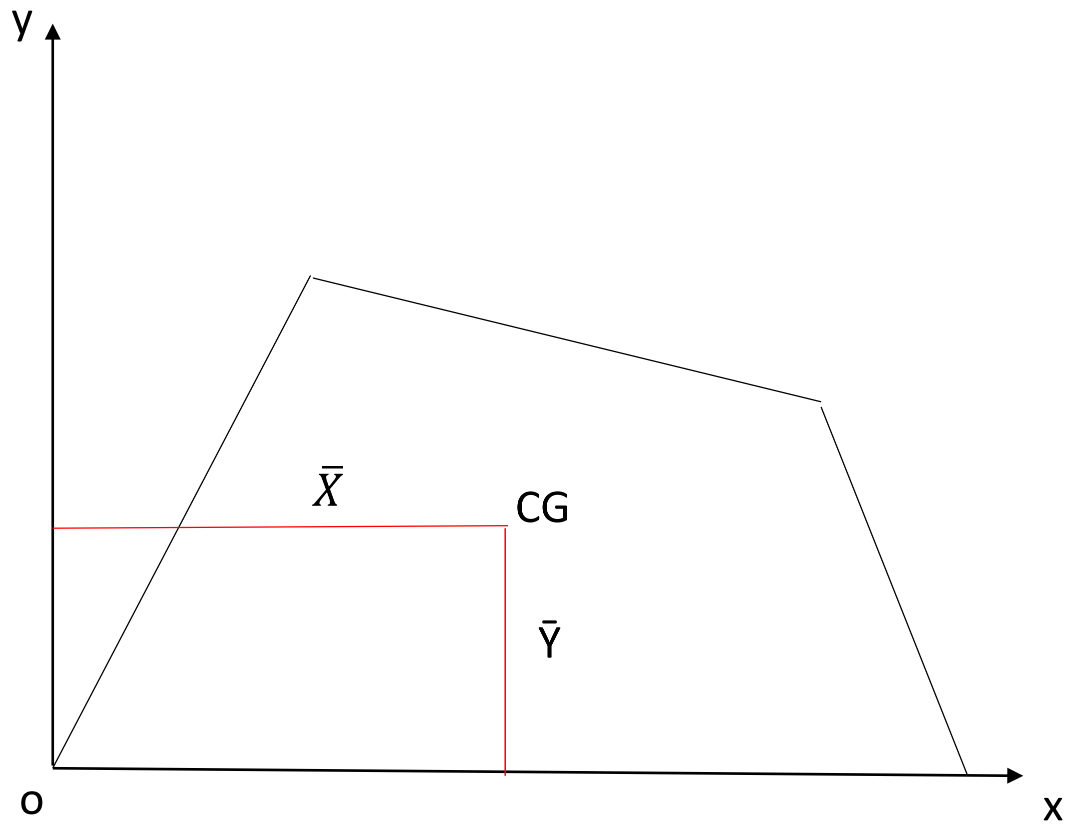
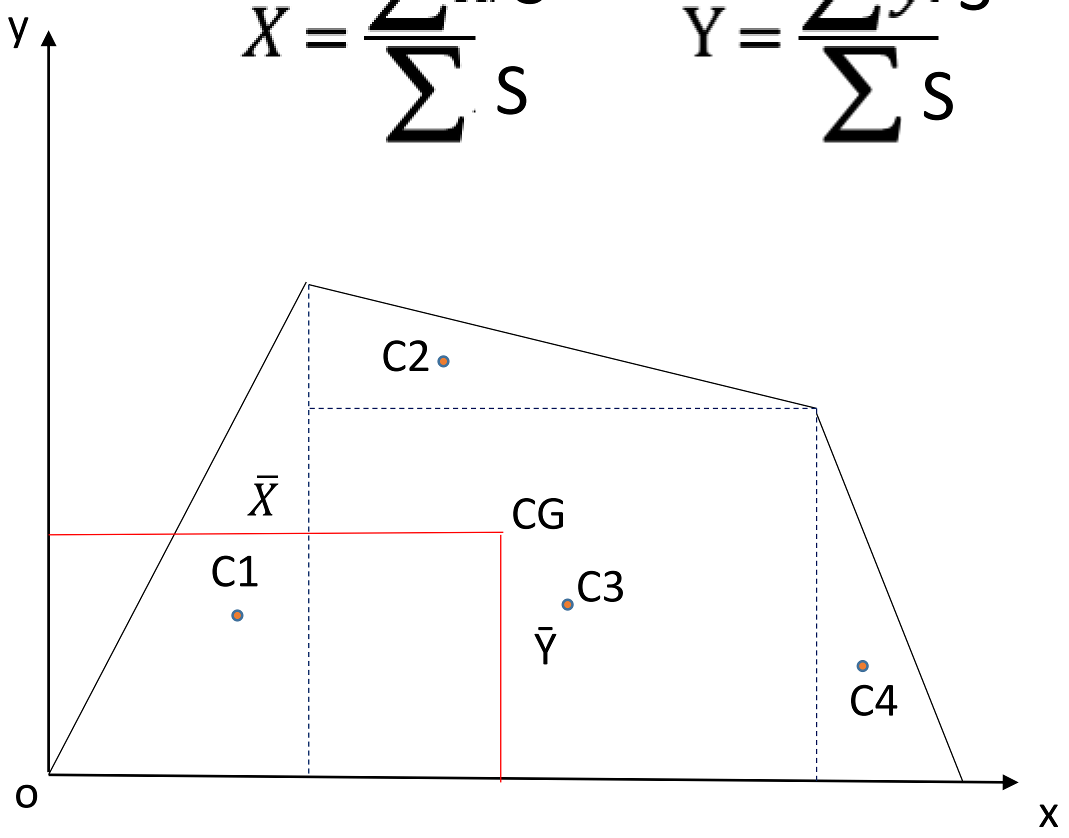
MOMENTO DE INÉRCIA DE FIGURAS PLANAS

PROF. DR. CARLOS AURÉLIO NADAL

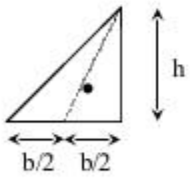
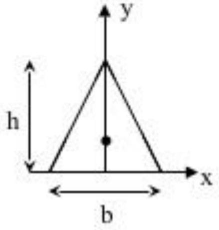
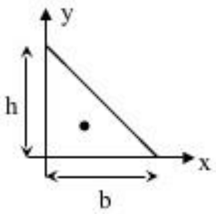
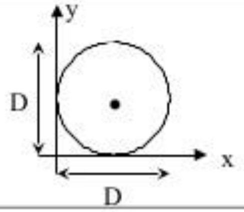
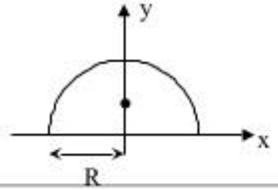
CENTRÓIDE DE UMA ÁREA (CG)

