Евгений Яшков, технический специалист Micromine Origin

МЕТОД КРИГИНГА НА ПАЛЬЦАХ: КАК УСТРОЕН ВНУТРИ САМЫЙ ПОПУЛЯРНЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ СОДЕРЖАНИЙ В БЛОЧНЫХ МОДЕЛЯХ

Для оценки содержаний в блочных моделях в ГГИС Micromine Origin & Beyond используются несколько методов интерполяции: метод обратных расстояний и кригинг в нескольких его разновидностях. И если метод обратных расстояний обладает предельно прозрачной математикой, которую легко воспроизвести и вручную на тетрадном листке, то с кригингом дела обстоят сложнее. Многие специалисты знают про преимущества кригинга, но не знают про внутреннее устройство алгоритма оценки. Попытка прояснить ситуацию зачастую приводит наши поиски к сложной специализированной литературе, наполненной формулами и академическими терминами.

В данной статье мы постараемся разобрать, как устроен кригинг, на примере одного из самых распространенных его вариантов — ординарного кригинга.

Как и все методы оценки, кригинг требователен к подготовке данных опробования. Для получения качественного результата пробы должны быть декластеризованы, разбиты на геологические домены и на популяции с нормальным (логнормальным) распределением, ураганные содержания должны быть подавлены. В Micromine Origin & Beyond есть все необходимые инструменты для предварительного статистического анализа проб, автоматического разбиения на популяции, урезки ураганов, композитирования и подготовки моделей вариограмм.

Кригинг относится к линейным методам оценки. «Линейный» означает, что для интерполяции используются непосредственно сами содержания проб без каких-либо преобразований и их весовые коэффициенты.

Зная это, можно представить себе формулу кригинга в простейшем виде:

оцененное содержание в блоке = сумма (содержание пробы * вес пробы)

Таким образом, оцененное содержание в блоке равняется сумме произведений содержаний проб, участвующих в оценке, и их весовых коэффициентов.

Очень похоже на формулу оценки методом обратных расстояний, не так ли? Действительно, в этом оба метода сходятся. Различаются же они способом нахождения весовых коэффициентов проб. Если в методе обратных расстояний вес определяется путем нахождения обратной степени (чаще всего обратного квадрата) от расстояния между пробой и оцениваемой точкой, то в кригинге используется более сложный метод расчета, позволяющий лучше учесть особенности распределения данных.

В основе определения весов проб в кригинге лежат два принципа:

— наименьшая разница между фактическими и оцененными содержаниями (минимизация дисперсии погрешности);

— отсутствие погрешности (несмещенность оценки).

Что означают эти принципы?

Наименьшая разница между фактическими и оцененными содержаниями, также называемая минимизацией дисперсии погрешности, означает, что при оценке содержаний веса проб должны быть подобраны таким образом, чтобы снизить к минимуму разницу между оцененным содержанием и фактическим содержанием в оцениваемой точке:

(содержание в пробе * вес пробы — фактическое содержание)^2 нужно свести к минимуму

Отсутствие погрешности, также называемое несмещенностью оценки, означает, что сумма весов всех проб, участвующих в оценке, должна быть равна единице: это условие позволяет избежать завышения или занижения оцененных содержаний.

У читателя может возникнуть вопрос: откуда нам узнать фактическое содержание в точке, которую мы только собираемся оценить? Именно здесь метод кригинга и задействует вариограмму. Вариограммы рассчитываются на основе сравнения пар фактических значений в пробах, поэтому можно сказать, что они несут информацию о фактических содержаниях.

Рассмотрим работу метода кригинга на простом примере.

Зная содержания трех входных проб, пронумерованных с 1 до 3, оценим содержание в блоке с использованием ординарного кригинга.

Как и в методе обратных расстояний, первым шагом измеряется расстояние от оцениваемой точки до каждой входной пробы, помимо этого, в кригинге также измеряются расстояния между самими пробами (см. рис. 1).

