

Санкт-Петербургский государственный университет  
информационных технологий, механики и оптики

## Лабораторная работа №14

*Изучение свободных электромагнитных колебаний в LCR-контуре*

Выполнил: Кротков Павел  
Группа: 1538  
Преподаватель: Королёв Александр  
Александрович

Санкт-Петербург, 2011 г.

# 1 Цель работы

Изучение характеристик свободного колебательного процесса, возбуждаемого импульсным воздействием в простом LRC-контуре.

## 2 Содержание работы

### 2.1 Уравнение процесса. Характеристики затухания

Простой колебательный контур состоит из последовательных индуктивности  $L$ , ёмкости  $C$ , и активного сопротивления  $R$ . Если предварительно запасти энергию, например, зарядив конденсатор от внешнего источника тока, а затем подключить конденсатор к катушке индуктивности, то в образовавшемся изолированном контуре возникнут *свободные* электромагнитные колебания.

Действительно, при разряде конденсатора появляются изменяющиеся во времени ток и пропорциональное ему магнитное поле. Меняющееся магнитное поле порождает в контуре ЭДС самоиндукции  $\varepsilon_s$ , которая по закону Ленца сначала замедляет скорость разряда конденсатора, а после того, как конденсатор полностью разрядится, продолжает поддерживать ток в прежнем направлении. В результате происходит перезарядка конденсатора. Затем процесс разряда конденсатора продолжается, но в обратном направлении и т.д. Возникающие свободные колебания заряда  $q$ , тока  $I$  и напряжений  $U$  на элементах контура совершаются с циклической частотой  $\omega$  (периодом  $T = 2\pi/\omega$ ), а колебания электрической  $W_e = \frac{CU^2}{2}$  и магнитной  $W_m = \frac{LI^2}{2}$  энергии  $I$  с удвоенной частотой  $2\omega$  (максимумы энергий появляются дважды за период  $T$ ).

Вследствие джоулевых потерь в активном сопротивлении контура  $R$  часть энергии колебаний превращается в теплоту, что приводит к затуханию колебаний. При больших величинах  $R$  колебания могут вообще не возникнуть — наблюдается апериодический разряд конденсатора.

Найдём уравнение, описывающее свободные затухающие колебания в контуре. Заряд  $q$  на конденсаторе, напряжении на нём  $U$ , ток в контуре  $I$  и ЭДС самоиндукции  $\varepsilon_s$  связаны соотношениями

$$q = CU, I = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{dU}{dt}, \varepsilon_s = -L \cdot \frac{dI}{dt} = -LC \cdot \frac{d^2U}{dt^2} \quad (1)$$

По закону Кирхгофа для полной цепи имеем

$$IR = -U + \varepsilon_s \quad (2)$$

С учётом соотношений (1) уравнение (2) для переменной  $U$  приобретает вид

$$\frac{d^2U}{dt^2} + 2\delta \frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = 0, \quad (3)$$

где введены обозначения  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  — собственная частота контура. Легко показать, что точно такой же вид имеют уравнения для заряда конденсатора  $q$  и тока  $I$ .

Из теории известно, что полученное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от соотношения между  $\delta$  и  $\omega_0$  имеет решение — функции, по разному меняющиеся во времени.

При условии  $\delta < \omega_0$  (малое затухание) уравнение (3) имеет решение в виде

$$U = U_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos \omega t, \text{ где } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad (4)$$

которое описывает затухающий колебательный процесс.

Затухание нарушает периодичность колебаний и строгое применение понятия периода и частоты к ним не применимо. Однако при малом затухании условно пользуются понятием периода

как промежутка времени между последующими максимумами (или минимумами) колеблющейся величины. С учётом этой оговорки период свободных затухающих колебаний в контуре равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \quad (5)$$

С увеличением затухания период колебаний растёт, обращаясь в бесконечность при  $\delta = \omega_0$ , т.е. движение перестаёт быть периодическим. В данном случае ( $\delta \geq \omega_0$ ) напряжение на конденсаторе приближается к нулю при  $t \rightarrow 0$  и уже будет описываться функцией, отличной от вида (4)

Такой процесс называется *aperiodическим*. Переход к нему происходит при величине сопротивления контура  $R \geq R_{kp} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ .

