

Engenharia da Computação

4º / 5º Semestre

RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS – APOSTILA 01

Prof Daniel Hasse

Características Geométricas de Figuras Planas

SÃO JOSÉ DOS CAMPOS, SP

5 CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DE FIGURAS PLANAS

O dimensionamento e a verificação da capacidade resistente de barras, como de qualquer elemento estrutural dependem de grandezas chamadas tensões, as quais se distribuem ao longo das seções transversais de um corpo. Daí vem a necessidade de se conhecer claramente as características ou propriedades das figuras geométricas que formam essas seções transversais.

A Figura abaixo ilustra uma barra reta de seção transversal constante, chamada barra prismática. O lado da barra que contém o comprimento (L) e a altura (h) é chamado de seção longitudinal e o que contém a largura (b) e a altura (h) é chamado de seção transversal.

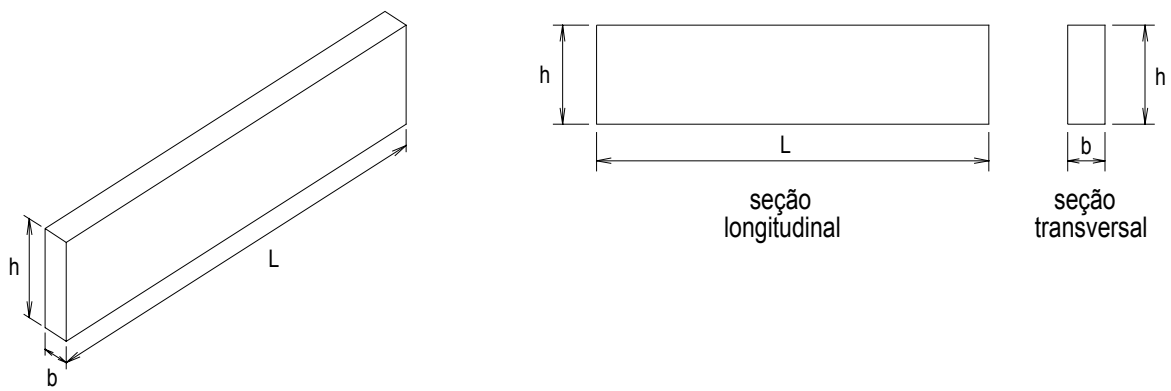


Figura 5.1 Barra prismática

As principais propriedades geométricas de figuras planas são:

Área (A)

Momento de Inércia (I)

Momento estático (M)

Módulo de resistência (W)

Centro de gravidade (CG)

Raio de giração (i)

5.1 Área

A área de uma figura plana é a superfície limitada pelo seu contorno. Para contornos complexos, a área pode ser obtida aproximando-se a forma real pela justaposição de formas geométricas de área conhecida (retângulos, triângulos, etc).

A unidade de área é $[L]^2$ (unidade de comprimento ao quadrado).

A área é utilizada para a determinação das tensões normais (tração e compressão) e das tensões de transversais ou de corte.

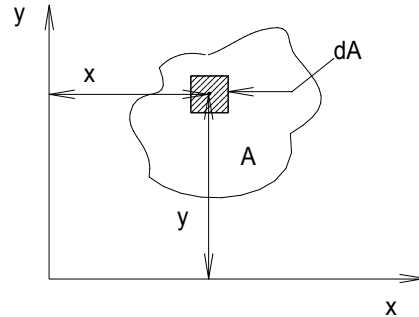
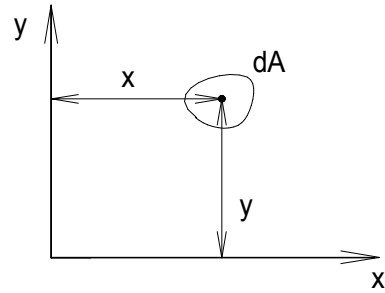
5.2 Momento Estático

Analogamente à definição de momento de uma força em relação a um eixo qualquer, defini-se Momento Estático (M) de um elemento de superfície como o produto da área do elemento pela distância que o separa de um eixo de referência.

$$M_x = y \cdot dA \quad \text{e} \quad M_y = x \cdot dA$$

Momento Estático de uma superfície plana é definido como a somatória de todos os momentos estáticos dos elementos de superfície que formam a superfície total.