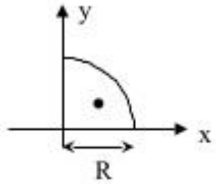


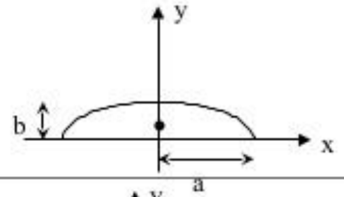
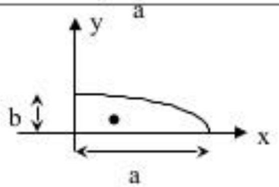
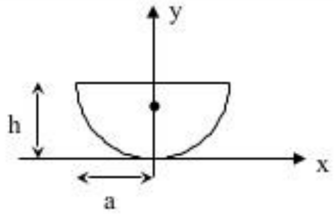
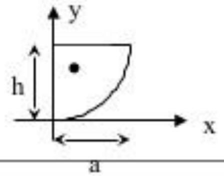
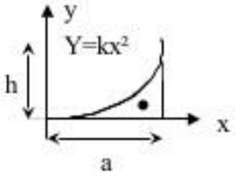
$$\bar{X} = \frac{\sum \bar{x}\, S}{\sum S} \qquad \bar{Y} = \frac{\sum \bar{y}\, S}{\sum S}$$



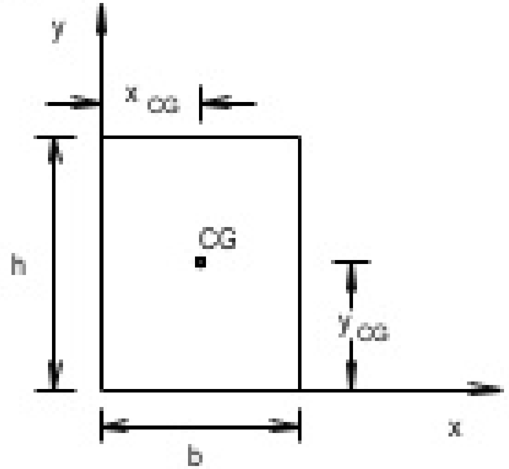
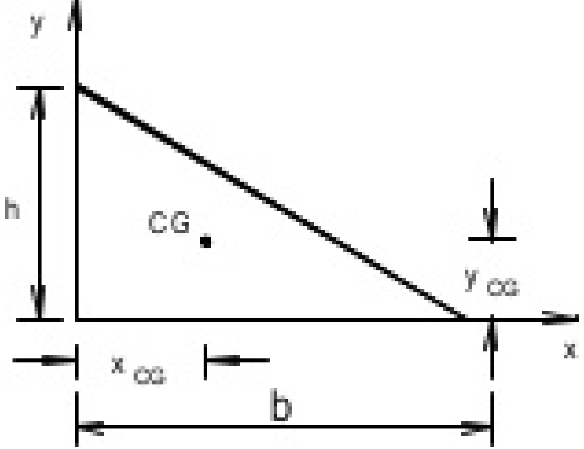
Centróides de Áreas

	**Triângulo** $\overline{X}$ $\quad \overline{Y} = \frac{h}{3} \quad A = \frac{b \cdot h}{2}$
	**Triângulo Isósceles/Eqüilátero** $\overline{X} = 0 \quad \overline{Y} = \frac{h}{3} \quad A = \frac{b \cdot h}{2}$
	**Triângulo Retângulo** $\overline{X} = \frac{b}{3} \quad \overline{Y} = \frac{h}{3} \quad A = \frac{b \cdot h}{2}$
	**Círculo** $\overline{X} = \frac{D}{2} \quad \overline{Y} = \frac{D}{2} \quad A = \pi R^2$
	**Semicírculo** $\overline{X} = 0 \quad \overline{Y} = \frac{4 \cdot R}{3\pi} \quad A = \frac{\pi R^2}{2}$

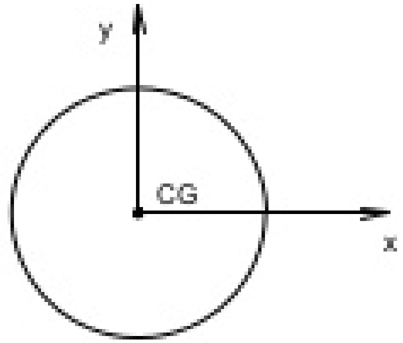
	**Quarto de Círculo** $\overline{X} = \frac{4 \cdot R}{3\pi} \quad \overline{Y} = \frac{4 \cdot R}{3\pi} \quad A = \frac{\pi R^2}{4}$

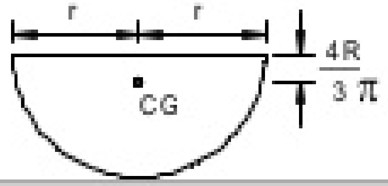
	**Semi-elipse** $\overline{X} = 0 \quad \overline{Y} = \frac{4 \cdot b}{3\pi} \quad A = \frac{\pi \cdot ab}{2}$
	**Quarto de elipse** $\overline{X} = \frac{4 \cdot a}{3\pi} \quad \overline{Y} = \frac{4 \cdot b}{3\pi} \quad A = \frac{\pi \cdot ab}{4}$
	**Parábola** $\overline{X} = 0 \quad \overline{Y} = \frac{3h}{5} \quad A = \frac{4 \cdot ah}{3}$
	**Semiparábola** $\overline{X} = \frac{3a}{8} \quad \overline{Y} = \frac{3h}{5} \quad A = \frac{2 \cdot ah}{3}$
	**Arco de Parábola do 2º grau** $\overline{X} = \frac{3a}{4} \quad \overline{Y} = \frac{3h}{10} \quad A = \frac{ah}{3}$

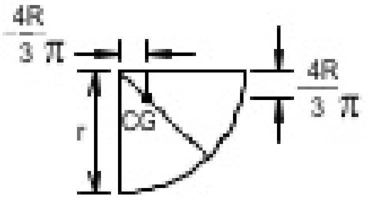
Centro de gravidade de figuras planas

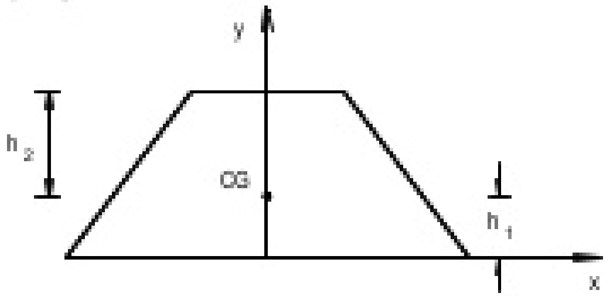
retângulo 	$x_{CG} = \dfrac{b}{2}$ $y_{CG} = \dfrac{h}{2}$
triângulo 	$x_{CG} = \dfrac{b}{3}$ $y_{CG} = \dfrac{h}{3}$