Содержания в точках и расстояния между точками и от точек до центра блока (к рис. 1)

Расстояния между точками и от точек до центра блока

Точка	Содержание	Расстояние до точки 1	Расстояние до точки 2	Расстояние до точки 3	Расстояние до блока
1	10	0	71.92	62.24	50
2	4	71.92	0	25.61	25
3	1	62.24	25.61	0	15

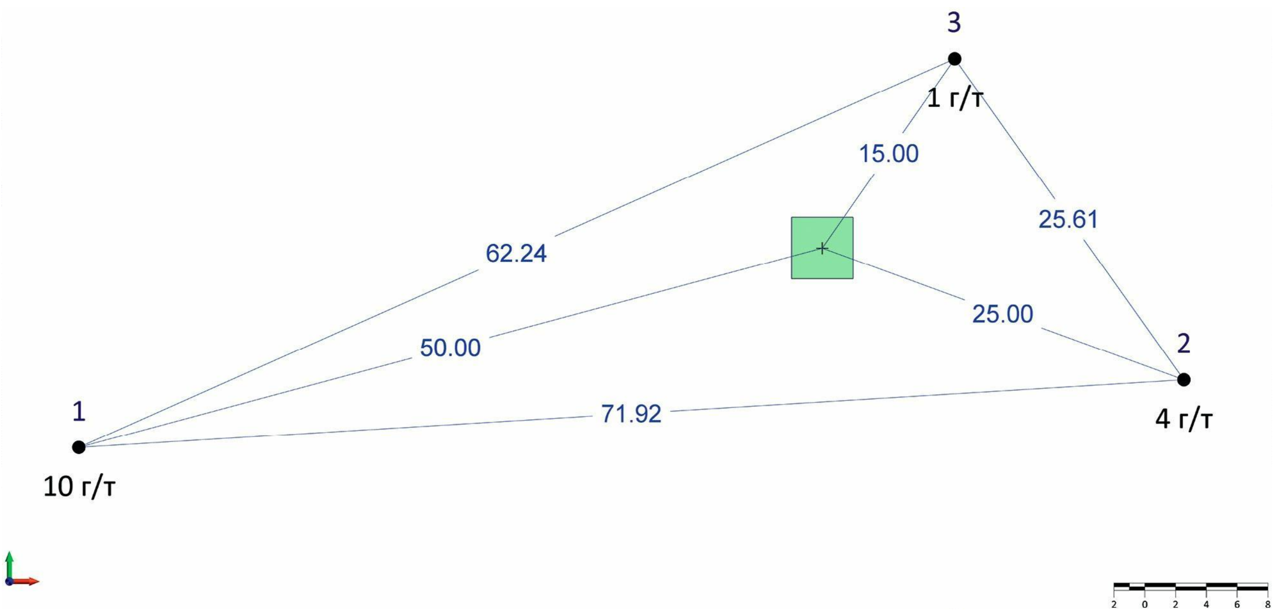
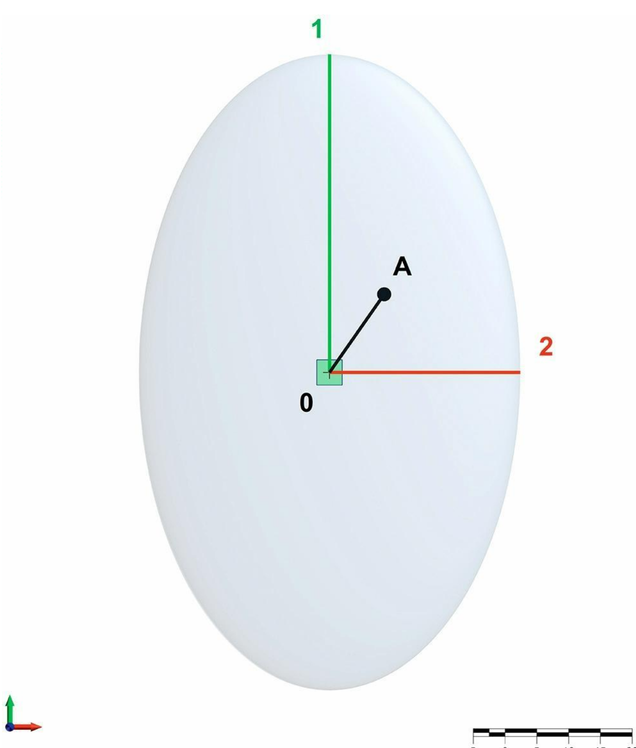


Рис. 1. Карта по входным данным для ординарного кригинга, построенная в ГГИС Micromine Origin & Beyond

Далее на основании заранее построенных моделей вариограмм вычисляются значения вариограмм для каждого из расстояний. По сути, модель вариограммы в данном случае выступает в роли «таблицы подстановок», по которой мы определяем значение вариограммы, соответствующее определенному расстоянию.

Если распределение содержаний в исследуемой области является анизотропным, используются три модели направленных вариограмм. Значение вариограммы для каждого расстояния при этом определяется по модели, которая вычисляется на основании положения осей вариограмм и направления, по которому было измерено расстояние (рис. 2).