$$M_x = \int_A y dA \quad \text{e} \quad M_y = \int_A x dA$$

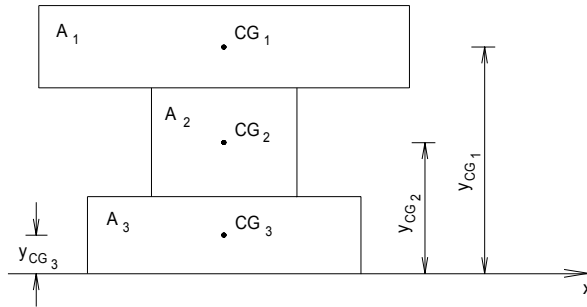


A unidade do Momento Estático é área é $[L] \times [L]^2 = [L]^3$.

O Momento Estático é utilizado para a determinação das tensões transversais que ocorrem em uma peça submetida à flexão.

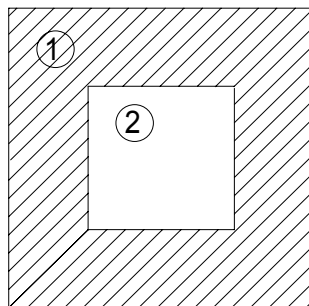
O Momento Estático de uma superfície composta por várias figuras conhecidas é a somatória dos Momentos Estáticos de cada figura.

Exemplo: determinar o Momento Estático das figuras abaixo



$$\begin{aligned} M_{1,x} &= y_{CG1} \cdot A_1 \\ M_{2,x} &= y_{CG2} \cdot A_2 \\ M_{3,x} &= y_{CG3} \cdot A_3 \\ \hline M_x &= M_{1,x} + M_{2,x} + M_{3,x} \end{aligned}$$

Elemento vazado



$$M_x = M_{1,x} - M_{2,x}$$

5.3 Centro de Gravidade

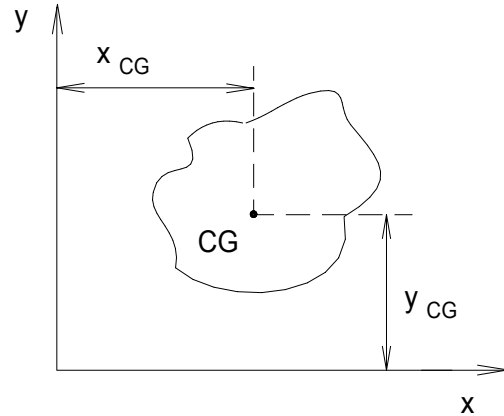
Se um corpo for dividido em partículas mínimas, estas ficam sujeitas à ação da gravidade, isto é, em todas estas partículas está aplicada uma força vertical atuando de cima para baixo. A resultante de todas estas forças verticais e paralelas entre si, constitui o peso do corpo.

Mesmo mudando a posição do corpo aplicando-lhe uma rotação, ele permanecerá sempre sujeito à ação da gravidade. Isto significa que as forças verticais girarão em relação ao corpo, mas continuaram sempre paralelas e verticais. O ponto onde se cruzam as resultantes dessas forças paralelas, qualquer que seja a posição do corpo, chama-se Centro de Gravidade (CG).

Portanto, atração exercida pela Terra sobre um corpo rígido pode ser representada por uma única força P . Esta força, chamada peso do corpo, é aplicada no seu baricentro, ou centro de gravidade (CG). O centro de gravidade pode localizar-se dentro ou fora da superfície.

O centro de gravidade de uma superfície plana é, por definição, o ponto de coordenadas:

$$x_{CG} = \frac{M_y}{A} = \frac{1}{A} \int_A x \cdot dA$$



$$y_{CG} = \frac{M_x}{A} = \frac{1}{A} \int_A y \cdot dA$$

onde:

x_{CG} = distância do CG da figura até o eixo y escolhido arbitrariamente;

y_{CG} = distância do CG da figura até o eixo x escolhido arbitrariamente;

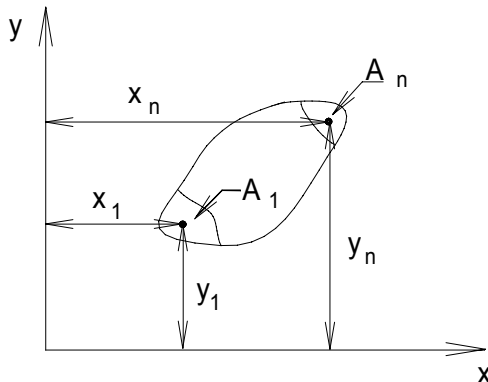
M_x = momento estático da figura em relação ao eixo x ;

M_y = momento estático da figura em relação ao eixo y ;

A = área da Figura.

