Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Отчет по заданию №6

«Сборка многомодульных программ. Вычисление корней уравнений и определённых интегралов.»

Вариант 3 / 1 / 2

Выполнил:
студент 101 группы
Бутылкин А. С.

Преподаватель:
Кузьменкова Е. А.

Москва
2022

Содержание

1. Постановка задачи

В данном задании было необходимо реализовать численный метод, позволяющий вычислять площадь плоской фигуры, ограниченной тремя кривыми. Требования к заданию:

- Вершины фигуры должны находиться с помощью метода деления отрезка пополам,
- Вычисление интегралов производится через формулу трапеций,
- Вычисление требуемых функций реализовывается на языке ассемблер, все остальные функции на языке Си (подробнее см. пункт "Структура программы и спецификация функций"),
- Отрезок на котором производится поиск точек пересечения, вычисляется аналитически.

Задача решается для следующих функций:

1. $y = e^{-x} + 3$
2. $y = 2x - 2$
3. $y = \frac{1}{x}$

2. Математическое обоснование

Рассмотрим ограничения на функцию для сходимости метода деления отрезка пополам [1]: функция должна иметь на концах отрезка $[a, b]$ разные знаки и на всём отрезке производная функции не меняет знак. Исходя из этих ограничений найдём отрезки, на которых будет осуществляться поиск вершин фигуры.

- $y = e^{-x} + 3 - (2x - 2)$, $y' = -e^{-x} - 2 < 0 \quad \forall\, x \in [2, 3]$. На отрезке [2, 3] функция монотонно убывает (производная отрицательна). Имеет на концах отрезка разные знаки ($y(2) \approx 1.13$; $y(3) = -0.95$). Значит, будем производить поиск корень на отрезке [2, 3].

- $y = e^{-x} + 3 - \dfrac{1}{x}$, $y' = -e^{-x} + \dfrac{1}{x^2} > 0 \quad \forall\, x \in [0.1, 0.5]$. На отрезке [0.1, 0.5] функция монотонно возрастает (производная положительна). Имеет на концах отрезка разные знаки ($y(0.1) \approx -6.1$; $y(0.5) \approx 1.6$). Значит, будем производить поиск корень на отрезке [0.1, 0.5].

- $y = 2x - 2 - \dfrac{1}{x}$, $y' = 2 + \dfrac{1}{x^2} > 0 \quad \forall\, x \in [1,1.5]$. На отрезке [1, 1.5] функция монотонно возрастает (производная положительна). Имеет на концах отрезка разные знаки ($y(1) = -1$; $y(1.5) \approx 0.3$). Значит, будем производить поиск корень на отрезке [1, 1.5].

Теперь подберём константы ε_1 и ε_2, которые обеспечат итоговую точность $\varepsilon = 0.001$. При нахождении корня для уравнения $y = e^{-x} + 3 - (2x - 2)$ в худшем случае мы получаем погрешность $3.1 \cdot \varepsilon_1$ при подсчёте площади. При нахождении корня для уравнения $y = e^{-x} + 3 - \dfrac{1}{x}$ в худшем случае мы получаем погрешность $3.8 \cdot \varepsilon_1$ при подсчёте площади. При нахождении корня для уравнения $y = 2x - 2 - \dfrac{1}{x}$ в худшем случае мы получаем погрешность $0.8 \cdot \varepsilon_1$ при подсчёте площади. Так как в программе 3 раза вызывается функция вычисления интеграла, то получаем погрешность $3 \cdot \varepsilon_2$.

Получаем неравенство $7.7 \cdot \varepsilon_1 + 3 \cdot \varepsilon_2 \ \leq \ \varepsilon$. Откуда получим, что выбор $\varepsilon_1 = 0.00005$ и $\varepsilon_2 = 0.0001$ является достаточным для получения точности $\varepsilon = 0.001$.

