

Необычная задача кубического представления

Алексей Кислицын Андрей Владимиров Всеволод Триль

Механико-математический факультет МГУ

30 ноября 2022 г.

Постановка задачи

Всё началось с, кажущейся на первый взгляд, детской задачи:

95% of people cannot solve this!

$$\frac{\text{apple}}{\text{banana} + \text{orange}} + \frac{\text{banana}}{\text{apple} + \text{orange}} + \frac{\text{orange}}{\text{apple} + \text{banana}} = 4$$

Can you find positive whole values

for apple, banana, and orange?

Постановка задачи

Всё началось с, кажущейся на первый взгляд, детской задачи:

95% of people cannot solve this!

$$\frac{\text{apple}}{\text{banana} + \text{orange}} + \frac{\text{banana}}{\text{apple} + \text{orange}} + \frac{\text{orange}}{\text{apple} + \text{banana}} = 4$$

Can you find positive whole values

for apple, banana, and orange?

В этом докладе мы предъявим алгоритм решения данной задачи, а также постараемся её обобщить и проанализировать.

Переформулируем ей в математических терминах: требуется найти все натуральные решения следующего уравнения при $N = 4$:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = N, \quad x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Мы пока не будем придавать значения тому, что $N = 4$, а сразу будем рассматривать постановку задачи для произвольного $N \in \mathbb{N}$.

Переформулируем ей в математических терминах: требуется найти все натуральные решения следующего уравнения при $N = 4$:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = N, \quad x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Мы пока не будем придавать значения тому, что $N = 4$, а сразу будем рассматривать постановку задачи для произвольного $N \in \mathbb{N}$.

Заметим, что решение исходного уравнения равносильно нахождению натуральных точек на кубике, заданной в однородных координатах $(x : y : z)$ следующим уравнением:

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) + (3 - 2N)xyz = 0.$$

Переформулируем ей в математических терминах: требуется найти все натуральные решения следующего уравнения при $N = 4$:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = N, \quad x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Мы пока не будем придавать значения тому, что $N = 4$, а сразу будем рассматривать постановку задачи для произвольного $N \in \mathbb{N}$.

Заметим, что решение исходного уравнения равносильно нахождению натуральных точек на кубике, заданной в однородных координатах $(x : y : z)$ следующим уравнением:

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) + (3 - 2N)xyz = 0.$$

Сразу отметим, что так как мы работаем в проективных координатах, то это равносильно нахождению точек с рациональными координатами, у которых знаки одинаковы.

Но перед тем, как перейти к решению исходной задачи, рассмотрим более простую задачу – поиск натуральных точек на квадрике

<здесь будет продолжение про квадрику> <картинка с секущими диофанта>

Но перед тем, как перейти к решению исходной задачи, рассмотрим более простую задачу – поиск натуральных точек на квадрике

Описание рациональных точек на квадрике

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz = 0, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

<здесь будет продолжение про квадратiku> <картинка с секущими диофанта>

Но перед тем, как перейти к решению исходной задачи, рассмотрим более простую задачу – поиск натуральных точек на квадрике

Описание рациональных точек на квадрике

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz = 0, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

Метод секущих

Для начала заметим, что зная одну рациональную точку на квадрике можно получить все методом секущих. (картинка)

<здесь будет продолжение про квадратичную форму> <картинка с секущими диофантова>

Поиск рациональной точки. Шаг 1.

Приведём quadriku рациональным преобразованием к одному из следующих видов.

$$x^2 - Az^2 = 0$$

$$x^2 - Ayz = 0$$

$$Ax^2 + By^2 - Cz^2 = 0$$

Поиск рациональной точки. Шаг 1.

Приведём quadriku рациональным преобразованием к одному из следующих видов.

$$x^2 - Az^2 = 0$$

$$x^2 - Ayz = 0$$

$$Ax^2 + By^2 - Cz^2 = 0$$

Шаг 2.

Случаи 1 и 2 разбираются тривиально. В третьем случае используем критерий Лежандра, согласно нему уравнение 3 имеет целочисленное решение тогда и только тогда когда BC квадратичный вычет по модулю A , AC - по модулю B и $-AB$ по модулю C .

