

Санкт-Петербургский государственный университет
информационных технологий, механики и оптики

Лабораторная работа №2-1

Изучение свойств идеального газа на примере воздуха

Выполнил: Комаров Андрей
Группа: 1538
Преподаватель: Королёв Александр
Александрович

Санкт-Петербург, 2010 г.

1 Цели работы

1. Экспериментальная проверка уравнения состояния идеального газа.
2. Определение температуры абсолютного нуля по шкале Цельсия.

2 Теоретические основы лабораторной работы

В том случае, когда состояние газа далеко от области фазовых превращений, его с достаточной степенью точности можно считать идеальным. В качестве идеального газа в работе используется обычный атмосферный воздух.

Для произвольной массы m идеального газа справедливо следующее уравнение состояния:

$$PV = \frac{m}{\mu}RT \quad (1)$$

где P — давление, V — объем, μ — молярная масса, T — абсолютная температура газа, R — универсальная газовая постоянная. Это уравнение называется уравнением Менделеева-Клапейрона.

Нулю абсолютной температуры по шкале Цельсия соответствует значение $t_0 = -273.15^\circ$. Градусы шкалы абсолютной температуры (шкалы Кельвина) и шкалы Цельсия выбраны одинаковыми. Поэтому значение абсолютной температуры связано со значением температуры по шкале Цельсия формулой

$$T = t(^{\circ}C) - t_0 = t(^{\circ}C) + 273.15^{\circ}C \quad (2)$$

Пусть исследуемый газ находится в цилиндре с контролируемым рабочим объемом $V_{\text{ц}}$ (см. рис. 1), масса газа в цилиндре $m_{\text{ц}}$. Температура t цилиндра с газом поддерживается постоянной.

Датчик давления, работающий при комнатной температуре, вынесен за пределы рабочего объема и соединен с последним трубкой. Объем газа V_x в этой трубке мал по сравнению с рабочим объемом $V_{\text{ц}}$. В соединительной трубке также находится газ массой m_x при некоторой неизвестной средней температуре t_x , лежащей в интервале от комнатной температуры до температуры t рабочего объема.

В работе измеряется зависимость давления P газа от величины рабочего объема $V_{\text{ц}}$ при разных значениях температуры t (от $20^{\circ}C$ до $60^{\circ}C$). Выведем соотношение, связывающее рабочий объем и давление газа при постоянной температуре. Общее количество вещества в рабочем объеме и соединительной трубке

$$\nu = \frac{m_{\text{ц}} + m_x}{\mu} \quad (3)$$

в течение всей работы остается постоянным. Выражая массы газа $m_{\text{ц}}$ и m_x из уравнения состояния (1), абсолютную температуру из соотношения (2), и подставляя найденные выражения в формулу (3), получим

$$\nu = \frac{PV_{\text{ц}}}{R(t - t_0)} + \frac{PV_x}{R(t_x - t_0)} \quad (4)$$

Из этого уравнения найдем искомое соотношение:

$$V_{\text{ц}} = \frac{\nu R(t - t_0)}{P} + \frac{V_x(t - t_0)}{t_x - t_0} \quad (5)$$

Из-за перераспределения газа между объемами $V_{\text{ц}}$ и V_x в процессе измерения температура t_x может изменяться. Однако, при относительно малой величине V_x изменением второго слагаемого в формуле (5) можно пренебречь. Поэтому при неизменной температуре t зависимость рабочего объема $V_{\text{ц}}$ от обратного давления $\frac{1}{P}$ является линейной. Угловым коэффициентом этой зависимости

$$K = \nu R(t - t_0) \quad (6)$$

в свою очередь, линейно меняется с температурой и обращается в нуль при абсолютном нуле температур. Таким образом, изучение зависимости $K(t)$ позволяет найти значение t_0 .

Рассмотрим другой, более точный, способ определения величины t_0 . Если для разных температур измерение давления проводить при одних и тех же значениях объема, то полученные данные легко преобразуются в зависимость давления от температуры при разных значениях рабочего объема газа. Теоретический вид этой зависимости получается из уравнения (5):

$$P = \frac{\nu R(t - t_0)}{V_{\text{ц}}(1 + x(t))} \approx \frac{\nu R(t - t_0)}{V_{\text{ц}}}(1 - x(t)) \quad (7)$$

где $x(t) = \frac{V_x(t-t_0)}{V_{\text{ц}}(t_x-t_0)}$. Справедливость приближенного равенства в формуле (7) обусловлена тем, что значения функции $x(t)$ малы, и для малых x можно воспользоваться формулой приближенных вычислений:

$$(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x \quad (8)$$

В данном случае $\alpha = -1$.