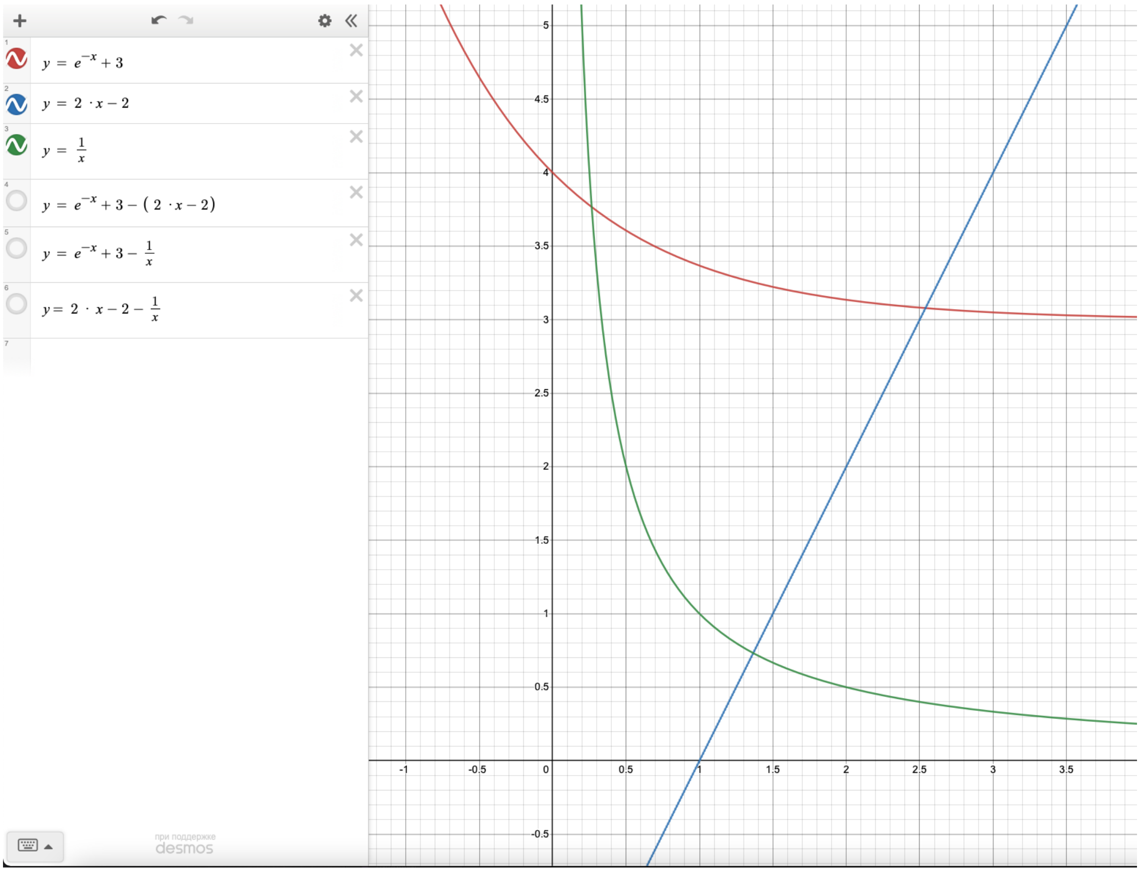


Рис. 1: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

3. Результаты экспериментов

В данном разделе необходимо привести результаты проведённых вычислений: координаты точек пересечения (таблица 1) и площадь полученной фигуры.

Кривые	x	y
1 и 2	2.539	3.079
1 и 3	0.265	3.767
2 и 3	1.366	0.732

Таблица 1: Координаты точек пересечения

Результаты можно представить не только в текстовом виде, но и проиллюстрировать графиком (рис. 2).

