目录

第一章　Fourier 变换

1.1　Fourier 变换的引入

对于周期为 $2L$ 的周期函数，或定义在 $[-L,L]$ 上的函数 $f(x)$，其 *Fourier* 级数（*Fourier series*）展开[1]§11.5, §11.6形如

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{1.1}$$

其中

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,\\
b_n&=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,\quad n=1,2,\cdots
\end{aligned}$$

利用欧拉公式*

$$\begin{aligned}
\cos(x)&=\frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}\right)\\
\sin(x)&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}\right)
\end{aligned}$$

式(1.1)可表示为

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{\mathrm{i}n\pi x/L},\quad c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-\mathrm{i}n\pi x/L}dx \tag{1.2}$$

其中 $c_0=\frac{1}{2}a_0, c_n=(a_n-\mathrm{i}b_n)/2, c_{-n}=(a_n+\mathrm{i}b_n)/2=\overline{c_n}$。

函数可作 Fourier 展开（或说式(1.1)或式(1.2)等号右边的 Fourier 级数收敛）的条件——狄利克雷条件（*Dirichlet conditions*），请自行回顾[1]定理 11.6.1，p.301。

若 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上，则至少可考虑 f 限制在在区间 $(-L,L)$ 上的函数 $f_L:(-L,L)\to$

*正体小写字母 i 专门用于表示虚数 $\mathrm{i}\equiv\sqrt{-1}$。

$\mathbb{R}, f_L(x) = f(x)$ 的 Fourier 级数，它将形如式(1.2)。我们进一步进行如下处理：

$$
\begin{aligned}
f_L(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-\mathrm{i}n\pi x/L} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(x') e^{-\mathrm{i}n\pi x'/L} dx'\right) e^{\mathrm{i}n\pi x/L} \\
\left(\frac{n}{2L}\right. &\equiv y_n, \Delta y = y_{n+1} - y_n = \left.\frac{1}{2L}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-L}^{L} f_L(x') e^{-\mathrm{i}2\pi y_n x'} dx'\right] e^{\mathrm{i}2\pi x y_n \Delta y}
\end{aligned}
$$

让 $L \to \infty$，与此同时 $\Delta y \to 0$，在黎曼积分可积条件下，上式可记作以下积分

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-\infty} \infty dy \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-\mathrm{i}2\pi y x}\right] e^{\mathrm{i}2\pi x y} dy && (1.3) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dy \tilde{f}(y) e^{\mathrm{i}2\pi x y} && (1.4)
\end{aligned}
$$

其中

$$\tilde{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-\mathrm{i}2\pi y x}$$

称 $f(x)$ 的 *Fourier* 变换（*Fourier transform*），$f(x)$ 称 $\tilde{f}(y)$ 的反 *Fourier* 变换（*inverse Fourier transform*），记为

$$\tilde{f}(y) = \mathscr{F}\{f(x)\}, \quad f(x) = \mathscr{F}^{-1}\left\{\tilde{f}(y)\right\}$$

函数 $f(x)$ 存在 Fourier 变换的充份条件（需同时满足）：

1. $f(x)$ 绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$
2. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 的任一有限区间上具有有限个极值
3. $f(X)$ 在 $\mathbb{R}$ 的任一有限区间上具有有限个不连续点，且在这些点上 $f(x)$ 取有限函数值。

等价地，可以说连续函数或具有有限个不连续点的有界函数存在 Fourier 变换。

定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的 Fourier 变换形如：

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{k} \tilde{f}(\mathbf{k}) \exp(\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) \tag{1.5}$$

其中

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$$

f 的 Fourier 变换存在的条件与上述 $n = 1$ 的条件相似。

以下是一些常用的 Fourier 变换性质：

1. 线性。若 $h(x) = \alpha f(x) + g(x)$ 则 $\tilde{h}(k) = \alpha \tilde{f}(k) + \tilde{g}(k), \forall \alpha \in \mathbb{R}$
2. 时移。若 $h(x) = f(x - x_0)$，则 $\tilde{h}(k) = e^{-\mathrm{i}kx_0} \tilde{f}(k), \forall x_0 \in \mathbb{R}$。

