Методы оптимизации, Лабораторная работа №2

Кирилл Кадомцев и Андрей Крюков

Май 2025

Содержание

1. Описание методов

Был реализован метод Ньютона и метод Ньютона с выбором шага.

Для удобства и расширяемости, методы реализовывались так, чтоб можно было в дальнейшем использовать их для любых размерностей (исходя из предположения, что это может стать объектом исследования в дальнейших лабораторных работах). Для стратегий был создан специальный интерфейс с методом *step*, позволяющий в дальнейшем расширить список реализованных методов.

2. Тестирование

Для тестирования были выбраны несколько функций с различными точками минимума. Также, была использованна функция Химмельблау, поскольку она мультимодальная.

1. **Параболоид**
   - $f(x, y) = x^2 + y^2$
   - $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$
2. **Эллипс**
   - $f(x, y) = 4x + y$

- $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 8x \\ 2y \end{pmatrix}$

3. **Функция Розенброка**

   - $f(x, y) = (1 - x)^2 + 100(y - x^2)^2$
   - $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -2(1 - x) - 400x(y - x^2) \\ 200(y - x^2) \end{pmatrix}$

4. **Квадратичная форма (3, -2)**

   - $f(x, y) = (x - 3)^2 + (y + 2)^2$
   - $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x - 3) \\ 2(y + 2) \end{pmatrix}$

5. **Квадратичная форма (2, -1)**

   - $f(x, y) = x + y$
   - $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 10(x - 2) \\ 6(y + 1) \end{pmatrix}$

6. **Функция Химмельблау**

   - $f(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2$
   - $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x(x^2 + y - 11) + 2(x + y^2 - 7) \\ 2(x^2 + y - 11) + 4y(x + y^2 - 7) \end{pmatrix}$

Ниже приведены результаты оптимизации в зависимости от стратегии выбора шага. В данном случае *(nan, nan)* является результатом переполнения, то есть провалом поиска минимума.

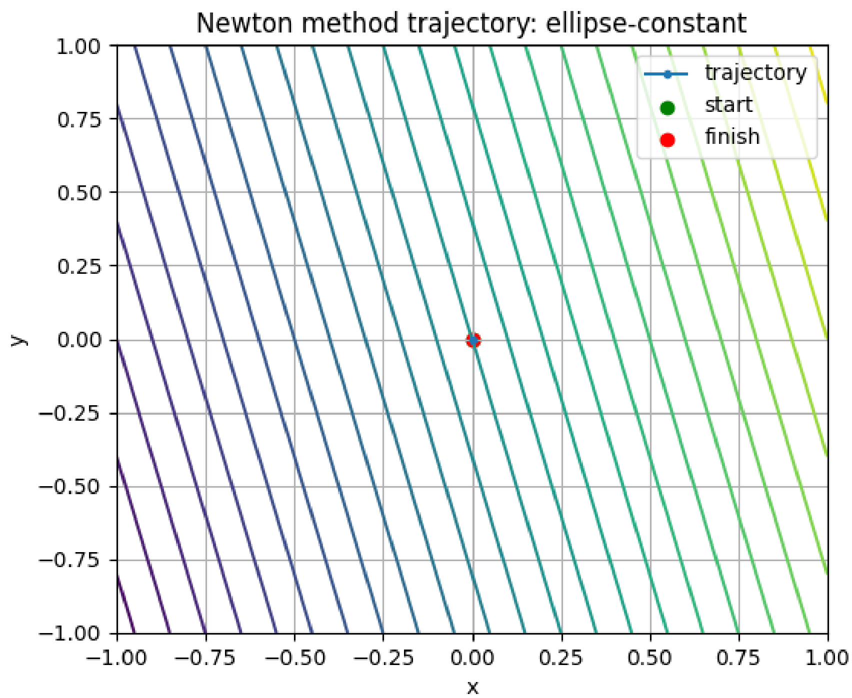
Функция	**Корни**	**Backtracking**	**Пост. шаг**
paraboloid	$(0,\ 0)$	$(0,\ 0)$	$(0,\ 0)$
ellipse	$(0,\ 0)$	$(0,\ 0)$	$(0,\ 0)$
rosenbrock	$(1,\ 1)$	$(0.99995,\ 0.99990)$	$(1.0000,\ 1.0000)$
min3m2	$(3,\ -2)$	$(3.0000,\ -2.0000)$	$(3.0000,\ -2.0000)$
min2m1	$(2,\ -1)$	$(0.0000,\ 0.0000)$	$(2.0000,\ -1.0000)$
himmelblau	$(3.0,\ 2.0),\ (-2.8051,\ 3.1313),$ $(-3.7793,\ -3.2832),\ (3.5844,\ -1.8481)$	$(0.0000,\ 0.0000)$	$(-0.3423,\ 0.2500)$