Поиск рациональной точки. Шаг 1.

Приведём квадратику рациональным преобразованием к одному из следующих видов.

$$x^2 - Az^2 = 0$$

$$x^2 - Ayz = 0$$

$$Ax^2 + By^2 - Cz^2 = 0$$

Шаг 2.

Случаи 1 и 2 разбираются тривиально. В третьем случае используем критерий Лежандра, согласно нему уравнение 3 имеет целочисленное решение тогда и только тогда когда BC квадратичный вычет по модулю A , AC - по модулю B и $-AB$ по модулю C .

Замечание

Таким образом поиск рациональной точки это полностью решённая проблема в случае квадратики. Более того есть теорема Хольцера, которая даёт верхнюю оценку на границы в которых его надо искать.

Приведение к нормальной форме Вейерштрасса

Перейдём к основной задаче, как и в случае квадратики приведём кубику

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) + (3 - 2N)xyz = 0$$

к наиболее простому виду – нормальной форме Вейерштрасса, которая может записывается так:

$$y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Приведение к нормальной форме Вейерштрасса

Перейдём к основной задаче, как и в случае квадратики приведём кубику

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) + (3 - 2N)xyz = 0$$

к наиболее простому виду – нормальной форме Вейерштрасса, которая может записывается так:

$$y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

В нашем случае, так как коэффициенты кубики целые и проективные преобразования будут с целыми коэффициентами, то $a, b \in \mathbb{Z}$.

Далее, под проективными преобразованиями мы будем понимать только целочисленные проективные преобразования.

Приведение к нормальной форме Вейерштрасса

Перейдём к основной задаче, как и в случае квадрики приведём кубику

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) + (3 - 2N)xyz = 0$$

к наиболее простому виду – нормальной форме Вейерштрасса, которая может записываться так:

$$y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

В нашем случае, так как коэффициенты кубики целые и проективные преобразования будут с целыми коэффициентами, то $a, b \in \mathbb{Z}$.

Далее, под проективными преобразованиями мы будем понимать только целочисленные проективные преобразования.

Мы предъявим алгоритм приведения кубики к нормальной форме Вейерштрасса для произвольной кубики с целыми(рациональными) коэффициентами.

Шаг 0. Нахождение рациональных точек перегиба

Итак, пусть у нас есть кубика, заданная уравнением $F(x, y, z) = 0$, где

$$F(x, y, z) = a_{30}x^3 + a_{03}y^3 + a_{00}z^3 + a_{01}yz^2 + a_{10}xz^2 + a_{11}xyz + \\ + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{20}x^2z + a_{02}y^2z,$$

то есть $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ – коэффициент при мономе $x^i y^j z^{3-i-j}$.

Шаг 0. Нахождение рациональных точек перегиба

Итак, пусть у нас есть кубика, заданная уравнением $F(x, y, z) = 0$, где

$$F(x, y, z) = a_{30}x^3 + a_{03}y^3 + a_{00}z^3 + a_{01}yz^2 + a_{10}xz^2 + a_{11}xyz + \\ + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{20}x^2z + a_{02}y^2z,$$

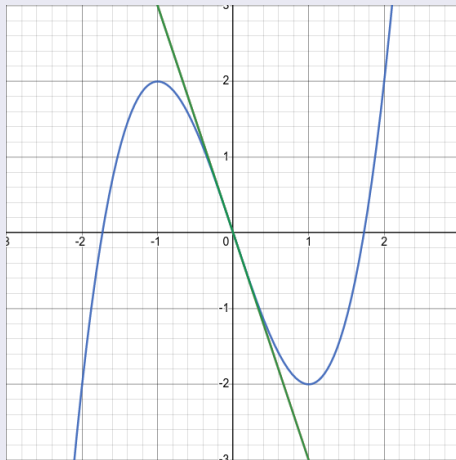
то есть $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ – коэффициент при мономе $x^i y^j z^{3-i-j}$.