В качестве меры затухания колебательного процесса кроме коэффициента затухания  $\delta$  используются и другие характеристики:

1. *время релаксации*  $\tau$  — интервал времени, за который амплитуда колебаний уменьшается в  $e = 2,72$  раза:

$$\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{2L}{R}. \quad (6)$$

2. *логарифмический декремент затухания*  $\lambda$  — величина, определяемая как натуральный логарифм отношения двух амплитуд  $U(t)$  и  $U(t + T)$ , разделённых интервалом времени, равным периоду колебаний  $T$ :

$$\lambda = \ln \frac{U(t)}{U(t + T)} = \delta T = \frac{R}{2L} \cdot T. \quad (7)$$

На практике измеряется отношение амплитуд  $U(t)$  и  $U(t + nT)$ , отстоящих друг от друга на  $n$  периодов, тогда

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{U(t)}{U(t + nT)}. \quad (8)$$

Из формулы (8) вытекает смысл  $\lambda$  как величины, обратной числу периодов, за время которых амплитуда колебаний уменьшается в  $e = 2,71$  раза.

3. *добротность контура*  $Q$  — величина, определяемая соотношением

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t + T)}, \quad (9)$$

где  $W$  — запасённая энергия,  $\Delta W = W(t) - W(t + T)$  — средняя потеря энергии за период  $T$ .

При малых затуханиях ( $\delta^2 \leq \omega_0^2$ ) величина добротности равна

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_\varepsilon, \quad (10)$$

где  $N_\varepsilon$  — число колебаний, происходящих за время релаксации  $\tau$ . Если выразить добротность через параметры контура, то получим

$$Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (11)$$

## 2.2 Фазовая плоскость

В ряде случаев удобно изучать колебательные и нелинейные процессы в системе координат  $(I, U)$  — «ток-напряжение». В механике аналогичными координатами являются скорость и перемещение. Плоскость таких координат носит название *плоскости состояний* или *фазовой плоскости*, а кривая, изображающая зависимость этих координат называется *фазовой кривой*.

Рассмотрим фазовую кривую для процессов в  $LCR$ -контуре. Для нахождения силы тока продифференцируем функцию  $U(t)$  (4) по времени:

$$I = C \frac{dU}{dt} = CU_0 e^{-\delta t} \cdot (-\delta \cos \omega t + \omega \sin \omega t).$$

Умножим и разделим это выражение на  $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \delta^2}$ .

$$\dot{I} = I_0 \cdot e^{-\delta t} \cos(\omega t + \psi). \quad (12)$$

Так как  $\cos \psi < 0$ , а  $\sin \psi > 0$ , то фазовый сдвиг между током и напряжением заключен в интервале  $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$ . Это означает, что ток в контуре опережает по фазе напряжение на конденсаторе не более, чем на  $\frac{\pi}{2}$ .

Фазовая кривая  $I(U)$  описывается в параметрической форме системой из двух уравнений

$$\begin{cases} U = U_0 e^{-\delta t} \cos \omega t \\ I = I_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \psi) \end{cases} \quad (13)$$

При  $R = 0$  ( $\delta = 0$ ) опережение тока по фазе составляет  $\psi = \frac{\pi}{2}$  и фазовая кривая будет представлять собой эллипс, как в случае сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний с постоянными амплитудами, сдвинутых по фазе на четверть периода. В реальной ситуации при наличии затухания ( $R > 0$ ) амплитуды напряжения и тока в контуре непрерывно убывают, не повторяясь через период  $T$ , и фазовая кривая получается незамкнутой.

## Задание 1. Измерение периода колебаний, логарифмического декремента и параметров контура

Измерим период колебаний  $T = 0,65$  мс.

Измерим амплитуды колебаний, отстоящих друг от друга на  $n = 5, \dots, 15$  и вычислим логарифмический декремент по формуле (8).

По формулам  $\delta = \frac{\lambda}{t}$ ,  $Q = \frac{\pi}{\lambda}$  и  $\tau = \frac{1}{\lambda}$  рассчитаем коэффициент затухания, добротность и время релаксации.

С находится из модифицированной формулы (5):

