

Санкт-Петербургский государственный университет
информационных технологий, механики и оптики

Лабораторная работа №14

Изучение свободных электромагнитных колебаний в LCR-контуре

Выполнил: Попов Артём
Группа: 1538
Преподаватель: Королёв Александр
Александрович

Санкт-Петербург, 2011 г.

1 Цель работы

Изучение характеристик свободного колебательного процесса, возбуждаемого импульсным воздействием в простом LRC-контуре.

2 Содержание работы

2.1 Уравнение процесса. Характеристики затухания

Простой колебательный контур состоит из последовательных индуктивности L , ёмкости C , и активного сопротивления R . Если предварительно запасти энергию, например, зарядив конденсатор от внешнего источника тока, а затем подключить конденсатор к катушке индуктивности, то в образовавшемся изолированном контуре возникнут *свободные* электромагнитные колебания.

Действительно, при разряде конденсатора появляются изменяющиеся во времени ток и пропорциональное ему магнитное поле. Меняющееся магнитное поле порождает в контуре ЭДС самоиндукции ε_s , которая по закону Ленца сначала замедляет скорость разряда конденсатора, а после того, как конденсатор полностью разрядится, продолжает поддерживать ток в прежнем направлении. В результате происходит перезарядка конденсатора. Затем процесс разряда конденсатора продолжается, но в обратном направлении и т.д. Возникающие свободные колебания заряда q , тока I и напряжений U на элементах контура совершаются с циклической частотой ω (периодом $T = 2\pi/\omega$), а колебания электрической $W_e = \frac{CU^2}{2}$ и магнитной $W_m = \frac{LI^2}{2}$ энергии I с удвоенной частотой 2ω (максимумы энергий появляются дважды за период T).

Вследствие джоулевых потерь в активном сопротивлении контура R часть энергии колебаний превращается в теплоту, что приводит к затуханию колебаний. При больших величинах R колебания могут вообще не возникнуть — наблюдается апериодический разряд конденсатора.

Найдём уравнение, описывающее свободные затухающие колебания в контуре. Заряд q на конденсаторе, напряжении на нём U , ток в контуре I и ЭДС самоиндукции ε_s связаны соотношениями

$$q = CU, I = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{dU}{dt}, \varepsilon_s = -L \cdot \frac{dI}{dt} = -LC \cdot \frac{d^2U}{dt^2} \quad (1)$$

По закону Кирхгофа для полной цепи имеем

$$IR = -U + \varepsilon_s \quad (2)$$

С учётом соотношений (1) уравнение (2) для переменной U приобретает вид

$$\frac{d^2U}{dt^2} + 2\delta \frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = 0, \quad (3)$$

где введены обозначения $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — собственная частота контура. Легко показать, что точно такой же вид имеют уравнения для заряда конденсатора q и тока I .

Из теории известно, что полученное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от соотношения между δ и ω_0 имеет решение — функции, по разному меняющиеся во времени.

При условии $\delta < \omega_0$ (малое затухание) уравнение (3) имеет решение в виде

$$U = U_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos \omega t, \text{ где } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad (4)$$

которое описывает затухающий колебательный процесс.

Затухание нарушает периодичность колебаний и строгое применение понятия периода и частоты к ним не применимо. Однако при малом затухании условно пользуются понятием периода

как промежутка времени между последующими максимумами (или минимумами) колеблющейся величины. С учётом этой оговорки период свободных затухающих колебаний в контуре равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \quad (5)$$

С увеличением затухания период колебаний растёт, обращаясь в бесконечность при $\delta = \omega_0$, т.е. движение перестаёт быть периодическим. В данном случае ($\delta \geq \omega_0$) напряжение на конденсаторе приближается к нулю при $t \rightarrow 0$ и уже будет описываться функцией, отличной от вида (4)

Такой процесс называется *aperiodическим*. Переход к нему происходит при величине сопротивления контура $R \geq R_{kp} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

В качестве меры затухания колебательного процесса кроме коэффициента затухания δ используются и другие характеристики:

1. *время релаксации* τ — интервал времени, за который амплитуда колебаний уменьшается в $e = 2,72$ раза:

$$\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{2L}{R}. \quad (6)$$

2. *логарифмический декремент затухания* λ — величина, определяемая как натуральный логарифм отношения двух амплитуд $U(t)$ и $U(t + T)$, разделённых интервалом времени, равным периоду колебаний T :

$$\lambda = \ln \frac{U(t)}{U(t + T)} = \delta T = \frac{R}{2L} \cdot T. \quad (7)$$

На практике измеряется отношение амплитуд $U(t)$ и $U(t + nT)$, отстоящих друг от друга на n периодов, тогда

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{U(t)}{U(t + nT)}. \quad (8)$$

Из формулы (8) вытекает смысл λ как величины, обратной числу периодов, за время которых амплитуда колебаний уменьшается в $e = 2,71$ раза.

