0.0.1 欧拉齐次函数定理的证明

定义 1. 设 k 是整数，$\mathcal{V}$、$\mathcal{W}$ 是同数域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间，C 是 $\mathcal{V}$ 的一个满足 $\forall \mathbf{r} \in C, s \in \mathbb{F} \setminus 0 \wedge s\mathbf{r} \in C$ 的凸锥。若函数 $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ 有一个以 C 为定义域的偏函数满足

$$\forall \mathbf{r} \in C \forall s \in \mathbb{F} \setminus 0, f(s\mathbf{r}) = s^k f(\mathbf{r})$$

则称 f 是一个*k 次齐函数*（*homogeneous function of degree k*）。

留意到，0 次齐函数就是恒等映射。

若 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$，我们常考虑正次齐函数，即限制 $s > 0$。此时 k 可推广至实数。此时留意到，有些正次齐函数不是齐函数。例如，若 $\mathcal{V}$、$\mathcal{W}$ 是赋范向量空间，函数 $f(\mathbf{r}) = \|\mathbf{r}\|$ 是正次齐函数，但不是齐函数。

定理 1 (齐函数的欧拉定理). 设 k 是实数、n 是正整数，函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的开子集 D 上可微分，且为 k 次齐函数，则 f 在 D 上满足偏微分方程

$$kf(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \nabla f(\mathbf{r})$$

证明. 因为 f 是正次齐函数，故在 D 上有

$$\forall s > 0, f(s\mathbf{r}) = s^k f(\mathbf{r})$$

两边对 s 求导下式在开集 D 上仍成立

$$\forall s > 0, s\mathbf{r} \cdot \nabla f(s\mathbf{r}) = ks^{k-1} f(\mathbf{r})$$

当 $s = 1$ 时命题得证。 □

不太严格但较易懂的版本可见《物理化学》上册附录 I.8。

0.0.2 撷取最大项法