При неизменном рабочем объеме $V_{\text{ц}}$ график зависимости давления от температуры в соответствии с формулой (7) должен быть почти линейным. Причем давление должно обращаться в нуль как раз при $t = t_0$. Из-за малости функции отклонение от линейности невелико, и при измерении в ограниченном диапазоне температур практически незаметно. Но, если искать значение t_0 с помощью линейной аппроксимации экспериментальной зависимости $P(t)$, продолжая (экстраполируя) аппроксимирующую прямую до пересечения с осью t , то найденное приближенное значение \tilde{t}_0 окажется систематически смещенным влево относительно истинного значения t_0 (см. рис. 2). Причина этого в следующем. Величина $x(t)$ в первом приближении линейно растущая функция температуры, с учетом этого график функции $P(t)$ из уравнения (7) оказывается параболой, выпуклой вверх. Аппроксимирующая прямая, параметры которой найдены по точкам в рабочем диапазоне температур, идет практически по касательной к этому графику, «промахиваясь» мимо истинного значения t_0 , как изображено на рис. 1. Однако, можно показать, что разность $\tilde{t}_0 - t_0$ при малом отношении $\frac{V_x}{V_{\text{ц}}}$ должна убывать обратно пропорционально объему $V_{\text{ц}}$. Поэтому, правильное значение температуры абсолютного нуля может быть найдено как предел:

$$t_0 = \lim_{\frac{1}{V_{\text{ц}}} \rightarrow 0} \tilde{t}_0 \quad (9)$$

линейным продолжением графика зависимости \tilde{t}_0 от $\frac{1}{V_{\text{ц}}}$ к значению $\frac{1}{V_{\text{ц}}} \rightarrow 0$.

3 Порядок выполнения работы

1. С помощью лабораторного барометра определить текущее атмосферное давление P_0 и записать его значение в протокол работы.
2. Включить цифровой измерительный прибор в режиме измерения температуры и давления (включение производит дежурный инженер). Установить рабочий объем цилиндра 100 мл (обратите внимание на положение визирной стрелки на маховике штока поршня). Залить в термостат четыре с половиной кружки воды комнатной температуры. Аккуратно поместить в термостат цилиндр 1 с датчиком температуры так, чтобы опорная площадка цилиндра легла на горлышко термостата.
3. Подождать пока показания давления престанут изменяться (приблизительно 5–10 минут). При этом рабочий объем газ придет в тепловое равновесие с термостатом. Записать значение температуры термостата (около 20°) в таблицу 1.1. Последовательно изменяя рабочий объём газа, начиная со 100 мл, с шагом 10 мл сначала в сторону уменьшения до 50 мл, затем в сторону увеличения до 140 мл и обратно до 50 мл, затем снова до 100 мл дважды

измерить разность давлений ΔP для каждого значения $V_{\text{ц}}$ в таблице 1.1. Результаты записываются в ячейки третьего и четвертого столбцов таблицы по часовой стрелке. Изменение объема можно контролировать, не вынимая цилиндр из термостата — уменьшению на 10 мл соответствует два оборота маховика по часовой стрелке.

4. Аккуратно вынуть рабочий цилиндр с датчиком температуры из термостата, положить на поддон. Отлить из термостата приблизительно три четверти кружки воды. Вылить воду из кружки в емкость для использованной воды. Налить из чайника три четверти кружки горячей воды в термостат. Перемешать воду в термосе. Поместить в термостат цилиндр с датчиком температуры. В термостате должна установиться новая температура (около 30°C). Повторить измерения п.3. Занести результаты в таблицу 1.2, аналогичную таблице 1.1.
5. Последовательно изменяя температуру термостата до значений $t_3(40^{\circ}\text{C})$, $t_4(50^{\circ}\text{C})$ и $t_5(60^{\circ}\text{C})$, как описано в пункте 4, записать получившиеся значения температур и произвести измерения п.3. Занести результаты в таблицы 1.3, 1.4, 1.5, аналогичные таблице 1.1.
6. После выполнения всех измерений выключить цифровой измерительный прибор, вынуть цилиндр с датчиком температуры и положить на поддон. Вылить воду из термостата в емкость для использованной воды.