3. *добротность контура* Q — величина, определяемая соотношением

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t + T)}, \quad (9)$$

где W — запасённая энергия, $\Delta W = W(t) - W(t + T)$ — средняя потеря энергии за период T .

При малых затуханиях ($\delta^2 \leq \omega_0^2$) величина добротности равна

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_\varepsilon, \quad (10)$$

где N_ε — число колебаний, происходящих за время релаксации τ . Если выразить добротность через параметры контура, то получим

$$Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (11)$$

2.2 Фазовая плоскость

В ряде случаев удобно изучать колебательные и нелинейные процессы в системе координат (I, U) — «ток-напряжение». В механике аналогичными координатами являются скорость и перемещение. Плоскость таких координат носит название *плоскости состояний* или *фазовой плоскости*, а кривая, изображающая зависимость этих координат называется *фазовой кривой*.

Рассмотрим фазовую кривую для процессов в LCR -контуре. Для нахождения силы тока продифференцируем функцию $U(t)$ (4) по времени:

$$I = C \frac{dU}{dt} = CU_0 e^{-\delta t} \cdot (-\delta \cos \omega t + \omega \sin \omega t).$$

Умножим и разделим это выражение на $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \delta^2}$.

$$\dot{I} = I_0 \cdot e^{-\delta t} \cos(\omega t + \psi). \quad (12)$$

Так как $\cos \psi < 0$, а $\sin \psi > 0$, то фазовый сдвиг между током и напряжением заключен в интервале $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$. Это означает, что ток в контуре опережает по фазе напряжение на конденсаторе не более, чем на $\frac{\pi}{2}$.

Фазовая кривая $I(U)$ описывается в параметрической форме системой из двух уравнений

$$\begin{cases} U = U_0 e^{-\delta t} \cos \omega t \\ I = I_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \psi) \end{cases} \quad (13)$$

При $R = 0$ ($\delta = 0$) опережение тока по фазе составляет $\psi = \frac{\pi}{2}$ и фазовая кривая будет представлять собой эллипс, как в случае сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний с постоянными амплитудами, сдвинутых по фазе на четверть периода. В реальной ситуации при наличии затухания ($R > 0$) амплитуды напряжения и тока в контуре непрерывно убывают, не повторяясь через период T , и фазовая кривая получается незамкнутой.

Задание 1. Измерение периода колебаний, логарифмического декремента и параметров контура

Измерим период колебаний $T = 0,65$ мс.

Измерим амплитуды колебаний, отстоящих друг от друга на $n = 5, \dots, 15$ и вычислим логарифмический декремент по формуле (8).

По формулам $\delta = \frac{\lambda}{t}$, $Q = \frac{\pi}{\lambda}$ и $\tau = \frac{1}{\lambda}$ рассчитаем коэффициент затухания, добротность и время релаксации.

С находится из модифицированной формулы (5):

