0.1 Fourier 变换的引入

对于周期为 $2L$ 的周期函数，或定义在 $[-L,L]$ 上的函数 $f(x)$，其 *Fourier* 级数（*Fourier series*）展开[1]§11.5, §11.6形如

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{0.1}$$

其中

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,\\
b_n&=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,\quad n=1,2,\cdots
\end{aligned}$$

利用欧拉公式*

$$\begin{aligned}
\cos(x)&=\frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}\right)\\
\sin(x)&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}\right)
\end{aligned}$$

式(0.1)可表示为

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{\mathrm{i}n\pi x/L},\quad c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)\,e^{-\mathrm{i}n\pi x/L}dx \tag{0.2}$$

其中 $c_0=\frac{1}{2}a_0, c_n=(a_n-\mathrm{i}b_n)/2, c_{-n}=(a_n+\mathrm{i}b_n)/2=\overline{c_n}$。

函数可作 Fourier 展开（或说式(0.1)或式(0.2)等号右边的 Fourier 级数收敛）的条件——狄利克雷条件（*Dirichlet conditions*），请自行回顾[1]定理 11.6.1，p.301。

若 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上，则至少可考虑 f 限制在在区间 $(-L,L)$ 上的函数 $f_L:(-L,L)\to\mathbb{R}, f_L(x)=f(x)$ 的 Fourier 级数，它将形如式(0.2)。我们进一步进行如下处理：

$$\begin{aligned}
f_L(x)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{-\mathrm{i}n\pi x/L}\\
&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f_L(x')\,e^{-\mathrm{i}n\pi x'/L}dx'\right)e^{\mathrm{i}n\pi x/L}\\
\left(\frac{n}{2L}\right.&\left.\equiv y_n,\Delta y=y_{n+1}-y_n=\frac{1}{2L}\right)\\
&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-L}^{L}f_L(x')\,e^{-\mathrm{i}2\pi y_nx'}dx'\right]e^{\mathrm{i}2\pi xy_n\Delta y}
\end{aligned}$$

*正体小写字母 i 专门用于表示虚数 $\mathrm{i}\equiv\sqrt{-1}$。

让 $L \to \infty$，与此同时 $\Delta y \to 0$，在黎曼积分可积条件下，上式可记作以下积分

$$f(x) = \int_{-\infty} \infty dy \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-\mathrm{i}2\pi yx} \right] e^{\mathrm{i}2\pi xy} dy \tag{0.3}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy \tilde{f}(y) e^{\mathrm{i}2\pi xy} \tag{0.4}$$

其中

$$\tilde{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-\mathrm{i}2\pi yx}$$

称 $f(x)$ 的 *Fourier* 变换（*Fourier transform*），$f(x)$ 称 $\tilde{f}(y)$ 的反 *Fourier* 变换（*inverse Fourier transform*），记为

$$\tilde{f}(y) = \mathscr{F}\{f(x)\}, \quad f(x) = \mathscr{F}^{-1}\left\{\tilde{f}(y)\right\}$$

函数 $f(x)$ 存在 Fourier 变换的充份条件（需同时满足）：

1. $f(x)$ 绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$
2. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 的任一有限区间上具有有限个极值
3. $f(X)$ 在 $\mathbb{R}$ 的任一有限区间上具有有限个不连续点，且在这些点上 $f(x)$ 取有限函数值。

等价地，可以说连续函数或具有有限个不连续点的有界函数存在 Fourier 变换。

定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的 Fourier 变换形如：

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{k} \tilde{f}(\mathbf{k}) \exp(\mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \tag{0.5}$$

其中

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \exp(-\mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$$

f 的 Fourier 变换存在的条件与上述 $n = 1$ 的条件相似。

以下是一些常用的 Fourier 变换性质：

1. 线性。若 $h(x) = \alpha f(x) + g(x)$ 则 $\tilde{h}(k) = \alpha \tilde{f}(k) + \tilde{g}(k), \forall \alpha \in \mathbb{R}$
2. 时移。若 $h(x) = f(x - x_0)$，则 $\tilde{h}(k) = e^{-\mathrm{i}kx_0} \tilde{f}(k), \forall x_0 \in \mathbb{R}$。
3. 频移（调制）。若 $h(x) = e^{-\mathrm{i}k_0 x} f(x)$，则 $\tilde{h}(k) = \tilde{f}(k - k_0), \forall k_0 \in \mathbb{R}$。
4. 时域标度。若 $h(x) = f(\alpha x)$，则 $\tilde{h}(k) = |\alpha|^{-1} \tilde{f}(k), \forall \alpha \neq 0$。
5. 微分。$\mathscr{F}\left\{\frac{d}{dx} f(x)\right\} = \mathrm{i}k \mathscr{F}\{f(x)\}, \quad \mathscr{F}\left\{\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right\} = (\mathrm{i}k)^n \{f(x)\}$
6. 卷积。若 $h(x) = \int_{-infty}^{\infty} \overline{f(x')} g(x + x')\, dx'$ 称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的卷积（*convolution*），则 $\tilde{h}(k) = \tilde{f}(k) \tilde{g}(k)$。

常见函数的 Fourier 变换对，可查 Fourier 变换表。

0.2 狄拉克 delta 函数

狄拉克 δ 函数（*Dirac's δ-function*）$\delta(x)$（简称 δ 函数）是一个广义函数（*generalized function*）*。设定义在 $\mathbb{R}$ 上的任一实值函数 $f(x)$ 任意整数阶可微，且在 $\mathbb{R}$ 的某一有界闭集外处处为零，则 $\delta(x)$ 必须满足性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\, dx = f(0) \tag{0.6}$$