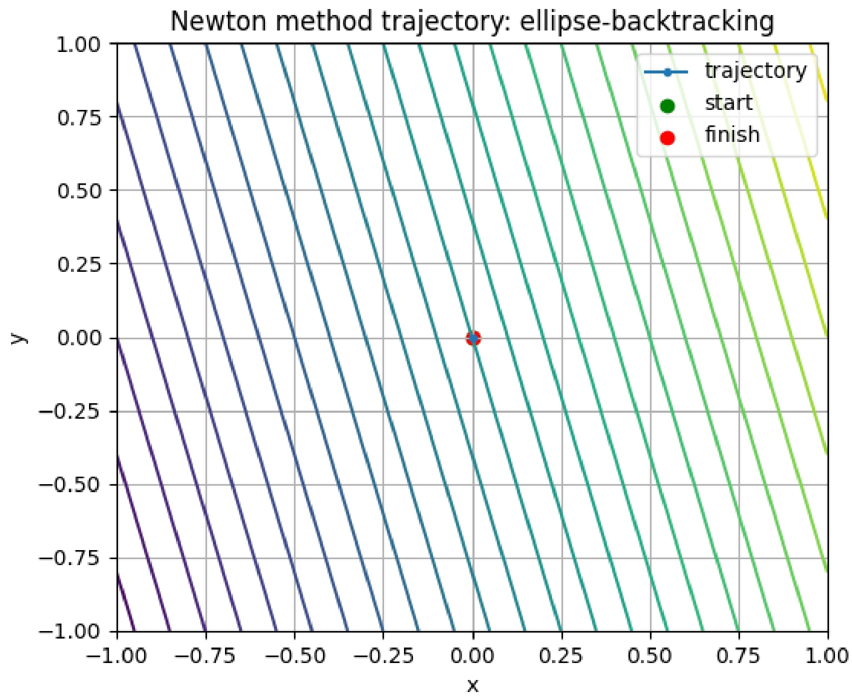
Таблица 1: Сравнение приближений к корням $f(x, y) = 0$ при использовании метода Ньютона с разными стратегиями шага

