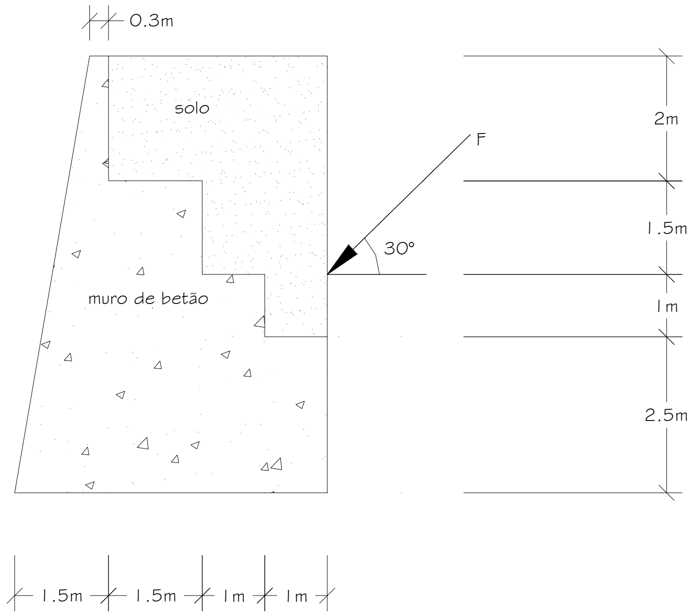
1. Dado o muro de suporte em betão, calcular:
   a) A força que contraria a acção do sistema de forças constituído pelo peso do muro, solo e o impulso F e o respectivo ponto de aplicação (método gráfico);
   b) As coordenadas do centro de gravidade;
   c) Os MPCI do muro e posição dos respectivos eixos e traçar na figura.

   Dados: peso específico do betão: $24 kN/m^3$

   Peso específico do solo: $16 kN/m^3$

   Impulso de terras $F=22.64 kN/m$

   Largura do muro: 1.5m



2. Para as figuras compostas planas abaixo, determine:
    a) momentos principais de inércia;
    b) A direcção dos eixos principais centrais de inércia, e traça-los na figura:

Figura 1

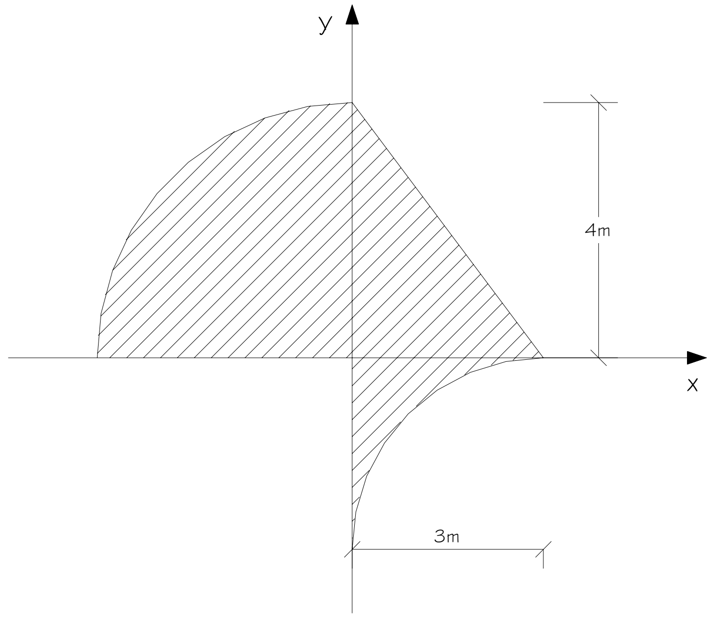
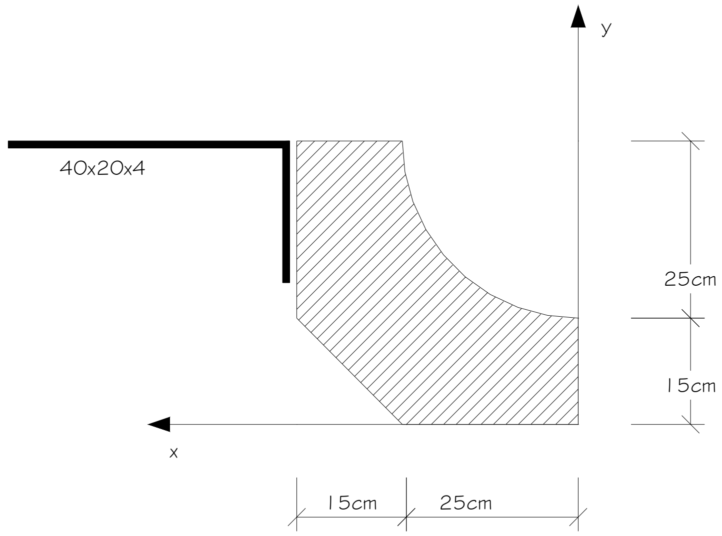
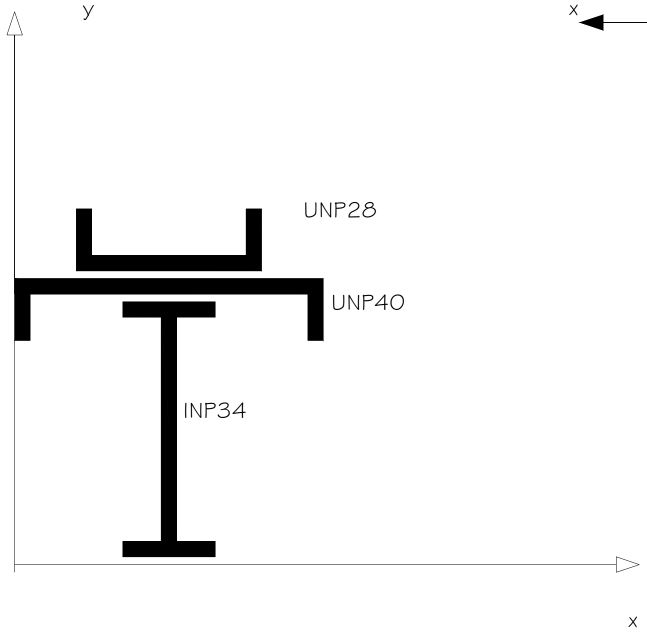


