Разнобойчик 2

1. Существуют ли два таких четырёхугольника, что стороны первого меньше соответствующих сторон второго, а соответствующие диагонали больше?

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки касания вписанной окружности со стороной BC на прямую AC, проходит через центр вписанной окружности треугольника A_1CB_1.

3. Докажите, что проекции точки пересечения диагоналей вписанного четырёхугольника на противоположные стороны симметричны относительно прямой, соединяющей середины двух других противоположных сторон этого четырёхугольника.

4. На сторонах AB, BC, CD и DA произвольного выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки K, L, M и N. Обозначим через S_A, S_B, S_C и S_D площади треугольников AKN, BLK, CML и DNM соответственно. Докажите неравенство

$$\sqrt[3]{S_A} + \sqrt[3]{S_B} + \sqrt[3]{S_C} + \sqrt[3]{S_D} \leqslant 2\sqrt[3]{S_{ABCD}}$$

5. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбрана точка O. Обозначим центр вписанной окружности треугольника OAB через ω_{AB}. Аналогично определим окружности ω_{BC}, ω_{CD} и ω_{DA}. Оказалось, что ω_{AB} касается ω_{BC}, ω_{BC} касается ω_{CD}, ω_{CD} касается ω_{DA} и ω_{DA} касается ω_{AB}. Докажите, что общая внешняя касательная к окружностям ω_{AB} и ω_{BC}, общая внешняя касательная к окружностям ω_{CD} и ω_{DA}, и прямая AC пересекаются в одной точке.

6. Из вершины A параллелограмма $ABCD$ опущены высоты AM на BC и AN на CD. P — точка пересечения BN и DM. Докажите, что прямые AP и MN перпендикулярны.

7. Из вершины C треугольника ABC проведены касательные CX, CY к окружности, проходящей через середины сторон треугольника. Докажите, что прямые XY, AB и касательная в точке C к окружности, описанной около треугольника ABC, пересекаются в одной точке.

8. В треугольнике ABC угол A равен $120°$. Докажите, что расстояние от центра описанной окружности до ортоцентра равно $AB + AC$.

9. Точка M — середина основания AD трапеции $ABCD$, вписанной в окружность S. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а луч BM пересекает S в точке K. Описанная окружность треугольника PBK пересекает прямую BC в точке L. Докажите, что $\angle LDP = 90°$.

---

10. Окружность ω вписана в четырёхугольник $ABCD$. Обозначим центры вписанных окружностей треугольников ABC и CDA через I и J. Проведём две окружности, проходящие через точки A и C и касающиеся ω. Обозначим точки касания через K и L. Докажите, что точки I, J, K и L лежат на одной окружности.

11. Обозначим вписанную окружность треугольника ABC через γ, а ее центр через I. Пусть так же O — центр описанной окружности треугольника ABC. Обозначим окружность, проходящую через точки A и B и касающуюся γ через ω_C. Аналогично определим ω_A и ω_B. Пусть A', B' и C' — вторые точки пересечения пар окружностей ω_C с ω_C, ω_A с ω_C и ω_A с ω_B соответственно. Докажите, что прямые AA', BB', CC' и OI пересекаются в одной точке.