Серия 4. Слабая теорема Кези

Теорема Кези, слабая версия. Предположим, что на плоскости даны окружность ω и три точки A, B, C вне неё, не лежащие на одной прямой. Обозначим длины отрезков касательных из точек A, B, C к окружности ω через t_a, t_b, t_c соответственно. Тогда окружность (ABC) касается окружности ω в том и в только в том случае, если для некоторой расстановки знаков «+» и «−» выполнено соотношение

$$\pm t_a BC \pm t_b CA \pm t_c AB = 0.$$

1. Окружность ω касается меньшей дуги BC описанной окружности равностороннего треугольника ABC внешним образом. Обозначим длины отрезков касательных из точек A, B, C к окружности ω через t_a, t_b, t_c соответственно. Докажите, что $t_a = t_b + t_c$.

2. **Теорема Фейербаха.** Докажите, что в неравнобедренном треугольнике ABC окружность девяти точек касается **(a)** вписанной окружности; **(b)** трёх вневписанных окружностей.

Точка касания вписанной окружности треугольника с окружностью девяти точек называется *точкой Фейербаха.*

3. Докажите, что в неравнобедренном треугольнике расстояние от точки Фейербаха до середины одной из сторон равно сумме расстояний от точки Фейербаха до середин двух других.

4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) проведена высота CD. Окружность ϑ касается отрезков AD и AC в точках M и N соответственно и касается окружности (BDC) внешне. Докажите, что $BM = BC$.

5. Хорды AC и BD окружности Ω пересекаются в точке X. Докажите, что радикальная ось окружностей, вписанных в криволинейные треугольники AXB и CXD, проходит через середины дуг BC и DA.

6. Вневписанная окружность ω_B треугольника ABC касается продолжения стороны BC за точку C в точке K. Окружность ξ касается окружности ω_B внутренним образом в точке K, а диаметр окружности ξ равен длины высоты треугольника ABC из вершины A. Докажите, что окружности ξ и (ABC) касаются.

7. Докажите слабую теорему Кези в обратную сторону: если выполнено соотношение из условия теоремы, то окружности ABC и ω касаются.