Flexão Composta Normal

1. ARMADURAS ASSIMÉTRICAS

1.1 Introdução

O dimensionamento direto à flexão composta normal com grande excentricidade, considerando os esforços solicitantes não no centro de gravidade da seção transversal, mas sim no centro de gravidade da armadura tracionada é muito simples, pois torna o problema semelhante ao da flexão simples. Entretanto, ele resolve apenas uma parte dos problemas da flexão composta normal. É importante que se tenha uma formulação geral que resolva todos os casos possíveis.

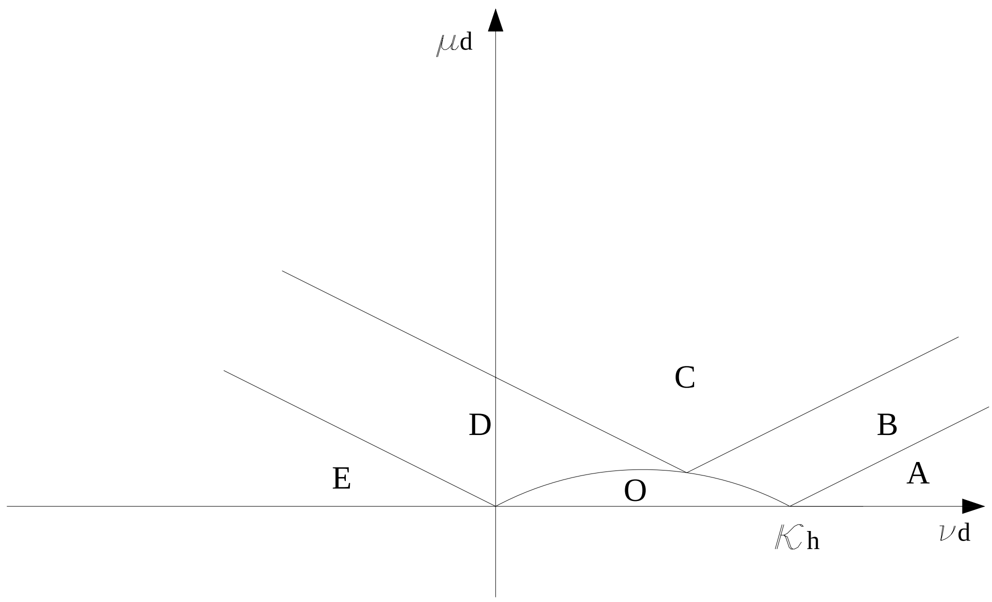
Jayme Ferreira da Silva Jr. desenvolveu um processo que permite com antecedência, conhecidos os esforços, as propriedades da seção e dos materiais, determinar qual a necessidade de armadura da seção.

Vai-se considerar neste capítulo o dimensionamento de seções retangulares submetidas à flexo-compressão ou à flexo-tração com armaduras assimétricas em duas bordas.

Trabalhando com os valores reduzidos dos esforços solicitantes (ν_d, μ_d), o semi-plano formado pelos pontos (ν_d, μ_d) pode ser dividido em 6 regiões ou zonas de solicitação.

$$\nu_d = \frac{Nd}{0{,}85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d} \qquad \text{(eq. 1)}$$

$$\mu_d = \frac{Md}{0{,}85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2} \qquad \text{(eq. 2)}$$



(Fig. 1)

Zona A: as duas armaduras (As_1 e As_2) são comprimidas (flexo-compressão com pequena excentricidade);

Zona B: equilíbrio alcançado só com As_1, sendo $As_2 = 0$;

Zona C: As_2 é tracionada e As_1 comprimida (flexo-tração e flexo-compressão com grande excentricidade);

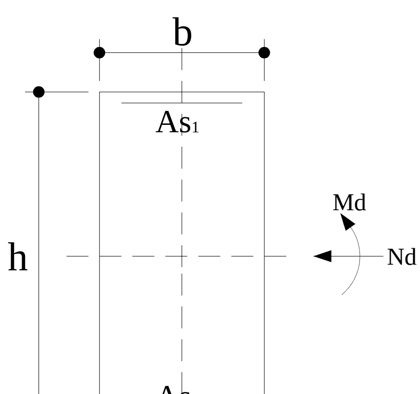
Zona D: equilíbrio conseguido com As_2 tracionada e o concreto comprimido, sendo $As_1 = 0$;

Zona E: As_2 e As_1 são tracionadas (flexo-tração com pequena excentricidade);

Zona O: seção super-dimensionada, nenhuma armadura é teoricamente necessária.

A seguir serão desenvolvidas as fórmulas para as várias zonas de solicitação.

A notação que será utilizada é a que segue:



(fig. 2)

As_1 → armadura comprimida pela ação do momento fletor.

As_2 → armadura tracionada pela ação do momento fletor.

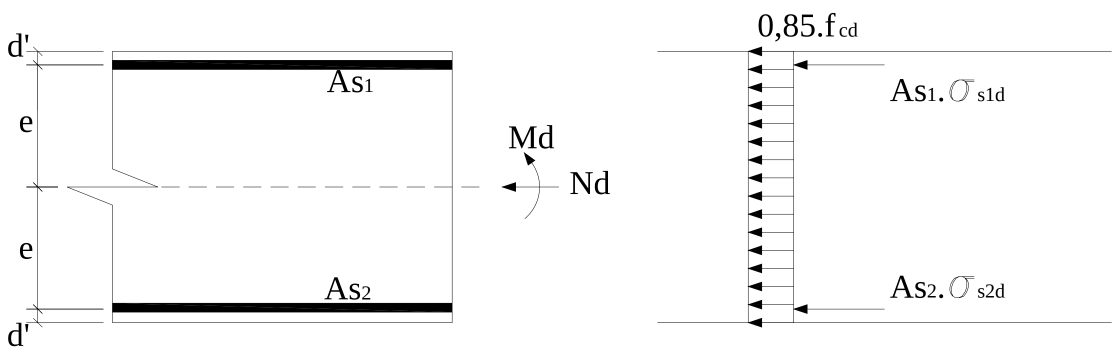
Nd > 0 → compressão

Nd < 0 → tração

1.2 Zona A

Na zona A as duas armaduras estão comprimidas, o que ocorre se $\xi > 1$ (ou $x > d$). Está-se no *domínio 4a* ou *5*. São três as incógnitas: As_1 (ω_1), As_2 (ω_2) e x (ξ).

As equações que resolvem o problema são as duas de equilíbrio. Portanto, são infinitas as soluções. A solução que torna a resposta mais econômica é aquela em que $\xi \rightarrow \infty$, a seção está inteiramente comprimida a 2‰.