Centro de gravidade de áreas compostas por várias figuras

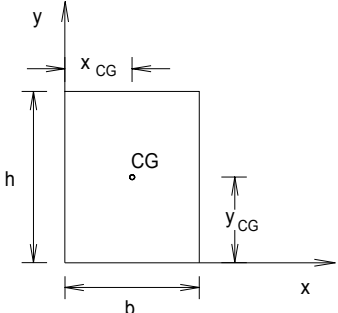
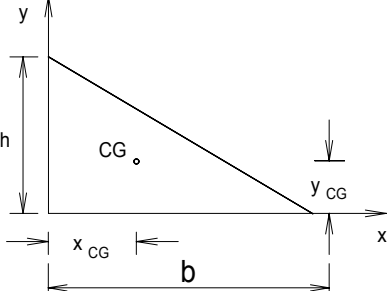
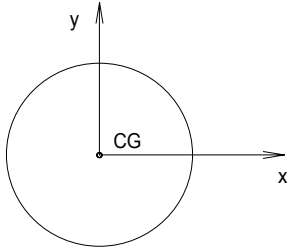
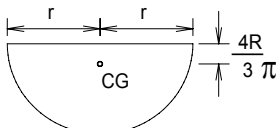
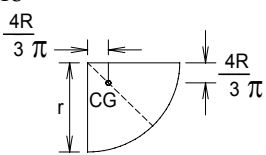
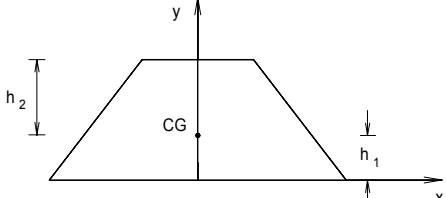
O centro de gravidade de uma superfície composta por várias figuras, é expresso por:



$$x_{CG} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

$$y_{CG} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

Centro de gravidade de algumas figuras planas

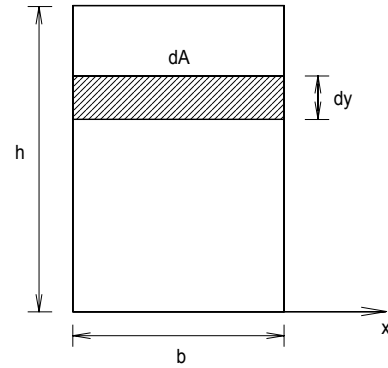
<p>retângulo</p> 	$x_{CG} = \frac{b}{2}$ $y_{CG} = \frac{h}{2}$
<p>triângulo</p> 	$x_{CG} = \frac{b}{3}$ $y_{CG} = \frac{h}{3}$
<p>círculo</p> 	$x_{CG} = 0$ $y_{CG} = 0$
<p>Semicírculo</p> 	$y_{CG} = \frac{4r}{3\pi}$
<p>¼ de círculo</p> 	$x_{CG} = \frac{4r}{3\pi}$ $y_{CG} = \frac{4r}{3\pi}$
<p>trapézio</p> 	$h_1 = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}$ $h_2 = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a+b}{a+b}$

Exemplos

1. Determinar o centro de gravidade CG do retângulo em relação ao eixo x que passa pela sua base.

Área do retângulo $A = b \cdot h$

O Momento Estático do retângulo em relação ao eixo x é somatória do produto de cada elemento de área dA pela sua distância em relação ao eixo x.



Momento Estático

$$dA = b \cdot dy$$

$$M_x = \int_A y \cdot dA = \int_0^h y \cdot b \cdot dy$$

$$M_x = \left[\frac{b \cdot y^2}{2} \right]_0^h = \frac{b \cdot h^2}{2} - \frac{b \cdot 0}{2} \quad M_x = \frac{b \cdot h^2}{2}$$

Centro de Gravidade

$$y_{CG} = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{b \cdot h^2}{2}}{b \cdot h} = \frac{h}{2}$$

