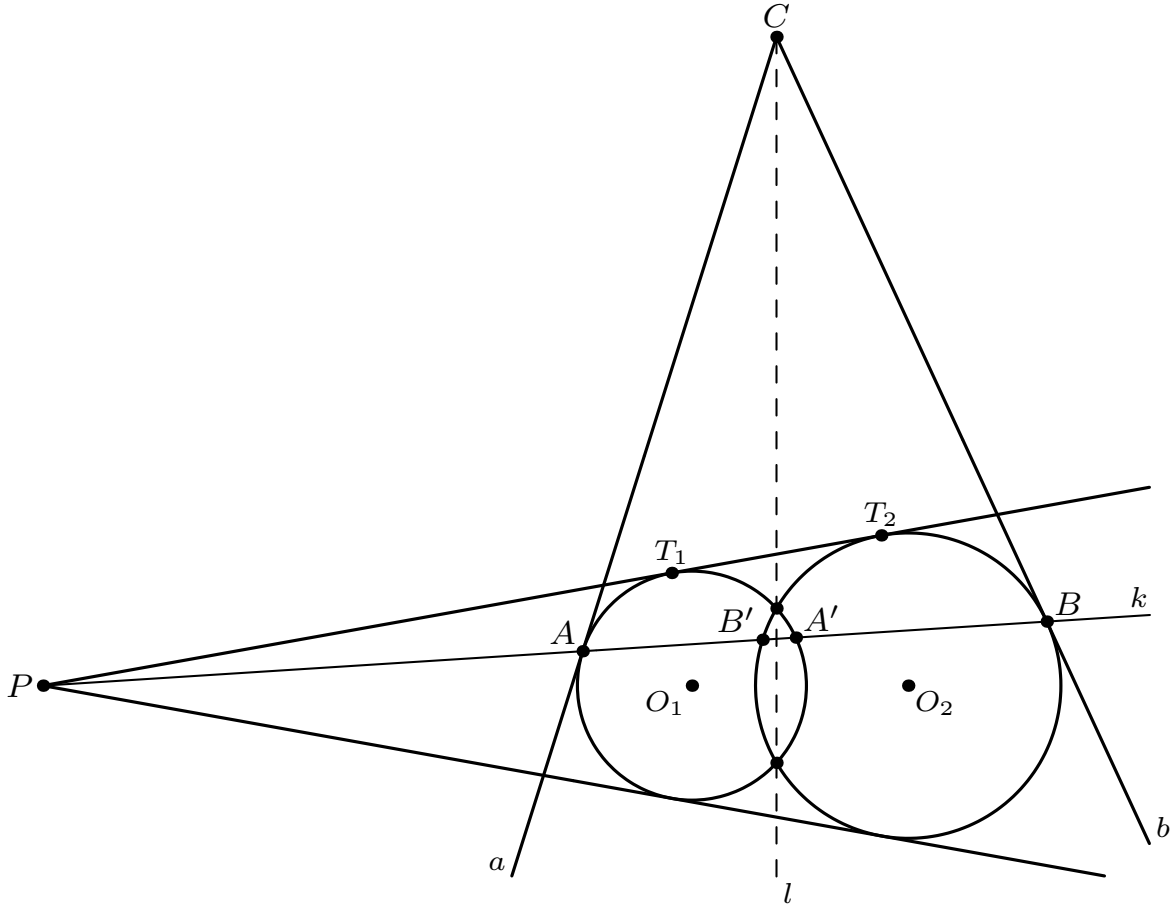


Лемма. Окружности ω и Ω с радиусами R_1 и R_2 вписаны в угол с вершиной P . Через P внутри угла проведена произвольная прямая k . Пусть k пересекает окружности ω и Ω соответственно в точках A и A' ; B' и B . К окружностям в точках A и B построены соответственно касательные a и b . Пусть $a \cap b = C$. Тогда $AC = BC$.



Доказательство. Пусть O_1 и O_2 – центры соответственно ω и Ω . Заметим, что т.к. ω и Ω вписаны в один угол $\Rightarrow P, O_1, O_2$ лежат на одной прямой – биссектрисе угла P . Зададим гомотетию $H_P^{\frac{R_2}{R_1}}$. Тогда $H_P(\omega) = \Omega$. Из свойств гомотетии имеем:

$$\left. \begin{aligned} H_P(A) &= B' \\ H_P(T_1) &= T_2 \\ H_P(A') &= B \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sphericalangle AT_1A' = \sphericalangle B'T_2B$$

Так как $\sphericalangle AT_1A' = \sphericalangle B'T_2B$, то по теореме об угле между касательной и хордой $\angle CBA = \frac{\sphericalangle B'T_2B}{2} = \frac{\sphericalangle AT_1A'}{2} = \angle CAB \Rightarrow \triangle ABC - \text{p/б} \Rightarrow AC = BC$.

■

Следствие. Если l – радикальная ось окружностей ω и Ω , то $C \in l$.