(fig. 3)

$e = d - h/2$ *(eq. 3)*

$\sigma_{s1d} = \sigma_{s2d} = \sigma_{sd}$ (ε_{sd} = 2‰) *(eq. 4)*

$\kappa_h = h/d$ *(eq. 5)*

$$Nd = 0{,}85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot h + As_1 \cdot \sigma_{sd} + As_2 \cdot \sigma_{sd}$$ *(eq. 6)*

$$Md = As_1 \cdot \sigma_{sd} \cdot (d - 0{,}5 \cdot h) - As_2 \cdot \sigma_{sd} \cdot (d - 0{,}5 \cdot h)$$ *(eq. 7)*

Dividindo a *(eq. 6)* por $0{,}85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d$ e a *(eq. 7)* por $0{,}85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2$, vem:

$$\boxed{\nu_d = \kappa_h + \omega_1 \cdot \frac{\sigma_{sd}}{f_{yd}} + \omega_2 \cdot \frac{\sigma_{sd}}{f_{yd}}}$$ *(eq. 8)*

$$\mu_d = \omega_1 \frac{\sigma_{sd}}{f_{yd}} \cdot (1 - 0{,}5\kappa_h) - \omega_2 \cdot \frac{\sigma_{sd}}{f_{yd}} (1 - 0{,}5\kappa_h)$$

$$\boxed{\mu_d = (\omega_1 - \omega_2) \cdot \frac{\sigma_{sd}}{f_{yd}} \cdot (1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h)}$$ *(eq. 9)*

Resolvendo-se o sistema chega-se a:

$$\boxed{\omega_1 = \frac{f_{yd}}{2 \cdot \sigma_{sd}} \cdot \left(\nu_d + \frac{\mu_d}{(1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h)} - \kappa_h \right)}$$ *(eq. 10)*

$$\boxed{\omega_2 = \frac{f_{yd}}{2 \cdot \sigma_{sd}} \cdot \left(\nu_d - \frac{\mu_d}{(1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h)} - \kappa_h \right)}$$ *(eq. 11)*

Para o aço CA-50A:

$$\frac{\sigma_{sd}}{f_{yd}} = \frac{Es \cdot \varepsilon_{sd}}{f_{yd}} = \frac{210000 \cdot 2}{\left(\frac{500}{1{,}15} \cdot 1000 \right)} = 0{,}966$$ *(eq. 12)*

No caso particular da compressão simples, onde *Md* = 0 (μ_d = 0)

$$\boxed{\omega_1 = \omega_2 = \frac{f_{yd}}{2 \cdot \sigma_{sd}} \cdot (\nu_d - \kappa_h)}$$ *(eq. 13)*

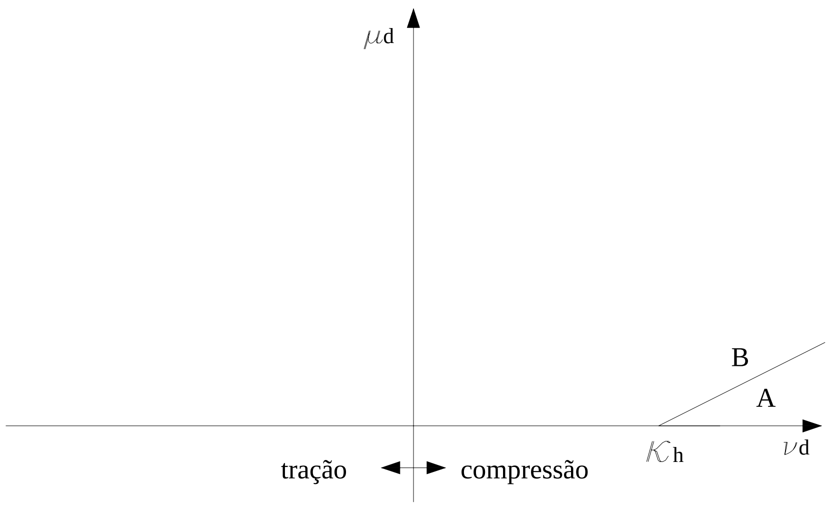
Na expressão anterior nota-se que se v_d < *Kh* a taxa de armadura fica negativa. Isso quer dizer que só a seção de concreto resiste ao esforço de compressão, sem necessidade das armaduras.

1.2.1 Limite com a Zona B

Como na zona B As_2 = 0, basta fazer ω_2 = 0 na expressão que permite determiná-la, chegando-se a:

$$0 = \frac{f_{yd}}{2 \cdot \sigma_{sd}} \cdot \left(\nu_d - \frac{\mu_d}{(1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h)} - \kappa_h \right)$$

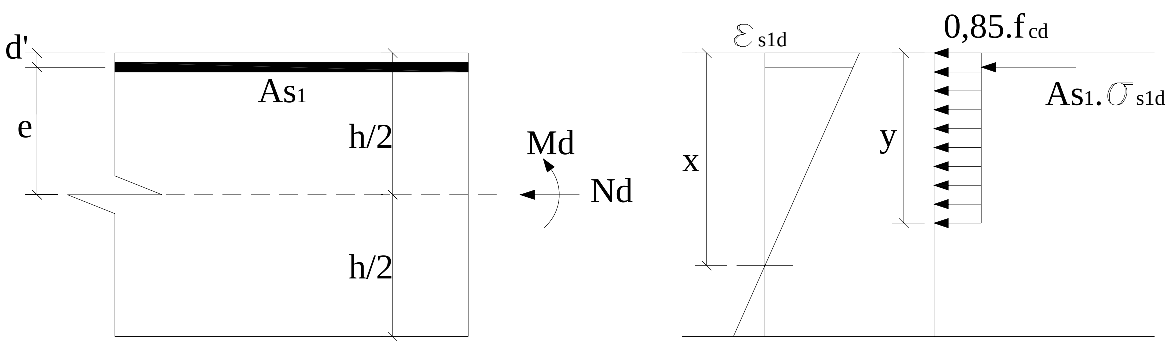
$$\boxed{\mu_{d_{A-B}} = (\nu_d - \kappa_h) \cdot (1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h)}$$ *(eq. 14)*



(fig. 4)

1.3 Zona B

Na zona B, sendo As_2 = 0, o problema fica com 2 equações e 2 incógnitas (ξ e ω_1), tendo solução única.



(fig. 5)

$Nd = 0{,}85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0{,}80x + As_1 \cdot \sigma_{s1d}$ *(eq. 15)*

$Md = 0{,}85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0{,}80x(0{,}5 \cdot h - 0{,}5 \cdot y) + As_1 \cdot \sigma_{s1d} \cdot (d - 0{,}5 \cdot h)$ *(eq. 16)*

Dividindo a *(eq. 15)* por $0{,}85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d$ e a *(eq. 16)* por $0{,}85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2$, fica-se com:

$\nu_d = 0{,}8 \cdot \xi + \omega_1 \cdot \dfrac{\sigma_{s1d}}{f_{yd}}$ *(eq. 17)*

$$\mu_d = 0{,}8 \cdot \xi \cdot (0{,}5 \cdot \kappa_h - 0{,}4 \cdot \xi) + \omega_1 \cdot \frac{\sigma_{s1d}}{f_{yd}} \cdot (1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h) \qquad \textit{(eq. 18)}$$