<table>
<tr><td>círculo

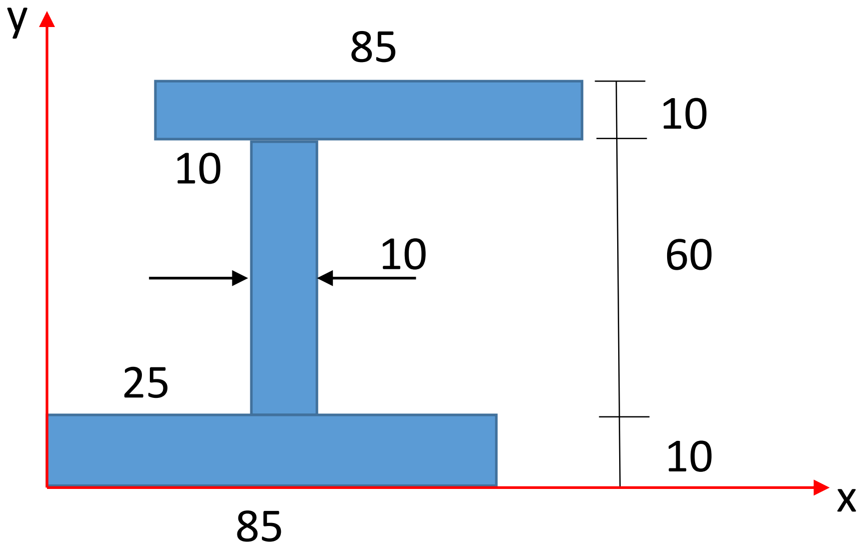

</td><td>$$x_{CG} = 0$$
$$y_{CG} = 0$$</td></tr>
<tr><td>Semicírculo

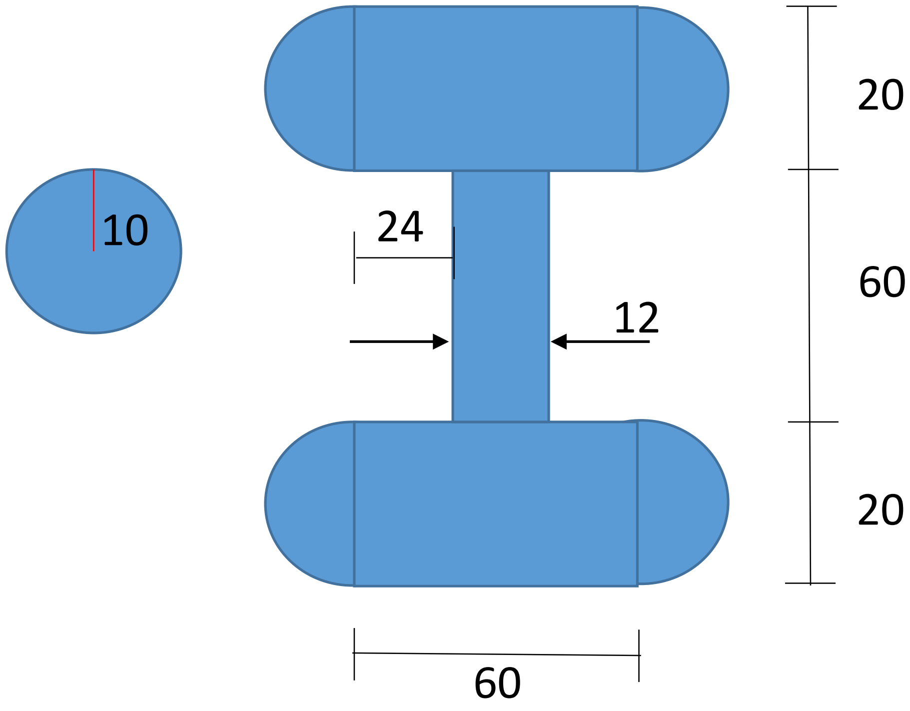

</td><td>$$y_{CG} = \frac{4r}{3\pi}$$</td></tr>
<tr><td>¼ de círculo


</td><td>$$x_{CG} = \frac{4r}{3\pi}$$
$$y_{CG} = \frac{4r}{3\pi}$$</td></tr>
<tr><td>trapézio


</td><td>$$h_1 = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}$$
$$h_2 = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a+b}{a+b}$$</td></tr>
</table>

Exercício: Calcular a posição do centroide das seções transversais dos perfis fornecidos a seguir, as dimensões estão em cm.



