

Санкт-Петербургский государственный университет
информационных технологий, механики и оптики

Лабораторная работа №1

Изучение скольжения тележки по наклонной плоскости

Выполнил: Комаров Андрей

Группа: 1538

Преподаватель: Королёв Александр
Александрович

Санкт-Петербург, 2010 г.

1 Цель работы

- 1.1 Экспериментальная проверка равноускоренности движения тележки по наклонной плоскости.
- 1.2 Определение ускорения свободного падения.

2 Теоретические основы лабораторной работы

Как известно, при равноускоренном движении тела вдоль оси Ox проекция его скорости v_x от времени t определяется выражением

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t \quad (1)$$

где v_{0x} — проекция скорости на ось Ox в начальный момент времени. Зависимость координаты x от времени t имеет вид

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2} \quad (2)$$

Рассмотрим тележку, скользящую по наклонной плоскости (рис. 1). Второй закон Ньютона, описывающий движение тележки:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{tp} \quad (3)$$

где \vec{N} — сила реакции опоры, а сила трения скольжения $\vec{F}_{tp} = \mu\vec{N}$. Проекции уравнения (3) на координатные оси:

$$\begin{aligned} Ox : N &= mg \cos \alpha; \\ Oy : ma &= mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha; \end{aligned} \quad (4)$$

Рис. 1: Направления действия сил

где α — угол между наклонной плоскостью и горизонтом. Из последнего уравнения следует

$$a = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha \quad (5)$$

3 Порядок выполнения работы

3.1 Измерение ускорения тележки при движении по рельсу с фиксированным углом наклона

Выполнив необходимые указания, заполним таблицу 1:

Таблица 1.1

	x , м	x' , м	h_0 , мм	h'_0 , мм
	0, 220	1, 000	179	171

Таблица 2.1

№	измеренные величины				рассчитанные величины	
	x_1 , м	x_2 , м	t_1 , с	t_2 , с	$2(x_2 - x_1)$, м	$t_2^2 - t_1^2$, с ²
1	0,15	0,4	2,5	4,4	0,5	13,11
2	0,15	0,4	3,1	5	0,5	15,39
3	0,15	0,4	5,7	7,8	0,5	28,35
4	0,15	0,4	3,5	5,5	0,5	18
5	0,15	0,4	3	4,5	0,5	11,25

№	измеренные величины				рассчитанные величины	
	x_1 , м	x_2 , м	t_1 , с	t_2 , с	$2(x_2 - x_1)$, м	$t_2^2 - t_1^2, c^2$
1	0,15	0,5	2,9	5,3	0,7	19,68
2	0,15	0,5	3,1	5,6	0,7	21,75
3	0,15	0,5	2,8	5,1	0,7	18,17
4	0,15	0,5	3	5,4	0,7	20,16
5	0,15	0,5	3	5,6	0,7	22,36

№	измеренные величины				рассчитанные величины	
	x_1 , м	x_2 , м	t_1 , с	t_2 , с	$2(x_2 - x_1)$, м	$t_2^2 - t_1^2, c^2$
1	0,15	0,7	2,1	4,9	1,1	19,6
2	0,15	0,7	2,3	5,3	1,1	22,8
3	0,15	0,7	2,3	5,3	1,1	22,8
4	0,15	0,7	2,5	5,5	1,1	24
5	0,15	0,7	2,9	6,2	1,1	30,03

№	измеренные величины				рассчитанные величины	
	x_1 , м	x_2 , м	t_1 , с	t_2 , с	$2(x_2 - x_1)$, м	$t_2^2 - t_1^2, c^2$
1	0,15	0,9	2	5,4	1,5	25,16
2	0,15	0,9	2,1	5,6	1,5	26,95
3	0,15	0,9	2,3	5,9	1,5	29,52
4	0,15	0,9	2,2	5,7	1,5	27,65
5	0,15	0,9	2,3	5,8	1,5	28,35

№	измеренные величины				рассчитанные величины	
	x_1 , м	x_2 , м	t_1 , с	t_2 , с	$2(x_2 - x_1)$, м	$t_2^2 - t_1^2, c^2$
1	0,15	1,1	2,2	6,2	1,9	33,6
2	0,15	1,1	2,4	6,6	1,9	37,8
3	0,15	1,1	2,4	6,7	1,9	39,13
4	0,15	1,1	2,5	6,6	1,9	37,31
5	0,15	1,1	2,5	6,3	1,9	33,44

3.2 Исследование зависимости ускорения тележки от угла наклона плоскости к горизонту. Определение ускорения свободного падения