Da *(eq. 17)*:

$$\omega_1 \cdot \frac{\sigma_{s1d}}{f_{yd}} = \nu_d - 0{,}8 \cdot \xi$$

Levando na *(eq. 18)* e desenvolvendo chega-se a:

$$\boxed{\xi = 1{,}25 \cdot (\kappa_h - 1) + \sqrt{1{,}5625 \cdot (1 - \kappa_h)^2 + \frac{\nu_d - 0{,}5 \cdot \nu_d \cdot \kappa_h - \mu_d}{0{,}32}}} \qquad \textit{(eq. 19)}$$

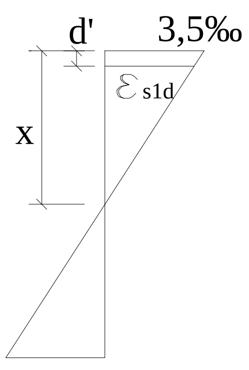
Se $\mu_d = (\nu_d - \kappa_h) \cdot (1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h)$ (limite com a zona A), resulta ξ = 1,25 κ_h. Isso quer dizer que nesse caso *y = 0,80; x = h* e a seção estará inteiramente comprimida, valendo a formulação desenvolvida. Se resultasse ξ > 1,25 κ_h, não se poderia adotar *y = 0,80.x*, pois desse modo estar-se-ia computando uma área inexistente de concreto comprimido.

Uma vez obtido o valor de ξ, a primeira equação de equilíbrio fornece a taxa de armadura:

$$\boxed{\omega_1 = \frac{\nu_d - 0{,}8 \cdot \xi}{\dfrac{\sigma_{s1d}}{f_{yd}}}} \qquad \textit{(eq. 20)}$$

Para determinar σ_{s1d} é preciso determinar ε_{s1d} em função de ξ e do domínio.

No *domínio 4* (ξ ≤ κ_h).



$$\frac{\varepsilon_{s1d}}{3{,}5} = \frac{x - d'}{x}$$

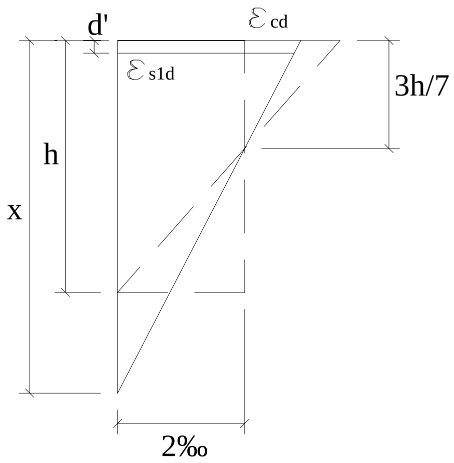
Sendo $d' = h - d$

$$\varepsilon_{s1d} = \frac{(x - h + d)}{x} \cdot 3{,}5‰$$

$$\boxed{\varepsilon_{s1d} = \frac{(\xi - \kappa_h + 1)}{\xi} \cdot 3{,}5‰} \qquad \textit{(eq. 21)}$$

(fig. 6)

No *domínio 5* (ξ > κ_h).



(fig. 7)

$$\frac{\varepsilon_{cd}}{x} = \frac{\varepsilon_{cd} - 2}{\frac{3}{7}h}$$

$$\varepsilon_{cd} \cdot \frac{3}{7}h = \varepsilon_{cd} \cdot x - 2x$$

$$\varepsilon_{cd} = \frac{14x}{7x - 3h}$$

$$\varepsilon_{cd} = \frac{14\xi}{7\xi - 3\kappa_h}$$

$$\frac{\varepsilon_{s1d}}{x - d'} = \frac{\varepsilon_{cd}}{x} \rightarrow \varepsilon_{s1d} = \frac{(x - d')}{x} \cdot \varepsilon_{cd}$$

Sendo $d' = h - d$, vem:

$$\varepsilon_{s1d} = \frac{(x - h + d)}{x} \cdot \varepsilon_{cd}$$

$$\varepsilon_{s1d} = \frac{(\xi - \kappa_h + 1)}{\xi} \cdot \varepsilon_{cd}$$

$$\boxed{\varepsilon_{s1d} = \frac{14 \cdot (\xi - \kappa_h + 1)}{7 \cdot \xi - 3 \cdot \kappa_h}} \qquad \textit{(eq. 22)}$$

1.3.1 Limite com a Zona O

Na zona O, por definição, $As_1 = As_2 = 0$.

Sendo $\omega_2 = 0$, a *(eq. 17)* de equilíbrio fornece:

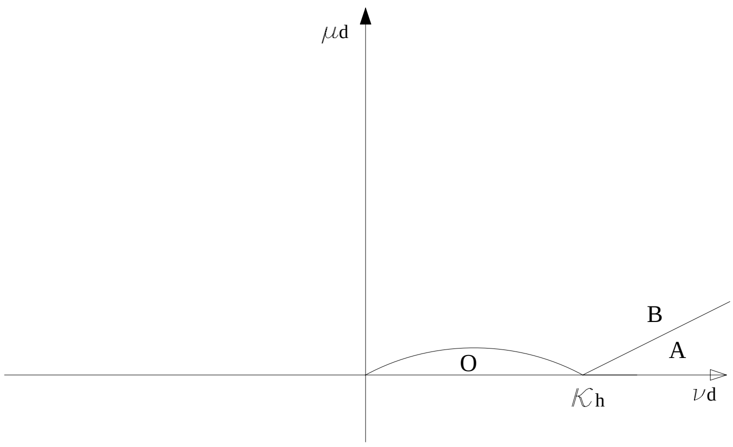
$$\nu_d = 0{,}8 \cdot \xi \rightarrow \xi = \frac{\nu_d}{0{,}8}$$

Levando na *(eq. 18)* de equilíbrio:

$$\mu_d = \nu_d \cdot \left(0{,}5 \cdot \kappa_h - \frac{0{,}4 \cdot \nu_d}{0{,}8} \right)$$

$$\boxed{\mu_{d_0} = 0{,}5 \cdot \kappa_h \cdot \nu_d - \frac{\nu_d^{\;2}}{2}} \qquad \textit{(eq. 23)}$$

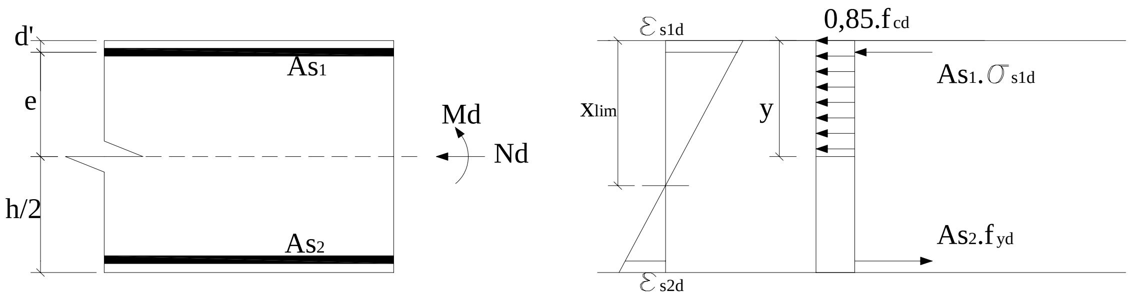
Equação de uma parábola do 2º grau com raízes $v_d = 0$ e $v_d = Kh$.