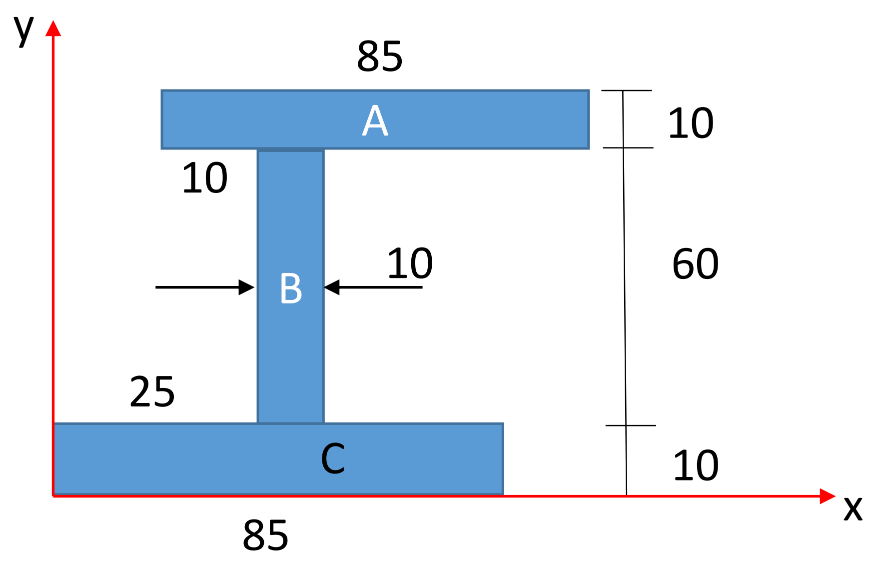


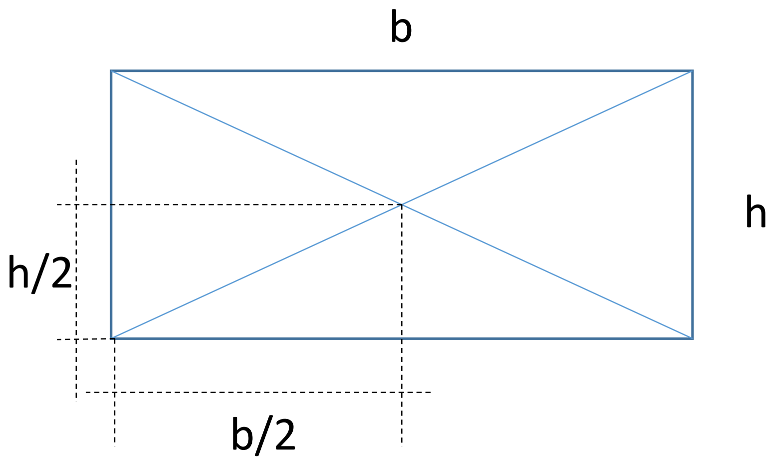
Resposta: $\bar{X} = 0{,}165m$

$\bar{Y} = 029m$

Resposta: $\bar{X} =$

$\bar{Y} =$





$$\bar{X} = 0{,}165m$$

$$\bar{Y} = 0{,}029m$$

Figura A

$S_a = 0{,}85x0{,}10 = 0{,}085m^2$

$X_a=(0{,}85/2+(0{,}25-0{,}10)= 0{,}575m$

$Y_a= (0{,}10+0{,}60+0{,}10/2)=0{,}75m$

Figura B

$S_b = 0{,}10x0{,}60=0{,}06m^2$

$X_b=(0{,}25+0{,}10/2)=0{,}30m$

$Y_b=0{,}10+0{,}60/2=0{,}40m$

Figura C

$S_c = 0{,}85x0{,}10=0{,}085m^2$

$X_c=0{,}85/2=0{,}425m$

$Y_c=0{,}10/2=0{,}05m$

$\Sigma X.S= 0{,}575x0{,}085+0{,}30x0{,}06+0{,}425x0{,}085$

$\Sigma X.S= 0{,}0379042625$

$\Sigma S=0{,}085+0{,}06+0{,}085=0{,}23$

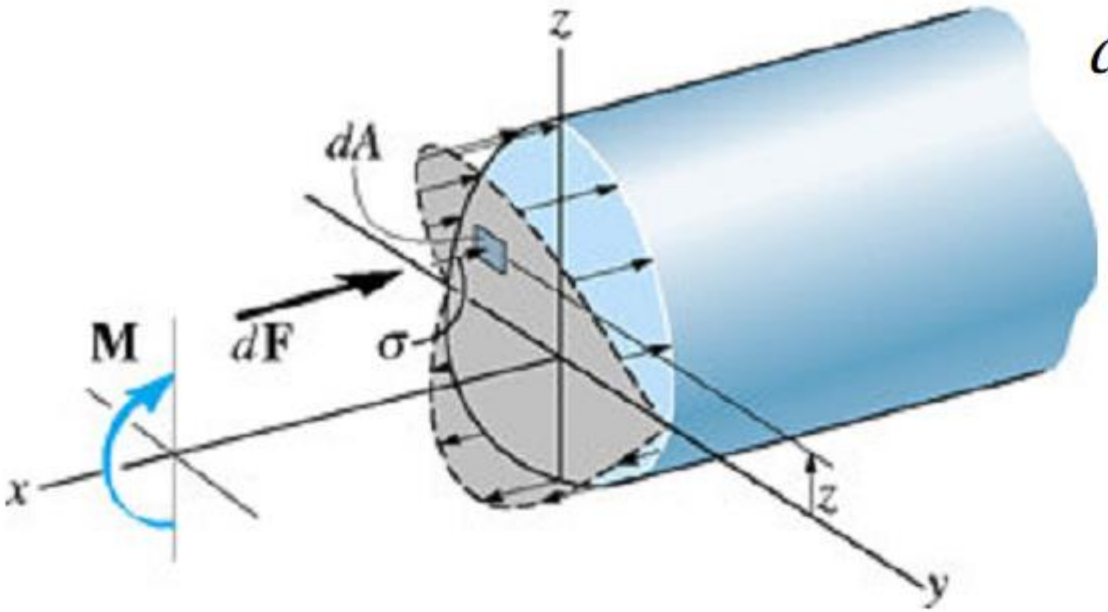
$\Sigma Y.S=0{,}75x0{,}085+0{,}40x0{,}06+0{,}05x0{,}085 = 0{,}006615125$

Centróide – Considera-se o primeiro momento da área em relação a um eixo $\int x dA$

Momento de Inércia – Integral do Segundo Momento de Inércia $\int x^2 dA$

$$\sigma = \kappa z \Rightarrow dF = \sigma dA = kz dA$$

$$dM = dF z = kz^2 dA \Rightarrow M = \kappa \int z^2 dA$$

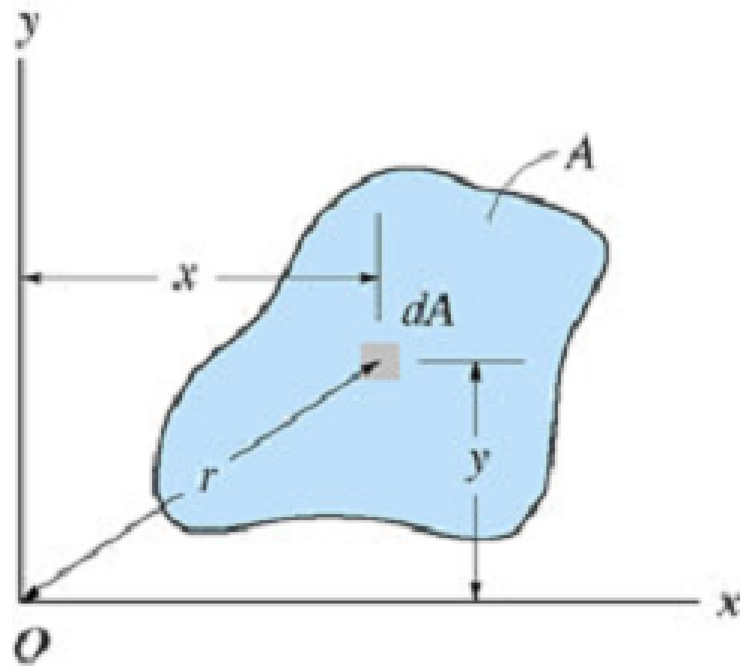


Profa. Salete Souza de Oliveira
Home: http://www.professores.uff.br/salete

Momentos de Inércia

$$dI_x = \int_A y^2 dA \Rightarrow I_x = \int_A y^2 dA$$

$$dI_y = \int_A x^2 dA \Rightarrow I_y = \int_A x^2 dA$$



Momento Polar de Inércia

$$J_o = \int_A r^2 dA = I_x + I_y$$

Profa. Salete Souza de Oliveira
Home: http://www.professores.uff.br/salete

Teorema dos Eixos Paralelos para Uma Área

$$I_x = \int_A (y' + d_y)^2 dA \Rightarrow I_x = \int_A y'^2 dA + 2d_y \int_A y' dA + d_y^2 \int_A dA$$

