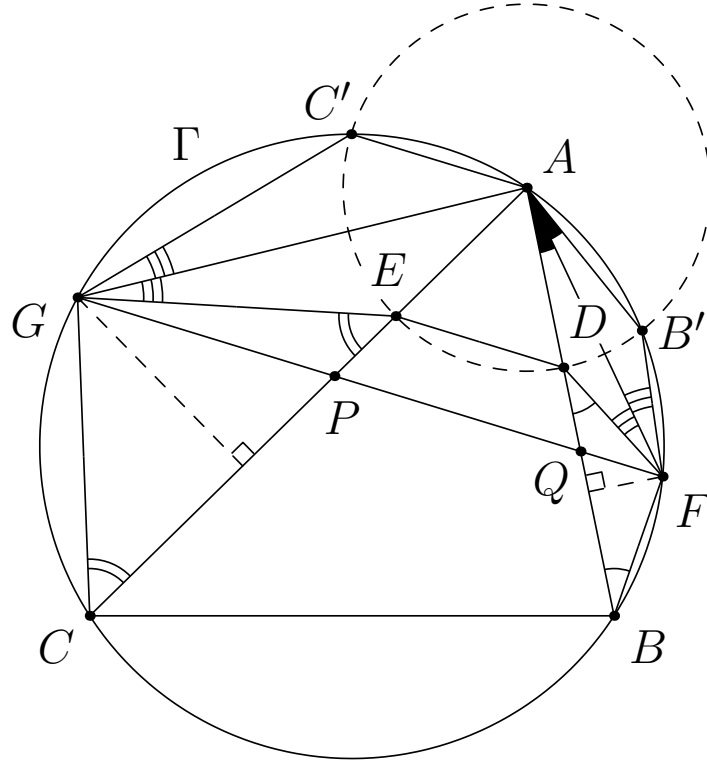


**Задача 1.** Пусть  $\Gamma$  — окружность, описанная около остроугольного треугольника  $ABC$ . Точки  $D$  и  $E$  лежат на отрезках  $AB$  и  $AC$  соответственно, причем  $AD = AE$ . Серединные перпендикуляры к отрезкам  $BD$  и  $CE$  пересекают меньшие дуги  $AB$  и  $AC$  окружности  $\Gamma$  в точках  $F$  и  $G$  соответственно. Докажите, что прямые  $DE$  и  $FG$  параллельны или совпадают.

**Решение.** Пусть  $FG$  пересекает  $AC$  и  $AB$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Тогда для того, чтобы прямые  $DE$  и  $FG$  были параллельны достаточно показать, что треугольник  $APQ$  является равнобедренным, то есть  $\angle APQ = \angle AQP$ . Положим  $\angle DAF = \varphi$ ,  $\angle EAG = \gamma$ ,  $\angle FDB = \angle FBD = \alpha$ ,  $\angle GEC = \angle GCE = \beta$ . Тогда  $\angle AQP = \frac{1}{2}(\sphericalangle FB + \sphericalangle AG) = \varphi + \beta$  и  $\angle APQ = \frac{1}{2}(\sphericalangle GC + \sphericalangle AF) = \alpha + \gamma$ . То есть надо доказать, что  $\gamma + \alpha = \beta + \varphi$ . Заметим, что  $\alpha = \varphi + \angle DFA$  (как внешний к  $\triangle ADF$ ) и  $\beta = \gamma + \angle EGA$  (как внешний к  $\triangle AGE$ ). Таким образом, задача свелась к равенству углов  $\angle DFA$  и  $\angle EGA$ .



Пусть  $B' \in \Gamma$  и  $C' \in \Gamma$  так, что  $G$  и  $F$  середины дуг  $\sphericalangle CC'$  и  $\sphericalangle BB'$  соответственно. Покажем, что  $AD = AB'$ . Для начала заметим, что  $AF$  — биссектриса угла  $\angle BAB'$ . Значит, симметрично отразив прямую  $AB$  относительно  $AF$ , мы получим прямую  $AB'$ . Пусть тогда  $D$  перейдет в  $D'$ , тогда  $FD = FD'$ . Заметим, что  $\angle ADF = 180^\circ - \angle FDB = 180^\circ - \angle FBD = 180^\circ - \angle AGF = \angle AB'F$ . Следовательно,  $D' = B'$ , а значит  $AD = AD' = AB'$ . Аналогично доказывается, что  $AE = AC'$ . Тогда  $AB' = AD = AE = AC'$ . Отсюда мгновенно следует, что  $\angle DFA = \angle D'FA = \angle B'GA = \angle EGA$ . Это нам и требовалось.