(fig. 8)

1.4 Zona C

Na zona C As_1 está comprimida e As_2, tracionada. São três incógnitas: $As_1(\omega_1)$, $As_2(\omega_2)$ e x (ξ). As equações de equilíbrio sendo duas, o problema apresenta infinitas soluções. A melhor solução é a que minimiza a soma ($As_1 + As_2$). Lauro Modesto dos Santos em sua obra: Cálculo de Concreto Armado, Vol. 1, apresenta os resultados de investigação de qual valor de ξ torna a solução mais econômica. Para o aço CA-50A a solução mais econômica corresponde a $\xi = \xi_{lim}$.



(fig. 9)

Equações de equilíbrio:

$$Nd = 0{,}85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0{,}80x + As_1 \cdot \sigma_{s1d} - As_2 \cdot f_{yd} \qquad \textit{(eq. 24)}$$

$$Md = 0{,}85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0{,}80x(0{,}5 \cdot h - 0{,}5 \cdot y) + As_1 \cdot \sigma_{s1d} \cdot (d - 0{,}5 \cdot h) + As_2 \cdot f_{yd} \cdot (d - 0{,}5 \cdot h)$$

(eq. 25)

Dividindo a *(eq. 24)* por $0{,}85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d$ e a *(eq. 25)* por $0{,}85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2$ e fazendo $\xi = \xi_{lim}$, fica:

$$\boxed{\nu_d = 0{,}8 \cdot \xi_{\lim} + \omega_1 \cdot \frac{\sigma_{s1d}}{f_{yd}} - \omega_2} \qquad \textit{(eq. 26)}$$

$$\boxed{\mu_d = 0{,}8 \cdot \xi_{\lim} \cdot (0{,}5 \cdot \kappa_h - 0{,}4 \cdot \xi_{\lim}) + \omega_1 \cdot \frac{\sigma_{s1d}}{f_{yd}} \cdot (1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h) + \omega_2 \cdot (1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h)}$$

(eq. 27)

Da *(eq.26)* tem-se:

$$\omega_1 \cdot \frac{\sigma_{s1d}}{f_{yd}} = \nu_d - 0{,}8 \cdot \xi_{\lim} + \omega_2 \qquad \textit{(eq. 28)}$$

Substituindo na *(eq. 27)* e desenvolvendo chega-se a:

$$\boxed{\omega_2 = \frac{\mu_d - 0{,}8 \cdot \xi_{\lim} \cdot (\kappa_h - 1 - 0{,}4 \cdot \xi_{\lim}) - \nu_d \cdot (1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h)}{(2 - \kappa_h)}} \qquad \textit{(eq. 29)}$$

Obtido o valor de ω_2, facilmente se chega ao valor ω_1, através de:

$$\boxed{\omega_1 = \frac{\nu_d - 0{,}8 \cdot \xi_{\lim} + \omega_2}{\sigma_{s1d} / f_{yd}}} \qquad \textit{(eq. 30)}$$

A relação σ_{s1d}/f_{yd} vai depender do valor de ξ_{s1d} e do tipo de aço.

Em função de κ_h:

$$\varepsilon_{s1d} = \frac{(\xi_{\lim} - \kappa_h + 1)}{\xi_{\lim}} \cdot 3{,}5‰ \qquad \textit{(eq. 21)}$$

1.4.1 Limite com a Zona B

Na zona B tem-se $As_2 = 0$ ($\omega_2 = 0$).

Fazendo $\omega_2 = 0$ na expressão que permite o seu cálculo fica:

$$\boxed{\mu_{d_{C-B}} = \nu_d \cdot (1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h) + 0{,}8 \cdot \xi_{\lim} \cdot (\kappa_h - 1 - 0{,}4 \cdot \xi_{\lim})} \qquad \textit{(eq. 31)}$$

1.4.2 Limite com a Zona D

Na zona D tem-se $As_1 = 0$.

Fazendo $\omega_1 = 0$ na expressão que permite seu cálculo fica:

$$\nu_d - 0{,}8 \cdot \xi_{\lim} + \omega_2 = 0$$

Substituindo o valor de ω_2 dado pela expressão que permite o seu cálculo e desenvolvendo, tem-se:

$$\mu_{d_{C-D}} = \nu_d \cdot (0{,}5 \cdot \kappa_h - 1) + 0{,}8 \cdot \xi_{\lim} \cdot (1 - 0{,}4 \cdot \xi_{\lim})$$

Como já foi visto:

$$\mu_{d_{\lim}} = 0{,}8 \cdot \xi_{\lim} (1 - 0{,}4 \cdot \xi_{\lim})$$

Assim, a reta de separação das zonas C e D fica:

$$\boxed{\mu_{d_{C-D}} = \nu_d \cdot (0{,}5 \cdot \kappa_h - 1) + \mu_{d_{\lim}}} \qquad \textit{(eq. 32)}$$

1.4.3 Limite com a Zona O

Sendo na zona O $\omega_1 = \omega_2 = 0$, a *(eq.26)* de equilíbrio fica:

$$\nu_d = 0{,}8 \cdot \xi_{\lim} \qquad \textit{(eq. 33)}$$

Levando esse valor na *(eq. 27)* de equilíbrio:

$$\mu_{d_O} = \nu_d \cdot \left(0{,}5 \cdot \kappa_h - \frac{\nu_d}{2} \right)$$

$$\boxed{\mu_{d_O} = 0{,}5 \cdot \kappa_h \cdot \nu_d - \frac{\nu_d^{\,2}}{2}} \qquad \textit{(eq. 23)}$$

Nota-se que é a mesma equação obtida através da formulação da zona B.

1.4.4 Caso particular de flexão simples com armadura dupla

No caso da flexão simples, Nd = 0 (ν_d = 0) e as armaduras ω_1 e ω_2 são determinadas pelas expressões:

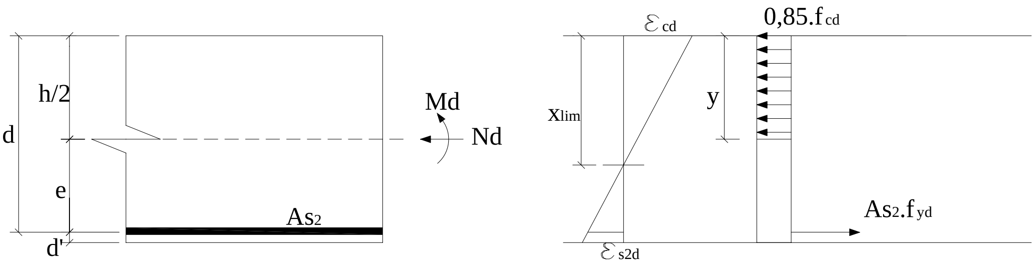
$$\omega_2 = \frac{\mu_d - 0{,}8 \cdot \xi_{\lim} \cdot \left(\kappa_h - 1 - 0{,}4 \cdot \xi_{\lim}\right)}{\left(2 - \kappa_h\right)}$$

$$\boxed{\omega_2 = \frac{\left(\mu_d - \mu_{d_{\lim}}\right)}{\left(2 - \kappa_h\right)} + 0{,}8 \cdot \xi_{\lim}} \qquad \text{(eq. 34)}$$

$$\boxed{\omega_1 = \frac{\left(\mu_d - \mu_{d_{\lim}}\right)}{\left(2 - \kappa_h\right) \cdot \sigma_{s1d} / f_{yd}}} \qquad \text{(eq. 35)}$$

1.5 Zona D

Na zona D, sendo As_1 = 0 e As_2 tracionada, o problema fica com 2 equações e 2 incógnitas (ξ e ω_2), tendo solução única.