В данном примере рассматривается ситуация с изотропным распределением: значения вариограмм вычисляются на основании одной всенаправленной модели вариограммы (рис. 3).



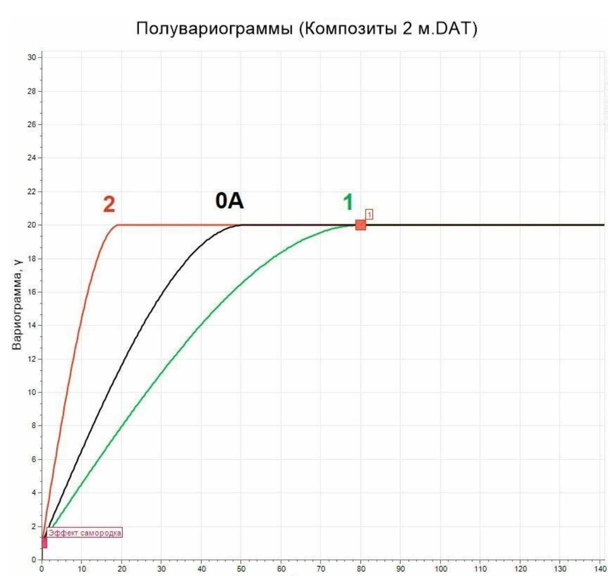


Рис. 2. Пример. Если вектор от оцениваемой точки 0 до точки A расположен между осями 1 и 2, то вариограмма для этого направления 0A будет являться «усреднением» вариограмм осей 1 и 2

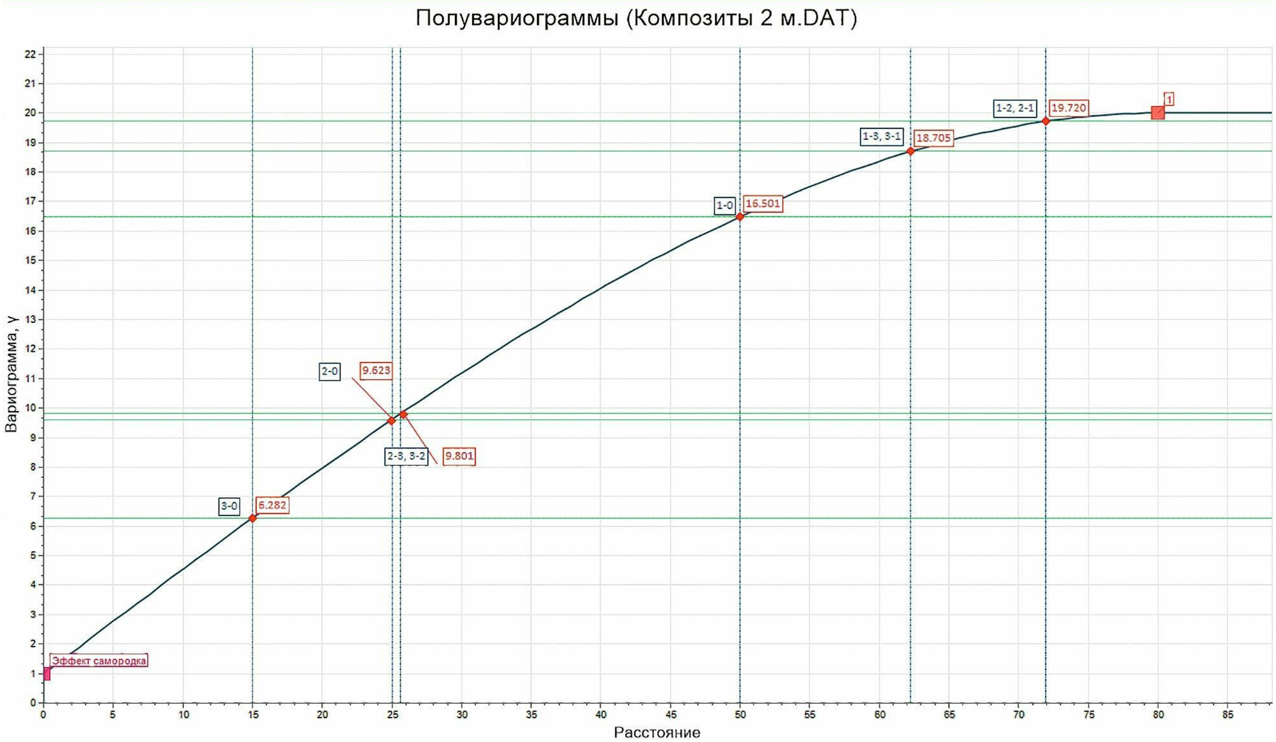


Рис. 3. Всенаправленная вариограмма, построенная в ГГИС Micromine Origin & Beyond

