Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Факультет прикладной математики и информатики

Лабораторная работа 3

Методы решения задачи Коши

Гончаренко Андрей Дмитриевич
Студент 3 курса, 13 группа
Преподаватель:
Будник Анатолий Михайлович

Минск, 2022

Постановка задачи. Часть 1
Дана задача Коши вида

$$\begin{cases} u^{'} = f(x, u(x)),\ x \in [x_0, X], \\ u(x_0) = u_0, \end{cases}$$

где $[x_0, X] = [\alpha_j, 1 + \alpha_j], f(x, u) = \frac{u}{x} + x\widetilde{f}', u_0 = \alpha_j \widetilde{f}(\alpha_j), h = 0.1.$

Найти приближенное решение задачи Коши на сетке узлов при 10-ти разбиениях отрезка интегрирования, применяя методы 1-го (явный метод Эйлера) и 2-го (метод Рунге-Кутта при $A_1 = \frac{3}{4}$) порядка точности.

Алгоритм решения задачи

Метод Эйлера:

1. Значения функции в искомых узлах будет по формуле

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i).$$

2. Вычислим значение u_0 и получим значение y_0.

3. Подставляем все данные в формулу.

Метод Рунге-Кутта:

1. Значения функции в искомых узлах будет по формуле.

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=0}^{q} A_j \phi_j.$$

2. Воспользуемся рядом функций для вычисления

$$q = k - 1, k = 2; \sum_{j=0}^{q} A_j = 1; \phi_0 = hf_i; \phi_1 = hf(x_i + \alpha_i h, y_i + \beta_{i0}\phi_0);$$

$$\alpha_1 A_1 = \frac{1}{2}; \beta_{10} A_1 = \frac{1}{2}.$$

3. Значение y_0 такое же, как в методе Эйлера.

Таблица 1: Явный метод Эйлера.

x_k	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
y_k	0.332	0.461	0.612	0.788	0.989	1.217	1.475	1.763	2.086	2.445	2.845

Таблица 2: Метод Рунге-Кутта.

x_k	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
y_k	0.332	0.472	0.638	0.831	1.052	1.303	1.586	1.902	2.256	2.650	3.087

Явный метод Эйлера.

Получившееся результаты вычисления $u_0 = 0.332152353776793688$ и $\widetilde{f}' = 0.4e^x + 0.6 \cdot cos(x)$.

Заносим начальные значения в программу (Приложение 1 Рис. 1) и находим значения функции на промежутке $[0.4, 1.4]$. Полученные результаты в Таблице 1.

Метод Рунге-Кутта.

Сумма $A_i = 1$, т.к. у нас есть значение $A_1 = \frac{3}{4}$, то $A_0 = \frac{1}{4}$. Из уравнения получаем, что $\alpha_1 = \beta_{10} = \frac{2}{3}$, значения ϕ_0, ϕ_1 получаются по формуле во время выполнения.

Заносим значения в программу (Приложение 1 Рис. 2) и находим значения функции на промежутке $[0.4, 1.4]$. Полученные результаты в Таблице 2.

Постановка задачи. Часть 2

Используя таблицу результатов, получить погрешность методов, сравнивая приближенное решение с точным.

Алгоритм решения задачи

1. Найти точное решение.

2. Найти разницу между точным и приближенным решением.

Точное решение задачи Коши имеет вид $x(0.4e^x + 0.6sin(x) + C)$. Для оценки C подставим исходные данные и получим, что $C = -1.38778 \cdot 10^{-16}$, следовательно, точное решение задачи Коши имеет вид

$$x(0.4e^x + 0.6sin(x) - 1.38778 \cdot 10^{-16}).$$

Таблица 3: Точное решение

x_k	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
y_k	0.332	0.473	0.640	0.834	1.056	1.308	1.592	1.910	2.264	2.659	3.098

Таблица 4: Явный метод Эйлера.

x_k	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
y_k	0.332	0.461	0.612	0.788	0.989	1.217	1.475	1.763	2.086	2.445	2.845
R	0.0	0.0124	0.027	0.046	0.067	0.090	0.117	0.146	0.178	0.214	0.253

Таблица 5: Метод Рунге-Кутта.

x_k	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
y_k	0.332	0.472	0.638	0.831	1.052	1.303	1.586	1.902	2.256	2.650	3.087
R	0.0	0.0008	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010

Постановка задачи. Часть 3

Исходя из вида главного члена локальной погрешности, а также оценивая величину истинной погрешности, сделать вывод о точности каждого используемого метода.

Вывод. Локальная погрешность явного метода Эйлера

$$\psi = u_n + hu_n^{'} + \frac{h^2}{2}u_n^{''} + O(h^3) - u_n - hf_n = O(h^2),$$

локальная погрешность метода Рунге-Кутта

$$\psi = \sum_{j=0}^{k} \frac{h^j}{j!} r_q^{(j)} + O(h^{k+1}) = O(h^3).$$

Т.к. явный метод Эйлера имеет первый порядок точности, а метод Рунге-Кутта имеет второй порядок точности, то погрешность в методе Рунге-Кутта будет меньше, что и получилось на практике. В совокупности локальной погрешности, порядка точности и истинная погрешность, можно сделать вывод, что метод Рунге-Кутта точнее, чем явный метод Эйлера.