(fig. 10)

Equações de equilíbrio

$$Nd = 0{,}85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0{,}8x - As_2 \cdot \sigma_{s2d} \qquad \text{(eq. 36)}$$

$$Md = 0{,}85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0{,}8x \cdot \left(0{,}5h + 0{,}4x\right) + As_2 \cdot \sigma_{s2d} \cdot \left(d - 0{,}5 \cdot h\right) \qquad \text{(eq. 37)}$$

Dividindo a *(eq. 37)* por $0{,}85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d$ e a *(eq. 38)* por $0{,}85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2$, fica:

$$\boxed{\nu_d = 0{,}8 \cdot \xi - \omega_2 \cdot \frac{\sigma_{s2d}}{f_{yd}}} \qquad \text{(eq. 38)}$$

$$\boxed{\mu_d = 0{,}8 \cdot \xi \cdot \left(0{,}5 \cdot \kappa_h - 0{,}4 \cdot \xi\right) + \omega_2 \cdot \frac{\sigma_{s2d}}{f_{yd}} \cdot \left(1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h\right)} \qquad \text{(eq. 39)}$$

Da *(eq. 36)* tem-se:

$$\omega_2 \cdot \frac{\sigma_{s2d}}{f_{yd}} = 0{,}8 \cdot \xi - \nu_d$$ *(eq. 40)*

Substituindo na *(eq. 36)* e desenvolvendo chega-se a:

$$\boxed{\xi = 1{,}25 - \sqrt{1{,}5625 - \frac{\nu_d \cdot (1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h) + \mu_d}{0{,}32}}}$$ *(eq. 41)*

Obtido o valor de ξ, a armadura ω_2 é facilmente obtida através da *(eq. 38)* de equilíbrio.

$$\omega_2 = \frac{(0{,}8 \cdot \xi - \nu_d)}{\sigma_{s2d}/f_{yd}}$$ *(eq. 42)*

A relação σ_{s2d}/f_{yd} vai depender do valor de ε_{s2d}. Se $\xi \geq \xi_{lim}$ está-se no *domínio 4* onde vale a relação.

$$\varepsilon_{s2d} = \frac{(1 - \xi)}{\xi} \cdot 3{,}5‰$$

Obtido o valor de ε_{s2d} e conhecido o tipo de aço determina-se o valor de σ_{s2d}/f_{yd}.

1.5.1 Caso particular de flexão simples com armadura simples

No caso da flexão simples $\nu_d = 0$. Além disso, como está-se no caso de armadura simples, onde $\xi \leq \xi_{lim}$, tem-se que $\sigma_{s2d} = f_{yd}$.

Fazendo $\nu_d = 0$ na expressão de ξ, tem-se:

$$\xi = 1{,}25 - \sqrt{1{,}5625 - \frac{\mu_d}{0{,}32}}$$ *(eq. 43)*

A taxa de armadura ω_2 fica:

$$\omega_2 = 0{,}8 \cdot \xi$$

$$\omega_2 = 0{,}8 \cdot \left(1{,}25 - \sqrt{1{,}5625 - \frac{\mu_d}{0{,}32}}\right)$$

$$\boxed{\omega_2 = 1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_d}}$$ *(eq. 44)*

1.5.2 Limite com a Zona O

Na zona O sendo $\omega_1 = \omega_2 = 0$, a *(eq. 38)* de equilíbrio fica:

$$\nu_d = 0{,}8 \cdot \xi$$ *(eq. 45)*

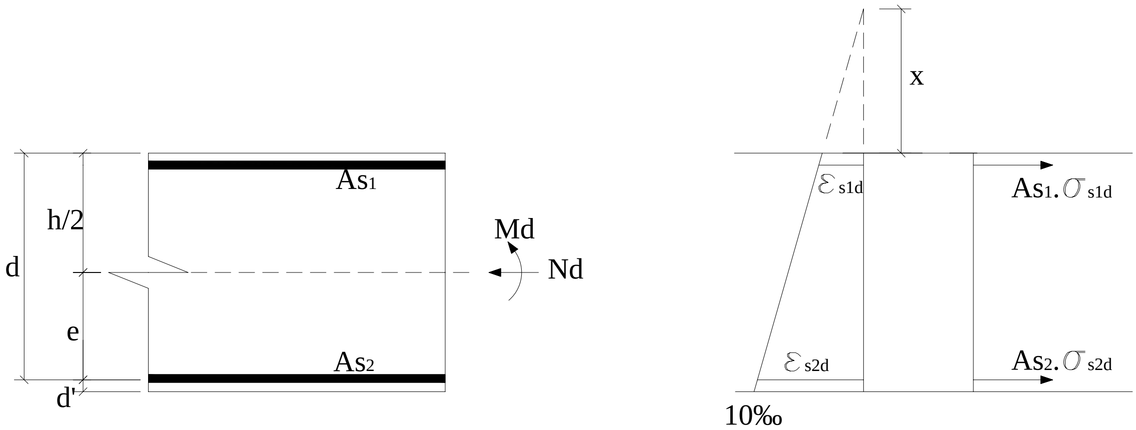
Levando esse valor na *(eq. 39)* de equilíbrio:

$$\mu_{do} = \nu_d \cdot \left(0{,}5 \cdot \kappa_h - \frac{\nu_d}{2}\right)$$

$$\mu_{do} = 0{,}5 \cdot \kappa_h \cdot \nu_d - \frac{\nu_d^{\,2}}{2} \qquad \textit{(eq. 23)}$$

1.6 Zona E

Na zona E As_1 e As_2 são tracionadas. São três as incógnitas: As_1 (ω_1), As_2 (ω_2) e x (ξ) e apenas duas equações de equilíbrio. São infinitas as soluções. A solução mais econômica é aquela em que $\sigma_{s1d} = \sigma_{s2d} = f_{yd}$ (as duas armaduras escoando). Como na zona E o concreto não trabalha, pode-se determinar ω_1 e ω_2 diretamente das equações de equilíbrio, sem determinar o valor de ξ.



(fig. 11)

Na zona E está-se no *domínio 1*.

Basta impor *x* de tal ordem que $\varepsilon_{s1d} \geq \varepsilon_{yd}$.

