Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Факультет прикладной математики и информатики

Лабораторная работа 2

Численное интегрирование

Гончаренко Андрей Дмитриевич
Студент 3 курса, 13 группа
Преподаватель:
Будник Анатолий Михайлович

Минск, 2022

Постановка задачи. Часть 1
Дан $\int_a^b f(x)\,dx$, где

1. $[a;b] = [\alpha_j; 1+\alpha_j], \alpha_j = 0.1 + 0.05j, j = 6;$
2. $f(x) = \alpha_j e^x + (1-\alpha_j)sin(x).$

Пользуясь выражением для погрешности интегрирования определить шаг h в составной квадратичной формуле, которая обеспечивает определение I с точностью 10^{-5}. Используя квадратурную формулу левых прямоугольников.

Алгоритм решения задачи

1. Используем КФ левых прямоугольников
$$R_{c,c}(f) = \frac{(b-a)^2}{2N} \cdot f^{'}(\eta).$$
2. Далее оцениваем R по формуле
$$|R| \leq (b-a)^2 \cdot \frac{1}{2N} \cdot M_1,\ M_1 = max|f^{'}(x)|, x \in [a,b].$$
3. Перебираем значения N до момента пока в формуле для $|R|$ мы не получим нужную точность.
4. Находим значение h по формуле
$$h = \frac{b-a}{N}.$$
5. Найдем приближенное значение интеграла по формуле:
$$I \approx h \cdot \sum_{i=1}^{N} f_{i-1}.$$

Найдем производную исходной функции $f(x) = 0.4e^x + 0.6 \cdot sin(x)$. Получившаяся производная имеет следующий вид:

$$f(x) = 0.4e^x + 0.6 \cdot cos(x).$$

Оценим получившуюся функцию аналитически и найдем ее максимальное значение на нашем отрезке. На нашем графике (Приложение 1 Рис. 1) видно, что он возрастающий и максимальное значение получившаяся функция принимает в точке 1.4 и имеет значение $M_1 = 1.724060272478$. Подставляем значения в формулу для оценки R:

$$|R| \leq \frac{M_1}{2N}.$$

Далее подставляем значения в программу (Приложение 1 Рис 2) и находим удовлетворяющее нам по точности значение N. При получившемся $N = 86204$ по формуле находим $h = \frac{1}{86204} \approx 1.16 \cdot 10^{-5}$ для требуемой точности. Полученная погрешность:

$$|R_n(x)| \leq 9.999885576527773 \cdot 10^{-6}.$$

Сравним выбранную КФ с другой, например, с СП. Исходная функция и значения a, b остаются такими же. Алгоритм такой же, меняются только формулы. Для начала запишем КФ средних прямоугольников:

$$R_{c,c}(f) = \frac{(b-a)^3}{24N^2} \cdot f''(\eta).$$

Далее оцениваем R:

$$|R| \leq (b-a)^3 \cdot \frac{1}{24N^2} \cdot M_2, M_2 = max|f''(x)|, x \in [a, b].$$

M_2 оцениваем аналитически, но перед этим надо найти вторую производную, они принимает вид $0.4e^x - 0.6 \cdot sin(x)$. Из построенного графика (Приложение 1 Рис. 3) видно, что график возрастающий и принимает максимальное значение в точке 1.4 и имеет значение $M_2 = 1.0308101487448$. Далее подставляем в формулу для оценки R:

$$|R| \leq \frac{M_2}{24N^2}.$$

Далее подставляем значения в программу (Приложение 1 Рис 4) и находим удовлетворяющее нам по точности значение N. При получившемся $N = 66$ по формуле находим $h = \frac{1}{66} \approx 1.51 \cdot 10^{-2}$. Полученная погрешность:

$$|R_n(x)| \leq 9.860060345355066 \cdot 10^{-6}.$$

Но все же, воспользуемся нашим методом левых прямоугольников и вычислим значение интегрла и истинное значение интеграла:

$$I \approx 1.4759983968592227,\ I = 1.476006418342948.$$

Определим истинную погрешность:

$$r_n(x) = 8.021483725251244 \cdot 10^{-6}.$$

Вывод. Из полученных результатов видно, что использовать КФ левого прямоугольника не выгодно относительно КФ среднего прямоугольника в этом случае, т.к. при одной и той же точности вычисления, а именно 10^{-5} мы получаем абсолютно разные результаты по длине шага h, отличающиеся на 3 порядка. Если посмотреть на итоговые формулы для оценки $|R|$, то сразу можно заметить из-за чего уменьшается длина шага, а именно из-за того, что благодаря большему знаменателю значение $|R|$ уменьшается быстрее, это хорошо видно на графике (Приложение 1 Рис. 5). Полученные погрешности получились приблизетельно равными. Это достигается тем, что мы подбираем нужное N до необходимой точности вычисления интеграла и т.к. мы рассматриваем худший случай (берем максимальное M), то погрешность может быть улучшена.