特别地，若取 $f(x)=1$，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1 \tag{0.7}$$

在狭义定义下的函数当中，是不存在满足上述性质的函数的。但 $\delta(x)$ 可通过常规函数序列引入。考虑以下函数序列（图0.1）

$$f_n(x) = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/2} e^{-nx^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

则

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \tag{0.8}$$

确实，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f_n(x) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

故由式(0.8)和极限与积分的相关性质有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

满足(0.7)。

要验证式(0.8)还一般地满足(0.6)，我们需要证明

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx f_n(x) f(x) = f(0)$$

对 $f(x)$ 关于 $x=0$ 进行泰勒展开†：

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m$$

*本讲义不对广义函数进行正式的定义。读者只需要了解 δ 函数的基本性质就可以了。广义函数在数学上又称作分布（*distributions*），可参考[2]。

†函数 f 满足的性须使其必可进行泰勒展开。

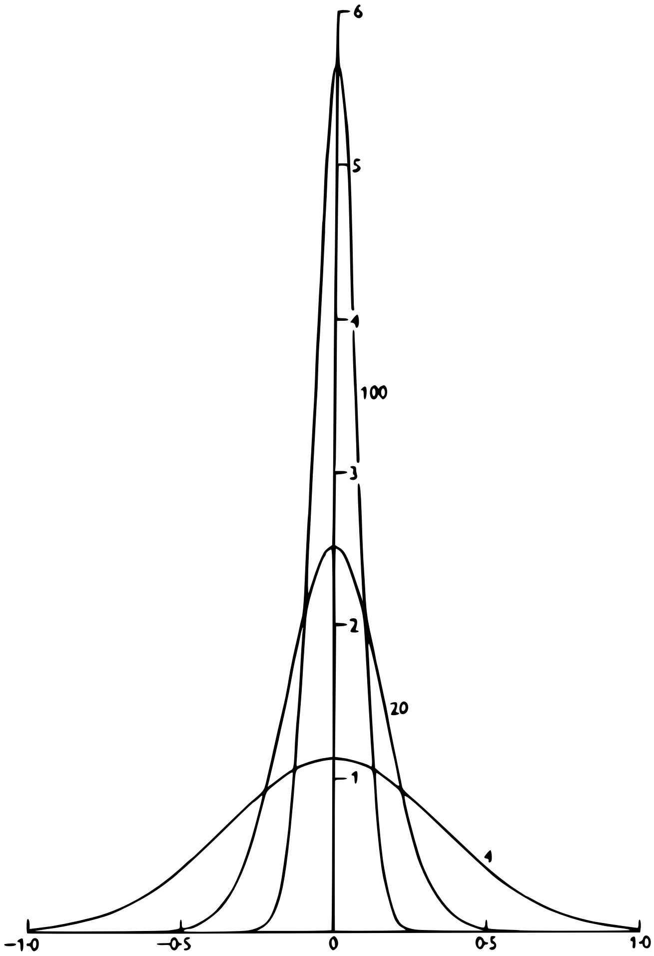

图 0.1: 函数序列 $f_n(x) = e^{-nx^2}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/2}$ 在 $n = 4, 20, 100$ 时的图像[3]。

故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx f_n(x) f(x) &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m)}(0)}{m!}\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx f_n(x) x^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m)}(0)}{m!}\left[1+(-1)^m\right]\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}}\lim_{n\to\infty} n^{-m/2} \\ &= f(0)\end{aligned}$$

上式只有 $m = 0$ 项不为零，故(0.6)得验。

利用式(0.6)和式(0.7)，还可得到 δ 函数的以下基本性质：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u+a)\,\delta(u)\,du = f(a) \tag{0.9}$$

以及 δ 函数的导数的性质（分部积分）：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}\delta(x) f(x)\,dx &= f(x)\,\delta(x)\big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\delta(x)\,dx \\ &= -f'(0)\end{aligned} \tag{0.10}$$

其中由于前面提到 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 的某一有界闭集外处处为零故 $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$，上式的第一个等号右边的第一项为零（利用 δ 函数与 f_n 的关系可验）。

以上仅以某一个函数序列在 $n\to\infty$ 的极限规定了 δ 函数，使得我们能够推导很多 δ 函数的性质，但具有同样性质（式(0.6)和(0.7)）的 δ 函数可由不止一组函数序列来得到，这些函数序列在得出同一个 δ 函数这件事上是等价的。只要一个函数序列 $f_n(x)$ 对每一 $n\in\mathbb{N}$ 满足：

1. 关于 $x=0$ 对称；
2. 在 $n\to\infty$ 时变得“无限高”和“无限窄”；
3. 在 $n\to\infty$ 时积分面积恒为 1，

则 $\delta(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ 就是狄拉克 δ 函数。例如，另一个可得到 δ 函数的等价函数序列是

$$g_n(x) = \begin{cases} n, & -\frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{2n} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

在 $\mathbb{R}^n$ 上，可定义 n 维 δ 函数 $\delta(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} \delta(x_i)\,,\quad \mathbf{x} = (x_1,\cdots,x_n)$。此时，对任一定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的无穷阶可微且在 $\mathbb{R}^n$ 的某有界闭集外处处为零的函数 $f(\mathbf{x})$ 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{x}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{a}) f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) \tag{0.11}$$