3. 频移（调制）。若 $h(x)=e^{-\mathrm{i}k_0x}f(x)$，则 $\tilde{h}(k)=\tilde{f}(k-k_0),\forall k_0\in\mathbb{R}$。
4. 时域标度。若 $h(x)=f(\alpha x)$，则 $\tilde{h}(k)=|\alpha|^{-1}\tilde{f}(k),\forall\alpha\neq 0$。
5. 微分。$\mathscr{F}\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}=\mathrm{i}k\mathscr{F}\{f(x)\}$， $\mathscr{F}\left\{\frac{d^n}{dx^n}f(x)\right\}=(\mathrm{i}k)^n\ \{f(x)\}$
6. 卷积。若 $h(x)=\int_{-infty}^{\infty}\overline{f(x')}g(x+x')\,dx'$ 称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的卷积（*convolution*），则 $\tilde{h}(k)=\tilde{f}(k)\tilde{g}(k)$。

常见函数的 Fourier 变换对，可查 Fourier 变换表。

1.2 狄拉克 δ 函数

狄拉克 δ 函数（*Dirac's δ-function*）$\delta(x)$（简称 δ 函数）是一个广义函数（*generalized function*）*。设定义在 $\mathbb{R}$ 上的任一实值函数 $f(x)$ 任意整数阶可微，且在 $\mathbb{R}$ 的某一有界闭集外处处为零，则 $\delta(x)$ 必须满足性质

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)\,dx=f(0) \tag{1.6}$$

特别地，若取 $f(x)=1$，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=1 \tag{1.7}$$

在狭义定义下的函数当中，是不存在满足上述性质的函数的。但 $\delta(x)$ 可通过常规函数序列引入。考虑以下函数序列（图1.1）

$$f_n(x)=\left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/2}e^{-nx^2},\quad n\in\mathbb{N}$$

则

$$\delta(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x) \tag{1.8}$$

确实，

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx f_n(x)=1,\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

故由式(1.8)和极限与积分的相关性质有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=1$$

满足(1.7)。

要验证式(1.8)还一般地满足(1.6)，我们需要证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dx f_n(x)f(x)=f(0)$$

*本讲义不对广义函数进行正式的定义。读者只需要了解 δ 函数的基本性质就可以了。广义函数在数学上又称作分布（*distributions*），可参考[2]。

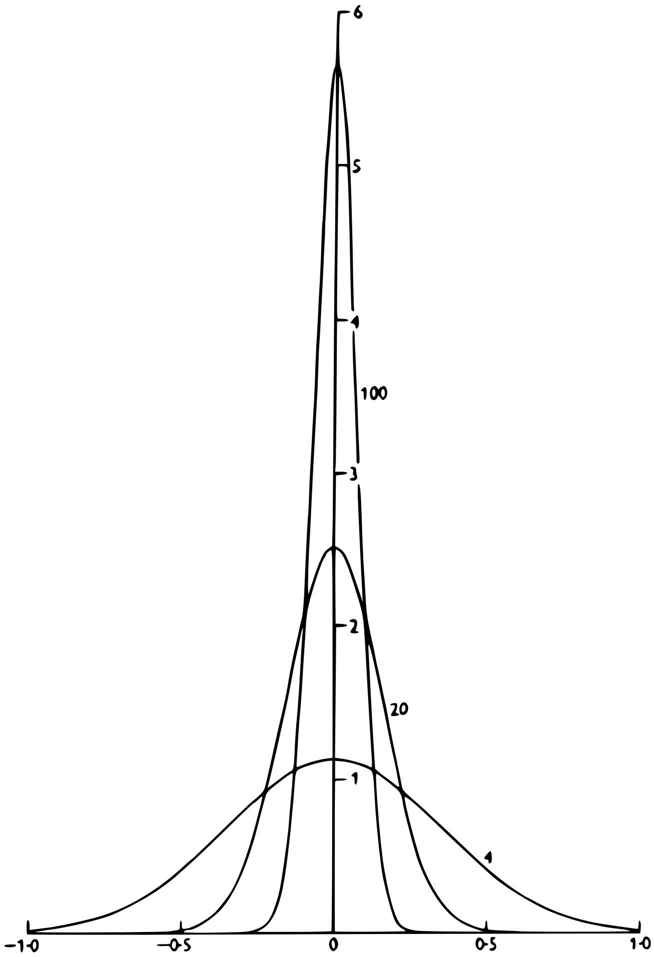

图 1.1: 函数序列 $f_n(x) = e^{-nx^2}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/2}$ 在 $n = 4, 20, 100$ 时的图像[3]。