4 Обработка результатов измерений

1. Перевести показания лабораторного барометра из миллиметров ртутного столба в паскали:

$$p_0(\text{Па}) = p_0(\text{мм.рт.ст.}) \cdot \rho g \quad (10)$$

Здесь $\rho = 13551 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ — плотность ртути, $g = 9,819 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ — ускорение свободного падения на широте Санкт-Петербурга.

2. Для каждой из таблиц 1.1–1.5 вычислить давление газа P по формуле

$$P = P_0 + \frac{\Delta p_1 + \Delta p_2}{2} \quad (11)$$

обратное давление $\frac{1}{P}$ и заполнить пятую и шестую колонки таблиц.

Таблица 1.1. Зависимость давления от объема при температуре $t_1 = 14,5^{\circ}\text{C}$

phi	1	3	5	7	9	11	13
1	159	156	160	156	161	159	159
2	139	136	137	138	136	138	139
4	98	100	98	96	99	100	98
6	62	63	65	61	61	59	59
8	27	30	24	27	26	27	25
9	10	11	10	12	12	9	9

Таблица 1.2. Зависимость давления от объема при температуре $t_2 = 24,4^\circ C$

№	$V_{\text{ц}}, \text{ мл}$	$\Delta P_1, \text{ кПа}$	$\Delta P_2, \text{ кПа}$	$P, \text{ кПа}$	$\frac{1}{P}, \text{ кПа}^{-1}$
1	50	7,3	7	108,938810785	0,009179465
2	60	-7,7	-6,1	94,888810785	0,0105386504
3	70	-17,8	-17,9	83,938810785	0,0119134402
4	80	-27,2	-27,5	74,438810785	0,0134338524
5	90	-34,7	-35	66,938810785	0,0149390165
6	100	-40,9	-41	60,838810785	0,0164368762
7	110	-46,1	-46,2	55,638810785	0,0179730657
8	120	-50,4	-50,5	51,338810785	0,0194784411
9	130	-54	-54	47,788810785	0,0209254004
10	140	-57,3	-57,4	44,438810785	0,0225028524

Таблица 1.3. Зависимость давления от объема при температуре $t_3 = 33^\circ C$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ln(\frac{r}{r_0})$	0,4054	0,5877	0,6931	0,9162	1,0986	1,2527	1,3862	1,6094	1,7917	2,0794
ϕ	8,33	7,46	6,86	5,69	4,98	4,29	3,84	2,82	1,91	0,59

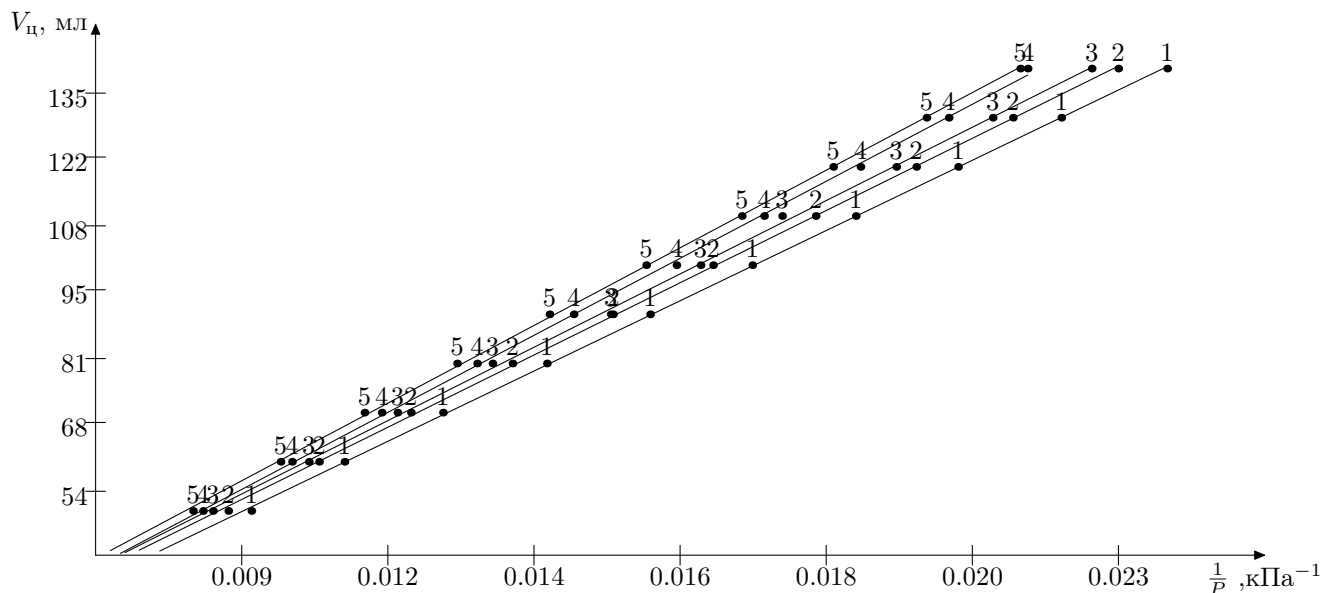
Таблица 1.4. Зависимость давления от объема при температуре $t_4 = 40,7^\circ C$