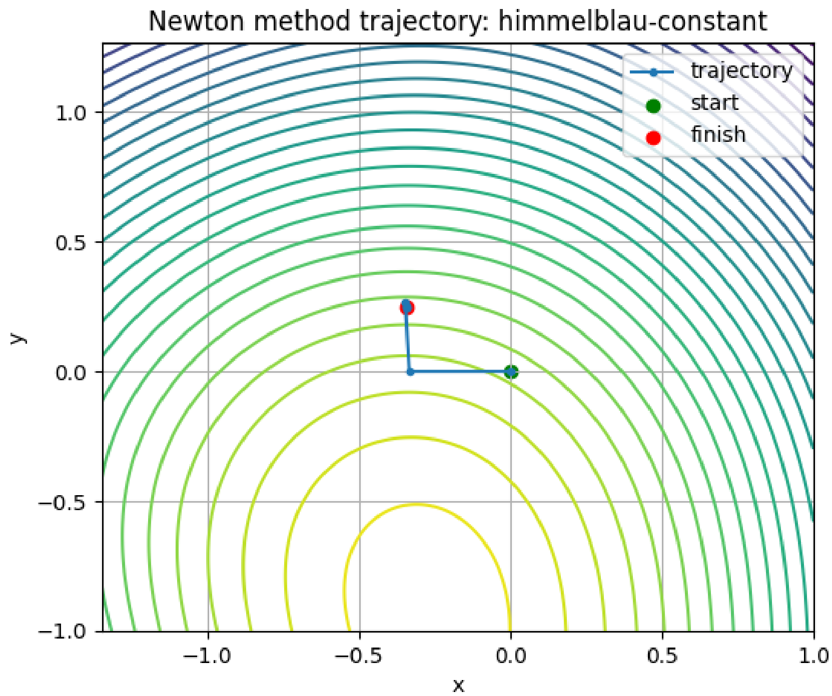
3. Графики

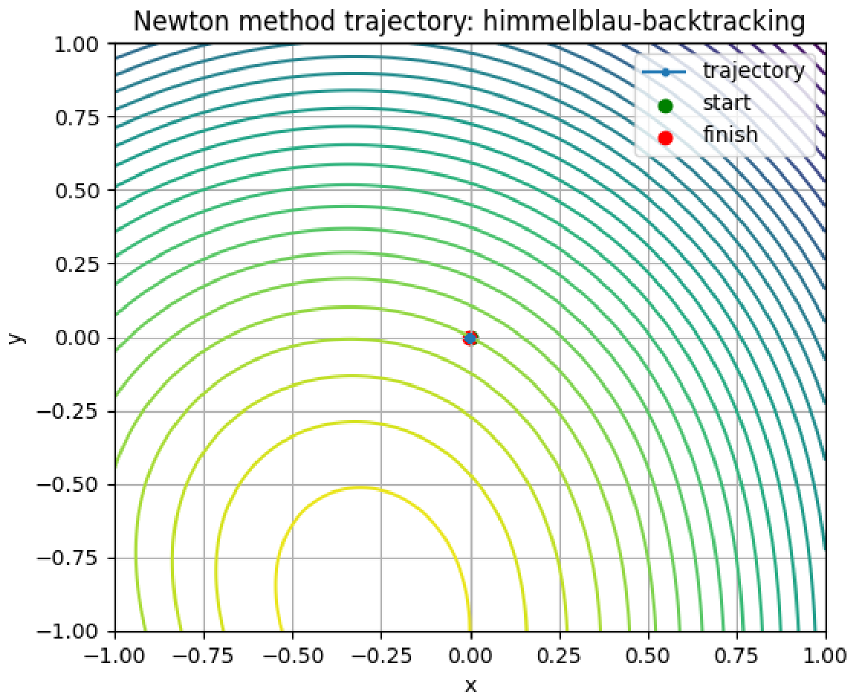
Не будем приводить все графики ввиду избыточности. Графики для эллипса демонстрируют, что точка минимума $(0, 0)$ находится за 1 итерацию.

Графики для функции Химмельблау показывают несовершенство постоянного и кусочно-постоянного методов для мультимодальной функции. Для квадратичной функции графики приведены для демонстрации работы корректности работы в случае, если минимум отличен от нуля.