$$C = \frac{4LT^2}{16\pi^2 L^2 + R^2 T^2} \quad (14)$$

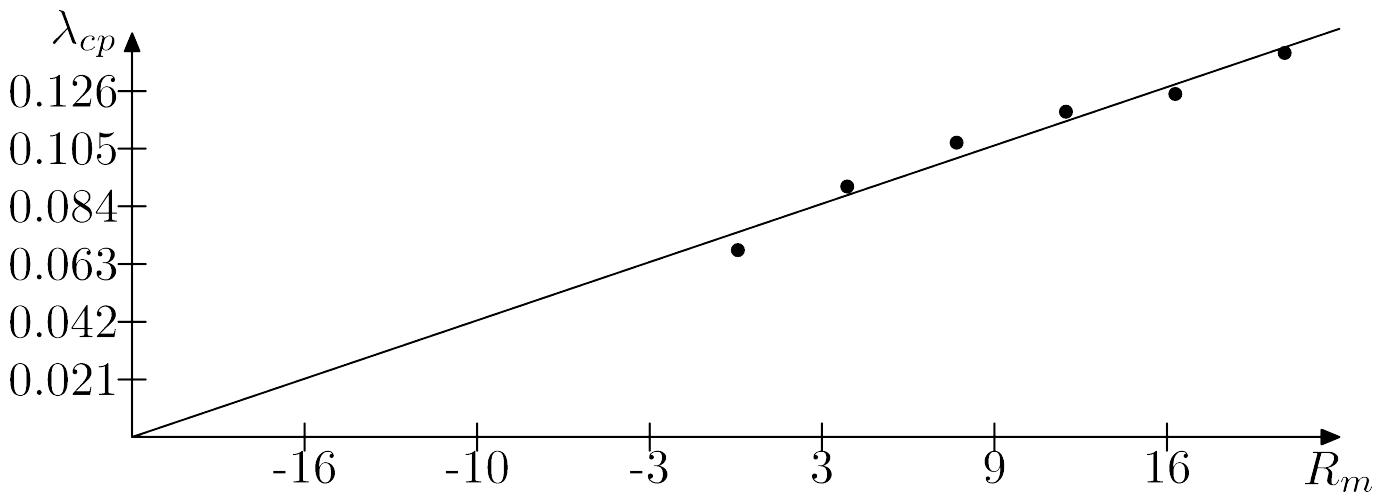
Повторим измерения для других значений внешнего сопротивления R_m в интервале от 1 до 10 Ом.

Построим график зависимости $\lambda(R_m)$. Эту зависимость можно аппроксимировать линейной функцией $y = A + Bx$. Проведя прямую (построенную с помощью метода наименьших квадратов) до пересечения с $\lambda = 0$, найдём эквивалентное сопротивление контура $R_k = 22,16$.

Найдём усреднённые значения L и C .

$$\langle L \rangle = 0,0966 \text{ Гн.}$$

$$\langle C \rangle = 1,11 \cdot 10^{-7} \text{ Ф.}$$



R_m, M	n	U, B	λ	λ_{cp}	δ	Q	τ	R, Om	L, Hn	C, Φ
0,00	0,00	0,01000	-	0,07	105,00	46,03	0,02	22,16	0,11	$1,02 \cdot 10^{-7}$
	5,00	0,00800	0,04							
	10,00	0,00450	0,08							
	15,00	0,00300	0,08							
4,00	0,00	0,00950	-	0,09	140,73	34,34	0,03	26,16	0,09	$1,15 \cdot 10^{-7}$
	5,00	0,00600	0,09							
	10,00	0,00400	0,09							
	15,00	0,00225	0,10							
8,00	0,00	0,00950	-	0,11	165,30	29,24	0,03	30,16	0,09	$1,17 \cdot 10^{-7}$
	5,00	0,00525	0,12							
	10,00	0,00350	0,10							
	15,00	0,00200	0,10							
12,00	0,00	0,00950	-	0,12	182,78	26,44	0,04	34,16	0,09	$1,15 \cdot 10^{-7}$
	5,00	0,00500	0,13							
	10,00	0,00300	0,12							
	15,00	0,00175	0,11							
16,00	0,00	0,00925	-	0,13	192,76	25,07	0,04	38,16	0,10	$1,08 \cdot 10^{-7}$
	5,00	0,00475	0,13							
	10,00	0,00275	0,12							
	15,00	0,00150	0,12							
20,00	0,00	0,00900	-	0,14	215,71	22,41	0,04	42,16	0,10	$1,10 \cdot 10^{-7}$
	5,00	0,00450	0,14							
	10,00	0,00200	0,15							
	15,00	0,00125	0,13							

Задание 2. Исследование фазовых кривых

Задание заключается в исследовании фазовых кривых, изображенных на экране осциллографа. Для исследования измерим значения напряжений в моменты времени, разделенные периодом T , то есть расстояния от центра до точек пересечения фазовой кривой и оси напряжения U . После измерения вычислим логарифмический декремент затухания λ по формуле (8) для различных амплитуд и усредним результат. Повторим измерения для нескольких различных значений сопротивления R_m и занесем все результаты измерений в таблицу.

R_m, Om	r, Om	U_1, B	U_2, B	U_3, B	λ_1	λ_2	λ_{cp}
100,00	122,16	0,0019	0,0011	0,0008	0,55	0,43	0,49
200,00	222,16	0,0031	0,0013	0,0006	0,87	0,82	0,85
300,00	322,16	0,0038	0,0012	0,0004	1,15	1,13	1,14
400,00	422,16	0,0042	0,0008	0,0002	1,66	1,52	1,59