Com isso, garante-se $\sigma_{s1d} = \sigma_{s2d} = f_{yd}$.

Equações de equilíbrio:

$$Nd = -(As_1 + As_2) \cdot f_{yd} \qquad \textit{(eq. 46)}$$

$$Md = As_2 \cdot f_{yd} \cdot (d - 0{,}5 \cdot h) - As_1 \cdot f_{yd} \cdot (d - 0{,}5 \cdot h) \qquad \textit{(eq. 47)}$$

Dividindo a *(eq. 46)* por $0{,}85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d$ e a *(eq. 47)* por $0{,}85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2$, fica:

$$\boxed{\nu_d = -\omega_1 - \omega_2} \qquad \textit{(eq. 48)}$$

$$\boxed{\mu_d = \omega_2 \cdot (1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h) - \omega_1 \cdot (1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h)} \qquad \textit{(eq. 49)}$$

Resolvendo o sistema, vem:

$$\boxed{\omega_1 = \frac{-\mu_d - \nu_d \cdot (1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h)}{(2 - \kappa_h)}} \qquad \textit{(eq. 50)}$$

$$\boxed{\omega_2 = \frac{\mu_d - \nu_d \cdot (1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h)}{(2 - \kappa_h)}} \qquad \textit{(eq. 51)}$$

Deve-se observar que, por convenção, quando a força normal é de tração, ν_d resulta negativo.

No caso particular da tração simples, onde $\mu_d = 0$, resulta:

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{-\nu_d \cdot (1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h)}{(2 - \kappa_h)}$$

$$\boxed{\omega_1 = \omega_2 = \frac{-\nu_d}{2}} \qquad \textit{(eq. 52)}$$

1.6.1 Limite com a Zona D

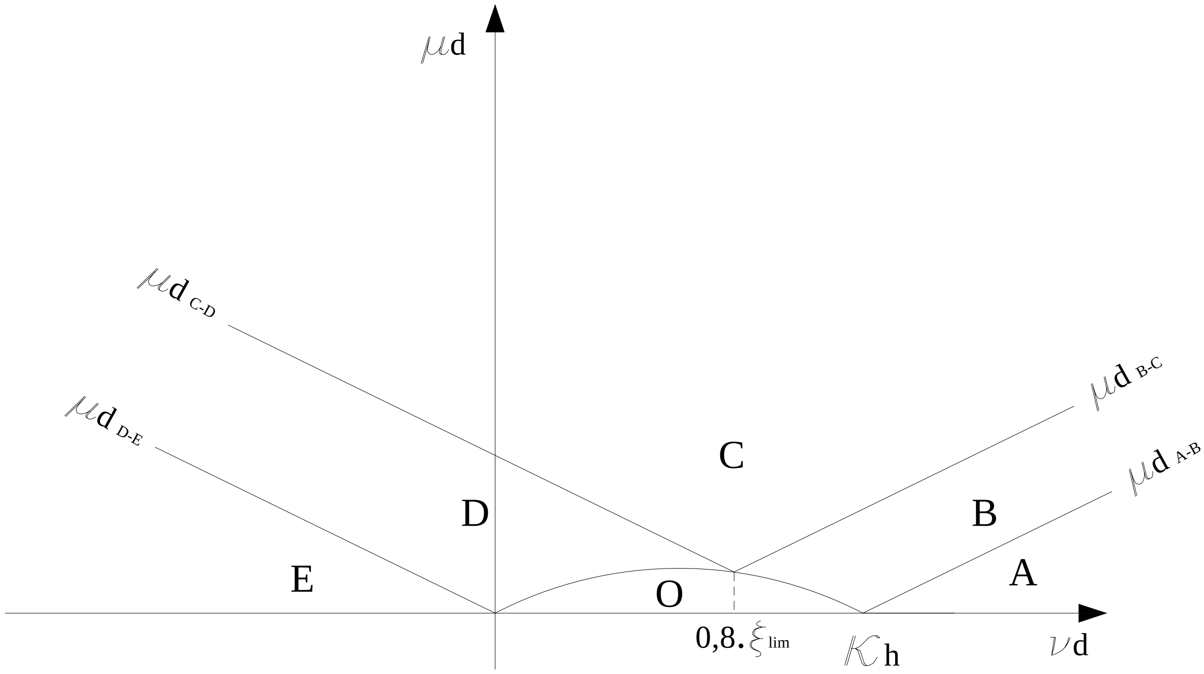
Como na zona D tem-se $\omega_1 = 0$, basta fazer $\omega_1 = 0$ na equação que permite seu cálculo, chegando-se a :

$$\boxed{\mu_{d_{D-E}} = -\nu_d \cdot (1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h)} \qquad \textit{(eq. 53)}$$

1.7 Limite entre a 6 Zonas

Para determinar as armaduras, uma vez dados os valores de ν_d, μ_d e *Kh*, o primeiro passo consiste em determinar em que zona se encontra a solicitação.

Reunindo os resultados encontrados, tem-se:



(fig. 12)

$$\mu_{d_{A-B}} = (\nu_d - \kappa_h) \cdot (1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h) \qquad \textit{(eq. 14)}$$

$$\mu_{d_{B-C}} = \nu_d \cdot (1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h) + \mu_{d_{\lim}} - 0{,}8 \cdot \xi_{\lim} \cdot (2 - \kappa_h) \qquad \textit{(eq. 31)}$$

$$\mu_{d_{C-D}} = \nu_d \cdot (0{,}5 \cdot \kappa_h - 1) + \mu_{d_{\lim}} \qquad \textit{(eq. 32)}$$

$$\mu_{d_{D-E}} = -\nu_d \cdot (1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h) \qquad \textit{(eq. 53)}$$

$$\mu_{do} = 0{,}5 \cdot \kappa_h \cdot \nu_d - \frac{\nu_d^{\,2}}{2} \qquad \textit{(eq. 23)}$$

1.8 Exemplos

Para uma seção de concreto com b = 20cm, h = 60cm, d' = 3cm, fck = 20 MPa e aço CA-50A, dimensionar as armaduras para os seguintes pares de esforços:

- Nk = 1400 kN, Mk = 90 kN.m
- Nk = 790 kN, Mk = 140 kN.m
- Nk = 790 kN, Mk = 200 kN.m
- Nk = 300 kN, Mk = 112 kN.m
- Nk = -490 kN, Mk = 395 kN.m
- Nk = -490 kN, Mk = 279 kN.m

- Nk = -490 kN, Mk = 100 kN.m

G.1) Nk = 1400 kN e Mk = 90 kN.m

$$\nu_d = \frac{1,4 \cdot 1400}{0,85 \cdot \frac{2}{1,4} \cdot 20 \cdot 57} = 1,416$$

$$\mu_d = \frac{1,4 \cdot 9000}{0,85 \cdot \frac{2}{1,4} \cdot 20 \cdot 57^2} = 0,160$$

Pesquisa da zona de solicitação

$$\kappa_h = \frac{60}{57} = 1,053$$

Como $\nu_d > \kappa_h$ só pode ser zona A, B ou C.

