N 1

a) $f(x,y) = x^2 - 3y^2$; $M(1;-1)$; $\vec{a} = -6\vec{i} + 2\vec{j}$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \; ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -6y.$$

$$\boxed{(\text{grad}\, f(x,y))_M = 2\cdot 1\,\vec{i} - 6\cdot(-1)\,\vec{j} = 2\vec{i} + 6\vec{j}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta a} = \frac{-6}{\sqrt{6^2+2^2}} = \frac{-6}{\sqrt{40}} = \frac{-3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\beta = \frac{\Delta y}{\Delta a} = \frac{2}{\sqrt{6^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{40}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Тогда:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 2\cdot 1\cdot\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\right) + (-6)\cdot(-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} = 0$$

б) $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - xy$; $M(0;1)$ $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j}$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} = (4x-y)\vec{i} + (6y-x)\vec{j}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 6y - x.$$

$$\boxed{(\operatorname{grad} f(x,y))_M = (4\cdot 0 - 1\cdot 1)\vec{i} + (6\cdot 1 - 0)\vec{j} = -\vec{i} + 6\vec{j}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta a} = \frac{1}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Тогда $\frac{\partial f}{\partial a} = (4x-y)\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} + (6y-x)\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial a}(M) = (4\cdot 0 - 1\cdot 1)\frac{1}{\sqrt{10}} + (6\cdot 1 - 0\cdot 1)\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{18}{\sqrt{10}} = \frac{17}{\sqrt{10}}.}$$

№4

$z = 5 - (x-4)^2 - (y-5)^2$. $X_0 = (2;3)$; $h = 0.25$; $\varepsilon = 0.1$

Найти max.

Шаг 0: $z(X_0) = 5 - (2-4)^2 - (3-5)^2 = 5 - 4 - 4 = -3$

Шаг 1:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2(x-4) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -2(y-5)$$

$$\text{grad}\, z = -2(x-4)\vec{i} - 2(y-5)\vec{j} =$$

$$= 2(4-x)\vec{i} + 2(5-y)\vec{j}$$

$$\text{grad}\, z(X_0) = 2(4-2)\vec{i} + 2\cdot(5-3)\vec{j} = 4\vec{i} + 4\vec{j}.$$

Проверяем критерий остановки:

$$\sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} > \varepsilon.$$

Шаг 2:

$$X = X_0 + h(\text{grad}\, z)(X_0)$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0.25 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\cancel{Z(X) = 5 - (2-4)^2 - (3-5)^2 = 5 -}$$

$$Z(X) = 5 - (3-4)^2 - (4-5)^2 = 5 - 1 - 1 = 3$$

$$Z(X) > Z_0 \Rightarrow Z_0 = Z(X) = 3;\ X_0 = X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Шаг 1:

$$\text{grad}\, z = -2(x-4)\vec{i} - 2(y-5)\vec{j}$$

$$\text{grad}\, z(X_0) = -2(3-4)\vec{i} - 2(4-5)\vec{j} = 2\vec{i} + 2\vec{j}.$$

Проверяем критерий останова:

$\sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} > 0.1 = \varepsilon$. Т.е. продолжаем, критерий останова не выполнен

Шаг 2:

$x = x_0 + h(\operatorname{grad} z)(x_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 0.25 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 4\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$z(x) = 5 - (3\frac{1}{2} - 4)^2 - (4\frac{1}{2} - 5)^2 = 5 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 4\frac{1}{2}$.

$z(x) > z_0$ $(4\frac{1}{2} > 3) \Rightarrow z_0 = z(x) = 4\frac{1}{2}$,

$x_0 = x = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 4\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Шаг 1:

$\cancel{\operatorname{grad} z(x_0) = -2(3 - 3\frac{1}{2})\vec{i} - 2(}$

$\operatorname{grad} z(x_0) = -2(3\frac{1}{2} - 4)\vec{i} - 2(4\frac{1}{2} - 5)\vec{j} =$

$= \vec{i} + \vec{j}$

Проверяем критерий останова:

$\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} > 0.1 = \varepsilon \Rightarrow$ продолжаем

Шаг 2:

$x = x_0 + h(\operatorname{grad} z)(x_0) = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 4\frac{1}{2} \end{pmatrix} + 0.25 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{3}{4} \\ 4\frac{3}{4} \end{pmatrix}$

$$Z(x) = 5 - \left(3\tfrac{3}{4} - 4\right)^2 - \left(4\tfrac{3}{4} - 5\right)^2 = 5 - \tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{16} = 4\tfrac{7}{8}$$

$$Z(x) > Z_0 \Rightarrow Z_0 = Z(x) = 4\tfrac{7}{8}; \quad x_0 = x = \begin{pmatrix} 3\tfrac{3}{4} \\ 4\tfrac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Шаг 1:

$$\operatorname{grad} z(x_0) = -2\left(3\tfrac{3}{4} - 4\right)\vec{i} - 2\left(4\tfrac{3}{4} - 5\right)\vec{j} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\vec{i} + \tfrac{1}{2}\vec{j}$$

Проверяем критерий остановки:

$$\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = 0{,}707\ldots > 0.1 = \varepsilon.$$ Продолжаем.

Шаг 2:

$$x = x_0 + h \operatorname{grad} z(x_0) = \begin{pmatrix} 3\tfrac{3}{4} \\ 4\tfrac{3}{4} \end{pmatrix} + 0.25 \begin{pmatrix} \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\tfrac{7}{8} \\ 4\tfrac{7}{8} \end{pmatrix}$$

$$Z(x) = 5 - \left(3\tfrac{7}{8} - 4\right)^2 - \left(4\tfrac{7}{8} - 5\right)^2 = 5 - \left(\tfrac{1}{8}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{8}\right)^2 = 4\tfrac{62}{64}$$

$$Z(x) > Z_0 \Rightarrow Z_0 = 4\tfrac{62}{64}; \quad X_0 = \begin{pmatrix} 3\tfrac{7}{8} \\ 4\tfrac{7}{8} \end{pmatrix}.$$

Шаг 1:

$$\operatorname{grad} z(x_0) = -2\left(3\tfrac{7}{8} - 4\right)\vec{i} - 2\left(4\tfrac{7}{8} - 5\right)\vec{j} = \tfrac{1}{4}\vec{i} + \tfrac{1}{4}\vec{j}$$

Проверяем критерий остановки:

$$\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2} > 0.1 = \varepsilon.$$ Продолжаем

... Получается очень много ряд повторения шагов.

Аналитически: $Z(x) = 5 - (x-4)^2 - (y-5)^2$ будет максимально

$Z(x) = 5 - (x - 4)^2 - (y - 5)^2$

Т.к. $(x-4)^2 >= 0$ и $(y-5)^2 >= 0$, то $\max(Z(x)) = 5$, когда $(x-4)^2 = 0$ и $(y-5)^2 = 0$

Ответ: $\max(Z(x)) = 5$, при $x = (4, 5)$

Методом градиентного спуска продвигались к этому значению, но слишком долго (много итераций нужно чтобы достичь ответа с заданной точностью)