

Методы оптимизации, Лабораторная работа №1

Кирилл Кадомцев и Андрей Крюков

Апрель 2025

Содержание

1. Описание методов	1
2. Тестирование	1
3. Графики	3

1. Описание методов

Для градиентного спуска были реализованы следующие методы выбора шага:

- Постоянный
- Кусочно-постоянный
- Наискорейший спуск (золотое сечение)
- Наискорейший спуск (дихотомия)

Для удобства и расширяемости, методы реализовывались так, чтоб можно было в дальнейшем использовать их для любых размерностей (исходя из предположения, что это может стать объектом исследования в дальнейших лабораторных работах). Для стратегий был создан специальный интерфейс с методом *step*, позволяющий в дальнейшем расширить список реализованных методов.

2. Тестирование

Для тестирования были выбраны несколько функций с различными точками минимума. Также, была использованна функция Химмельблау, поскольку она мультимодальная.

1. Параболоид

- $f(x, y) = x^2 + y^2$
- $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

2. Эллипс

- $f(x, y) = 4x + y$
- $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 8x \\ 2y \end{pmatrix}$

3. Функция Розенброка

- $f(x, y) = (1 - x)^2 + 100(y - x^2)^2$
- $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -2(1 - x) - 400x(y - x^2) \\ 200(y - x^2) \end{pmatrix}$

4. Квадратичная форма (3, -2)

- $f(x, y) = (x - 3)^2 + (y + 2)^2$
- $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x - 3) \\ 2(y + 2) \end{pmatrix}$

5. Квадратичная форма (2, -1)

- $f(x, y) = x + y$
- $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 10(x - 2) \\ 6(y + 1) \end{pmatrix}$

6. Функция Химмельблау

- $f(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2$
- $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x(x^2 + y - 11) + 2(x + y^2 - 7) \\ 2(x^2 + y - 11) + 4y(x + y^2 - 7) \end{pmatrix}$
- глобальные минимумы: $\begin{cases} (3.0, 2.0) \\ (-2.805118, 3.131312) \\ (-3.779310, -3.283186) \\ (3.584428, -1.848126) \end{cases}$

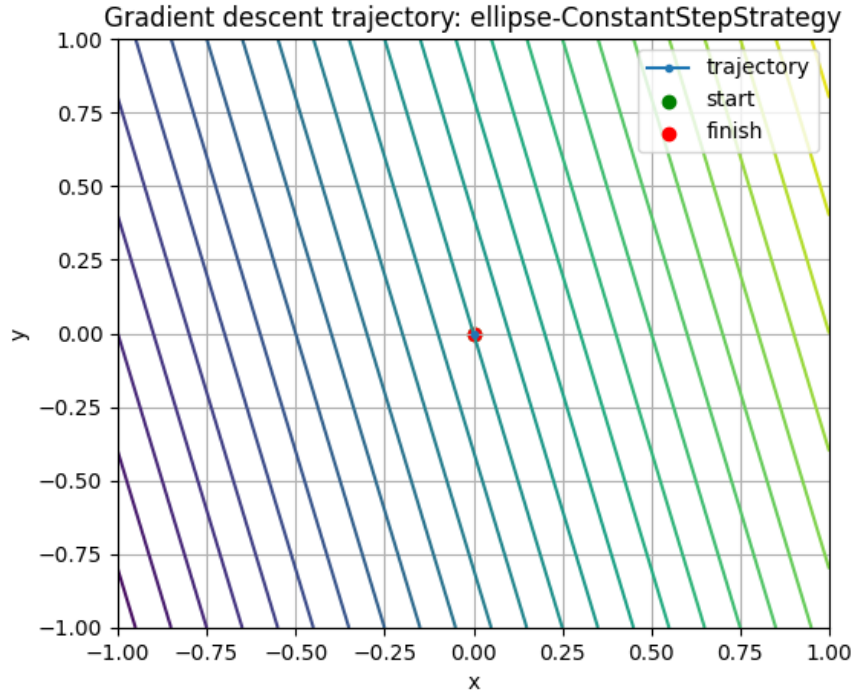
Ниже приведены результаты оптимизации в зависимости от стратегии выбора шага. В данном случае (*nan, nan*) является результатом переполнения, то есть провалом поиска минимума.

