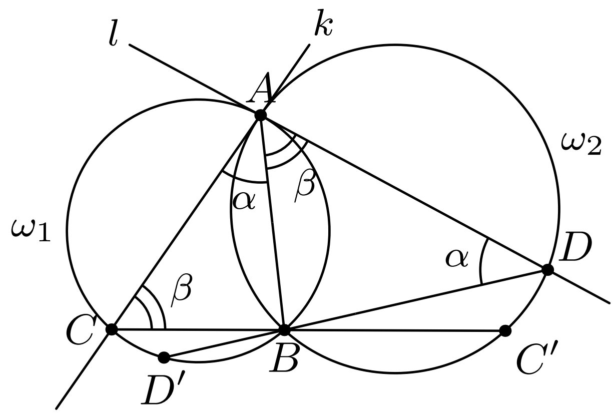
Задача. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. В точке A к окружностям ω_1 и ω_2 соответственно построены касательные l и k, пересекающие окружности соответственно в точках D и C. Докажите, что $AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC$.



Решение. Пусть $\angle BAC = \alpha$, а $\angle BAD = \beta$. Тогда $\angle BDA = \alpha$ по теореме об угле между хордой и касательной. Аналогично $\angle BCA = \beta$. Из подобия $\triangle ABC \sim \triangle DBA$ следует, что $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BA} = \frac{BA}{BD}$. Отсюда сразу следует, что $\frac{AC^2}{AD^2} = \frac{BC}{BA} \cdot \frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BD}$ Домножая обе части полученного равенства ($\frac{AC^2}{AD^2} = \frac{BC}{BD}$) на $\frac{AD^2}{BD}$ (метод креста) получим требуемое утверждение: $AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC$. ■

Комментарий. Несложно видеть интересный факт, как следствие доказаной задачи, а именно $DD' = CC'$. Это верно в силу того что $deg(C, \omega_2) = AC^2 = CB \cdot CC'$, а также $deg(D, \omega_1) = AD^2 = DB \cdot DD'$.

$$\left.\begin{aligned} AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC \\ AC^2 = BC \cdot CC' \\ AD^2 = BD \cdot DD' \end{aligned}\right\} \Rightarrow DD' = CC'$$