对 $f(x)$ 关于 $x = 0$ 进行泰勒展开*：

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx f_n(x) f(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx f_n(x) x^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \left[1 + (-1)^m\right] \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}} \lim_{n\to\infty} n^{-m/2} \\ &= f(0)\end{aligned}$$

上式只有 $m = 0$ 项不为零，故(1.6)得验。

利用式(1.6)和式(1.7)，还可得到 δ 函数的以下基本性质：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u+a)\,\delta(u)\,du = f(a) \tag{1.9}$$

*函数 f 满足的性须使其必可进行泰勒展开。

以及 δ 函数的导数的性质（分部积分）：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}\delta\left(x\right)f\left(x\right)dx &= f\left(x\right)\delta\left(x\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}f'\left(x\right)\delta\left(x\right)dx\\ &= -f'\left(0\right)\end{aligned} \tag{1.10}$$

其中由于前面提到 $f\left(x\right)$ 在 $\mathbb{R}$ 的某一有界闭集外处处为零故 $\lim_{x\to\pm\infty}f\left(x\right)=0$，上式的第一个等号右边的第一项为零（利用 δ 函数与 f_n 的关系可验）。

以上仅以某一个函数序列在 $n\to\infty$ 的极限规定了 δ 函数，使得我们能够推导很多 δ 函数的性质，但具有同样性质（式(1.6)和(1.7)）的 δ 函数可由不止一组函数序列来得到，这些函数序列在得出同一个 δ 函数这件事上是等价的。只要一个函数序列 $f_n\left(x\right)$ 对每一 $n\in\mathbb{N}$ 满足：

1. 关于 $x=0$ 对称；
2. 在 $n\to\infty$ 时变得“无限高”和“无限窄”；
3. 在 $n\to\infty$ 时积分面积恒为 1，

则 $\delta\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}f_n\left(x\right)$ 就是狄拉克 δ 函数。例如，另一个可得到 δ 函数的等价函数序列是

$$g_n\left(x\right)=\begin{cases}n, & -\frac{1}{2n}\leq x\leq\frac{1}{2n}\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

在 $\mathbb{R}^n$ 上，可定义 n 维 δ 函数 $\delta\left(\mathbf{x}\right)=\prod_{i=1}^{n}\delta\left(x_i\right),\quad \mathbf{x}=\left(x_1,\cdots,x_n\right)$。此时，对任一定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的无穷阶可微且在 $\mathbb{R}^n$ 的某有界闭集外处处为零的函数 $f\left(\mathbf{x}\right)$ 有

$$\int_{\mathbb{R}^n}d\mathbf{x}\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{a}\right)f\left(\mathbf{x}\right)=f\left(\mathbf{a}\right) \tag{1.11}$$

第二章　偏微分方程

在物理问题中经常碰到的情况是，物理量 f 随空间位置和时间变化，故 f 是空间位置向量 $\mathbf{r}$ 和时间 t 的函数 $f(\mathbf{r},t)$。在直角坐标系 (x,y,z) 下可写作 $f(x,y,z,t)$。在一维问题中写作 $f(x,t)$。因此，主导这一物理量 f 的变化规律的方程，既需要规定 f 随时间变化的规律——f 的时间偏导数 $\partial f/\partial t$、$\partial^2 f/\partial t^2$、……，又要规定 f 随空间位置变化的规律——f 的梯度和更高阶的空间导数 $\boldsymbol{\nabla} f=(\partial f/\partial x,\partial f/\partial y,\partial f/\partial z)$、……，因此将含有 f 的偏导数。

偏微分方程（*partial differential equation*，*PDE*）是这样的一类方程：

- 它含有两个或两个以上独立自变量（例如 x,y,z,t）；
- 一个依赖这些变量的未知函数（例如 $f=f(x,y,t,z)$）；
- 以及该函数对这些变量的偏导函数（例如 $\partial f/\partial t$、$\partial f/\partial x$、$\partial^2 f/\partial x^2$……）。