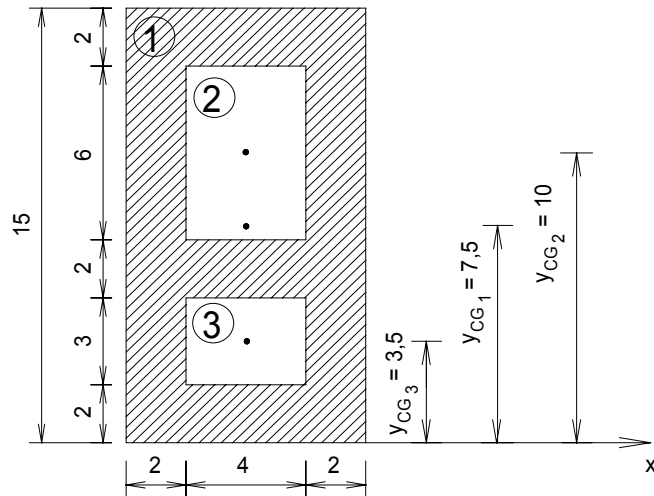
$$y_{CG} = \frac{h}{2}$$

2. Determinar o CG da Figura.
(medidas em centímetros)

$$A = A_1 - A_2 - A_3$$

$$A = (8 \times 15) - (6 \times 4) - (4 \times 3)$$

$$A = 84 \text{ cm}^2$$



$$M_{1,x} = y_{CG1} \cdot A_1 = 7,5 \times (8 \times 15) = 900 \text{ cm}^3$$

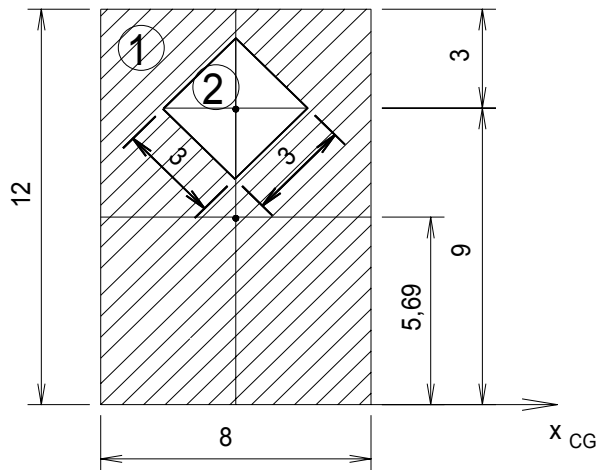
$$M_{2,x} = y_{CG2} \cdot A_2 = 10 \times (6 \times 4) = 240 \text{ cm}^3$$

$$M_{3,x} = y_{CG3} \cdot A_3 = 3,5 \times (4 \times 3) = 42 \text{ cm}^3$$

$$M_x = M_{1,x} - M_{2,x} - M_{3,x} = 900 - 240 - 42 = 618 \text{ cm}^3$$

$$y_{CG} = \frac{M_x}{A} = \frac{618 \text{ cm}^3}{84 \text{ cm}^2} = 7,36 \text{ cm}$$

3. Determinar o centro de gravidade da figura hachurada.



$$A_1 = (12 \times 8) = 96 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = (3 \times 3) = 9 \text{ cm}^2$$

$$A = A_1 - A_2 = 87 \text{ cm}^2$$

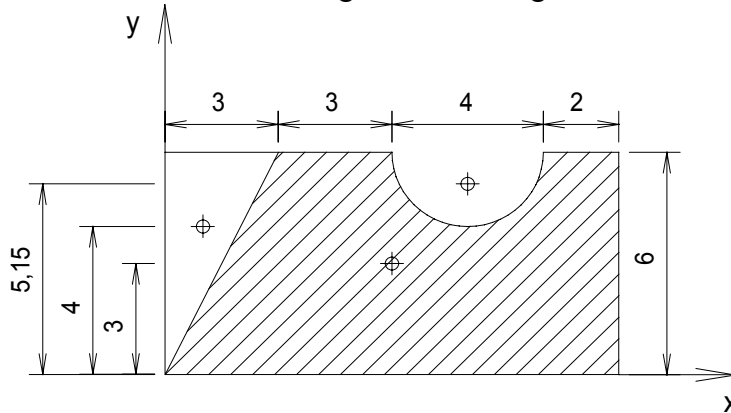
$$M_{1,x} = 6 \times 8 \times 12 = 576 \text{ cm}^3$$

$$M_{2,x} = 9 \times 3 \times 3 = 81 \text{ cm}^3$$

$$M_x = M_{1,x} - M_{2,x} = 495 \text{ cm}^3$$

$$y_{CG} = \frac{M_x}{A} = \frac{576 \text{ cm}^3}{87 \text{ cm}^2} = 5,69 \text{ cm}$$

4. Determinar o centro de gravidade da figura hachurada (medidas em centímetro).



A Figura hachurada pode ser o resultado de um retângulo (12×6) cm do qual foram retirados um triângulo e um semicírculo.