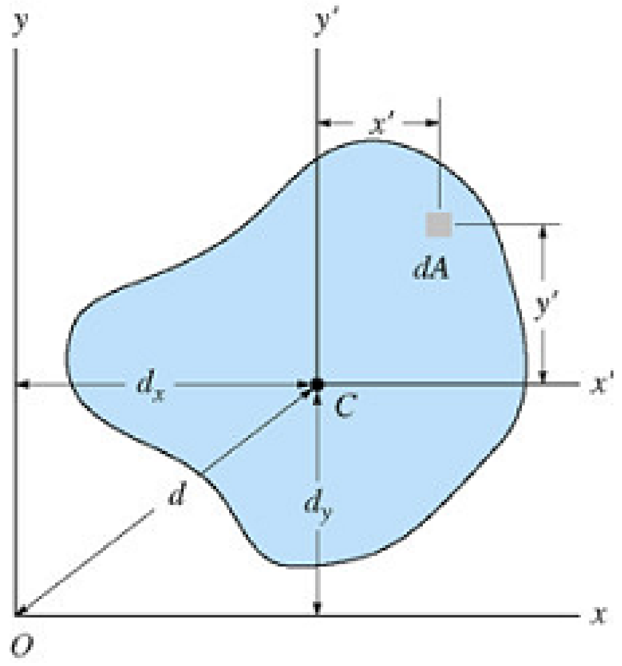
$\bar{I}_{x'}$ **A primeira integral representa o momento de inércia da área em relação ao eixo que passa pelo centróide.**

A segunda integral é zero, uma vez que x' passa através do centróide *C* da área, isto é,

$$\int y' dA = \bar{y} \int dA = 0, \; \bar{y} = 0$$

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 \qquad I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2$$

$$J_o = \bar{J}_c + Ad^2$$



Profa. Salete Souza de Oliveira
Home: http://www.professores.uff.br/salete

Raio de Giração de Uma Área

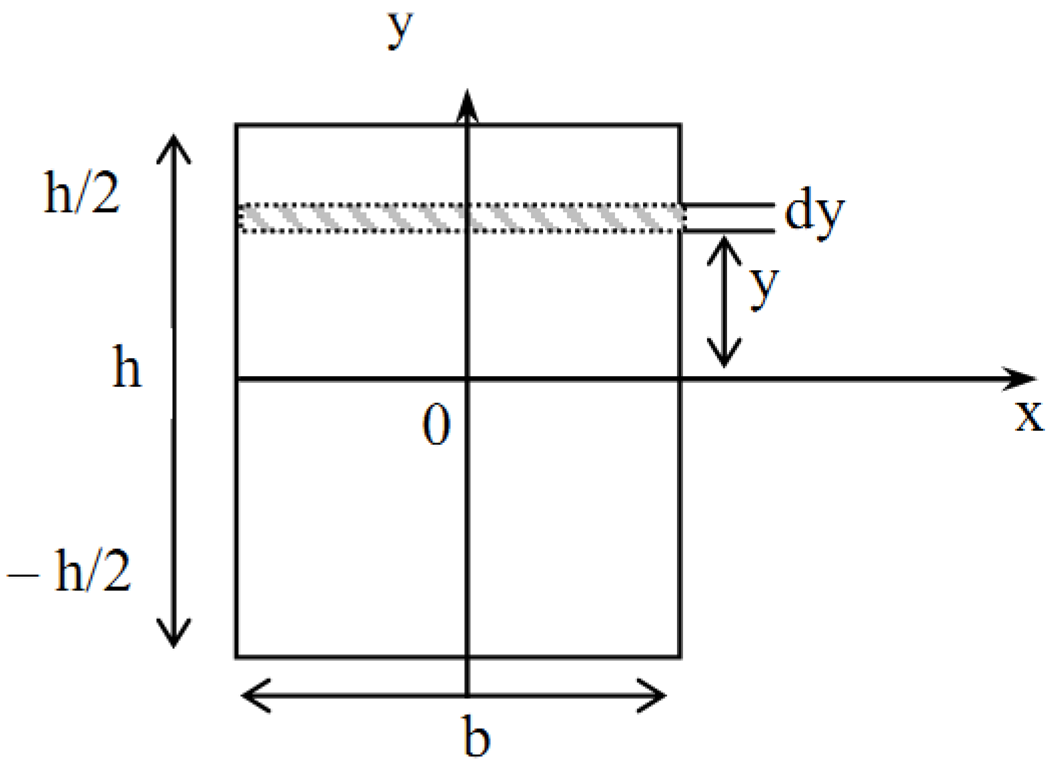
$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad k_o = \sqrt{\frac{J_o}{A}}$$

Momentos de Inércia de uma Área por Integração
Caso de contornos de áreas planas expressos por funções matemáticas

Profa. Salete Souza de Oliveira
Home: http://www.professores.uff.br/salete

Exemplo 1

Determinar, para a área retangular o momento de inércia I_x em relação ao eixo x e o raio de giração r_x



Adota-se como elemento de área a faixa horizontal de largura b e espessura dy. O momento de inércia da faixa em relação a x é dado por:

$$I_x = \int_A y^2.dA = \int_A y^2.(b.dy) = b\int_A y^2.dy \; ,$$

mas a integração é de: $y = -\dfrac{h}{2}$ e $y = +\dfrac{h}{2}$,

$$I_x = b\int_{-h/2}^{h/2} y^2.dy = \frac{b}{3}\left[y^3\right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{b}{3}\left[\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right],$$

$$I_x = \frac{1}{12}.b.h^3 \; .$$

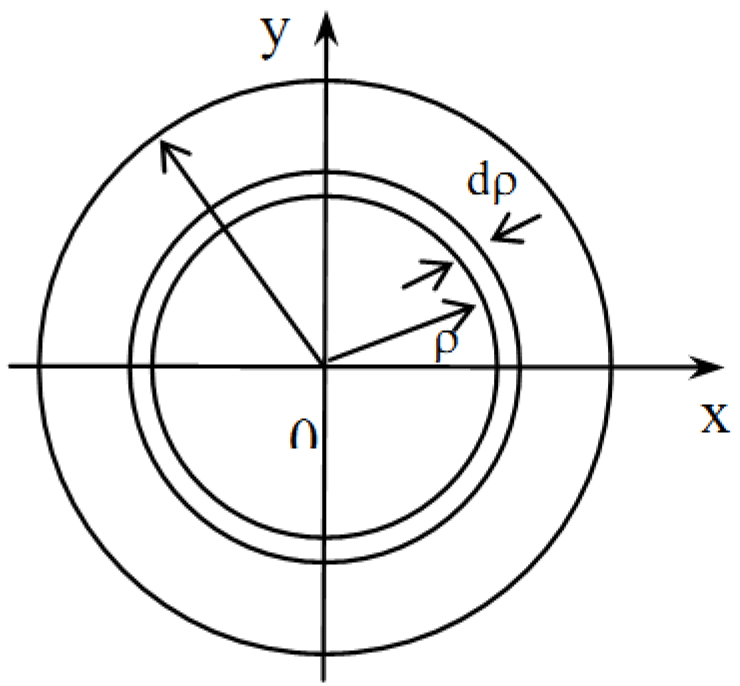
O raio de giração é dado por:

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \text{ ,}$$

e substituindo I_x determinado acima nesta equação, encontra-se:

$$r_x = \frac{h.\sqrt{3}}{6} \text{ .}$$

Determinar para a área circular, figura abaixo, o momento de inércia polar J_0 e os momentos inerciais I_x e I_y .