Функция	argmin	Пост. шаг	Кус.-пост. шаг	Наиск. спуск
paraboloid	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
ellipse	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
rosenbrock	(1, 1)	(nan, nan)	(nan, nan)	(0.9991, 0.9982)
min3m2	(3, -2)	(2.9996, -1.9997)	(2.9996, -1.9997)	(3.0000, -2.0000)
min2m1	(2, -1)	(2.0000, -0.9999)	(2.0000, -0.9999)	(0.5932, -0.1903)
himmelblau	см. список	(nan, nan)	(nan, nan)	(3.5844, -1.8481)

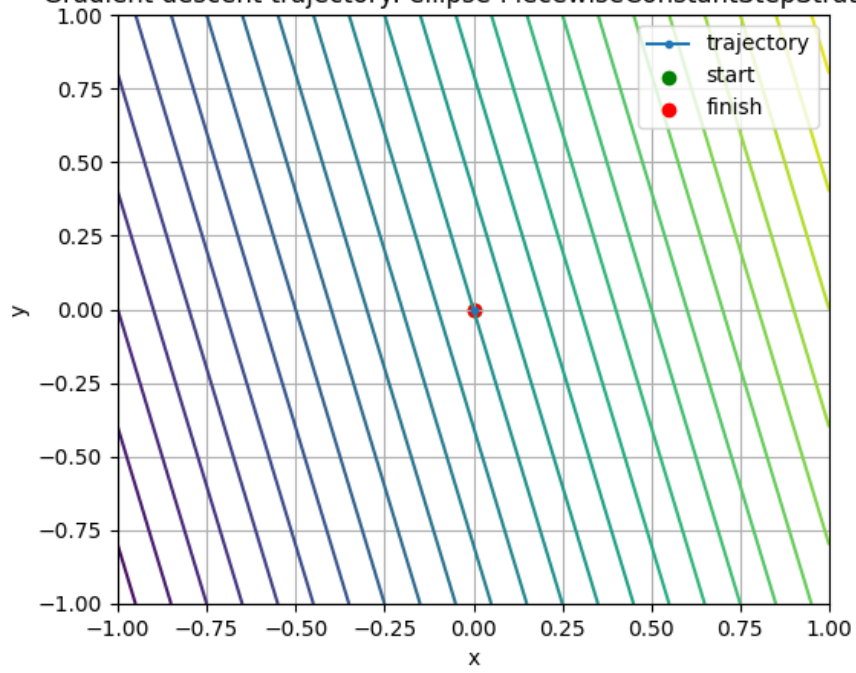
Таблица 1: Сравнение точек минимума для разных стратегий шага