Área da figura

$$A = A_R - A_T - A_{SC}$$

$$A = (12 \times 6) - [0,5 \times (3 \times 6)] - (0,5 \times \pi \times r^2) = 56,72 \text{ cm}^2$$

$$A = 53,72 \text{ cm}^2$$

Momento Estático

$$M_{R,x} = 12 \times 6 \times 3 = 216 \text{ cm}^3$$

$$M_{T,x} = 4 \times 0,5 \times 3 \times 6 = 36 \text{ cm}^3$$

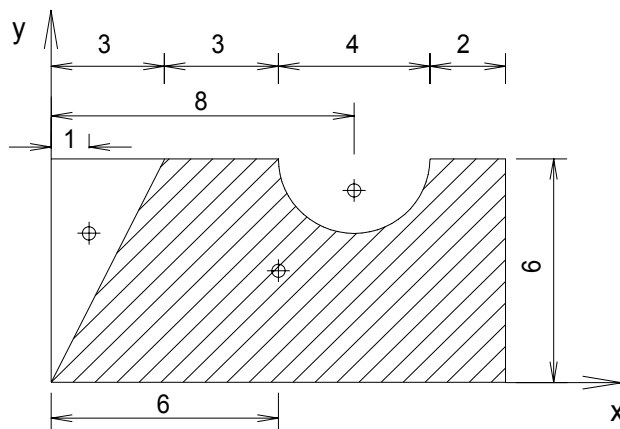
$$M_{SC,x} = 0,5\pi \times 2^2 \left(6 - \frac{4 \times 2}{3\pi} \right) = 32,37 \text{ cm}^3$$

$$M_x = M_{R,x} - M_{T,x} - M_{SC,x} = 147,63 \text{ cm}^3$$

Coordenada y_{CG} do centro de gravidade

$$y_{CG} = \frac{M_x}{A} \quad y_{CG} = \frac{147,63}{56,72} = 2,6 \text{ cm}$$

Analogamente, determina-se a coordenada x_{CG} .



$$M_{R,y} = 6 \times 12 \times 6 = 432 \text{ cm}^3$$

$$M_{T,y} = 1 \times \frac{3 \times 6}{2} = 9 \text{ cm}^3$$

$$M_{SC,y} = 8 \times \frac{\pi \times 2^2}{2} = 50,26 \text{ cm}^3$$

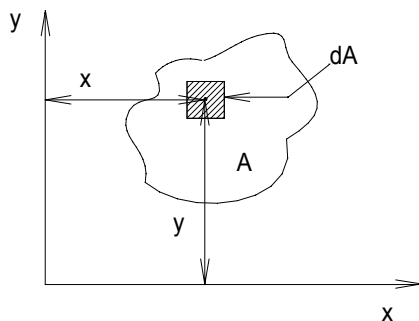
$$M_y = M_{R,y} - M_{T,y} - M_{SC,y} = 372,73 \text{ cm}^3$$

Coordenada x_{CG} do centro de gravidade

$$x_{CG} = \frac{M_y}{A} \quad x_{CG} = \frac{372,73}{56,72} = 6,57 \text{ cm}$$

5.4 Momento de Inércia

O momento de inércia de uma superfície plana em relação a um eixo de referência é definido como sendo a integral de área dos produtos dos elementos de área que compõem a superfície pelas suas respectivas distâncias ao eixo de referência, elevadas ao quadrado.



$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

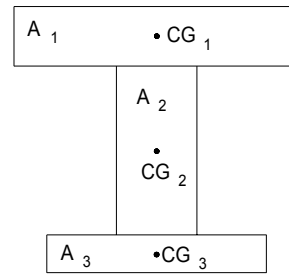
A unidade do momento de inércia é $[L]^2 \times [L]^2 = [L]^4$.

O momento de inércia é uma característica geométrica importantíssima no dimensionamento dos elementos estruturais, pois fornece, em valores numéricos, a resistência da peça. Quanto maior for o momento de inércia da seção transversal de uma peça, maior a sua resistência.

