Серия 10. Геометрические неравенства, часть 2

1. На сторонах AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки E и F так, что отрезок EF проходит через точку пересечения диагоналей. Докажите, что $EF < \max(AC, BD)$.

2. (*Вышкинская олимпиада для девочек*) Для какой точки X внутри треугольника произведение расстояний от неё до его сторон будет максимальным?

3. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, все стороны которого имеют длину 1. Докажите утверждения:
(a) оба треугольника ACE и BDF — остроугольные.
(b) $\min(R_{ACE}, R_{BDF}) \leqslant 1$ (речь идёт о радиусах описанных окружностей треугольников).
(c) $\min(AD, BE, CF) \leqslant 2$.

И несколько задач про градиент.

4. Внутри треугольника ABC выбраны точки M и N. Докажите, что сумма расстояний от точки M до вершин треугольника отличается от суммы расстояний от точки N до вершин треугольника не более чем на длину отрезка MN.

5. Внутри остроугольного неравнобедренного треугольника ABC отмечена такая точка X, что $\angle XOH = 90^\circ$; где точки O и H — центр описанной окружности и ортоцентр соответственно. Радиус описанной окружности обозначен через R. Докажите, что $AX + BX + CX \geqslant 3R$.

6. Пусть G — точка пересечения медиан треугольника ABC. Определите, для какой точки X внутри треугольника достигается минимум величины

$$AG \cdot AX + BG \cdot BX + CG \cdot CX.$$

Выразите значение этого минимума в терминах длин сторон треугольника.