Определение

Точка P_0 кубики $F(x^1, x^2, x^3) = 0$ называется *точкой перегиба*, если касательная к ней в точке P имеет касание третьего порядка, то есть для любой точки $Q = (x_q^1 : x_q^2 : x_q^3)$ на касательной выполнено

$$\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(P_0) x_q^i x_q^j = 0.$$

Пример



уравнение кубики $y = x^3 - 3x$, уравнение касательной $y = -3x$;
точка $(0, 0)$ особая

Определение

Точка P_0 кубики $F(x^1, x^2, x^3) = 0$ называется *особой*, если

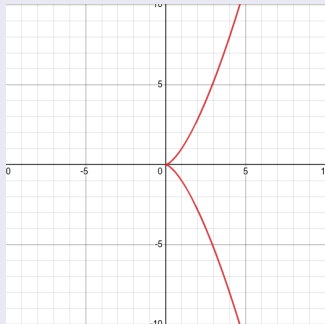
$$\frac{\partial F}{\partial x^1}(P_0) = \frac{\partial F}{\partial x^2}(P_0) = \frac{\partial F}{\partial x^3}(P_0) = 0.$$

Определение

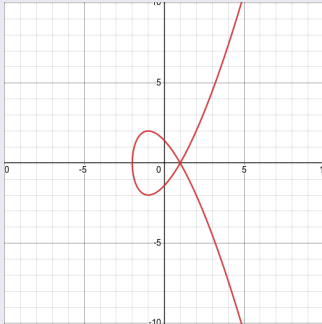
Точка P_0 кубики $F(x^1, x^2, x^3) = 0$ называется *особой*, если

$$\frac{\partial F}{\partial x^1}(P_0) = \frac{\partial F}{\partial x^2}(P_0) = \frac{\partial F}{\partial x^3}(P_0) = 0.$$

Примеры



(a) $y^2 = x^3$



(b) $y^2 = x^3 - 3x + 2$

Определение

Гессианом кубики $F(x^1, x^2, x^3) = 0$ называется кубика

$$H(F) := \det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} \right)_{ij}.$$

Определение

Гессианом кубики $F(x^1, x^2, x^3) = 0$ называется кубика

$$H(F) := \det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} \right)_{ij}.$$

Теорема

Точки перегиба неособой кубики в \mathbb{CP}^2 – в точности точки пересечения кубики с её Гессианом.

Мы не будем проверять кубику на наличие особенностей, а просто найдём все точки пересечения с Гессианом и посмотрим, есть ли там особенности. Если среди общих точек есть неособая, то нам эта точка подходит и мы можем переходить к следующему шагу. Если все точки особые, то алгоритм продолжить нельзя.

Мы не будем проверять кубику на наличие особенностей, а просто найдём все точки пересечения с Гессианом и посмотрим, есть ли там особенности. Если среди общих точек есть неособая, то нам эта точка подходит и мы можем переходить к следующему шагу. Если все точки особые, то алгоритм продолжить нельзя.

Для поиска общих точек рассмотрим результат $R(F, H(F))$ по переменной z . Получим однородный многочлен 9-той степени. (дописать уточнение) Находим все его рациональные корни – пары (x, y) и подставляем в F и в $H(F)$ для нахождения общей точки (или удостоверении, что при данных (x_0, y_0) её нет).

Мы не будем проверять кубику на наличие особенностей, а просто найдём все точки пересечения с Гессианом и посмотрим, есть ли там особенности. Если среди общих точек есть неособая, то нам эта точка подходит и мы можем переходить к следующему шагу. Если все точки особые, то алгоритм продолжить нельзя.

Для поиска общих точек рассмотрим результат $R(F, H(F))$ по переменной z . Получим однородный многочлен 9-той степени. (дописать уточнение) Находим все его рациональные корни – пары (x, y) и подставляем в F и в $H(F)$ для нахождения общей точки (или удостоверении, что при данных (x_0, y_0) её нет).

Этот шаг реализован в файле `InflectionPoints.py` в функции `find_non_singular_inflection_point`.