Propriedade:

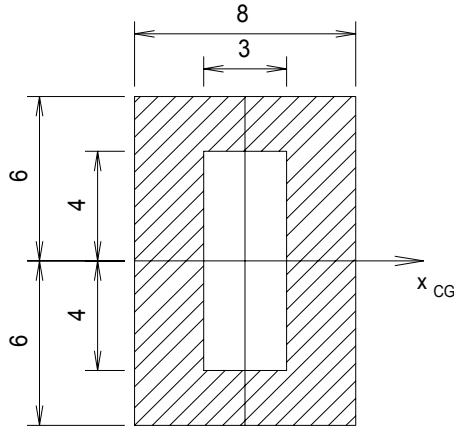
O momento de inércia total de uma superfície é a somatória dos momentos de inércia das figuras que a compõe.

$$I_x = I_{1,x} + I_{2,x} + I_{3,x}$$



Exemplo

Determinar o momento de inércia da superfície hachurada em relação ao eixo x que passa pelo CG . (medidas em centímetros)



$$I_{x_{CG}} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_{x_{CG}} = \frac{1}{12} (8 \times 12^3 - 3 \times 8^3)$$

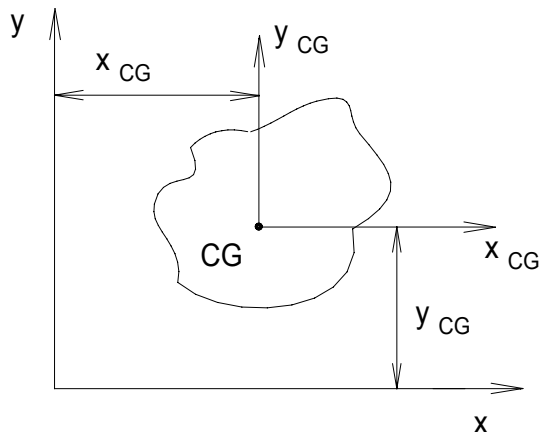
$$I_{x_{CG}} = 1.024 \text{ cm}^4$$

5.5 Translação de eixos

O momento de inércia de uma superfície em relação a um eixo qualquer é igual ao momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo seu centro de gravidade, acrescido do produto da área (A) pelo quadrado da distância que separa os dois eixos.

$$I_x = I_{x_{CG}} + A \cdot y_{CG}^2 \quad I_y = I_{y_{CG}} + A \cdot x_{CG}^2$$

onde:



I_x = momento de inércia da figura em relação ao eixo x .

I_y = momento de inércia da figura em relação ao eixo y .

$I_{x_{CG}}$ = momento de inércia da figura em relação ao eixo x_{CG} que passa pelo CG da figura.

$I_{y_{CG}}$ = momento de inércia da figura em relação ao eixo y_{CG} que passa pelo CG da figura.

x_{CG} = distância do eixo y até o eixo y_{CG} .

y_{CG} = distância do eixo x até o eixo x_{CG} .

O momento de inércia é utilizado para a determinação das tensões normais a que estão sujeitas as peças submetidas à flexão.

As formulações acima podem ser expressas em função do momento estático:

$$M_x = y \cdot A \quad \rightarrow \quad M_x^2 = y^2 \cdot A^2 \quad \rightarrow \quad y^2 = \frac{M_x^2}{A^2}$$

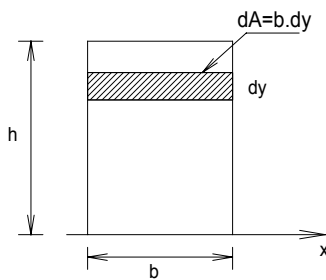
$$I_x = I_{x_{CG}} + A \cdot y_{CG}^2 \quad \rightarrow \quad I_x = I_{x_{CG}} + \frac{M_x^2}{A^2} \cdot A \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} I_x = I_{x_{CG}} + \frac{M_x^2}{A} \\ I_{x_{CG}} = I_x - \frac{M_x^2}{A} \end{cases}$$

Exemplo:

Determinar o momento de inércia do retângulo em relação aos seguintes eixos:

- x , passando pela base inferior.
- x_{CG} , passando pelo CG.