Постановка задачи. Часть 2

Для вычисления интеграла применить квадратурную формулу Гаусса, при заданном значении $n = 6$. Оценить погрешность интегрирования.

1. $[a; b] = [\alpha_j; 1 + \alpha_j], \alpha_j = 0.1 + 0.05j, j = 6;$
2. $f(x) = \alpha_j e^x + (1 - \alpha_j) sin(x).$

Алгоритм решения задачи

1. Квадратурная формула Гаусса для произвольного отрезка $[a, b]$:
$$I \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^{n} c_i f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x_i\right).$$
2. Найдем корни многочлена Лежандра $P_{n+1}(x)$, для этого воспользуемся формулой
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{\partial^n (x^2-1)^n}{\partial x^n}.$$
3. Найдем c по формуле:
$$c_k = \frac{2}{(1-x_k^2)(P'_{n+1}(x_k))^2}.$$
4. Подставляем получившееся значения в исходную формулу и получаем приближенное значение интеграла.
5. Погрешность будем оценивать по формуле:
$$|R_n^{[-1;1]}(x)| \le \frac{2^{2n+3}}{(2n+3)(2n+2)!} \cdot \left(\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\right)^2 \cdot f^{(2n+2)}(\eta)$$
$$|R_n^{[a;b]}(f)| \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+3} \cdot R_n^{[-1;1]}(x).$$

Получим корни многочлена Лежандра для $P_7(x)$‘1 и значение c в этой точке:

- $x_0 = -0.949107912342758, c_0 = 0.12948496616887112;$
- $x_1 = -0.741531185599394, c_1 = 0.2797053914892771;$
- $x_2 = -0.405845151377397, c_2 = 0.381830050505119;$
- $x_3 = 0.0, c_3 = 0.4179591836734694;$
- $x_4 = 0.405845151377397, c_4 = 0.381830050505119;$
- $x_5 = 0.741531185599394, c_5 = 0.2797053914892771;$
- $x_6 = 0.949107912342758, c_6 = 0.12948496616887112;$

Подставляем полученные значения в формулу для вычисления приближенного значения производной, а также вычислим точное значение интеграла:

$$I \approx 1.476006418342951, I = 1.476006418342949.$$

Оценим погрешности. Значение $f^{(2n+2)}(\eta)$ оцениваем аналитически. Из Приложения 2 Рис. 6 видно, что функция на отрезке $[-1; 1]$ не возрастающая, следовательно смотрим по значению в точках, получаем, что максимальное значение производной в точке -1, следовательно

$$max|f^{(2n+2)}(\eta)| = 0.6520343673533.$$

Далее находим формульную и истинную погрешность:

$$|R_n(x)| \leq 2.1929788904336473 \cdot 10^{-15},\ r_n(x) = 1.9984014443252818 \cdot 10^{-15}.$$

Вывод. Из полученных результатов видно, что формульная погрешность имеет такойже порядок точности, что и истинная погрешность. Для КФ типа Гаусса получив нужные коэффициенты и значения функции в узлах, мы используем лишь небольшое количество арифметических операций для подсчета интеграла.

Выводы. Часть 3

Анализ каждого метода поотдельности был расписан в прошлых пунктах. Если сравнивать методы из частей 1 и 2, то видно, что используемый метод для вычисления интеграла во второй часте точнее на 10 порядков. При увелечении значени N в методе используемом в первой части точность будет увеличиваться, но т.к. нам нужно было вычислить интеграл с определенной точность, то значение N уменьшается или увеливается от выбранного метода вычисления. Как было показано в первой части, что при разных значениях N и выбранных методов точность вычисления получается одинаковой (если сравнивать по порядку). В ходе выполнения второй части, было замечено, что при увелечении значения n увеличивается и точность. Это легко увидеть из графика (Приложение 3 Рис. 8), что знаменатель растет быстрее, соответственно, дробь уменьшается и если исследовать нашу функцию, то получим, что предел стремящийся к бесконечности равен 0.

