Приведение кубики к нормальной форме Вейерштрасса

Для нашей кубики

$$F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + (1-N)(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + (3-2N)xyz$$

рациональная точка $P = (1 : -1 : 0)$ является также точкой перегиба (проверяется непосредственно подстановкой в Гессиан).

- Шаг 1. Переведём точку $P = (1 : -1 : 0)$ в точку $(0 : 1 : 0)$ некоторым проективным преобразованием. Например, подойдёт такое:

$$\lambda \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{pmatrix}.$$

Тогда наше уравнение преобразуется в следующее:

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}) = (\widetilde{z})^3 - (N+2)\,(\widetilde{x})^2\,\widetilde{y} + (1-N)\,(\widetilde{x})^2\,\widetilde{z} + (N+2)\,\widetilde{x}\,(\widetilde{y})^2 \\ + (1-N)\,\widetilde{x}\,(\widetilde{z})^2 + (\widetilde{x})^3 + \widetilde{x}\,\widetilde{y}\,\widetilde{z} - (\widetilde{y})^2\,\widetilde{z}. \end{aligned}$$

- Шаг 2. Теперь мы хотим сделать преобразование, сохраняющее точку $O = (0 : 1 : 0)$, так, чтобы прямая $z = 0$ была касательной к кубике $\widetilde{F}$ в точке O, то есть сделать преобразование $(\widetilde{x} : \widetilde{y} : \widetilde{z}) \to (x' : y' : z')$, такое что для $F'(x', y', z')$ будет выполнено:

$$\frac{\partial F'}{\partial x'}(O) = \frac{\partial F'}{\partial y'}(O) = 0, \quad \frac{\partial F'}{\partial z'}(O) \neq 0.$$

Пусть имеет место соотношение

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Так как точка O должна быть неподвижна, то:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда $c_{12} = 0, c_{22} = 1, c_{32} = 0$.

Кроме того, поскольку $F'(x', y', z') = \widetilde{F}(\widetilde{x}(x', y', z'), \widetilde{y}(x', y', z'), \widetilde{z}(x', y', z'))$, то мы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F'}{\partial x'}(O) &= \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}}(\widetilde{x}(O),\widetilde{y}(O),\widetilde{z}(O))\frac{\partial \widetilde{x}}{\partial x'}(O) + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}}(\widetilde{x}(O),\widetilde{y}(O),\widetilde{z}(O))\frac{\partial \widetilde{y}}{\partial x'}(O) \\ &+ \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{z}}(\widetilde{x}(O),\widetilde{y}(O),\widetilde{z}(O))\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial x'}(O) \\ &= \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}}(c_{12},c_{22},c_{32})c_{11} + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}}(c_{12},c_{22},c_{32})c_{21} + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{z}}(c_{12},c_{22},c_{32})c_{31} \\ &= \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}}(0,1,0)c_{11} + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}}(0,1,0)c_{21} + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{z}}(0,1,0)c_{31} = (2+N)c_{11} - c_{31}. \end{aligned}$$

Аналогично получаем:

$$\frac{\partial F'}{\partial y'}(O) = \left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}}\frac{\partial \widetilde{x}}{\partial y'} + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}}\frac{\partial \widetilde{y}}{\partial y'} + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{z}}\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial y'}\right)\Bigg|_O = (2+N)\frac{\partial \widetilde{x}}{\partial y'}(O) - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial y'}(O) = (2+N)c_{12} - c_{32}$$
$$\frac{\partial F'}{\partial z'}(O) = \left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}}\frac{\partial \widetilde{x}}{\partial z'} + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}}\frac{\partial \widetilde{y}}{\partial z'} + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{z}}\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial z'}\right)\Bigg|_O = (2+N)\frac{\partial \widetilde{x}}{\partial z'}(O) - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial z'}(O) = (2+N)c_{13} - c_{33}.$$

Итак, мы получаем следующие условия на матрицу $C = (c_{ij})$:

$$\begin{aligned}
(2+N)c_{11} - c_{31} &= 0\\
(2+N)c_{12} - c_{32} &= 0\\
(2+N)c_{13} - c_{33} &\neq 0\\
c_{12} = c_{32} &= 0\\
c_{22} &= 1.
\end{aligned}$$

Итого, получаем, что в качестве искомой матрицы можно взять следующую:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2+N & 0 & N+1 \end{pmatrix}.$$

А тогда наше преобразование будет иметь вид:

$$\lambda \begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N-1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ N+2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x}\\ \widetilde{y}\\ \widetilde{z} \end{pmatrix}.$$

- Шаг 3. После второго преобразования, наше уравнение приняло вид:

$$\begin{aligned}
F'(x',y',z') = {} & \left(2N^2+11N+15\right)(x')^3 + \left(5N^2+24N+28\right)(x')^2 z\\
& + \left(4N^2+17N+18\right) x\,(z')^2 + \left(N^2+4N+4\right)(z')^3 + xyz + (y')^2 z + y\,(z')^2.
\end{aligned}$$