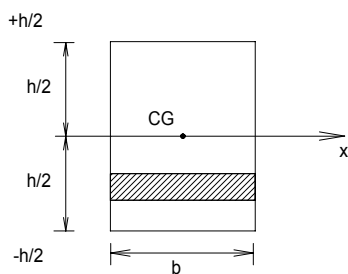
a)



$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_x = \int_0^h y^2 b dy = \left[\frac{b \cdot y^3}{3} \right]_0^h \rightarrow I_x = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

b)



$$I_{x_{CG}} = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \left[\frac{b \cdot h^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2}$$

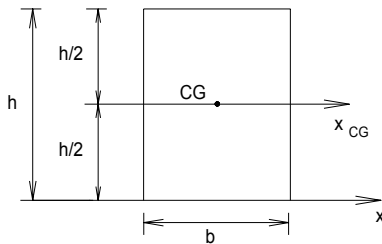
$$I_{x_{CG}} = \frac{b}{3} \cdot \left[\left(\frac{h}{2} \right)^3 - \left(-\frac{h}{2} \right)^3 \right]$$

$$I_{x_{CG}} = \int_A y^2 dA$$

$$I_{x_{CG}} = \frac{b}{3} \cdot \left[\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right]$$

$$I_{x_{CG}} = \frac{b}{3} \cdot \frac{2h^3}{8} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Utilizando a formulação de mudança de eixos



Momento de inércia do retângulo em relação ao seu CG $\rightarrow I_{x,CG} = \frac{b \cdot h^3}{12}$

$$I_x = I_{x_{CG}} + A \cdot y_{CG}^2$$

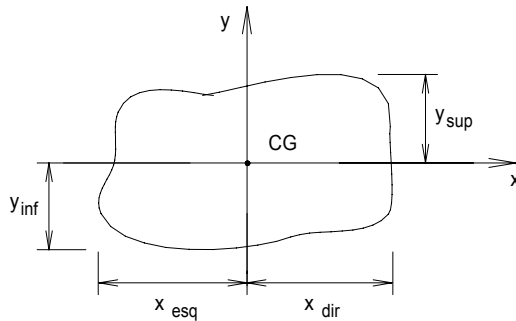
$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} + bh \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} + \frac{b \cdot h^3}{4} = \frac{bh^3 + 3 \cdot bh^3}{12}$$

$$I_x = \frac{4b \cdot h^3}{12} \Rightarrow I_x = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

5.6 Módulo Resistente

Define-se módulo resistente de uma superfície plana em relação aos eixos que contém o CG como sendo a razão entre o momento de inércia relativo ao eixo que passa pelo CG da figura e a distância máxima entre o eixo e a extremidade da seção estudada.



$$W_x = \frac{I_{CG}}{y_{\max}}$$

$$W_y = \frac{I_{CG}}{x_{\max}}$$

onde:

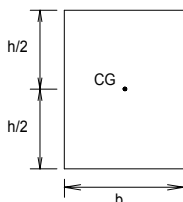
I_{CG} = momento de inércia da peça em relação ao CG da figura

x, y = distância entre o eixo do CG da figura e a extremidade da peça.

A unidade do módulo resistente é $\frac{[L]^4}{[L]} = [L]^3$.

O módulo resistente é utilizado para o dimensionamento de peças submetidas à flexão.

Para o retângulo, tem-se:



$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$A = b \cdot h$$

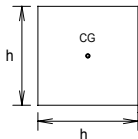
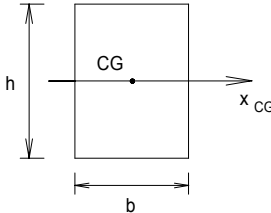
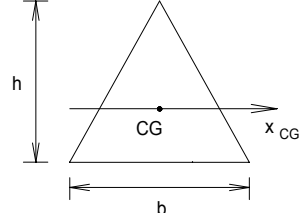
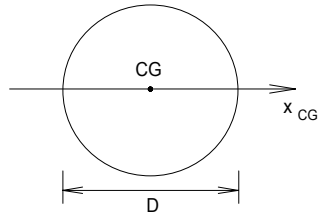
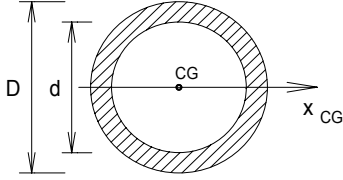
$$W_x = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

5.7 Raio de Giração

Define-se raio de giração como sendo a raiz quadrada da relação entre o momento de inércia e a área da superfície. A unidade do raio de giração é o comprimento. O raio de giração é utilizado para o estudo da flambagem.