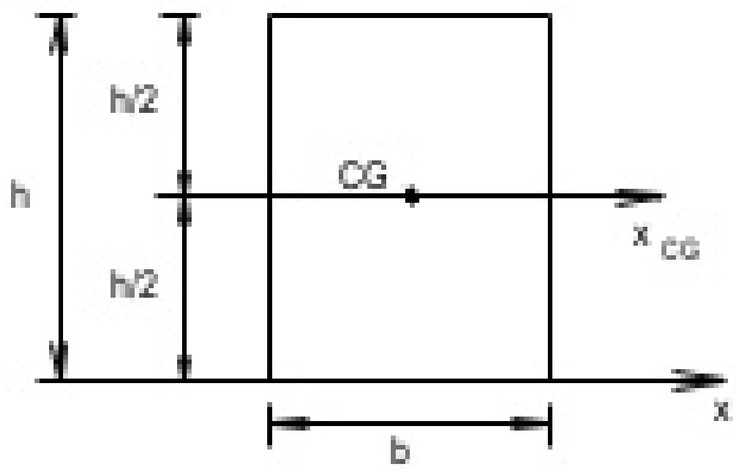
$$J_0 = \int_A \rho^2 . dA \Rightarrow dA = 2.\pi.\rho.d\rho \ ,$$

$$J_0 = \int_A \rho^2 (2.\pi.\rho.d\rho) = 2.\pi.\int_0^r \rho^3.d\rho = \frac{2.\pi}{4}\left[\rho^4\right]_0^r = \frac{\pi.r^4}{2}.$$

Da equação 4.20, e devido a simetria da área circular (I_x=I_y), vem que:

$$J_0 = I_x + I_y = 2.I_x \Rightarrow I_x = \frac{J_0}{2} \Rightarrow I_x = I_y = \frac{\pi.r^4}{4}.$$

Utilizando a formulação de mudança de eixos



Momento de inércia do retângulo em relação ao seu CG $\rightarrow$ $I_{x,CG} = \dfrac{b \cdot h^3}{12}$

$$I_x = I_{x_{CG}} + A \cdot y_{CG}^2$$

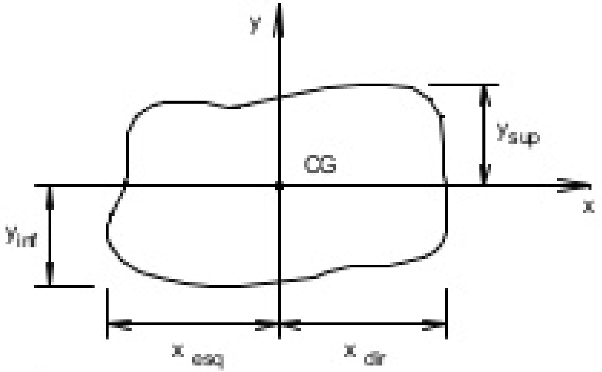
$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} + bh \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} + \frac{b \cdot h^3}{4} = \frac{bh^3 + 3 \cdot bh^3}{12}$$

$$I_x = \frac{4b \cdot h^3}{12} \quad \Rightarrow \quad I_x = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

Módulo Resistente

Define-se módulo resistente de uma superfície plana em relação aos eixos que contém o CG como sendo a razão entre o momento de inércia relativo ao eixo que passa pelo CG da figura e a distância máxima entre o eixo e a extremidade da seção estudada.



$$W_x = \frac{I_{CG}}{y_{max}}$$

$$W_y = \frac{I_{CG}}{x_{max}}$$

onde:

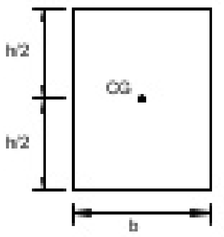
I_{CG} = momento de inércia da peça em relação ao CG da figura

x, y = distância entre o eixo do CG da figura e a extremidade da peça.

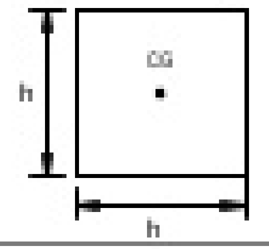
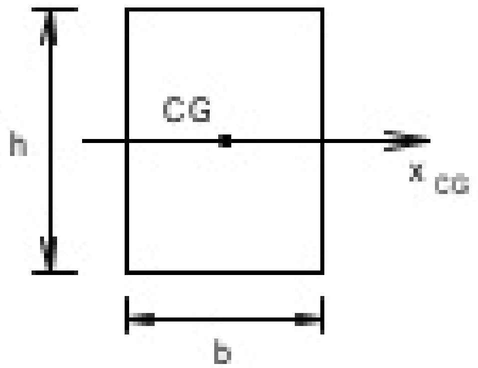
A unidade do módulo resistente é $\frac{[L]^4}{[L]} = [L]^3$.

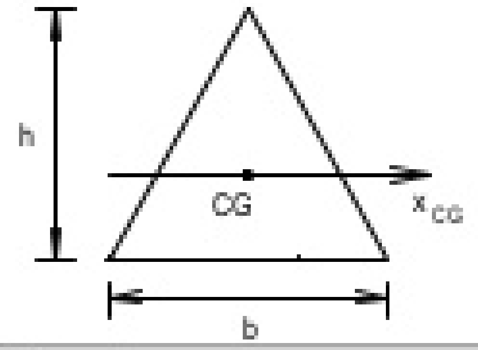
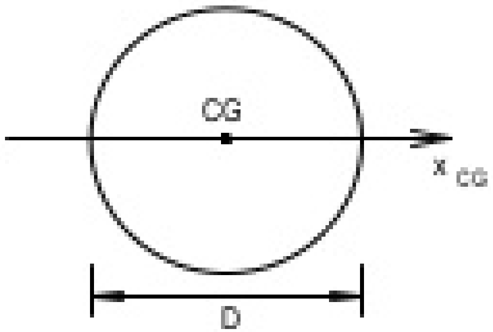
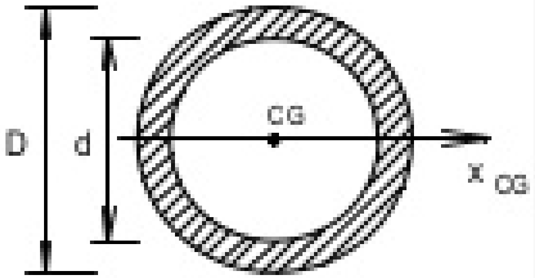
O módulo resistente é utilizado para o dimensionamento de peças submetidas à flexão.

