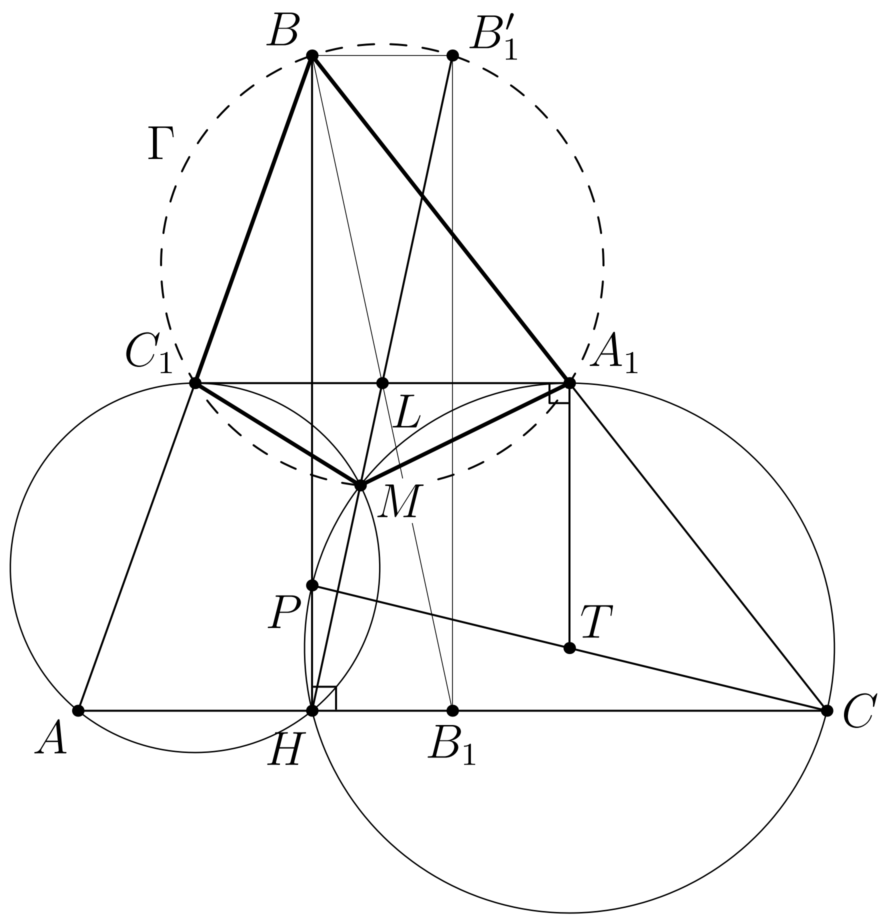
Условие. Точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон соответственно BC, AC, AB треугольника ABC, а BH – его высота. Докажите, что если описанные окружности треугольников AHC_1 и CHA_1 проходят через точку M, то $\angle ABM = \angle CBB_1$.



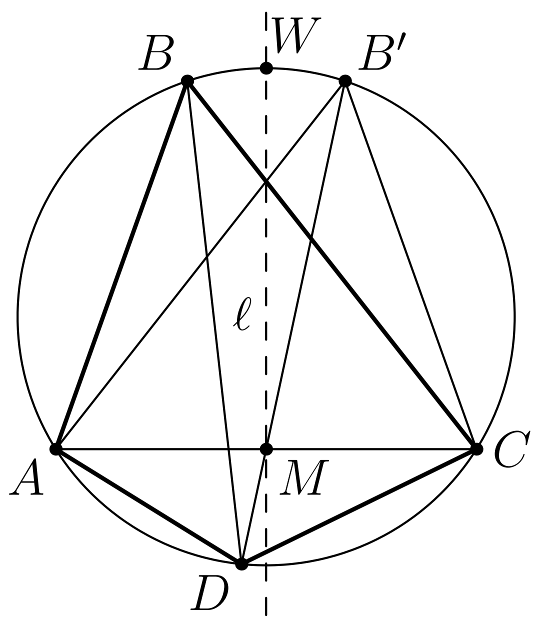
Решение. Ясно, что изначальное условие равносильно тому, что точка M находится на симедиане треугольника ABC – это и будем доказывать. Сперва покажем, что обе окружности (AHC_1) и (CHA_1) касаются прямой A_1C_1. Действительно, для окружности (CHA_1) имеем: $P = BH \cap (CHA_1)$, T – середина PC; тогда T – центр нашей окружности, кроме того TA_1 – средняя линия треугольника CPB, а следовательно прямая TA_1 перпендикулярна C_1A_1, что и означает касание. Аналогично доказывается и для (AHC_1). Далее, пусть L – середина отрезка A_1C_1, тогда, так как окружности касаются его в точках A_1 и C_1, то MH проходит через L. Пусть $\Gamma = (A_1C_1B)$, тогда $M \in \Gamma$. Так как треугольник BA_1C_1 гомотетичен BCA с центром гомотетии в вершине B, то прямые BM и BL для треугольника BA_1C_1 — симедиана и медиана соответственно. А значит осталось доказать, что четырёхугольник A_1BC_1M – гармонический.

Теперь заметим, что Γ симметрична окружности Эйлера треугольника ABC относительно прямой A_1C_1. А значит, отразив B_1 относительно A_1C_1, мы получим точку $B'_1 \in \Gamma$. Так как HBB'_1B_1 – прямоугольник, то это означает, что B'_1 симметрична B относительно серединного перпендикуляра к A_1C_1. Просуммируем вышесказанное в лемму.

Лемма. Пусть дан треугольник ABC, M – середина его стороны AC, B' симметрична B относительно серединного перпендикуляра ℓ к отрезку AC (очевидно лежит на (ABC)), D – вторая точка пересечения прямой $B'M$ с окружностью (ABC). Тогда четырёхугольник $ABCD$ – гармонический.

Доказательство.

Первый способ. Пусть W – середина дуги ABC. Тогда $\smile WB = \smile WB'$, ведь B и B' симметричны относительно ℓ . Отсюда следует, что DB – симедиана треугольника DAC, а это равносильно тому, что $ABCD$ – гармонический.



Второй способ.

Условие задачи равносильно тому, что $AB \cdot DC = AD \cdot BC$.

Из подобия треугольников ADM и $B'MC$ получаем, что $\dfrac{AD}{B'C} = \dfrac{AM}{MB'}$, а из подобия реугольников DMC и AMB': $\dfrac{CD}{AB'} = \dfrac{CM}{MB'}$. Откуда $\dfrac{AD}{B'C} = \dfrac{CD}{AB'}$. Так как из симметрии $CB = AB'$ и $B'C = AB$, то это равносильно следующему $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{CD}{BC}$, что и требовалось.