

Серия 1. Направления

1. Смотри левую картинку. Известно, что четырёхугольники $ABCD$, $X_1X_2Z_1Z_2$, $Y_1Y_2T_1T_2$ — вписанные. Докажите, что заштрихованный четырёхугольник — также вписанный.
2. На стороне BC треугольника ABC отмечены точки X и Y так, что $\angle BAX = \angle YAC$. (a) Докажите, что центры окружностей (ABX) , (ABY) , (ACX) , (ACY) лежат на одной окружности. (b) Докажите, что проекции точек B и C на прямые AX и AY лежат на одной окружности.
3. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность с центром в точке I . Докажите, что проекции точек B и D на прямые AI и CI лежат на одной окружности.
4. Вписанная окружность касается сторон AB , BC , CD , DA описанного четырёхугольника $ABCD$ в точках K , L , M , N соответственно. Середины отрезков NK , KL , LM , MN обозначены через A_0 , B_0 , C_0 , D_0 соответственно. Докажите, что четырёхугольник, образованный прямыми AC_0 , BD_0 , CA_0 , DB_0 — вписанный.
5. Медианы разрезали треугольник на 6 маленьких треугольников. Докажите, что центры описанных окружностей этих шести треугольников лежат на одной окружности.
6. Продолжения сторон AB и CD вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P , а диагонали AC и BD — в точке S . Обозначим через M и N середины сторон BC и AD . Докажите, что окружность (MSN) касается прямой PS .
7. Смотри правую картинку.