№	$V_{\text{ц}}, \text{ мл}$	$\Delta P_1, \text{ кПа}$	$\Delta P_2, \text{ кПа}$	$P, \text{ кПа}$	$\frac{1}{P}, \text{ кПа}^{-1}$
1	50	12,2	11,5	113,638810785	0,0087998105
2	60	-3,6	-2,6	98,688810785	0,010132861
3	70	-14,7	-14,6	87,138810785	0,0114759427
4	80	-24,1	-24,5	77,488810785	0,012905089
5	90	-32,2	-32	69,688810785	0,0143495059
6	100	-38,8	-38,9	62,938810785	0,0158884476
7	110	-43,5	-43,8	58,138810785	0,0172002142
8	120	-48,2	-48,1	53,638810785	0,0186432172
9	130	-51,4	-52	50,088810785	0,0199645387
10	140	-55	-54	47,288810785	0,0211466515

Таблица 1.5. Зависимость давления от объема при температуре $t_5 = 50,4^\circ C$

№	$V_{\text{ц}}, \text{ мл}$	$\Delta P_1, \text{ кПа}$	$\Delta P_2, \text{ кПа}$	$P, \text{ кПа}$	$\frac{1}{P}, \text{ кПа}^{-1}$
1	50	14	13,6	115,588810785	0,0086513564
2	60	-1,3	-1,5	100,388810785	0,0099612695
3	70	-12,6	-12,7	89,138810785	0,0112184579
4	80	-22,4	-22,5	79,338810785	0,0126041718
5	90	-30,3	-30,3	71,488810785	0,013988203
6	100	-37	-37	64,788810785	0,0154347639
7	110	-42,6	-42,4	59,288810785	0,0168665889
8	120	-47	-46,9	54,838810785	0,0182352605
9	130	-50,8	-50,9	50,938810785	0,0196313967
10	140	-54,3	-54,2	47,538810785	0,0210354442

3. По данным таблиц 1.1–1.5 для температур t_1, t_2, \dots, t_5 построить на одной координатной сетке графики зависимости рабочего объема $V_{\text{ц}}$ от обратного давления $\frac{1}{P}$. Убедиться, что зависимость $V_{\text{ц}}$ от $\frac{1}{P}$ во всех пяти случаях является прямолинейной.



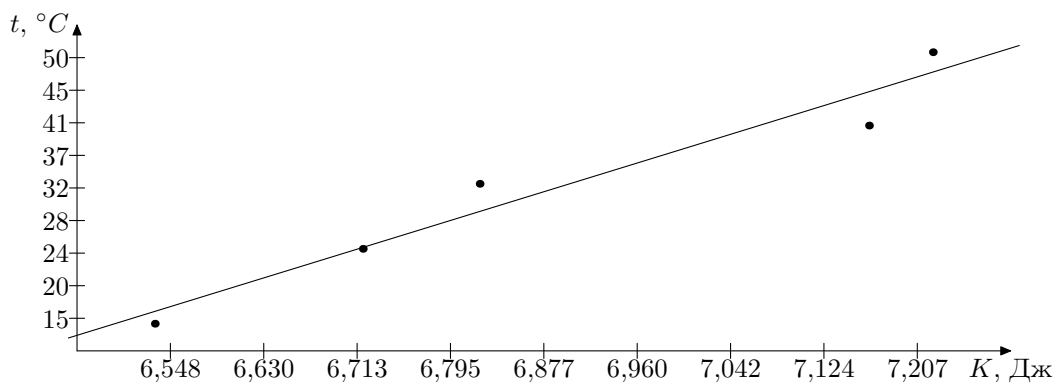
4. Перенести значения рабочих температур t_1, t_2, \dots, t_5 во второй столбец таблицы 2.1. Для каждого из графиков $V_{\text{ц}}$ от $\frac{1}{P}$ рассчитать угловой коэффициент K по формулам, приведенным в дополнении к работе. Значения K также занести в таблицу.