Приложение 1

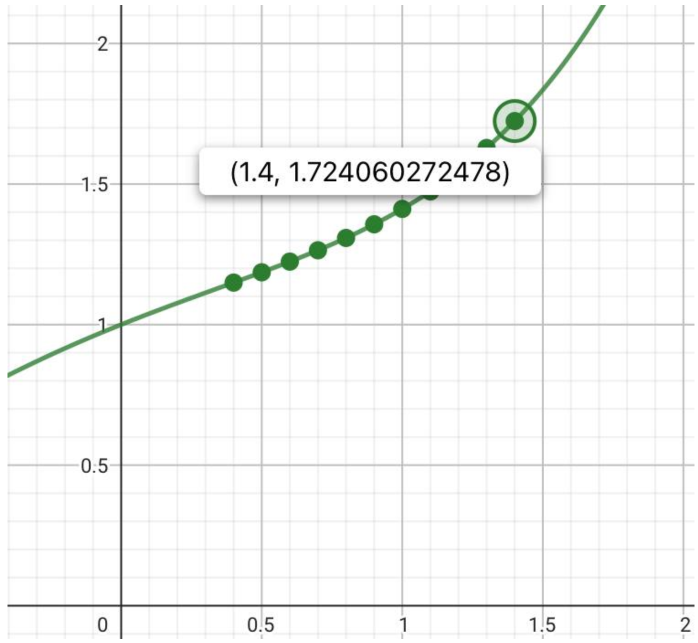


Рис. 1: График функции $f^{'}(x)$, $x \in [0.4, 1.4]$.

```
def find_n():
    n = 1
    while True:
        m = 1.724060272478
        r = m / (2*n)
        if r <= math.pow(10, -5):
            return n
        n += 1
```

Рис. 2: Код программы для нахождения N.

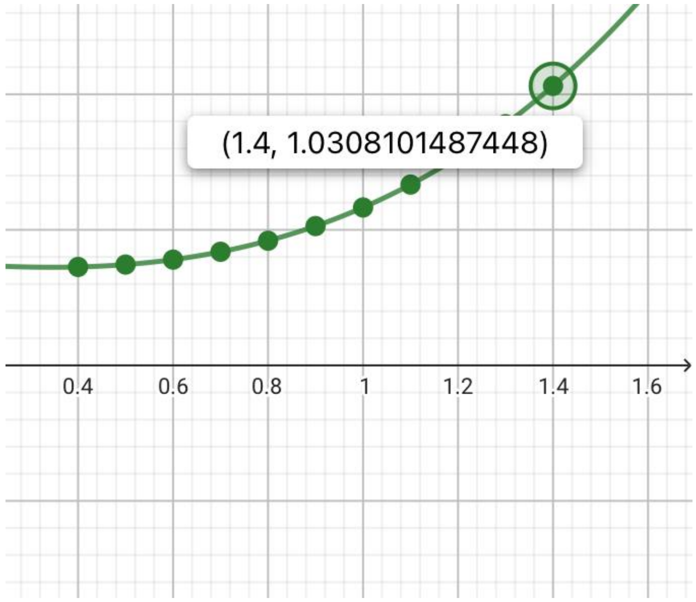


Рис. 3: График функции $f''(x)$, $x \in [0.4, 1.4]$.

```
def find_n():
    n = 1
    while True:
        m = 1.0308101487448
        r = m / (24*math.pow(n, 2))
        if r <= math.pow(10, -5):
            return n
        n += 1
```

Рис. 4: Код программы для нахождения N.

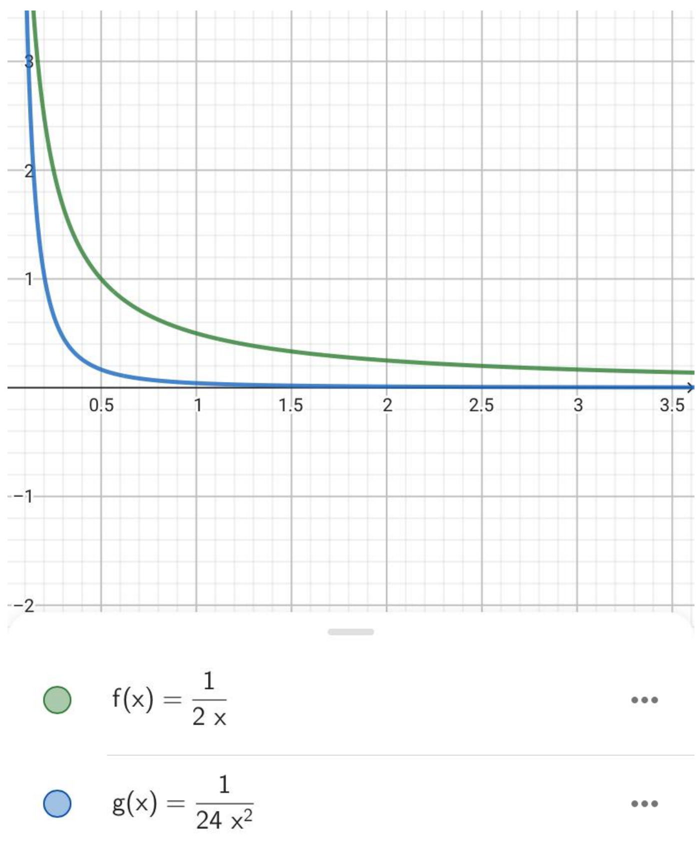
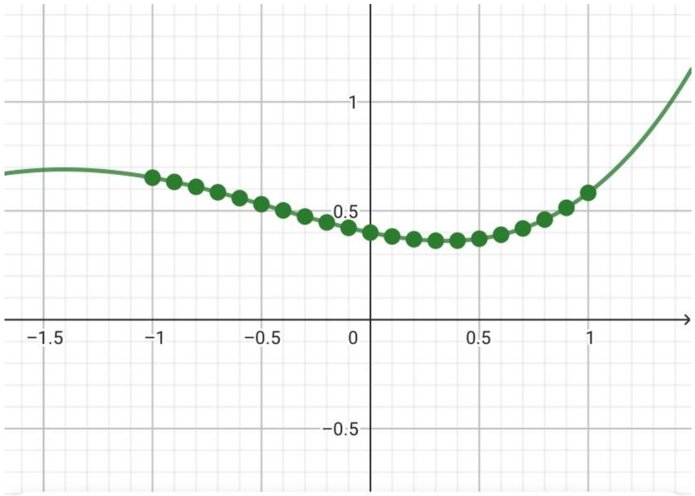