Шаг 1. Избавление от монома y^3

Выберем какую-то рациональную точку перегиба P и переведём её в точку $(0 : 1 : 0)$ некоторым проективным преобразованием. После проективного преобразования, наша кубика имеет уравнение $\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, в котором нет \tilde{y} . Таким образом, у нас уйдёт моном y^3 .

Шаг 1. Избавление от монома y^3

Выберем какую-то рациональную точку перегиба P и переведём её в точку $(0 : 1 : 0)$ некоторым проективным преобразованием. После проективного преобразования, наша кубика имеет уравнение $\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, в котором нет \tilde{y} . Таким образом, у нас уйдёт моном y^3 .

Этот шаг реализован в файле `WeierstrassForm.py` в функции `weierstrass_form_step1`.

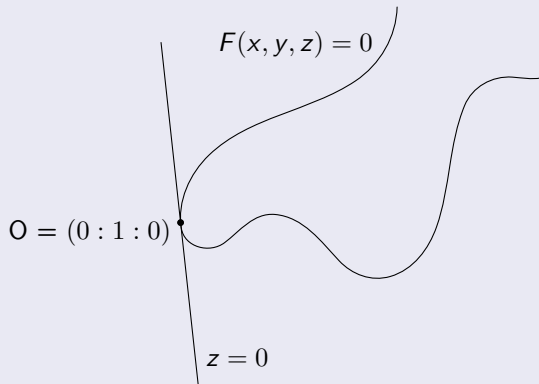
Шаг 2. Избавление от мономов y^2x и yx^2

Теперь мы хотим сделать преобразование, сохраняющее точку $O = (0 : 1 : 0)$, так, чтобы прямая $z = 0$ была касательной к кубике \tilde{F} в точке O , то есть сделать преобразование $(\tilde{x} : \tilde{y} : \tilde{z}) \rightarrow (x' : y' : z')$, такое что для $F'(x', y', z')$ будет выполнено:

$$\frac{\partial F'}{\partial x'}(O) = \frac{\partial F'}{\partial y'}(O) = 0, \quad \frac{\partial F'}{\partial z'}(O) \neq 0.$$

То есть нет монома xu^2 , однако, коэффициент при y^2z отличен от нуля, и поэтому, разделив на него, можем считать, что он равен 1. Кроме того, так как O – точка перегиба, то касание прямой $z = 0$ с нашей кубикой имеет порядок 3, таким образом нет монома x^2y .

Схематично это себе можно представлять так:



Шаг 3. Выделение y^2z и избавление от x^2z

После второго преобразования, уравнение нашей кубики стало

$F'(x', y', z') = 0$, где

$$F'(x', y', z') = a'_{30} (x')^3 + a'_{20} (x')^2 z' + a'_{11} x' y' z' + (y')^2 z' + \\ + a'_{10} x' (z')^2 + a'_{01} y' (z')^2 + a'_{00} (z')^3.$$

Шаг 3. Выделение y^2z и избавление от x^2z

После второго преобразования, уравнение нашей кубики стало $F'(x', y', z') = 0$, где

$$F'(x', y', z') = a'_{30} (x')^3 + a'_{20} (x')^2 z' + a'_{11} x' y' z' + (y')^2 z' + \\ + a'_{10} x' (z')^2 + a'_{01} y' (z')^2 + a'_{00} (z')^3.$$

Делая замену $y'' = y' + (a'_{01} z' + a'_{11} x')/2$, выделяем полный квадрат по y' и уравнение кубики становится:

$$(y'')^2 z' = a''_{30} (x')^3 + a''_{20} (x')^2 z' + a''_{10} x' (z')^2 + a''_{00} (z')^3.$$

Шаг 3. Выделение y^2z и избавление от x^2z

После второго преобразования, уравнение нашей кубики стало $F'(x', y', z') = 0$, где

$$F'(x', y', z') = a'_{30} (x')^3 + a'_{20} (x')^2 z' + a'_{11} x' y' z' + (y')^2 z' + \\ + a'_{10} x' (z')^2 + a'_{01} y' (z')^2 + a'_{00} (z')^3.$$