Заполним таблицы 3.1–3.5:

№	h , мм	h' , мм	t_1 , с	t_2 , с
1	170	160	1,2	5,7
2	170	160	2	6,2
3	170	160	2,3	6,4
4	170	160	2,3	6,7
5	170	160	2,4	6,9

Таблица 3.2

№	h , мм	h' , мм	t_1 , с	t_2 , с
1	180	160	1	3,6
2	180	160	1,2	3,1
3	180	160	1,2	3,7
4	180	160	1,5	3,9
5	180	160	1,3	3,8

Таблица 3.3

№	h , мм	h' , мм	t_1 , с	t_2 , с
1	190	160	0,9	3
2	190	160	0,9	2,9
3	190	160	0,9	2,9
4	190	160	1	3
5	190	160	1	3

Таблица 3.4

№	h , мм	h' , мм	t_1 , с	t_2 , с
1	199	161	0,8	2,4
2	199	161	0,7	2,4
3	199	161	0,8	2,5
4	199	161	0,8	2,5
5	199	161	0,8	2,5

Таблица 3.5

№	h , мм	h' , мм	t_1 , с	t_2 , с
1	208	161	0,7	2,2
2	208	161	0,7	2,2
3	208	161	0,7	2,1
4	208	161	0,7	2,2
5	208	161	0,7	2,2

4 Обработка результатов

4.1 Упражнение первое

Если тележка движется равноускоренно и ее начальная скорость равна нулю, то

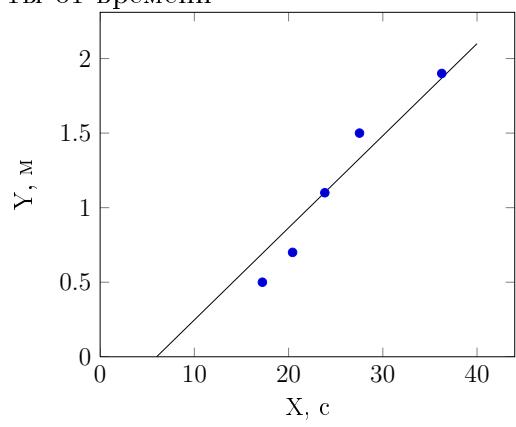
$$2(x_2 - x_1) = a(t_2^2 - t_1^2) \text{ или } Y = aX \quad (6)$$

где a — величина ускорения тележки. Таким образом, теоретический график зависимости Y от X представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат, а угловой коэффициент этой прямой равен ускорению тележки.

Нанесём экспериментальные точки на диаграмму $Y(X)$ и проведём через начало координат «на глаз» наилучшую аппроксимирующую прямую $\tilde{Y}(X)$ так, чтобы она проходила как можно ближе ко всем экспериментальным точкам. Выберем на аппроксимирующую прямую точку A , достаточно удаленную от начала координат. По её координатам X_A и Y_A вычислим ускорение как угловой коэффициент прямой $\tilde{Y}(X)$:

$$a_T = \frac{Y_a}{X_a} \quad (7)$$

Рис. 2: График зависимости координаты от времени



Согласно этой формуле, $a = 0,062 \text{ м/с}^2$.

Чем больше расстояние точки A от начала координат, тем меньше погрешность вычисления углового коэффициента прямой по формуле (7). Эта погрешность в дальнейшем не учитывается.

По отклонениям $Y_i - \tilde{Y}(X_i)$ ординат экспериментальных точек Y_i от соответствующих ординат точек $\tilde{Y}(X_i)$ аппроксимирующей прямой рассчитаем погрешность ускорения:

$$\Delta a_T = \frac{a_T}{Y_a} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \tilde{Y}(X_i))^2}{N-1}} \quad (8)$$

где $N = 5$ — количество экспериментальных точек. Согласно этой формуле, $\Delta a_T = 0,00525$, $a = 0,062 \pm 0,00525 \text{ м/с}^2$.

4.2 Упражнение второе

4.2.1 Для каждой серии измерений в таблицах 3.1–3.5 вычислим значение синуса угла наклона рельса к горизонту по формуле

$$\sin \alpha = \frac{h_0 - h - (h'_0 - h')}{x' - x} \quad (9)$$

Результаты занесём в таблицу 4:

4.2.2 Для каждой серии измерений вычислим среднее значение времени t_1 по формуле

$$\bar{t}_1 = \sum_{i=1}^N t_{1i} \quad (10)$$

где N — количество измерений в серии.