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad \sqrt{\frac{cm^4}{cm^2}} = cm$$

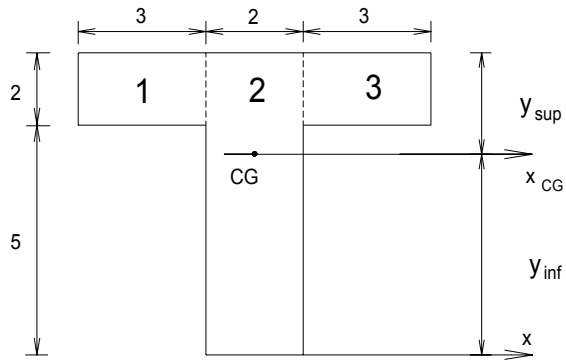
Características Geométricas de algumas figuras conhecidas

Figura	Momento de Inércia	Momento Resistente	Raio de Giração
Quadrado 	$I_x = \frac{h^4}{12}$	$W_x = \frac{h^3}{6}$	$i_x = \frac{h}{\sqrt{12}}$
Retângulo 	$I_{x_{CG}} = \frac{bh^3}{12}$	$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}$	$i_x = \frac{h}{\sqrt{12}}$
Triângulo 	$I_{x_{CG}} = \frac{bh^3}{36}$	$W_x = \frac{b \cdot h^2}{12}$	$i_x = \frac{h \cdot \sqrt{2}}{6}$
Círculo 	$I_{x_{CG}} = \frac{\pi d^4}{64}$	$W_x = \frac{\pi \cdot D^3}{32}$	$i_x = \frac{D}{4}$
Círculo vazio 	$I_{x_{CG}} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$	$W_x = \frac{\pi(D^3 - d^3)}{32}$	$i_x = \frac{1}{4} \sqrt{D^2 + d^2}$

Exemplo

A figura representa a seção transversal de uma viga “T”. Para a figura, determinar:

- o centro de gravidade;
 - o momento de inércia em relação ao eixo x;
 - os módulos Resistentes superior e inferior;
 - o raio de giração.
- (medidas em centímetros)



Para facilitar a determinação das propriedades geométricas de figuras compostas, convém montar a seguinte tabela:

Figura	b (cm)	h (cm)	y_{CG} (cm)	A (cm ²)	M_x (cm ³)	I_{CGi} (cm ⁴)	I_{xi} (cm ⁴)
1	3	2	6	6	36	2	218
2	2	7	3,5	4	49	57,17	228,67
3	3	2	6	6	36	2	218
Σ				26	121		664,67

Centro de gravidade (CG)

$$y_{CG} = \frac{\sum M_x}{\sum A} = \frac{121}{26} = 4,65 \text{ cm}$$

Como o eixo de referência passa pela base da figura, então $y_{inf}=4,65\text{cm}$ e $y_{sup}=2,35\text{cm}$.

Na coluna I_{CGi} (cm⁴) foi determinado o momento de inércia de cada figura, passando pelo respectivo centro de gravidade. Por se tratar de retângulos, utilizou-se a expressão $I_x = b \cdot h^3 / 12$. Em seguida, deve-se proceder à translação destes momentos de inércia para eixo x de referência para determinar a sua somatória.

A translação de eixos é feita por meio da expressão: $I_x = I_{CG} + y^2 \cdot A$

Obtido o momento de inércia total em relação ao eixo x, deve-se agora proceder à translação para o eixo x que passa pelo centro de gravidade da figura, por meio da seguinte expressão:

$$I_{CG} = I_x - \frac{M_x^2}{A} \quad I_{CG} = 664,67 - \frac{121^2}{26}$$

O momento de inércia da figura em relação ao seu centro de gravidade é $I_{CG} = 101,55 \text{ cm}^4$

Em seguida, calculam-se os momentos resistentes:

$$W_{x,sup} = \frac{I_{CG}}{y_{sup}} = \frac{101,55}{2,35} = 43,21 \text{ cm}^3 \quad W_{x,inf} = \frac{I_{CG}}{y_{inf}} = \frac{101,55}{4,65} = 21,84 \text{ cm}^3$$

Finalmente, determina-se o raio de giração.

$$i_x = \sqrt{\frac{I_{CG}}{A}} \quad i_x = \sqrt{\frac{101,55}{26}} = 1,98 \text{ cm}$$