Делая замену $y'' = y' + (a'_{01} z' + a'_{11} x')/2$, выделяем полный квадрат по y' и уравнение кубики становится:

$$(y'')^2 z' = a''_{30} (x')^3 + a''_{20} (x')^2 z' + a''_{10} x' (z')^2 + a''_{00} (z')^3.$$

Теперь линейной заменой $x'' = x' - \frac{a''_{20}}{3a''_{30}} z'$ избавляемся от монома $(x')^2 z'$ и получаем:

$$(y'')^2 z' = a'''_{30} (x'')^3 + a'''_{10} x'' (z')^2 + a'''_{00} (z')^3.$$

Далее, делаем замену $z'' = \frac{1}{a_{30}'''} z'$ и получаем:

$$(y'')^2 z'' = (x'')^3 + a_{30}''' a_{10}''' x'' (z'')^2 + a_{00}''' (a_{30}''')^2 (z'')^3.$$

Обозначая $a := a_{30}''' a_{10}'''$, $b := a_{00}''' (a_{30}''')^2$, получаем требуемую форму:

$$(y'')^2 z'' = (x'')^3 + a x'' (z'')^2 + b (z'')^3.$$

Далее, делаем замену $z'' = \frac{1}{a_{30}'''} z'$ и получаем:

$$(y'')^2 z'' = (x'')^3 + a_{30}''' a_{10}''' x'' (z'')^2 + a_{00}''' (a_{30}''')^2 (z'')^3.$$

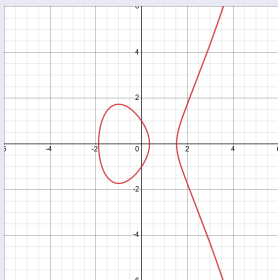
Обозначая $a := a_{30}''' a_{10}'''$, $b := a_{00}''' (a_{30}''')^2$, получаем требуемую форму:

$$(y'')^2 z'' = (x'')^3 + ax'' (z'')^2 + b (z'')^3.$$

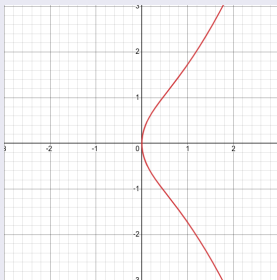
Замечание

Отметим, что все коэффициенты в ходе алгоритма получались целочисленными или рациональными (так как совершались только целочисленные проективные преобразования). Соответственно, если коэффициенты a, b оказались рациональными, мы их можем сделать целыми с помощью замены $x''' = \frac{1}{d} x''$, $z''' = \frac{1}{d^3} z''$, где d – наименьшее общее кратное знаменателей a, b .

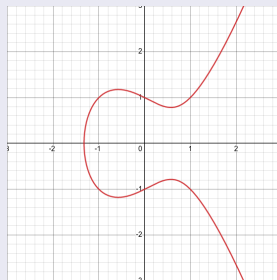
Примеры кубик в нормальной форме Вейерштрасса



(a) $y^2 = x^3 - 3x + 1$



(b) $y^2 = x^3 + 2x$



(c) $y^2 = x^3 - x + 1$

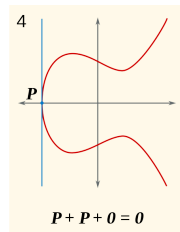
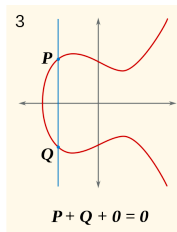
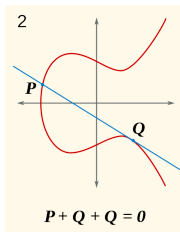
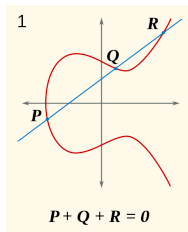
Опишем рациональные точки на кубике в форме Вейерштрасса. Пусть нам известно несколько точек, можно ли по ним как в случае квадратики получить ещё?

Опишем рациональные точки на кубике в форме Вейерштрасса. Пусть нам известно несколько точек, можно ли по ним как в случае квадратики получить ещё?