Вычислим случайную погрешность по формуле

$$\Delta \bar{t}_{1\text{сл}} = K_S(\alpha_{\text{дов}}, N) \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N t_{1i}}{N}}. \quad (11)$$

где $K_S(\alpha_{\text{дов}}, N)$ — коэффициент Стьюдента для доверительной вероятности $\alpha_{\text{дов}} = 0,7$ и количества измерений N . Если результаты отдельных измерений в серии не отличаются друг от друга, то случайную погрешность положим равной нулю.

Найдём полную погрешность по формуле

$$\Delta \bar{t}_1 = \sqrt{(\Delta \bar{t}_{1\text{сл}})^2 + (\Delta \bar{t}_{1\text{пп}})^2} \quad (12)$$

, где $\bar{t}_{1\text{пп}}$ — приборная погрешность измерения t_1 .

Доверительные интервалы $t_1 \pm \Delta t_1$ занесём в третий столбец таблицы 4.

4.2.3 По каждой серии измерений с помощью формул аналогичных формулам (10) – (12) найдём доверительные интервалы $t_2 \pm \Delta t_2$ для времени t_2 и результаты занесём в четвёртый столбец таблицы 4

4.2.4 Для каждой серии измерений вычислим значение ускорения и погрешности по формулам:

$$\bar{a} = \frac{2(x_2 - x_1)}{(\bar{t}_2)^2 - (\bar{t}_1)^2}; \Delta \bar{a} = \bar{a} \cdot \sqrt{\frac{(\Delta x_2)^2 + (\Delta x_1)^2}{(x_2 - x_1)^2} + \frac{4((\bar{t}_1 \Delta \bar{t}_1)^2 + (\bar{t}_2 \Delta \bar{t}_2)^2)}{((\bar{t}_2)^2 - (\bar{t}_1)^2)^2}} \quad (13)$$

Найденные результаты в виде доверительных интервалов $a \pm \Delta a$ занесём в последний столбец таблицы 4.

Таблица 4

количество пластин	$\sin \alpha$	$t_1, \text{ с}$	$\Delta t_1, \text{ с}$	$t_2, \text{ с}$	$\Delta t_2, \text{ с}$	$a, \text{ м/с}^2$	$\Delta a, \text{ м/с}^2$
1	0,011789	2,04	0,259660	6,38	0,245920	0,051993	0,028749
2	0,022315	1,24	0,106380	3,62	0,168570	0,164263	0,061540
3	0,032842	0,94	0,057458	2,96	0,057458	0,241177	0,035557
4	0,041263	0,78	0,055084	2,46	0,057458	0,349059	0,051308
5	0,050736	0,7	0,05	2,18	0,055084	0,445758	0,063432

4.2.5 Пользуясь результатами из второго и пятого столбцов таблицы 4 нанесём экспериментальные точки на диаграмму a от $\sin \alpha$. Покажем погрешность найденных значений \bar{a} на графике, изобразив доверительные интервалы для ускорения отрезками, параллельными оси a . Проведём аппроксимирующую прямую $\tilde{a}(\sin \alpha)$.

4.2.6 Выберем на аппроксимирующей прямой $\tilde{a}(\sin \alpha)$ достаточно удаленные друг от друга точки $A = (0,007; 0)$ и $B = (0,057; 0,503)$. По их координатам вычислим ускорение свободного падения как угловой коэффициент прямой:

$$g_{\text{рп}} = \frac{a_B - a_A}{\sin \alpha_B - \sin \alpha_A} \quad (14)$$

Согласно этой формуле, $g_{\text{рп}} = 10,11 \text{ м/с}^2$

4.2.7 По отклонениям $a_i - a(\sin \alpha_i)$ ординат экспериментальных точек от соответствующих ординат точек аппроксимирующей прямой рассчитаем погрешность:

$$\Delta g_{\text{рп}} = \frac{g_{\text{рп}}}{a_B - a_A} \cdot \sqrt{\frac{2}{N-2} \sum_{i=1}^N (\bar{a}_i - \tilde{a}(\sin \alpha_i))^2} \quad (15)$$

. Согласно этой формуле, $\Delta g_{\text{рп}} = 0,3755 \text{ м/с}^2$.

4.2.8 Запишем найденный доверительный интервал для ускорения свободного падения:

$$g = g_{\text{рп}} \pm \Delta g_{\text{рп}}$$

$$g = 10,11 \pm 0,3755 \text{ м/с}^2$$

Табличное значение попадает в этот интервал.

5 Выводы

- $a = 0,062 \pm 0,00525 \text{ м/с}^2$
- $g = 10,11 \pm 0,3755 \text{ м/с}^2$

Рис. 3: График зависимости ускорения от угла наклона