Таблица 2.1. Зависимость углового коэффициента графика $V_{\text{ц}}(\frac{1}{P})$ от температуры газа

№	$t, ^\circ\text{C}$	$K, \text{Дж}$
1	14,5	6,53433405221
2	24,4	6,71771409787
3	32,5	6,8207019108
4	38,1	7,16397368661
5	48,2	7,22026879175

5. По таблице 2.1. построить график зависимости $K(t)$. Как следует из формулы (6) этот график должен «идти» прямолинейно и пересекать ось t при температуре абсолютного нуля. По найденным экспериментальным точкам найти угловой коэффициент A и свободное слагаемое C для зависимости $K(t)$ по. Рассчитать температуру абсолютного нуля:

$$t_0 = \frac{-C}{A} = -303,93^\circ\text{C} \quad (12)$$



Найти погрешности ΔA , ΔC и вычислить погрешность температуры абсолютного нуля:

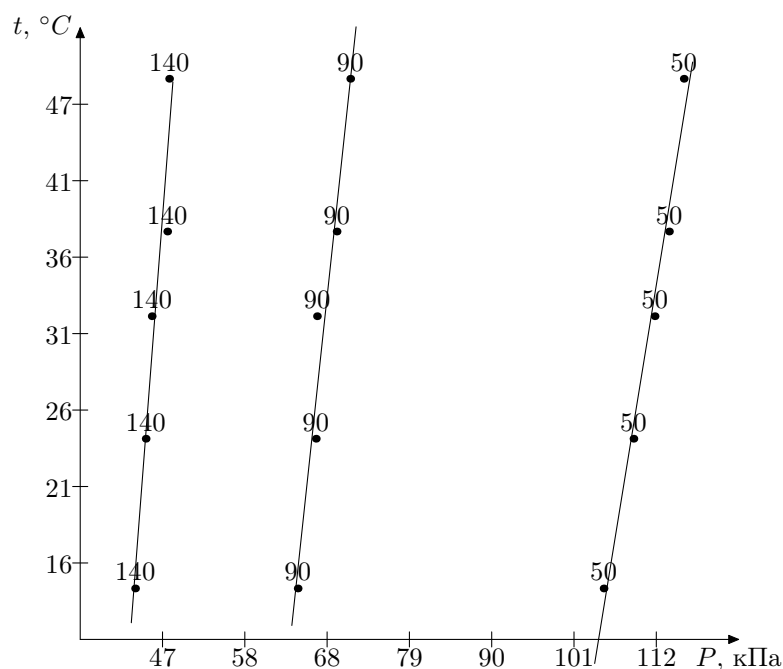
$$\Delta t_0 = \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2} = 42,62^\circ\text{C} \quad (13)$$

6. По данным таблиц 1.1–1.5 заполнить таблицу 2.2.

Таблица 2.2. Зависимость давления газа от температуры при разных значениях объема

$V_{\text{ц}}, \text{ мл}$	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
$t, ^\circ\text{C}$	$P, \text{ кПа}$									
14,5	104,99	91,59	80,69	71,69	64,54	58,74	53,84	49,74	46,19	43,04
24,4	108,94	94,89	83,94	74,44	66,94	60,84	55,64	51,34	47,79	44,44
32,5	111,74	96,29	85,39	76,14	67,09	61,54	57,24	52,14	48,49	45,24
38,1	113,64	98,69	87,14	77,49	69,69	62,94	58,14	53,64	50,09	47,29
48,2	115,59	100,39	89,14	79,34	71,49	64,79	59,29	54,84	50,94	47,54
$\frac{1}{V_{\text{ц}}}, \text{ мл}^{-1}$	0,020	0,017	0,014	0,013	0,011	0,010	0,009	0,008	0,008	0,007
$t_0, ^\circ\text{C}$	-316,08	-335,29	-312,23	-303,21	-302,38	-321,30	-312,73	-310,50	-306,46	-286,11

Пользуясь таблицей 2.2 для значений объема цилиндра 50, 90, 140 мл на одной координатной сетке построить графики $P(t)$, убедиться, что они «идут» прямолинейно.

