Документ с фокусами для оценки массы галактики

по материалам А.А. Нежина

Мухин Андрей,

Горизонты физики 2024

Теорема вириала

Для стационарных (не зависящих от времени) физических систем выполняется соотношение, называемое теоремой вириала:

$$2\mathrm{K} + \mathrm{W} = 0$$

где

K – полная кинетическая энергия системы

W – полная кинетическая энергия системы

Применимо к галактике

Полная кинетическая энергия:

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{M} < \mathrm{v}^2 >}{2}$$

где

M – полная масса системы,

$< \mathrm{v}^2 >$ - среднеквадратичная скорость звезд системы (не дисперсия!)

Полная потенциальная энергия:

$$\mathrm{W} = \frac{\mathrm{G}M^2}{\mathrm{r_g}}$$

где

G – гравитационная постоянная

$\mathrm{r_g}$ - гравитационный радиус (характерный размер)

Оценка на массу

$$\left.\begin{aligned} 2K + W &= 0 \\ K &= \frac{M < v^2 >}{2} \\ W &= \frac{GM^2}{r_g} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{M = \frac{< v^2 > r_g}{G}}$$

Надо **измерить дисперсию скоростей** и **гравитационный радиус**

Сферическая симметрия

Предполагая (для простоты), сферическую симметрию галактики, можно получить, что:

$$\frac{\mathrm{M} < \mathrm{v}^2 >}{2} = K = 3\, K_z \Rightarrow < v^2 > = \frac{6K_z}{M}$$

где z – направление на наблюдателя

В общем виде и энергия, и масса, представимы в виде интегралов в 3-мерном пространстве:

$$K_z = \int d^3\boldsymbol{x}\, \rho(\boldsymbol{x}) < v_z^2 > (\boldsymbol{x}) \qquad M = \int d^3\boldsymbol{x}\, \rho(\boldsymbol{x})$$

где $\rho(\boldsymbol{x})$ – плотность вещества галактики

Подвязываем наблюдаемое излучение

Для галактик существует соотношение светимости к массе, которая позволяет ввести линейный коэффициент между плотностью и яркостью:

$$\rho = \Gamma \times j$$

где

Γ – некий феноменологический коэффициент,

j – объемная плотность яркости галактики

Фокусы с переходами

$< v^2 > = \frac{6K_z}{M} = \frac{3\Gamma\int dx\int dy\int dz<v_z^2>j}{\Gamma\int dx\int dy\int dz\ j}$ = (интегрируем по z) =

не зависит от z

$= 3\,\frac{\int dxdy\ I(x,y)<v_z^2>}{\int dxdy\ I(x,y)}$ = (переходим в полярные координаты) =

$= 3\,\frac{\int dR\ R\ I(R)\ <v_z^2>}{\int dR\ R\ I(x,y)} = 3\,\frac{\int dR\ R\ I(R)\ \sigma_z^2(R)}{\int dR\ R\ I(x,y)}$

$\boxed{\sigma_z^2 =< v_z^2 >} - (< v_z >)^2$

В целом покоимся, поэтому $< v_z >= 0$

где

I(R) – поверхностная яркость,

σ_z^2 - дисперсия скоростей вдоль оси z

Подставляем куда надо

Итак, вводя усредненную по светимости дисперсию скоростей:

$$< \sigma_z^2 > = \frac{\int dR\, R\, \sigma_z^2(R) I(R)}{\int dR\, R\, I(R)}$$

получим, что:

$$M = \frac{< v^2 > r_g}{G} = \boxed{3 \frac{< \sigma_z^2 > r_g}{G}}$$

Что такое гравитационный радиус?

Определение грав. радиуса разнится в разной литературе, но в целом его удобно приниматься примерно как:

$$r_g \approx 2{,}5\, r_{\frac{1}{2}}$$

где $r_{\frac{1}{2}}$ - радиус шара, из которого выходит половина всей светимости галактики

Поскольку смотрим мы на двумерные изображения, нам нужен радиус круга с половинной светимостью, который равен:

$$r_{\frac{1}{2}} \approx 1{,}3\, R_{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{r_g \approx 3{,}3\, R_{\frac{1}{2}}}$$

Итоговая формула

Тогда массу галактики только **из наблюдаемых данных** можно оценить как:

$$\mathrm{M} \approx 10 \frac{< \sigma_z^2 > \mathrm{R}_{\frac{1}{2}}}{\mathrm{G}}$$

где,

$$< \sigma_z^2 > = \frac{\int dR\, R\, \sigma_z^2(R) I(R)}{\int dR\, R\, I(R)}$$

$\sigma_z^2(R)$ - профиль дисперсии скоростей

$I(R)$ – профиль поверхностной яркости

$\mathrm{R}_{\frac{1}{2}}$ - характерный радиус половинной яркости галактики