Teste no limite entre as zonas A e B:

$$\mu_{d_{A-B}} = (\nu_d - \kappa_h) \cdot (1 - 0,5 \cdot \kappa_h)$$

$$\mu_{d_{A-B}} = (1,416 - 1,053) \cdot (1 - 0,5 \cdot 1,053) = 0,172$$

Como $\mu_d = 0,160 < \mu_{d_{A-B}} \rightarrow$ zona A

Fórmulas:

$$\omega_2 = \frac{f_{yd}}{2 \cdot \sigma_{sd}} \cdot \left(\nu_d - \frac{\mu_d}{(1 - 0,5 \cdot \kappa_h)} - \kappa_h \right)$$

$$\frac{\sigma_{sd}}{f_{yd}} = 0,966$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2 \cdot 0,966} \cdot \left(1,416 - \frac{0,160}{(1 - 0,5 \cdot 1,053)} - 1,053 \right) = 0,0132$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2 \cdot 0,966} \cdot \left(1,416 + \frac{0,160}{(1 - 0,5 \cdot 1,053)} - 1,053 \right) = 0,3629$$

$$As_1 = 11,55 cm^2$$

$$As_2 = 0,42 cm^2$$

G.2) Nk = 790 kN e Mk = 140 kN.m

$$\nu_d = \frac{1,4 \cdot 790}{0,85 \cdot \frac{2}{1,4} \cdot 20 \cdot 57} = 0,799$$

$$\mu_d = \frac{1,4 \cdot 14000}{0,85 \cdot \frac{2}{1,4} \cdot 20 \cdot 57^2} = 0,248$$

$$\xi_{\lim} = 0,6284$$

$$0,8 \cdot \xi_{\lim} = 0,5027$$

Como $0,8 \cdot \xi_{\lim} < \nu_d < \kappa_h \rightarrow$ Zona O, B ou C.

Teste no limite da zona O:

$$\mu_{do} = 0,5 \cdot \kappa_h \cdot \nu_d - \frac{\nu_d{}^2}{2}$$

$$\mu_{do} = 0,5 \cdot 1,053 \cdot 0,799 - \frac{0,799^2}{2} = 0,101$$

Como $\mu_d > \mu_{d_O} \rightarrow$ zonas B ou C.

Teste no limite entre as zonas B e C:

$$\mu_{d_{B-C}} = 0,799 \cdot (1 - 0,5 \cdot 1,053) + 0,376 - 0,8 \cdot 0,6284 \cdot (2 - 1,053)$$

$$\mu_{d_{B-C}} = 0,278$$

Como $\mu_d < \mu_{d_{B-C}} \rightarrow$ zona B.

$$\xi = 1,25 \cdot (1,053 - 1) + \sqrt{1,5625 \cdot (1 - 1,053)^2 + \frac{0,799 - 0,5 \cdot 0,799 \cdot 1,053 - 0,248}{0,32}}$$

$\xi = 0,708 \rightarrow$ *domínio 4*.

Deformação na armadura 1:

$$\varepsilon_{s1d} = \frac{(\xi - \kappa_h + 1)}{\xi} \cdot 3,5‰$$

$$\varepsilon_{s1d} = \frac{(0,708 - 1,053 + 1)}{0,708} \cdot 3,5‰ = 3,24‰ > \varepsilon_{yd} = 2,07‰$$

$$\frac{\sigma_{s1d}}{f_{yd}} = 1,0$$

Taxa de armadura:

$$\omega_1 = \nu_d - 0,8 \cdot \xi$$

$$\omega_1 = 0,799 - 0,8 \cdot 0,708 = 0,2326$$

$$As_1 = 7,41 cm^2$$

G.3) Nk = 790 kN e Mk = 200 kN.m

$$\nu_d = \frac{1{,}4 \cdot 790}{0{,}85 \cdot \frac{2}{1{,}4} \cdot 20 \cdot 57} = 0{,}799$$

$$\mu_d = \frac{1{,}4 \cdot 10000}{0{,}85 \cdot \frac{2}{1{,}4} \cdot 20 \cdot 57^2} = 0{,}355$$

Pesquisa da zona de solicitação.

Sendo ν_d igual ao problema anterior, aproveitam-se os resultados.

Sendo $\mu_d > \mu_{d_{B-C}} \rightarrow$ zona C.

Determinação das armaduras:

$$\omega_2 = \frac{\mu_d - 0{,}8 \cdot \xi_{\lim} \cdot (\kappa_h - 1 - 0{,}4 \cdot \xi_{\lim}) - \nu_d \cdot (1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h)}{(2 - \kappa_h)}$$

$$\omega_2 = \frac{0{,}355 - 0{,}8 \cdot 0{,}6284 \cdot (1{,}053 - 1 - 0{,}4 \cdot 0{,}6284) - 0{,}799 \cdot (1 - 0{,}5 \cdot 1{,}053)}{(2 - 1{,}053)}$$

$$\omega_2 = 0{,}0807$$

Para determinar ω_1 é preciso conhecer a relação σ_{s1d} / f_{yd} que depende de ε_{s1d}.

$$\varepsilon_{s1d} = \frac{(\xi_{\lim} - \kappa_h + 1)}{\xi_{\lim}} \cdot 3{,}5‰$$

$$\varepsilon_{s1d} = \frac{(0{,}6284 - 1{,}053 + 1)}{0{,}6284} \cdot 3{,}5‰ = 3{,}207‰ > \varepsilon_{yd} = 2{,}07‰$$

Logo, $\sigma_{s1d} / f_{yd} = 1{,}0$

$$\omega_1 = \frac{\nu_d - 0{,}8 \cdot \xi_{\lim} + \omega_2}{\sigma_{s1d} / f_{yd}}$$

$$\omega_1 = \frac{0{,}799 - 0{,}8 \cdot 0{,}6284 + 0{,}0807}{1{,}0}$$

$$\omega_1 = 0{,}377$$

$$As_1 = 12{,}00 cm^2$$

$$As_2 = 2{,}57 cm^2$$

G.4) Nk = 300 kN e Mk = 112 kN.m

$$\nu_d = \frac{1{,}4 \cdot 300}{0{,}85 \cdot \frac{2}{1{,}4} \cdot 20 \cdot 57} = 0{,}303$$

$$\mu_d = \frac{1{,}4 \cdot 11200}{0{,}85 \cdot \frac{2}{1{,}4} \cdot 20 \cdot 57^2} = 0{,}199$$

Pesquisa da zona de solicitação.

Sendo $\nu_d < 0{,}8 \cdot \xi_{\lim} = 0{,}5027 \rightarrow$ Zona O, D ou C.

Limite com a zona O:

$$\mu_{do} = 0{,}5 \cdot \kappa_h \cdot \nu_d - \frac{\nu_d^{\ 2}}{2}$$

$$\mu_{do} = 0{,}5 \cdot 1{,}053 \cdot 0{,}303 - \frac{0{,}303^2}{2} = 0{,}114$$

Como $\mu_d > \mu_{d_O} \rightarrow$ zonas D ou C.