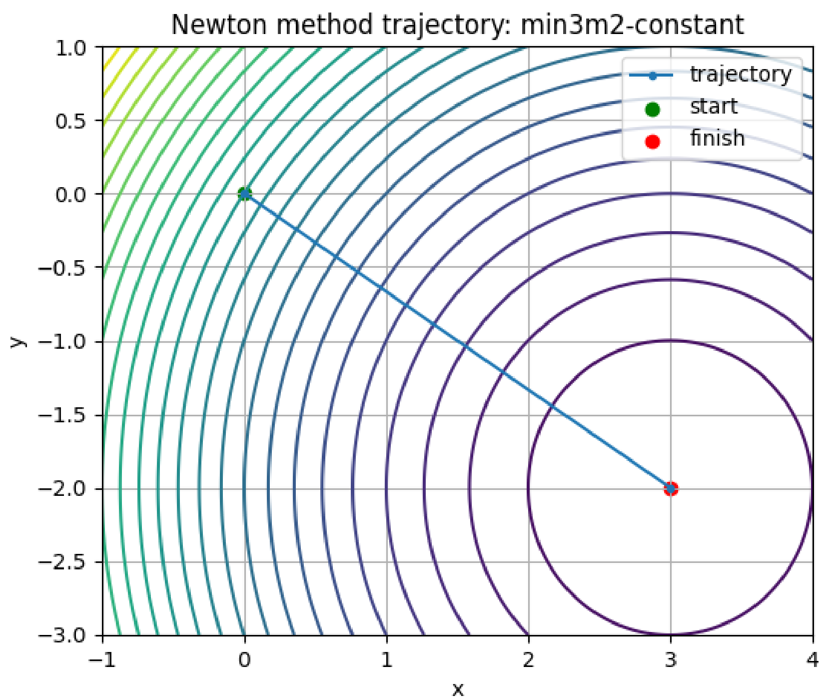


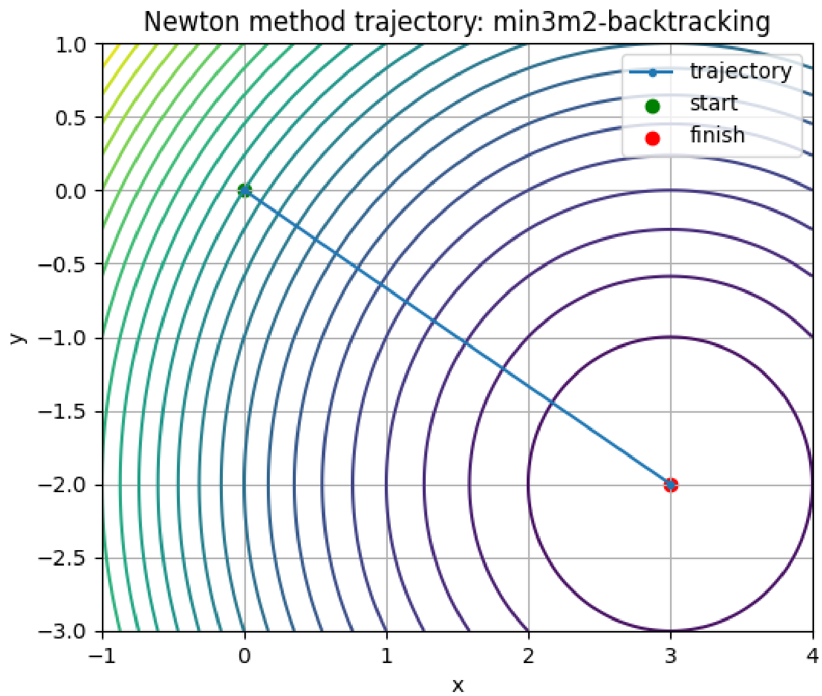

Newton method trajectory: ellipse-backtracking
trajectory
start
finish
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
y
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
x


Newton method trajectory: himmelblau-constant
trajectory
start
finish
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
y
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
x



Newton method trajectory: himmelblau-backtracking
trajectory
start
finish
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
y
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
x


Newton method trajectory: min3m2-constant
trajectory
start
finish
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.5
−3.0
y
−1
0
1
2
3
4
x


Newton method trajectory: min3m2-backtracking
trajectory
start
finish
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.5
−3.0
y
−1
0
1
2
3
4
x