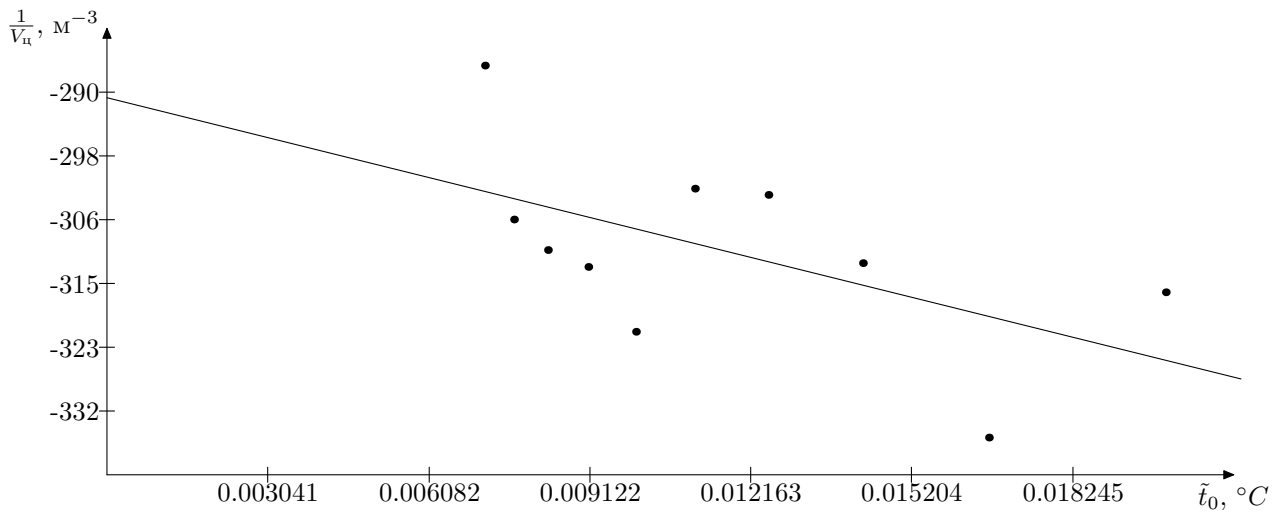


7. Для каждого из объемов в таблице 2.2 найти значение обратного объема $\frac{1}{V_{\text{ц}}}$ и рассчитать величину \tilde{t}_0 по формуле

$$\tilde{t}_0 = -\frac{c}{a} \quad (14)$$

где a и c , соответственно, угловой коэффициент и свободное слагаемое для зависимости $P(t)$. Занести значения в таблицу 2.2.

8. Пользуясь таблицей 2.2, по формулам найти угловой коэффициент A' и свободное слагаемое C' для зависимости $\tilde{t}_0(\frac{1}{V_{\text{ц}}})$. Величина C' фактически есть предел (9), т.е. совпадает со значением t_0 . На координатной сетке \tilde{t}_* от $\frac{1}{V_{\text{ц}}}$ отметить экспериментальные точки и начертить прямую, соответствующую параметрам A' и C' . Продолжить прямую до пересечения с осью ординат.



По этой зависимости, $t_0 = -290,36$

9. Рассчитать погрешность Δt_0 как $\Delta C'$: $\Delta t_0 = 11,06$

10. Для нахождения аппроксимирующих прямых использовались следующие формулы:

$$A = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X}) Y_i, \quad C = \bar{Y} - A \bar{X} \quad (15)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i, \quad D = \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2 \quad (16)$$

11. Погрешности коэффициента и слагаемого вычисляются по формулам

$$\Delta A = \sqrt{\frac{E}{D}}, \quad \Delta C = \sqrt{\left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{X}^2}{D} \right) \cdot E} \quad (17)$$

где

$$E = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (Y_i - A X_i - C)^2 \quad (18)$$

5 Выводы

Температура абсолютного нуля равна:

- Для первого способа измерения: $t_0 = -303,93 \pm 42,62^\circ C$
- Для второго способа: $t_0 = -290,36 \pm 11,06^\circ C$