Сложение точек

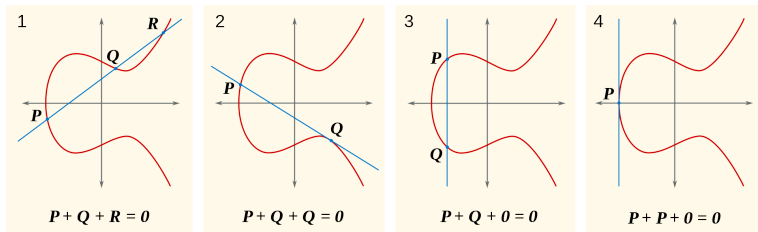
Опишем рациональные точки на кубике в форме Вейерштрасса. Пусть нам известно несколько точек, можно ли по ним как в случае квадррики получить ещё?

Сложение точек



Опишем рациональные точки на кубике в форме Вейерштрасса. Пусть нам известно несколько точек, можно ли по ним как в случае квадррики получить ещё?

Сложение точек



Определение

Суммой точек P и Q назовём точку пересечения прямой PQ с кубикой, отражённую относительно оси x и будем обозначать $P + Q$.

Теорема

Множество рациональных точек кубики $E(\mathbb{Q})$ в нормальной форме Вейерштрасса образуют абелеву группу.

Теорема

Множество рациональных точек кубики $E(\mathbb{Q})$ в нормальной форме Вейерштрасса образуют абелеву группу.

Теорема (Морде)

Группа $E(\mathbb{Q})$ конечно порождена.

Теорема

Множество рациональных точек кубики $E(\mathbb{Q})$ в нормальной форме Вейерштрасса образуют абелеву группу.

Теорема (Морде)

Группа $E(\mathbb{Q})$ конечно порождена.

Это даёт надежду на полное описание рациональных точек на кубике. Ведь есть явные формулы для сложения точек в нормальной форме.

Явные формулы для $P + Q$

Пусть $P = (x_p, y_p)$, $Q = (x_q, y_q)$, $R = (x_r, y_r)$, где $R = P + Q$ и $P \neq Q$. Тогда мы имеем:

$$x_r = m^2 - x_p - x_q$$

$$y_r = y_p + m(x_r - x_p)$$

где $m = (y_p - y_q)/(x_p - x_q)$.

Явные формулы для $P + Q$

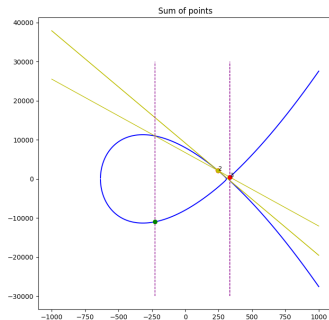
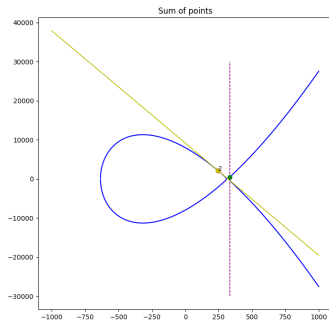
Пусть $P = (x_p, y_p)$, $Q = (x_q, y_q)$, $R = (x_r, y_r)$, где $R = P + Q$ и $P \neq Q$. Тогда мы имеем:

$$\begin{aligned}x_r &= m^2 - x_p - x_q \\ y_r &= y_p + m(x_r - x_p)\end{aligned}$$

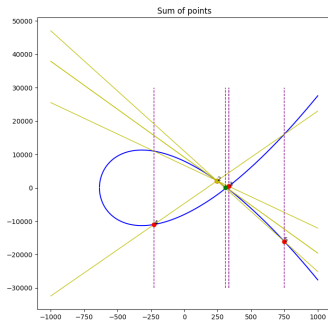
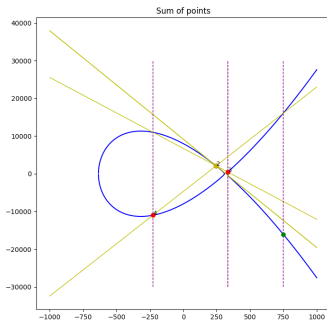
где $m = (y_p - y_q)/(x_p - x_q)$.