Figura2



Figuras 3a) e b)



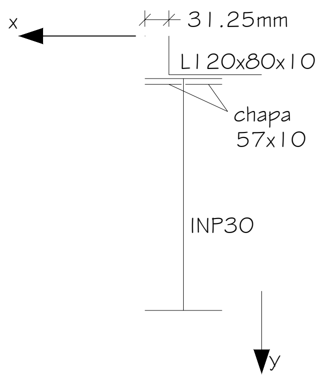


Figura 4

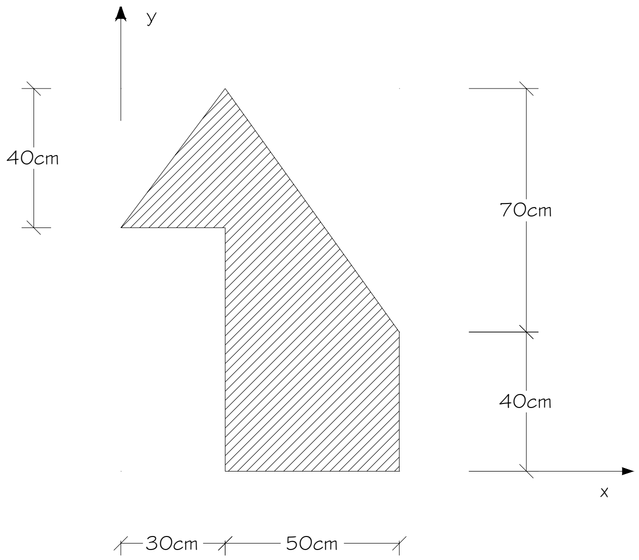


Figura5

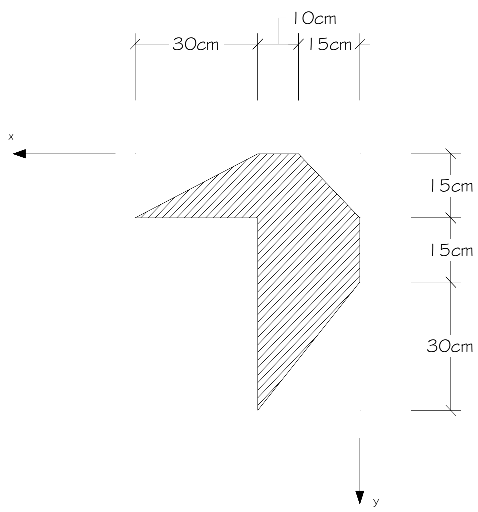


Figura6

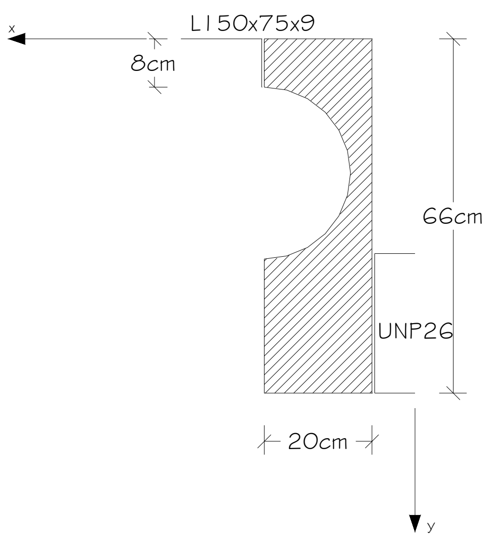
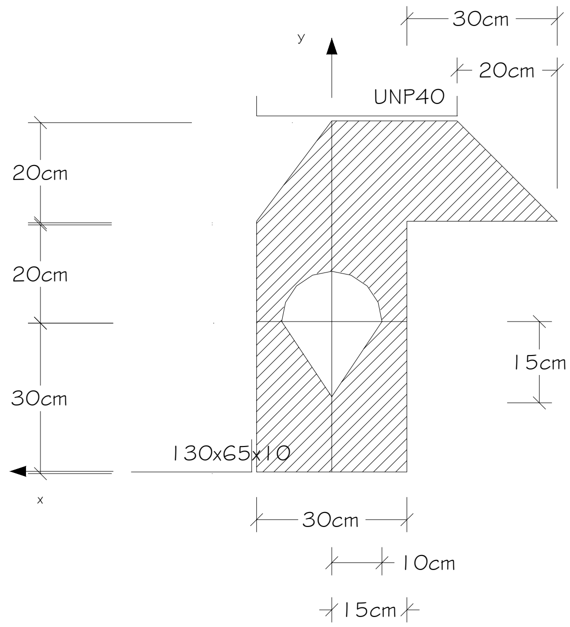


Figura7


30cm
20cm
y
UNP40
20cm
20cm
15cm
30cm
130x65x10
x
30cm
10cm
15cm