Приложение 1

```
def function(x, y):
    result = y/x + x * (0.4*math.pow(math.e, x)+0.6*math.cos(x))
    return result


def find_y(x):
    y = [0.3321523537766793688]

    for i in range(10):
        ny = y[i] + 0.1*function(x[i], y[i])
        y.append(ny)

    return y


def euler(x):
    y = find_y(x)
    return y
```

Рис. 1: Код решения задачи Коши явным методом Эйлера

```python
def function(x, y):
    result = y/x + x * (0.4*math.pow(math.e, x)+0.6*math.cos(x))
    return result


def get_phi0(h, x, y):
    return h * function(x, y)


def get_phi1(h, x, y):
    a = 2/3
    b = 2/3
    return h * function(x + a*h, y + b*get_phi0(h, x, y))


def get_phi1(h, x, y):
    return h * function(x + h, y + get_phi0(h, x, y))


def find_y_rk(x, a, h):
    y = [0.3321523537766793688]

    for i in range(10):
        ai = a*get_phi0(h, x[i], y[i]) + (1-a)*get_phi1(h, x[i], y[i])
        ny = y[i] + ai
        y.append(ny)

    return y


def runge_kutta(x):
    a = 3/4
    h = 0.1
    y = find_y_rk(x, a, h)
    return y
```

Рис. 2: Код решения задачи Коши методом Рунге-Кутта

Приложение 2

```
def error_true_2(euler_y, rk_y, real_y):
    e1 = []
    r1 = []
    for i in range(len(euler_y)):
        e1.append(math.fabs(real_y[i] - euler_y[i]))
        r1.append(math.fabs(real_y[i] - rk_y[i]))

    return e1, r1
```

Рис. 3: Нахождение погрешности

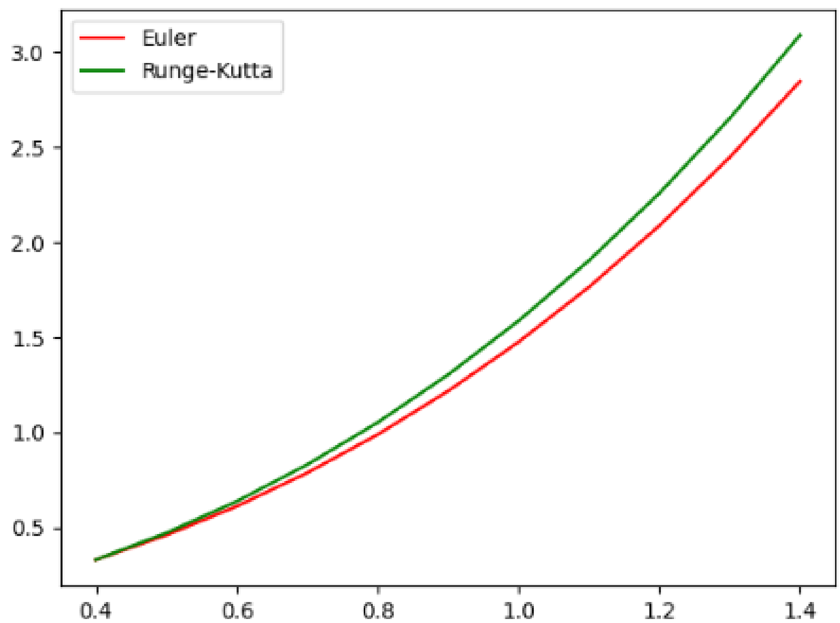

Рис. 4: Явный метод Эйлера и метод Рунге-Кутта

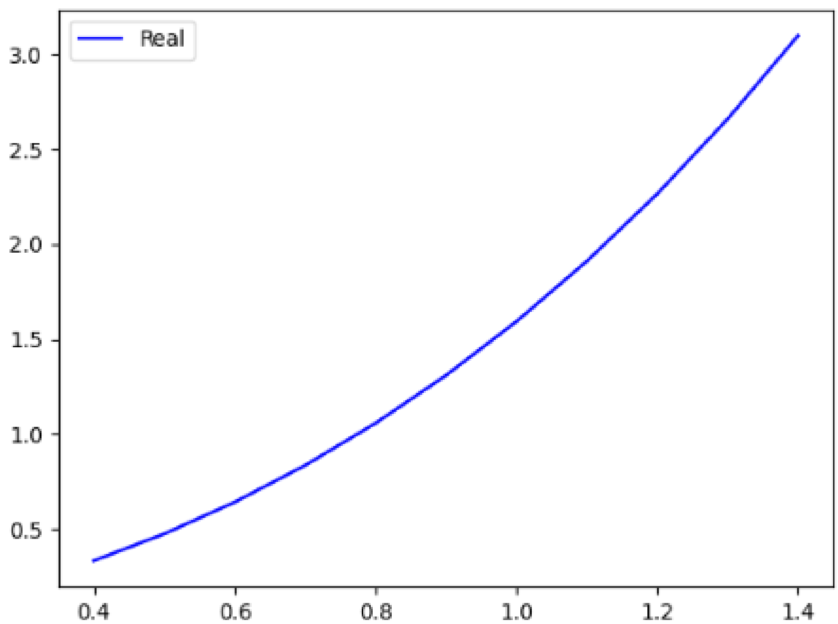

Рис. 5: Точное решение задачи Коши