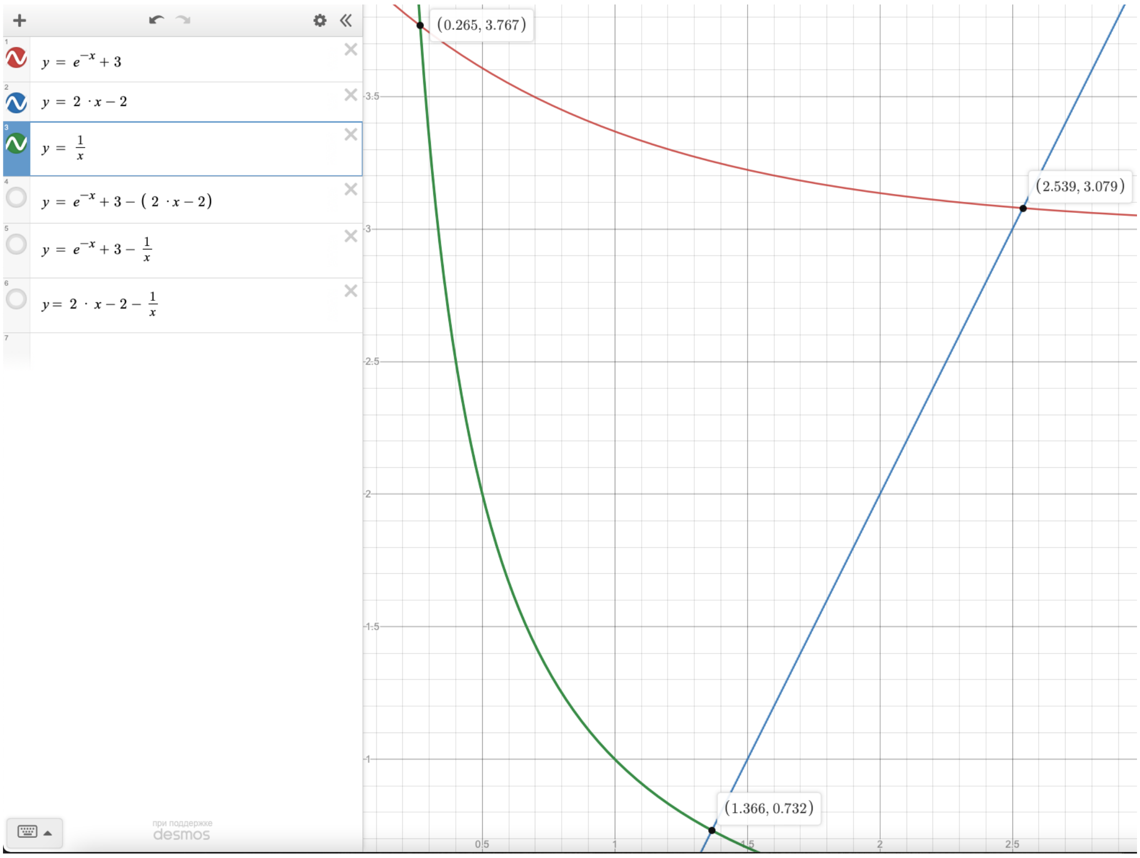


Рис. 2: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

Площадь плоской фигуры: 3.63578.

4. Структура программы и спецификация функций

```
functions.asm          functions.h          integral.c
{f1, f2, f3}     →                   →      {main,
                                            root,
                                            integral}
```

Программа состоит из двух модулей: `functions.asm` (заданные функции), `integral.c` (функции, реализующие численные методы для нахождения корня и для вычисления интеграла, реализация интерфейса для пользователя). А также из одного заголовочного файла: `functions.h` (прототип заданных функций).

Модуль `integral.c`

1. `double f4(double x), double f5(double x), double f5(double x)`

   Функции, взятые для тестирования функций `root` и `integral`:

   $$f_4 = -(x-1)^2 + 5;\ f_5 = -2 \cdot x + 5;\ f_6 = 0.5 \cdot x^2;$$

2. ```
   double root(double f(double x),
       double g(double x), double a,
       double b, double eps1)
   ```

   Вычисляет абсциссу точки пересечения функций `f` и `g` на отрезке $[a, b]$ с точностью `eps1` методом деления отрезка пополам, вычисляет потребовавшееся количество итераций и записывает результат в `iterat`;

3. ```
   double integral(double f(double x),
       double a, double b, double eps2)
   ```

   Вычисляет определённый интеграл функции `f` на отрезке $[a, b]$ с точностью `eps2` с помощью метода трапеций;

4. `int main(int argc, char* argv[])`

   Парсит аргументы командной строки и в зависимости от них осуществляет необходимые расчеты и выводит необходимую информацию.