微分方程的基本术语[1]§10，可以自动适用于偏微分方程。例如，方程所含有的偏微分的最高阶数，称作该*偏微分方程的阶*。如果某个函数及其各阶偏导函数代入偏微分方程能使后者成为恒等式，则称这个函数为*偏微分方程的一个解*。如果一个偏微分方程所有解可以用一个通式表示出来，这个通式就叫做这个*偏微分方程的通解*。

一个关于某物理过程的偏微分方程，只有给定了*初始条件*（*initial condition*，*IC*）和*边界条件*（*boundary conditions*，*BCs*），才能得到具体的、不偏待定参数的解，以对应于一个具体的物理问题的预测。初始条件是指未知函数 $f(x,y,z,t)$ 限制在时间 $t=0$ 时的函数 $f(x,y,z,0)\equiv f_0(x,y,z)$ 及其偏导函数的性质。边界条件是在未知函数 $f(\mathbf{r},t)$ 限制在这一物理问题所关心的空间区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$（也需指明）上的函数 $f(\mathbf{r},t)\,,\mathbf{r}\in\partial\Omega$ 及其偏导函数的性质*。在具体的初始条件和边界条件规定下，仍满足偏微分方程的解，称为该*偏微分方程在给定初始条件和边界条件下的特解*。

例 2.1 (传热方程). *关于温度 $u(\mathbf{r},t)$ 的方程*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\nabla^2 u,\quad k=\text{常数}$$

称为传热方程（heat equation）。其中 $\nabla^2 u(x,y,z,t)\equiv\partial^2 u/\partial x^2+\partial^2 u/\partial y^2+\partial^2 u/\partial z^2$。规定了

*在偏微分方程的数学理论中，由于不区分自变量是时间还是空间位置等物理意义，故一律都称作边界条件。

如下例所示的初始条件和边界条件之后，可理解为如图2.1所示的物理问题。

$$\text{方程：}\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \le x \le 1, \quad t \ge 0$$

$$\text{边界条件：}u\left(0,t\right) = u\left(1,t\right) = 0$$

$$\text{初始条件：}u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right)$$

其中 $u_0\left(x\right)$ 是某个给定表达式的函数。例如，当 $u_0\left(x\right) = \sin\left(\pi x\right)$ 时，上述边界条件和初始条件规定下方程的特解是 $u\left(x,t\right) = e^{-\pi^2 kt}\sin\left(\pi x\right)$。

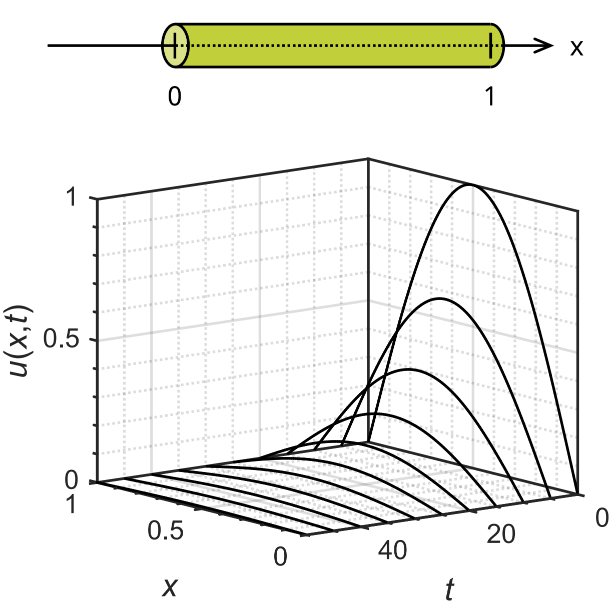

图 2.1: 一根长为 1、左端置于原点处的一维直棒，在 $t = 0$ 时、温度在棒上的分布是 $u_0\left(x\right) = \sin\left(\pi x\right)$。若棒的两端温度恒定为 0，即 $u\left(0,t\right) = u\left(1,t\right) = 0 \forall t \ge 0$，那么棒上的温度分布如何随时间演变？

参考文献

[1] 王全迪, 郭艾, 杨立洪. 高等数学（下册）[M]. 高等教育出版社, 2009.