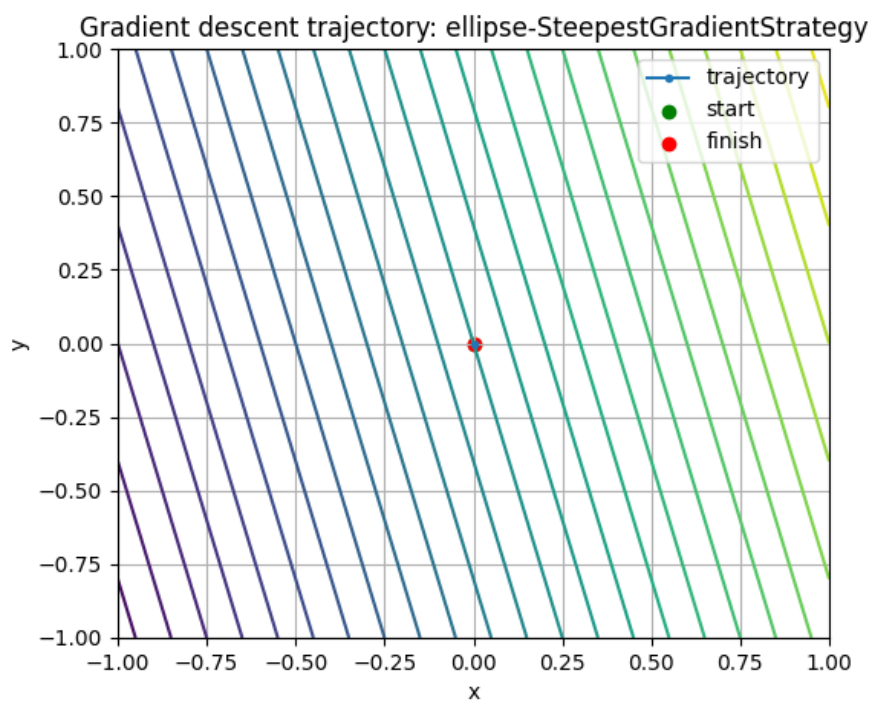
3. Графики

Не будем приводить все графики ввиду избыточности. Графики для эллипса демонстрируют, что точка минимума $(0, 0)$ находится за 1 итерацию. Графики для функции Химмельблау показывают несовершенство постоянного и кусочно-постоянного методов для мультимодальной функции. Для квадратичной функции графики приведены для демонстрации работы корректности работы в случае, если минимум отличен от нуля.

