



Пусть A' и B' — основания биссектрисс из углов A и B соответственно; M_c , M_b , M_a — середины сторон AB , AC , BC соответственно; I — инцентр треугольника ABC , а E — середина отрезка $A'B'$.

Сперва заметим, что EQM_cP — прямоугольник. Действительно, он параллелограмм, так как $EP = QM_c = \frac{B'A}{2}$ и $QM_c \parallel B'A \parallel EP$, и $\angle QM_cP = \angle C = 90^\circ$ ($M_aM_c \parallel CA \perp CB \parallel M_bM_c$). Таким образом, $QEP M_c$ — вписанный, причём QP и EM_c — диаметры описанной около него окружности. Заметим теперь, что нам осталось показать, что точка H также принадлежит указанной окружности. В самом деле, тогда угол QHP будет прямым, как угол, опирающийся на диаметр QP . Для этого необходимо и достаточно доказать, что E, I, H — коллинеарны. Тогда из условия имеем, что угол EHM_c — прямой, а значит H лежит на нашей окружности.

Лемма. E, I, H — коллинеарны.

Покажем, что IH пересекает $A'B'$ в середине. Пусть $\angle A = 2\alpha$ и $\angle B = 2\beta$, и пусть $IH \cap A'B' = F$. Далее, $\angle A'IE = \angle AIH = 90^\circ - \alpha$, $\angle B'IE = \angle BIH = 90^\circ - \beta$.

Покажем, что $S_{IFA'} = S_{IFB'}$, что и будет означать, что $F = E$. Мы знаем, что $S_{IFA'} = \frac{IF \cdot IA' \cdot \sin(90^\circ - \alpha)}{2}$ и что $S_{IFB'} = \frac{IF \cdot IB' \cdot \sin(90^\circ - \beta)}{2}$. То есть осталось показать, что $IA' \cdot \cos \alpha = IB' \cdot \cos \beta$. Остаётся заметить, что $IA' \cdot \cos \alpha = r = IB' \cdot \cos \beta$, где r — радиус вписанной в ABC окружности.