Модуль `functions.asm`

1. In Assembley: global f1
   In C: double f1(double x)

   Вычисляет значение функции $y = e^{-x} + 3$ в точке x;

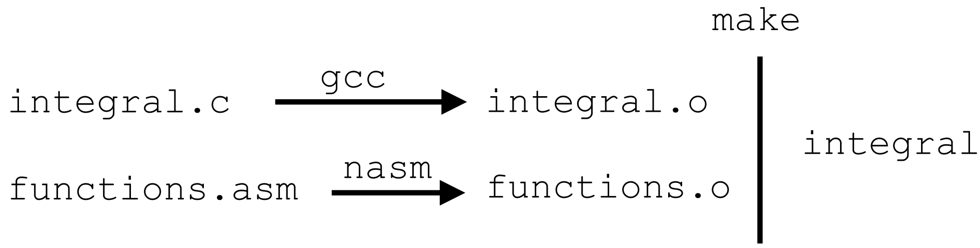
2. In Assembley: global f2
   In C: double f2(double x)

   Вычисляет значение функции $y = 2 \cdot x - 2$ в точке x;

3. In Assembley: global f3
   In C: double f3(double x)

   Вычисляет значение функции $y = \dfrac{1}{x}$ в точке x;

5. Сборка программы (Make-файл)



Makefile:

```
.PHONY: all clean
all: integral
integral: functions.o integral.o
	$(CC) $(CFLAGS) $^ $(LDLIBS) -o $@
integral.o: integral.c
	$(CC) $(CFLAGS) -c $^ -o $@
functions.o: functions.asm
	$(AS) $(ASMFLAGS) $^ -o $@
test: integral
	./integral -R 4:5:0:0.5:0.00005:0.2679492
	./integral -R 4:6:2:2.5:0.00005:2.4305009
	./integral -R 5:6:1:2:0.00005:1.7416574
	./integral -I
4:0.2679492:2.4305009:0.0001:9.706229
	./integral -I
5:0.2679492:1.7416574:0.0001:4.4069673
	./integral -I
6:1.7416574:2.4305009:0.0001:1.51245
clean:
	rm -rf *.o
```

Процесс сборки:

- Компиляция: цели `integral.o, functions.o, test`
- Линковка: цель `all`
- Удаление объектных файлов: цель `clean`

6. Отладка программы, тестирование функций

Вся трестирующая информация приведена в данных таблицах

Функция	Отрезок поиска корня	Аналитически вычисленный корень	Результат работы программы
$-(x-1)^2+5-(-2\cdot x+5)$	[0, 0.5]	$2-\sqrt{3}$	0.267960
$-(x-1)^2+5-(0.5\cdot x^2)$	[2, 2.5]	$\frac{2+\sqrt{28}}{3}$	2.430496
$-2\cdot x+5-(0.5\cdot x^2)$	[1, 2]	$\sqrt{14}-2$	1.741653

Таблица 2: Тестирование поиска корней

Функция	Интеграл	Аналитически вычисленный результат	Результат работы программы
$-(x-1)^2+5$	$\int_{2-\sqrt{3}}^{\frac{2+\sqrt{28}}{3}} (-(x-1)^2+5)\,dx$	9.70622986	9.706204
$-2\cdot x+5$	$\int_{2-\sqrt{3}}^{\sqrt{14}-2} (-2\cdot x+5)\,dx$	4.40696728	4.406967
$0.5\cdot x^2$	$\int_{\sqrt{14}-2}^{\frac{2+\sqrt{28}}{3}} 0.5\cdot x^2\,dx$	1.51245	1.512475

Таблица 3: Тестирование вычисления интеграла

7. Анализ допущенных ошибок

В ходе тестирования и отладки были обнаружены и исправлены следующие ошибки:

- Автозамена символа табуляции на 4 пробела в текстовом редакторе привела к тому, что Makefile не запускался;
- Из-за ошибки в расчетах первоначальные константы были вычислены неправильно.

Список литературы

[1] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1 — Москва: Наука, 1985.
[2] Desmos | Beautiful, Free Math — https://www.desmos.com/.
[3] Wolfram|Alpha: Computational Intelligence — https://www.wolframalpha.com/.