

0.1 Fourier变换的引入

对于周期为 $2L$ 的周期函数，或定义在 $[-L, L]$ 上的函数 $f(x)$ ，其Fourier级数（*Fourier series*）展开^{[1]§11.5, §11.6}形如

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (0.1)$$

其中

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

利用欧拉公式*

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \\ \sin(x) &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \end{aligned}$$

式(??)可表示为

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}, \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx \quad (0.2)$$

其中 $c_0 = \frac{1}{2}a_0$, $c_n = (a_n - ib_n)/2$, $c_{-n} = (a_n + ib_n)/2 = \overline{c_n}$ 。

函数可作Fourier展开（或说式(??)或式(??)等号右边的Fourier级数收敛）的条件——狄利克雷条件（*Dirichlet conditions*），请自行回顾^{[1]定理11.6.1, p.301}。

若 $f(x)$ 定义在 \mathbb{R} 上，则至少可考虑 f 限制在在区间 $(-L, L)$ 上的函数 $f_L: (-L, L) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_L(x) = f(x)$ 的Fourier级数，它将形如式(??)。我们进一步进行如下处理：

$$\begin{aligned} f_L(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\pi x/L} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(x') e^{-in\pi x'/L} dx' \right) e^{in\pi x/L} \\ \left(\frac{n}{2L} \equiv y_n, \Delta y = y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2L} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-L}^L f_L(x') e^{-i2\pi y_n x'} dx' \right] e^{i2\pi x y_n \Delta y} \end{aligned}$$

*正体小写字母i专门用于表示虚数 $i \equiv \sqrt{-1}$ 。

让 $L \rightarrow \infty$, 与此同时 $\Delta y \rightarrow 0$, 在黎曼积分可积条件下, 上式可记作以下积分

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \infty dy \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-i2\pi yx} \right] e^{i2\pi xy} dy \quad (0.3)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy \tilde{f}(y) e^{i2\pi xy} \quad (0.4)$$

其中

$$\tilde{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-i2\pi yx}$$

称 $f(x)$ 的 Fourier 变换 (Fourier transform), $f(x)$ 称 $\tilde{f}(y)$ 的反 Fourier 变换 (inverse Fourier transform), 记为

$$\tilde{f}(y) = \mathcal{F}\{f(x)\}, \quad f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(y)\}$$

函数 $f(x)$ 存在 Fourier 变换的充份条件 (需同时满足):

1. $f(x)$ 绝对可积, 即 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$
2. $f(x)$ 在 \mathbb{R} 的任一有限区间上具有有限个极值
3. $f(x)$ 在 \mathbb{R} 的任一有限区间上具有有限个不连续点, 且在那些点上 $f(x)$ 取有限函数值。

等价地, 可以说连续函数或具有有限个不连续点的有界函数存在 Fourier 变换。

定义在 \mathbb{R}^n 上的函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 的 Fourier 变换形如:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{k} \tilde{f}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (0.5)$$

其中

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$$

f 的 Fourier 变换存在的条件与上述 $n=1$ 的条件相似。

以下是一些常用的 Fourier 变换性质:

1. 线性。若 $h(x) = \alpha f(x) + g(x)$ 则 $\tilde{h}(k) = \alpha \tilde{f}(k) + \tilde{g}(k), \forall \alpha \in \mathbb{R}$
2. 时移。若 $h(x) = f(x - x_0)$, 则 $\tilde{h}(k) = e^{-ikx_0} \tilde{f}(k), \forall x_0 \in \mathbb{R}$ 。
3. 频移 (调制)。若 $h(x) = e^{-ik_0x} f(x)$, 则 $\tilde{h}(k) = \tilde{f}(k - k_0), \forall k_0 \in \mathbb{R}$ 。
4. 时域标度。若 $h(x) = f(\alpha x)$, 则 $\tilde{h}(k) = |\alpha|^{-1} \tilde{f}(k), \forall \alpha \neq 0$ 。
5. 微分。 $\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\} = ik\mathcal{F}\{f(x)\}, \quad \mathcal{F}\left\{\frac{d^n}{dx^n}f(x)\right\} = (ik)^n \{f(x)\}$
6. 卷积。若 $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x')} g(x+x') dx'$ 称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的卷积 (convolution), 则 $\tilde{h}(k) = \tilde{f}(k) \tilde{g}(k)$ 。

常见函数的 Fourier 变换对, 可查 Fourier 变换表。

0.2 狄拉克delta函数

狄拉克 δ 函数 (*Dirac's δ -function*) $\delta(x)$ (简称 δ 函数) 是一个广义函数 (*generalized function*)[†]。设定义在 \mathbb{R} 上的任一实值函数 $f(x)$ 任意整数阶可微, 且在 \mathbb{R} 的某一有界闭集外处处为零, 则 $\delta(x)$ 必须满足性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0) \quad (0.6)$$

特别地, 若取 $f(x) = 1$, 则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (0.7)$$