$$C = \frac{4LT^2}{16\pi^2 L^2 + R^2 T^2} \quad (14)$$

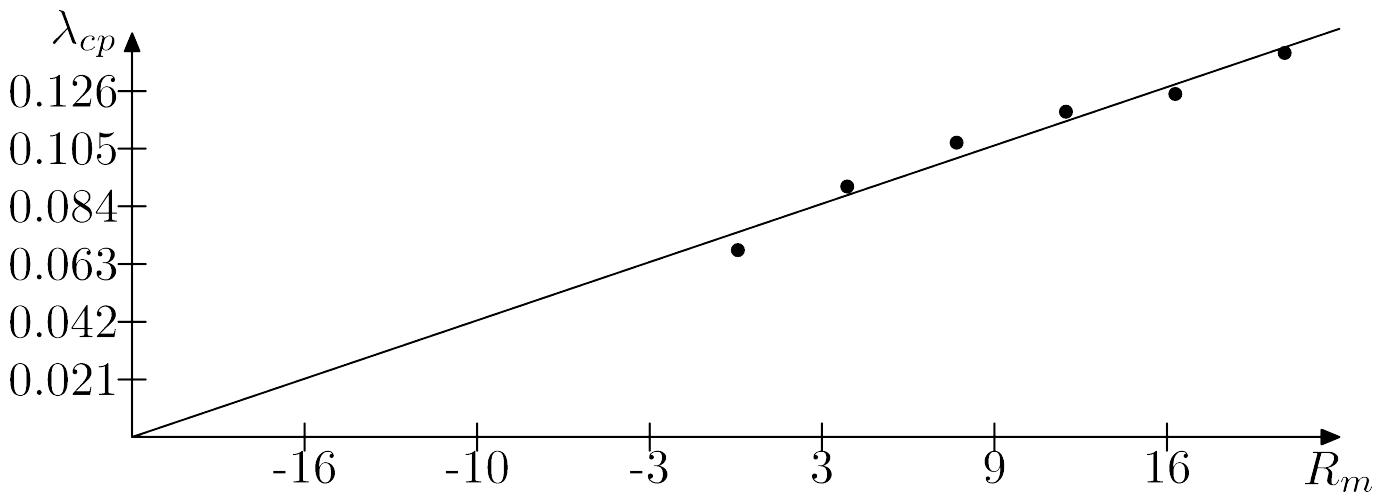
Повторим измерения для других значений внешнего сопротивления  $R_m$  в интервале от 1 до 10 Ом.

Построим график зависимости  $\lambda(R_m)$ . Эту зависимость можно аппроксимировать линейной функцией  $y = A + Bx$ . Проведя прямую (построенную с помощью метода наименьших квадратов) до пересечения с  $\lambda = 0$ , найдём эквивалентное сопротивление контура  $R_k = 22,16$ .

Найдём усреднённые значения  $L$  и  $C$ .

$$\langle L \rangle = 0,0966 \text{ Гн.}$$

$$\langle C \rangle = 1,11 \cdot 10^{-7} \text{ Ф.}$$



$R_m, \text{M}$	$n$	$U, \text{B}$	$\lambda$	$\lambda_{cp}$	$\delta$	$Q$	$\tau$	$R, \text{Om}$	$L, \text{Hn}$	$C, \Phi$
0,00	0,00	0,01000	-	0,07	105,00	46,03	0,02	22,16	0,11	$1,02 \cdot 10^{-7}$
	5,00	0,00800	0,04							
	10,00	0,00450	0,08							
	15,00	0,00300	0,08							
4,00	0,00	0,00950	-	0,09	140,73	34,34	0,03	26,16	0,09	$1,15 \cdot 10^{-7}$
	5,00	0,00600	0,09							
	10,00	0,00400	0,09							
	15,00	0,00225	0,10							
8,00	0,00	0,00950	-	0,11	165,30	29,24	0,03	30,16	0,09	$1,17 \cdot 10^{-7}$
	5,00	0,00525	0,12							
	10,00	0,00350	0,10							
	15,00	0,00200	0,10							
12,00	0,00	0,00950	-	0,12	182,78	26,44	0,04	34,16	0,09	$1,15 \cdot 10^{-7}$
	5,00	0,00500	0,13							
	10,00	0,00300	0,12							
	15,00	0,00175	0,11							
16,00	0,00	0,00925	-	0,13	192,76	25,07	0,04	38,16	0,10	$1,08 \cdot 10^{-7}$
	5,00	0,00475	0,13							
	10,00	0,00275	0,12							
	15,00	0,00150	0,12							
20,00	0,00	0,00900	-	0,14	215,71	22,41	0,04	42,16	0,10	$1,10 \cdot 10^{-7}$
	5,00	0,00450	0,14							
	10,00	0,00200	0,15							
	15,00	0,00125	0,13							

## Задание 2. Исследование фазовых кривых

Задание заключается в исследовании фазовых кривых, изображенных на экране осциллографа. Для исследования измерим значения напряжений в моменты времени, разделенные периодом  $T$ , то есть расстояния от центра до точек пересечения фазовой кривой и оси напряжения  $U$ . После измерения вычислим логарифмический декремент затухания  $\lambda$  по формуле (8) для различных амплитуд и усредним результат. Повторим измерения для нескольких различных значений сопротивления  $R_m$  и занесем все результаты измерений в таблицу.

$R_m, \text{Om}$	$r, \text{Om}$	$U_1, \text{B}$	$U_2, \text{B}$	$U_3, \text{B}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_{cp}$
100,00	122,16	0,0019	0,0011	0,0008	0,55	0,43	0,49
200,00	222,16	0,0031	0,0013	0,0006	0,87	0,82	0,85
300,00	322,16	0,0038	0,0012	0,0004	1,15	1,13	1,14
400,00	422,16	0,0042	0,0008	0,0002	1,66	1,52	1,59