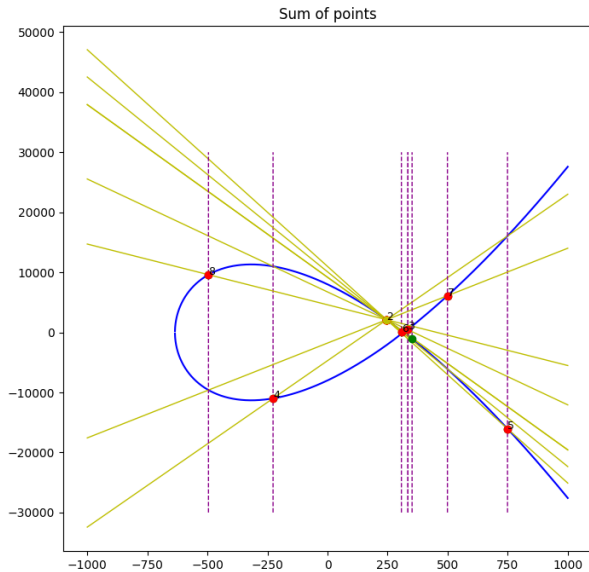
Таким образом зная хотя бы одну точку $P \notin \text{Tor}(E(\mathbb{Q}))$, можно явно найти бесконечно точек вида $P, 2P, \dots, nP$.

Наглядное умножение на скаляр в исходной задаче



Наглядное умножение на скаляр в исходной задаче





Теперь у нас все готово для решения первоначальной задачи. Дадим краткое описание алгоритма, который был реализован.

Теперь у нас все готово для решения первоначальной задачи. Дадим краткое описание алгоритма, который был реализован.

Алгоритм. Шаг 1.

Программа приводит кубик

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) + (3 - 2N)xyz = 0 \quad (*)$$

к нормальной форме Вейерштрасса. То есть находит коэффициенты a , b и прямое и обратное преобразование.

Теперь у нас все готово для решения первоначальной задачи. Дадим краткое описание алгоритма, который был реализован.

Алгоритм. Шаг 1.

Программа приводит кубику

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) + (3 - 2N)xyz = 0 \quad (*)$$

к нормальной форме Вейерштрасса. То есть находит коэффициенты a , b и прямое и обратное преобразование.

Замечание

Хоть для кубик вида $(*)$ известны явные формулы для коэффициентов a , b , а так же для преобразования в терминах N , программа проделывает это вычисления отдельно. Это позволяет применить этот алгоритм почти для произвольной кубики.

Алгоритм. Шаг 2.

На кубике находится произвольная рациональная точка $P \notin \text{Tor}(E(\mathbb{Q}))$. Это выполняется простым перебором числа $x = \frac{p}{q}$ где p, q ищутся в определённых пределах.

Алгоритм. Шаг 2.

На кубике находится произвольная рациональная точка $P \notin \text{Tor}(E(\mathbb{Q}))$. Это выполняется простым перебором числа $x = \frac{p}{q}$ где p, q ищутся в определённых пределах.

Алгоритм. Шаг 3.

Далее найденная точка умножается на себя n раз. Именно поэтому важно, чтобы исходная точка не являлась точкой кручения.

Алгоритм. Шаг 2.

На кубике находится произвольная рациональная точка $P \notin \text{Tor}(E(\mathbb{Q}))$. Это выполняется простым перебором числа $x = \frac{p}{q}$ где p, q ищутся в определённых пределах.

Алгоритм. Шаг 3.

Далее найденная точка умножается на себя n раз. Именно поэтому важно, чтобы исходная точка не являлась точкой кручения.

Алгоритм. Шаг 4.

Находятся координаты точек в изначальной системе. Отбираются точки у которых все координаты одного знака.

Алгоритм. Итог

В случае исходной задачи

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = 4, \quad x, y, z \in \mathbb{N}.$$

При удачном выборе P , точка $9P$ будет соответствовать решению уравнения. В котором будет порядка 80 цифр.