在狭义定义下的函数当中, 是不存在满足上述性质的函数的。但 $\delta(x)$ 可通过常规函数序列引入。考虑以下函数序列 (图??)

$$f_n(x) = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/2} e^{-nx^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

则

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (0.8)$$

确实,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f_n(x) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

故由式(??)和极限与积分的相关性质有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

满足(??)。

要验证式(??)还一般地满足(??), 我们需要证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx f_n(x) f(x) = f(0)$$

对 $f(x)$ 关于 $x = 0$ 进行泰勒展开[‡]:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m$$

[†]本讲义不对广义函数进行正式的定义。读者只需要了解 δ 函数的基本性质就可以了。广义函数在数学上又称作分布 (*distributions*), 可参考^[2]。

[‡]函数 f 满足的性质须使其必可进行泰勒展开。

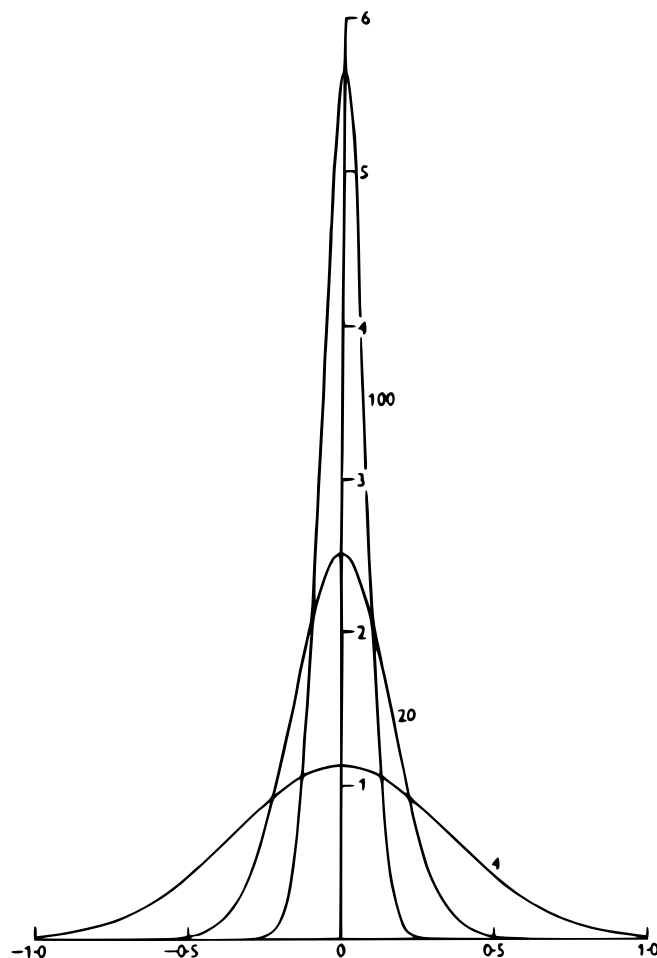


图 0.1: 函数序列 $f_n(x) = e^{-nx^2} \left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/2}$ 在 $n = 4, 20, 100$ 时的图像^[3]。

故

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx f_n(x) f(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx f_n(x) x^m \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} [1 + (-1)^m] \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-m/2} \\
 &= f(0)
 \end{aligned}$$

上式只有 $m = 0$ 项不为零，故(??)得验。

利用式(??)和式(??)，还可得到 δ 函数的以下基本性质：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(u+a) \delta(u) du = f(a) \quad (0.9)$$

以及 δ 函数的导数的性质（分部积分）：

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} \delta(x) f(x) dx &= f(x) \delta(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \delta(x) dx \\
 &= -f'(0)
 \end{aligned} \quad (0.10)$$

其中由于前面提到 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 的某一有界闭集外处处为零故 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ ，上式的第一个等号右边的第一项为零（利用 δ 函数与 f_n 的关系可验）。

以上仅以某一个函数序列在 $n \rightarrow \infty$ 的极限规定了 δ 函数，使得我们能够推导很多 δ 函数的性质，但具有同样性质（式(??)和(??)）的 δ 函数可由不止一组函数序列来得到，这些函数序列在得出同一个 δ 函数这件事上是等价的。只要一个函数序列 $f_n(x)$ 对每一 $n \in \mathbb{N}$ 满足：

1. 关于 $x = 0$ 对称；
2. 在 $n \rightarrow \infty$ 时变得“无限高”和“无限窄”；
3. 在 $n \rightarrow \infty$ 时积分面积恒为1，

则 $\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ 就是狄拉克 δ 函数。例如，另一个可得到 δ 函数的等价函数序列是

$$g_n(x) = \begin{cases} n, & -\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

在 \mathbb{R}^n 上，可定义 n 维 δ 函数 $\delta(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \delta(x_i)$ ， $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ 。此时，对任一定义在 \mathbb{R}^n 上的无穷阶可微且在 \mathbb{R}^n 的某有界闭集外处处为零的函数 $f(\mathbf{x})$ 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{x} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) \quad (0.11)$$