Измеренные расстояния и соответствующие им значения вариограммы (к рис. 3)

Вариограммы, рассчитанные для расстояний между точками и от точек до центроида блока

Точка, n	Содер-жание	Вариограмма, γ(n1)	Вариограмма, γ(n2)	Вариограмма, γ(n3)	Вариограмма, γ(n0)
1	10	1.000	19.720	18.705	16.501
2	4	19.720	1.000	9.801	9.623
3	1	18.705	9.801	1.000	6.282

Веса проб рассчитываются по системе линейных уравнений, где $\gamma(x_{11})$, $\gamma(x_{12})$, $\gamma(x_{nn})$ — значения вариограмм для рассчитанных расстояний между пробами, $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ — весовые коэффициенты, которые необходимо найти, $\gamma(x_{10})$, $\gamma(x_{20}) \ldots \gamma(x_{n0})$ — значения вариограмм для рассчитанных расстояний между пробами и центроидом блока, μ — множитель *Лагранжа*.

$$\begin{bmatrix} \gamma(x_{11}) & \gamma(x_{12}) & \ldots & \gamma(x_{1n}) & 1 \\ \gamma(x_{21}) & \gamma(x_{22}) & \ldots & \gamma(x_{2n}) & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma(x_{n1}) & \gamma(x_{n2}) & \ldots & \gamma(x_{nn}) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \ldots \\ \lambda_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(x_{10}) \\ \gamma(x_{20}) \\ \ldots \\ \gamma(x_{n0}) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Для оценки содержания по трем пробам с известными значениями система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} \gamma(x_{11}) * \lambda_1 + \gamma(x_{12}) * \lambda_2 + \gamma(x_{13}) * \lambda_3 + \mu = \gamma(x_{10}) \\ \gamma(x_{21}) * \lambda_1 + \gamma(x_{22}) * \lambda_2 + \gamma(x_{23}) * \lambda_3 + \mu = \gamma(x_{20}) \\ \gamma(x_{31}) * \lambda_1 + \gamma(x_{32}) * \lambda_2 + \gamma(x_{33}) * \lambda_3 + \mu = \gamma(x_{30}) \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

На секунду вернемся к принципам кригинга. Первые три уравнения (по одному на каждую из проб) в данной системе отвечают за первый принцип — наименьшую разницу между фактическими и оцененными содержаниями. Поскольку у нас нет возможности заранее знать фактическое содержание в оцениваемой точке, в уравнении участвуют не содержания, а значения вариограмм.

Последнее уравнение всегда отвечает за второй принцип — несмещенность оценки: сумма весов равняется единице.

После подстановки вычисленных значений вариограмм система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} 1.000 * \lambda_1 + 19.720 * \lambda_2 + 18.705 * \lambda_3 + \mu = 16.501 \\ 19.720 * \lambda_1 + 1.000 * \lambda_2 + 9.801 * \lambda_3 + \mu = 9.623 \\ 18.705 * \lambda_1 + 9.801 * \lambda_2 + 1.000 * \lambda_3 + \mu = 6.282 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

В результате решения уравнения рассчитываются следующие весовые коэффициенты:

$\lambda_1 = 0.159$ $\lambda_3 = 0.601$

$\lambda_2 = 0.240$ $\mu = 0.361$

Множитель *Лагранжа* в дальнейшей оценке не участвует.

Подставляем весовые коэффициенты и содержания проб в основное уравнение кригинга:

$Au(x_0)=Au(x_1)*\lambda_1+Au(x_2)*\lambda_2+Au(x_3)*\lambda_3$

$Au(x_0)=10*0.159+4*0.240+1*0.601$

Содержание в блоке будет равняться 3.151.

Таким образом, при внутреннем рассмотрении метод Кригинга оказывается простым и прозрачным. На достоверность оценки содержаний этим методом в первую очередь влияет качество подготовки моделей вариограмм. В свою очередь, качество подготовки вариограмм зависит от грамотной обработки вводных данных опробования.

Надеюсь, данная статья помогла вам лучше понять суть оценки содержаний методом кригинга и сделала этот процесс более прозрачным для вас. А с построением вариограмм и расчетами вам поможет ГГИС Micromine Origin & Beyond.