Para o retângulo, tem-se:



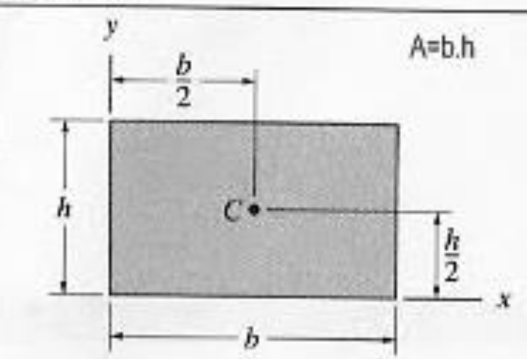
$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} \qquad A = b \cdot h \qquad W_x = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

Figura	Momento de Inércia	Momento Resistente	Raio de Giração
Quadrado 	$I_x = \dfrac{h^4}{12}$	$W_x = \dfrac{h^3}{6}$	$i_x = \dfrac{h}{\sqrt{12}}$
Retângulo 	$I_{x_{CG}} = \dfrac{bh^3}{12}$	$W_x = \dfrac{b \cdot h^2}{6}$	$i_x = \dfrac{h}{\sqrt{12}}$

Triângulo 	$I_{x_{CG}} = \frac{bh^3}{36}$	$W_x = \frac{b \cdot h^2}{12}$	$i_x = \frac{h \cdot \sqrt{2}}{6}$
Círculo 	$I_{x_{CG}} = \frac{\pi d^4}{64}$	$W_x = \frac{\pi \cdot D^3}{32}$	$i_x = \frac{D}{4}$
Círculo vazado 	$I_{x_{CG}} = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{64}$	$W_x = \frac{\pi\left(D^3 - d^3\right)}{32}$	$i_x = \frac{1}{4}\sqrt{D^2 + d^2}$

Área momento de inercia

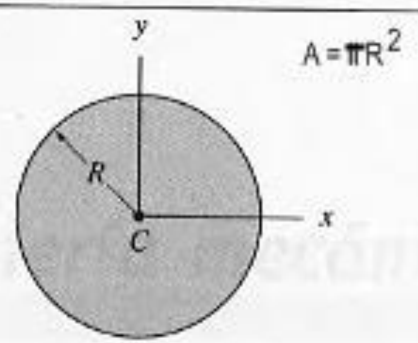
Rectángulo



$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12} \qquad \bar{I}_y = \frac{b^3h}{12} \qquad \bar{I}_{xy} = 0$$

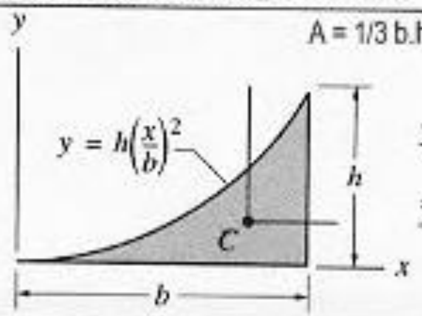
$$I_x = \frac{bh^3}{3} \qquad I_y = \frac{b^3h}{3} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}$$

Círculo



$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4} \qquad I_{xy} = 0$$

Media parabólica complementaria



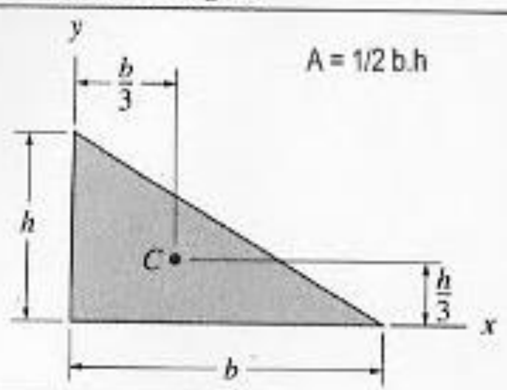
$$\bar{x} = \frac{3b}{4} \qquad \bar{y} = \frac{3h}{10}$$

$$\bar{I}_x = \frac{37bh^3}{2100} \qquad I_x = \frac{bh^3}{21}$$

$$\bar{I}_y = \frac{b^3h}{80} \qquad I_y = \frac{b^3h}{5}$$

$$\bar{I}_{xy} = \frac{b^2h^2}{120} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{12}$$

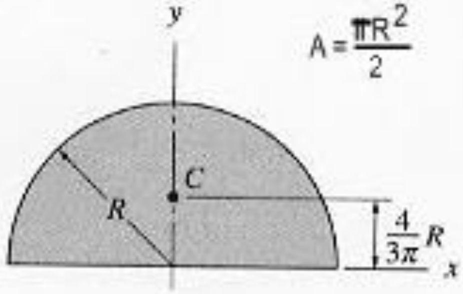
Triángulo rectángulo



$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36} \qquad \bar{I}_y = \frac{b^3h}{36} \qquad \bar{I}_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_y = \frac{b^3h}{12} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{24}$$

Semicírculo



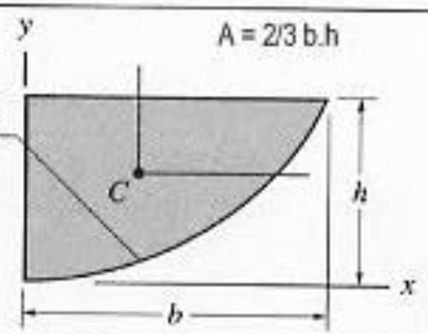
$$\bar{I}_x = 0.1098R^4 \qquad \bar{I}_{xy} = 0$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{8} \qquad I_{xy} = 0$$