Рис. 5: Графики функций $\frac{1}{2N}$ и $\frac{1}{24N^2}$

Приложение 2



x	f(x)	
−1	0.6520343673533	
−0.9	0.6326240096727	
−0.8	0.6101452401866	
−0.7	0.5851647338592	
−0.6	0.5583101384746	
−0.5	0.5302675870476	
−0.4	0.5017790237994	

Рис. 6: График функции $f^{(12)}(x)$, $x \in [0.4, 1.4]$.

```python
def ck(x):
    p = (7/16)*(429*math.pow(x, 6)-495*math.pow(x, 4)+135*math.pow(x, 2)-5)
    c = 2/((1-math.pow(x, 2)) * math.pow(p, 2))
    return c


def xk():
    x = symbols('x')
    result = solve(Eq((1/16)*x*(429*(x**6) - 693*(x**4) + 315*(x**2)-35), 0), x)
    return(result)


def find_result():
    xi = xk()
    ckl = []
    for i in range(0, 7):
        ckl.append(ck(xi[i]))

    print(ckl)

    sum = 0
    for i in range(0, 7):
        sum += ckl[i] * function(0.9 + xi[i]/2)

    return sum / 2
```

Рис. 7: Код программы второй части.

Приложение 3

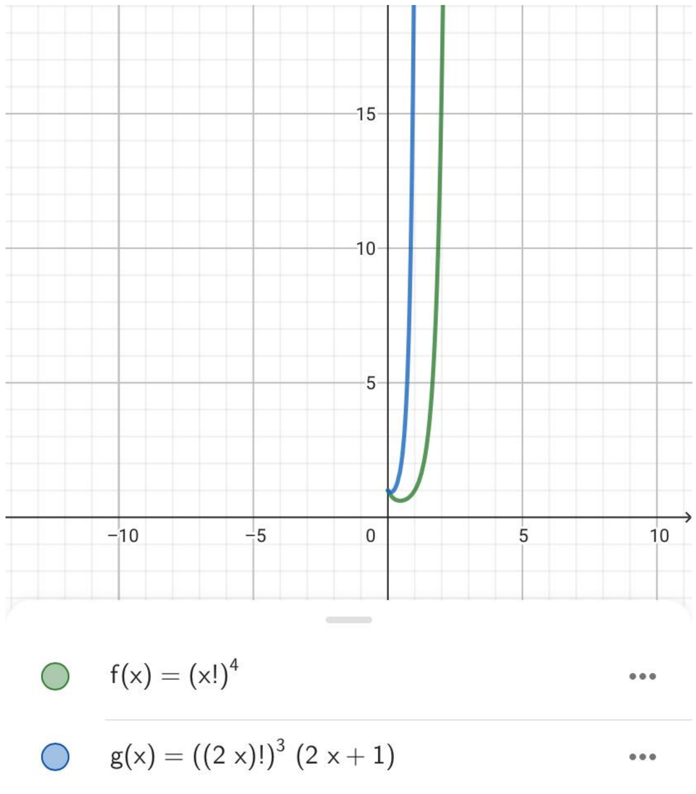


Рис. 8: Графики функций $(n!)^4$, $((2n)!)^3(2n+1)$.