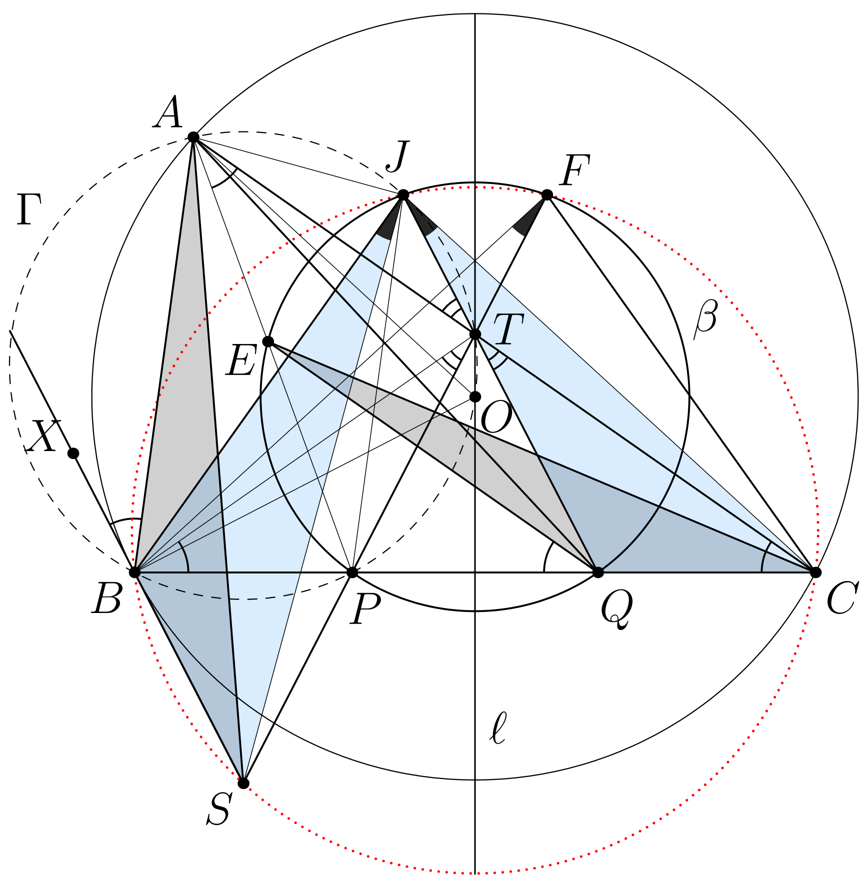
Пусть $T = AC \cap SP$, O – центр (ABC). Тогда, поскольку SB – касательная к (ABC), получаем $\angle BAC = \angle SBP = \angle SPB = \angle TPQ$, откуда следует, что A, B, P, T лежат на одной окружности. С другой стороны, $\angle APB = 2\angle ACB = \angle AOB$, откуда заключаем, что A, B, P, O лежат на одной окружности. Так, все пять точек A, B, P, T, O лежат на (ABP), которую мы обозначим за Γ. В частности, это означает, что T – точка пересечения серединного перпендикуляра ℓ к BC и стороны AC.

Далее, надо как-то разобраться с теми углами, про которые нам нужно доказывать утверждение. Оба они «неудобные», но вот если угол BAS перебросить не очень понятно как, то вот угол CAQ для этого подходит больше. Вспомним, что $AP = PC$, поэтому давайте отметим точку E на AP так, что $PE = PQ$, то есть симметрично Q относительно серединного перпендикуляра к AC. Тогда понятно, что $AEQC$ – р/б трапеция, а значит $\angle CAQ = \angle QEC$. Давайте ещё заметим, что $\angle XBA = \angle ACB = \angle EQB$. То есть если то, что нас просят доказать верно, то треугольники ABS и EQC подобны. Более того, поскольку они одинаково ориентированы, то они вообще должны быть поворотно-гомотетичны. Давайте и будем это доказывать.



Окружность (EPQ) обозначим за β. Пусть J – вторая точка пересечения окружности β с Γ. Тогда J – центр поворотной гомотетии $\boldsymbol{\mathcal{P}}$, переводящей AB в EQ (известный факт или счёт углов). Значит, осталось доказать, что при этой гомотетии S переходит в C.

Покажем, что J, T, Q колинеарны. Для этого достаточно доказать, что $\angle JTA = \angle CTQ = \angle PTB$. Давайте заметим, что O – центр β. Действительно, $OP = OQ$ из симметрии относительно ℓ и $OQ = OE$ из симметрии относительно серединного перпендикуляра к AC (O лежит на нём). А значит, β симмерична относительно серединного перпендикуляра к AB, так же как и Г. А значит, J и P симметричны относительно серединного перпендикуляра к AB. Мы получили, что $ABPJ$ – р/б трапеция, что равносильно нужному равенству углов. Таким образом, мы доказали, что J, T, Q колинеарны. Запомним, что $ABPJ$ – р/б трапеция – этот факт, нам ещё пригодится.

Пусть F – точка, симметричная J относительно ℓ. Докажем теперь, что S, B, J, F, C лежат на одной окружности. Очевидно, что четырёхугольник $BJFC$ вписанный, ведь это р/б трапеция. Далее, осталось доказать, что $\angle SBP = \angle SPB = \angle CPF = \angle CFP$, т.е. что $CF = CP$. С другой стороны, $CF = BJ = AP = PC$ ($BJ = AP$ из равнобедренности трапеции). Итого, все указанные выше 5 точек лежат на одной окружности.

Осталось заметить, что $\angle QJC = \angle PFB = \angle SJB$ и $\angle JCB = \angle JSB$, откуда получаем, что J – центр поворотной гомотетии $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, которая переводит BS в QC. Остаётся заметить, что коэффициенты обоих поворотных гомотетий $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ равны JB/JQ, а их углы равны $\angle BJQ$. Откуда получаем, что $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ на самом деле одна и та же поворотная гомотетия $\boldsymbol{\mathcal{S}}$. Таким образом, $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ переводит AB в EQ и BS в QC. То есть $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ – искомая поворотная гомотетия, переводящая треугольник ABS в треугольник EQC. Поэтому $\angle BAS = \angle QEC = \angle QAC$, что и требовалось.