Media parábola

$$y = h\left(\frac{x}{b}\right)^2$$

$$\bar{x} = \frac{3b}{8} \qquad \bar{y} = \frac{3h}{5}$$

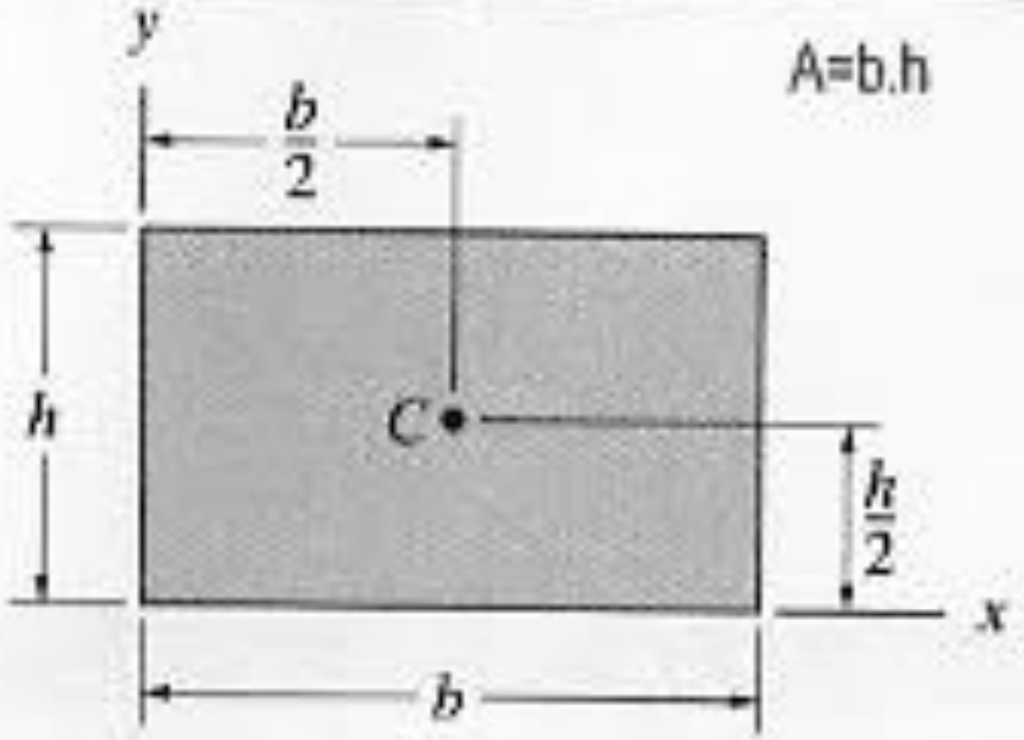


$$\bar{I}_x = \frac{8bh^3}{175} \qquad I_x = \frac{2bh^3}{7}$$

$$\bar{I}_y = \frac{19b^3h}{480} \qquad I_y = \frac{2b^3h}{15}$$

$$\bar{I}_{xy} = \frac{b^2h^2}{60} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{6}$$

Rectángulo



$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12} \qquad \bar{I}_y = \frac{b^3h}{12} \qquad \bar{I}_{xy} = 0$$

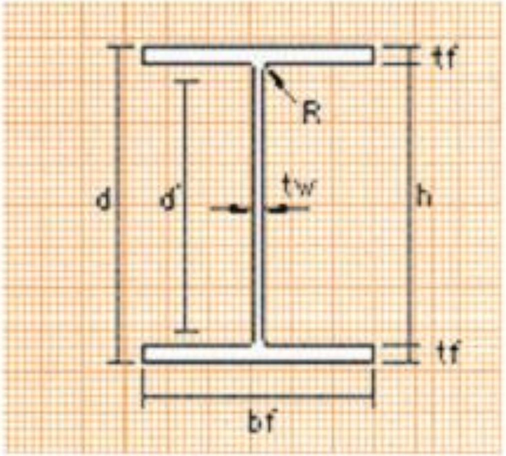
$$I_x = \frac{bh^3}{3} \qquad I_y = \frac{b^3h}{3} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}$$

SKYLIGHT

ESTRUTURAS METÁLICAS

Tabela de Perfis Laminados I e H

Dimensões e Propriedades Geométricas



d - altura do perfil
d´ - altura livre da alma
h - altura interna
bf - largura da aba
tf - espessura da aba
tw - espessura da alma
R -

BITOLA mm x kg/m	Massa Linear	d	b_f	ESPESSURA		h	d'	Área	EIXO X - X				EIXO Y - Y				r_t	I_t	Esbeltez		C_w	u
				t_w	t_f				I_x	W_x	r_x	Z_x	I_y	W_y	r_y	Z_y			Aba - λ_f	Alma - λ_w		
	Kg/m	mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm^2	cm^4	cm^3	cm	cm^3	cm^4	cm^3	cm	cm^3	cm	cm^4	$b_f/2t_f$	d'/t_w	cm^6	m^2/m
W 150 x 13,0	13,0	148	100	4,3	4,9	138	118	16,6	635	85,8	6,18	96,4	82	16,4	2,22	25,5	2,60	1,72	10,20	27,49	4.181	0,67
W 150 x 18,0	18,0	153	102	5,8	7,1	139	119	23,4	939	122,8	6,34	139,4	126	24,7	2,32	38,5	2,69	4,34	7,18	20,48	6.683	0,69
W 150 x 22,5 (H)	22,5	152	152	5,8	6,6	139	119	29,0	1229	161,7	6,51	179,6	387	50,9	3,65	77,9	4,10	4,75	11,52	20,48	20.417	0,88
W 150 x 24,0	24,0	160	102	6,6	10,3	139	115	31,5	1384	173,0	6,63	197,6	183	35,9	2,41	55,8	2,73	11,08	4,95	17,48	10.206	0,69
W 150 x 29,8 (H)	29,8	157	153	6,6	9,3	138	118	38,5	1739	221,5	6,72	247,5	556	72,6	3,80	110,8	4,18	10,95	8,23	17,94	30.227	0,90
W 150 x 37,1 (H)	37,1	162	154	8,1	11,6	139	119	47,8	2244	277,0	6,85	313,5	707	91,8	3,84	140,4	4,22	20,58	6,64	14,67	39.930	0,91

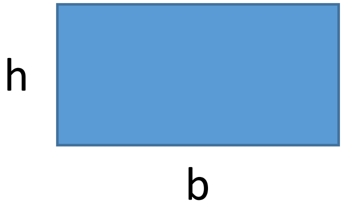
Exercício

Você vai projetar uma peça de aço para ser utilizada em topografia e adota uma peça com seção retangular de h=0,20m e b=0,40m. Alguém levanta a hipótese que uma peça com h=0,40m e b=0,20m é mais resistente a flexão. Prove que esta hipótese é verdadeira ou não.

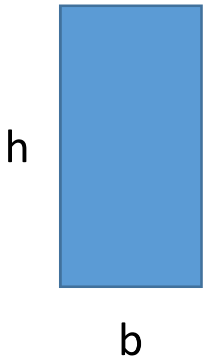
$I_{xG} = bh^3/12$

$W_{xG} = bh^2/6$

$i_{xG} = h/\sqrt{12}$



$I_{xG} = 0{,}4x0{,}2^3/12$
$I_{xG} = 0{,}00027m^4$
$W_{xG} = 0{,}4x0{,}2^2/6$
$W_{xG} = 0{,}00267m^3$
$i_{xG} = 0{,}0014m$



$I_{xG} = 0{,}2x0{,}4^3/12$
$I_{xG} = 0{,}00107m^4$
$W_{xG} = 0{,}2x0{,}4^2/6$
$W_{xG} = 0{,}00533m^3$
$i_{xG} = 0{,}0028m$