Limite entre as zonas C e D:

$$\mu_{d_{C-D}} = \nu_d \cdot (0{,}5 \cdot \kappa_h - 1) + \mu_{d_{\lim}}$$

$$\mu_{d_{C-D}} = 0{,}303 \cdot (0{,}5 \cdot 1{,}053 - 1) + 0{,}376$$

$$\mu_{d_{C-D}} = 0{,}232$$

Como $\mu_d < \mu_{d_{C-D}} \rightarrow$ zona D.

Posição da linha neutra.

$$\xi = 1{,}25 - \sqrt{1{,}5625 - \frac{\nu_d \cdot (1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h) + \mu_d}{0{,}32}}$$

$$\xi = 1{,}25 - \sqrt{1{,}5625 - \frac{0{,}303 \cdot (1 - 0{,}5 \cdot 1{,}053) + 0{,}199}{0{,}32}}$$

$$\xi = 0{,}5485$$

Sendo $\xi < \xi_{\lim} \rightarrow \sigma_{s2d} = f_{yd}$

Armadura tracionada:

$$\omega_2 = 0,8 \cdot \xi - \nu_d$$

$$\omega_2 = 0,8 \cdot 0,5485 - 0,303 = 0,1358$$

$$As_2 = 4,32 cm^2$$

G.5) Nk = -490 kN e Mk = 395 kN.m

$$\nu_d = \frac{1,4 \cdot (-490)}{0,85 \cdot \frac{2}{1,4} \cdot 20 \cdot 57} = -0,496$$

$$\mu_d = \frac{1,4 \cdot 39500}{0,85 \cdot \frac{2}{1,4} \cdot 20 \cdot 57^2} = 0,701$$

Pesquisa da zona de solicitação.

Por se tratar de flexo-tração, as zonas possíveis são C, D e E.

Limite entre as zonas C e D.

$$\mu_{d_{C-D}} = \nu_d \cdot (0,5 \cdot \kappa_h - 1) + \mu_{d_{\lim}}$$

$$\mu_{d_{C-D}} = (-0,496) \cdot (0,5 \cdot 1,053 - 1) + 0,376$$

$$\mu_{d_{C-D}} = 0,611$$

Sendo $\mu_d > \mu_{d_{C-D}} \rightarrow$ zona C.

Determinação das armaduras:

$$\omega_2 = \frac{\mu_d - 0,8 \cdot \xi_{\lim} \cdot (\kappa_h - 1 - 0,4 \cdot \xi_{\lim}) - \nu_d \cdot (1 - 0,5 \cdot \kappa_h)}{(2 - \kappa_h)}$$

$$\omega_2 = \frac{0,701 - 0,8 \cdot 0,6284 \cdot (1,053 - 1 - 0,4 \cdot 0,6284) - (-0,496) \cdot (1 - 0,5 \cdot 1,053)}{(2 - 1,053)}$$

$$\omega_2 = 1,0934$$

Para determinar ω_1 necessita-se da relação σ_{s2d} / f_{yd} .

$$\varepsilon_{s1d} = \frac{(0,6284 - 1,053 + 1)}{0,6284} \cdot 3,5‰ = 3,207‰ > \varepsilon_{yd} = 2,07‰$$

Logo, $\sigma_{s1d} / f_{yd} = 1,0$

$$\omega_1 = \frac{\nu_d - 0,8 \cdot \xi_{\lim} + \omega_2}{\sigma_{s1d} / f_{yd}}$$

$$\omega_1 = \frac{-0{,}496 - 0{,}8 \cdot 0{,}6284 + 1{,}0934}{1{,}0}$$

$$\omega_1 = 0{,}0947$$

$$As_1 = 3{,}02 cm^2$$

$$As_2 = 34{,}81 cm^2$$

G.6) Nk = -490 kN e Mk = 279 kN.m

$$\nu_d = \frac{1{,}4 \cdot (-490)}{0{,}85 \cdot \frac{2}{1{,}4} \cdot 20 \cdot 57} = -0{,}496$$

$$\mu_d = \frac{1{,}4 \cdot 27900}{0{,}85 \cdot \frac{2}{1{,}4} \cdot 20 \cdot 57^2} = 0{,}495$$

Como $\mu_d < \mu_{d_{C-D}} = 0{,}611$ (exemplo anterior), as zonas possíveis são D e E.

Limite entre as zonas D e E.

$$\mu_{d_{D-E}} = -\nu_d \cdot (1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h)$$

$$\mu_{d_{D-E}} = -(-0{,}496) \cdot (1 - 0{,}5 \cdot 1{,}053) = 0{,}235$$

Sendo $\mu_d > \mu_{d_{D-E}} \rightarrow$ zona D.

Determinação de ξ.

$$\xi = 1{,}25 - \sqrt{1{,}5625 - \frac{\nu_d \cdot (1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h) + \mu_d}{0{,}32}}$$

$$\xi = 1{,}25 - \sqrt{1{,}5625 - \frac{(-0{,}496) \cdot (1 - 0{,}5 \cdot 1{,}053) + 0{,}496}{0{,}32}}$$

$$\xi = 0{,}386 < \xi_{\lim} \rightarrow \sigma_{s2d} = f_{yd}$$

Armadura tracionada:

$$\omega_2 = 0{,}8 \cdot \xi - \nu_d$$

$$\omega_2 = 0{,}8 \cdot 0{,}386 - (-0{,}496) = 0{,}8048$$

$$As_2 = 25{,}62 cm^2$$

G.7) Nk = -490 kN e Mk = 100 kN.m

$$\nu_d = \frac{1{,}4 \cdot (-490)}{0{,}85 \cdot \frac{2}{1{,}4} \cdot 20 \cdot 57} = -0{,}496$$

$$\mu_d = \frac{1{,}4 \cdot 10000}{0{,}85 \cdot \frac{2}{1{,}4} \cdot 20 \cdot 57^2} = 0{,}1774$$

Pesquisa da zona de solicitação

De acordo com exemplo anterior:

$\mu_d < \mu_{d_{D-E}} \rightarrow$ zona E.

Determinação das armaduras:

$$\omega_2 = \frac{\mu_d - \nu_d \cdot (1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h)}{(2 - \kappa_h)}$$

$$\omega_2 = \frac{0{,}1774 - (-0{,}496) \cdot (1 - 0{,}5 \cdot 1{,}053)}{(2 - 1{,}053)}$$

$$\omega_2 = 0{,}435$$

$$\omega_1 = \frac{-\mu_d - \nu_d \cdot (1 - 0{,}5 \cdot \kappa_h)}{(2 - \kappa_h)}$$

$$\omega_1 = \frac{-0{,}1774 - (-0{,}496) \cdot (1 - 0{,}5 \cdot 1{,}053)}{(2 - 1{,}053)}$$

$$\omega_1 = 0{,}0607$$

$$As_1 = 1{,}93 cm^2$$

$$As_2 = 13{,}85 cm^2$$