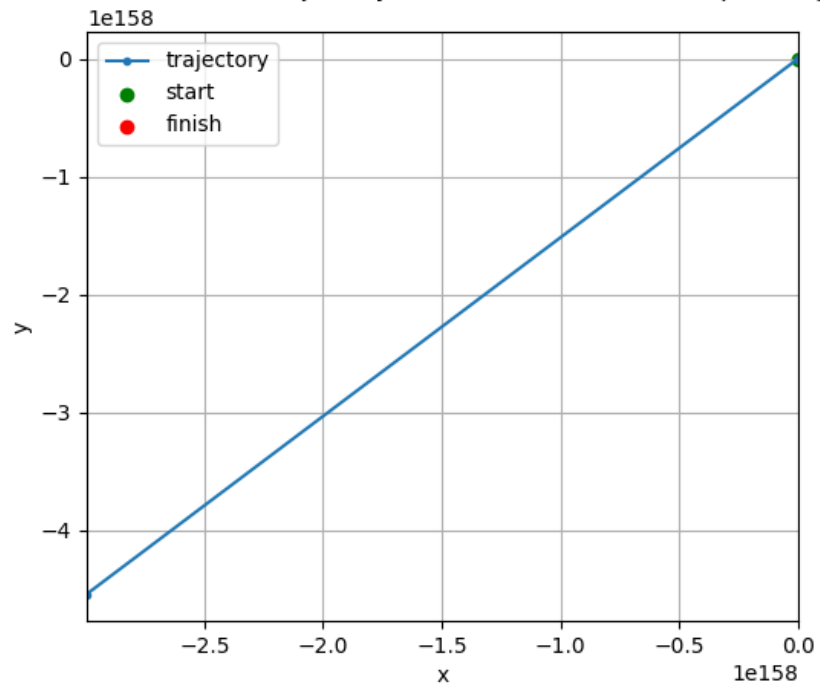


Gradient descent trajectory: ellipse-PiecewiseConstantStepStrategy

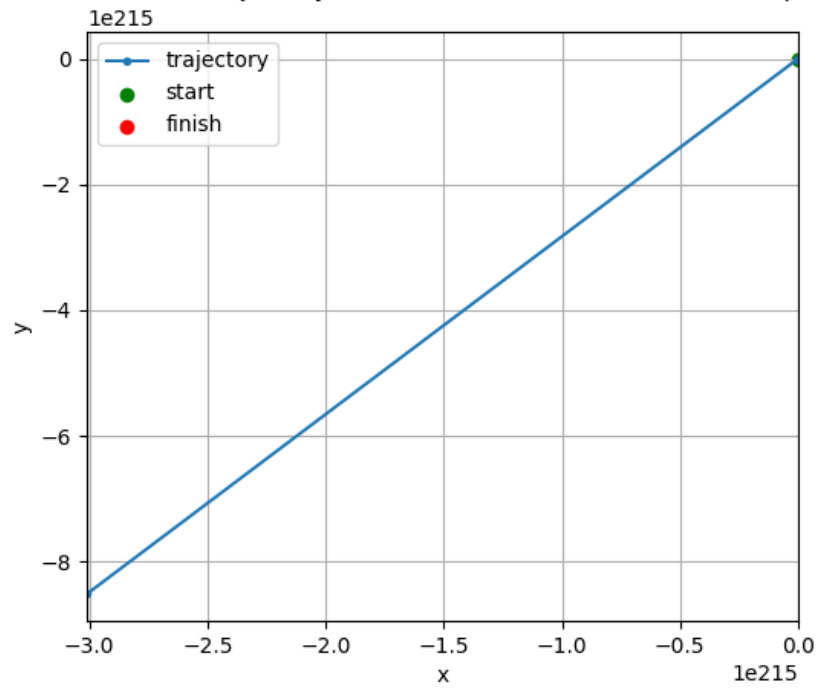




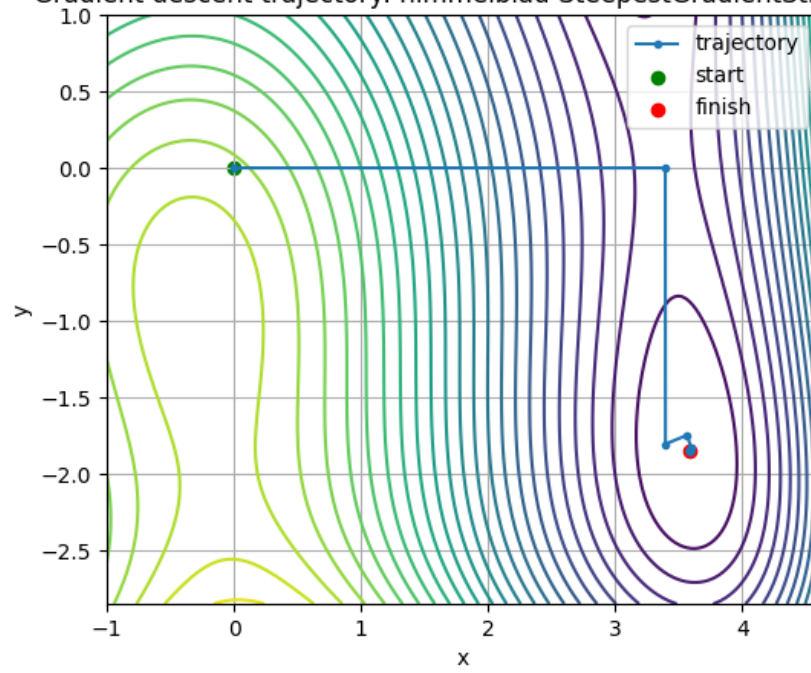
Gradient descent trajectory: himmelblau-ConstantStepStrategy

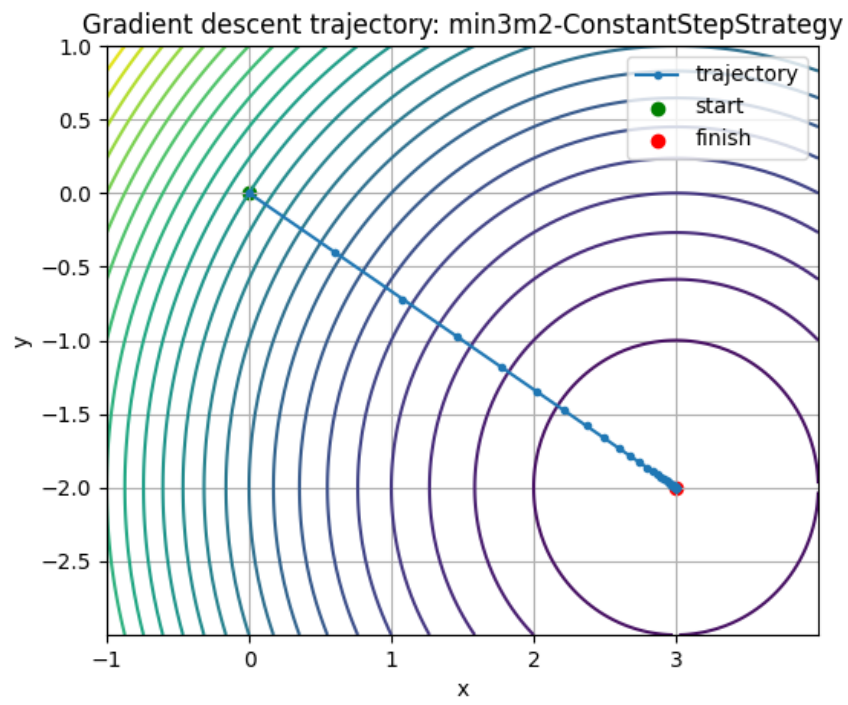


Gradient descent trajectory: himmelblau-PiecewiseConstantStepStrateg



Gradient descent trajectory: himmelblau-SteepstGradientStrategy





Gradient descent trajectory: min3m2-PiecewiseConstantStepStrategy

