

Приведение кубики к нормальной форме Вейерштрасса

Для нашей кубики

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + (3 - 2N)xyz$$

рациональная точка $P = (1 : -1 : 0)$ является также точкой перегиба (проверяется непосредственно подстановкой в Гессиан).

- Шаг 1. Переведём точку $P = (1 : -1 : 0)$ в точку $(0 : 1 : 0)$ некоторым проективным преобразованием. Например, подойдёт такое:

$$\lambda \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}.$$

Тогда наше уравнение преобразуется в следующее:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = & (\tilde{z})^3 - (N + 2)(\tilde{x})^2\tilde{y} + (1 - N)(\tilde{x})^2\tilde{z} + (N + 2)\tilde{x}(\tilde{y})^2 \\ & + (1 - N)\tilde{x}(\tilde{z})^2 + (\tilde{x})^3 + \tilde{x}\tilde{y}\tilde{z} - (\tilde{y})^2\tilde{z}. \end{aligned}$$

- Шаг 2. Теперь мы хотим сделать преобразование, сохраняющее точку $O = (0 : 1 : 0)$, так, чтобы прямая $z = 0$ была касательной к кубике \tilde{F} в точке O , то есть сделать преобразование $(\tilde{x} : \tilde{y} : \tilde{z}) \rightarrow (x' : y' : z')$, такое что для $F'(x', y', z')$ будет выполнено:

$$\frac{\partial F'}{\partial x'}(O) = \frac{\partial F'}{\partial y'}(O) = 0, \quad \frac{\partial F'}{\partial z'}(O) \neq 0.$$

Пусть имеет место соотношение

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Так как точка O должна быть неподвижна, то:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда $c_{12} = 0, c_{22} = 1, c_{32} = 0$.

Кроме того, поскольку $F'(x', y', z') = \tilde{F}(\tilde{x}(x', y', z'), \tilde{y}(x', y', z'), \tilde{z}(x', y', z'))$, то мы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F'}{\partial x'}(O) &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}(O), \tilde{y}(O), \tilde{z}(O)) \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x'}(O) + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}(O), \tilde{y}(O), \tilde{z}(O)) \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x'}(O) \\ &+ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{z}}(\tilde{x}(O), \tilde{y}(O), \tilde{z}(O)) \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x'}(O) \\ &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{x}}(c_{12}, c_{22}, c_{32})c_{11} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{y}}(c_{12}, c_{22}, c_{32})c_{21} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{z}}(c_{12}, c_{22}, c_{32})c_{31} \\ &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{x}}(0, 1, 0)c_{11} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{y}}(0, 1, 0)c_{21} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{z}}(0, 1, 0)c_{31} = (2 + N)c_{11} - c_{31}. \end{aligned}$$

Аналогично получаем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F'}{\partial y'}(O) &= \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y'} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y'} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y'} \right) \Big|_O = (2+N) \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y'}(O) - \frac{\partial \tilde{z}}{\partial y'}(O) = (2+N)c_{12} - c_{32} \\ \frac{\partial F'}{\partial z'}(O) &= \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial z'} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial z'} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z'} \right) \Big|_O = (2+N) \frac{\partial \tilde{x}}{\partial z'}(O) - \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z'}(O) = (2+N)c_{13} - c_{33}.\end{aligned}$$

Итак, мы получаем следующие условия на матрицу $C = (c_{ij})$:

$$\begin{aligned}(2+N)c_{11} - c_{31} &= 0 \\ (2+N)c_{12} - c_{32} &= 0 \\ (2+N)c_{13} - c_{33} &\neq 0 \\ c_{12} = c_{32} &= 0 \\ c_{22} &= 1.\end{aligned}$$

Итого, получаем, что в качестве искомой матрицы можно взять следующую:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2+N & 0 & N+1 \end{pmatrix}.$$

А тогда наше преобразование будет иметь вид:

$$\lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N-1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ N+2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}.$$

- Шаг 3. После второго преобразования, наше уравнение приняло вид:

$$\begin{aligned}F'(x', y', z') &= (2N^2 + 11N + 15) (x')^3 + (5N^2 + 24N + 28) (x')^2 z' \\ &\quad + (4N^2 + 17N + 18) x' (z')^2 + (N^2 + 4N + 4) (z')^3 + x' y' z' + (y')^2 z' + y' (z')^2.\end{aligned}$$

Поэтому условие $F'(x', y', z') = 0$ можно переписать как

$$\begin{aligned}-(y')^2 z' - x' y' z' - y' (z')^2 &= (2N^2 + 11N + 15) (x')^3 + (5N^2 + 24N + 28) (x')^2 z' \\ &\quad + (4N^2 + 17N + 18) x' (z')^2 + (N^2 + 4N + 4) (z')^3.\end{aligned}$$

Выделяем полный квадрат по y' :

$$\begin{aligned}-\left(y' + \frac{1}{2}(x' + z')\right)^2 z' + \frac{1}{2}(x' + z')^2 z' &= (2N^2 + 11N + 15) (x')^3 + (5N^2 + 24N + 28) (x')^2 z' \\ &\quad + (4N^2 + 17N + 18) x' (z')^2 + (N^2 + 4N + 4) (z')^3.\end{aligned}$$

Переносим свободные члены от y' в правую часть:

$$\begin{aligned}-\left(y' + \frac{1}{2}(x' + z')\right)^2 z' &= (2N^2 + 11N + 15) (x')^3 + \left(5N^2 + 24N + 28 - \frac{1}{4}\right) (x')^2 z' \\ &\quad + \left(4N^2 + 17N + 18 - \frac{1}{2}\right) x' (z')^2 + \left(N^2 + 4N + 4 - \frac{1}{4}\right) (z')^3.\end{aligned}$$

Как известно, многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$ линейной заменой $x \mapsto x - \frac{b}{3a}$ приводится к виду $px^3 + qx + s$. В нашем случае замена будет такой:

$$x'' = x' + \frac{5N^2 + 24N + 28 - \frac{1}{4}}{3(2N^2 + 11N + 15)} z'.$$

После подстановки получим:

$$-\left(y' + \frac{1}{2}(x' + z')\right)^2 z' = (2N^2 + 11N + 15) (x'')^3 + Ax'' (z')^2 + B (z')^3,$$

где

$$\begin{aligned} A = & -\frac{N^4}{3(N+3)(2N+5)} - \frac{2N^3}{(N+3)(2N+5)} - \frac{5N^2}{2(N+3)(2N+5)} + \\ & \frac{7N}{2(N+3)(2N+5)} + \frac{93}{16(N+3)(2N+5)} \\ B = & -\frac{2N^6}{27(N+3)^2(2N+5)^2} - \frac{2N^5}{3(N+3)^2(2N+5)^2} - \frac{11N^4}{6(N+3)^2(2N+5)^2} \\ & - \frac{N^3}{3(N+3)^2(2N+5)^2} + \frac{43N^2}{8(N+3)^2(2N+5)^2} \\ & + \frac{41N}{8(N+3)^2(2N+5)^2} - \frac{47}{32(N+3)^2(2N+5)^2} \end{aligned}$$

Деля на $2N^2 + 11N + 15$, получаем

$$-(y'')^2 z' = (x'')^3 + ax'' (z'')^2 + b (z'')^3,$$

где

$$\begin{aligned} y'' &= y' + \frac{1}{2}(x' + z') \\ z'' &= \frac{z'}{2N^2 + 11N + 15} \\ a &= A (2N^2 + 11N + 15) \\ b &= B (2N^2 + 11N + 15)^2. \end{aligned}$$

Заметим, что все N -ки в знаменателях сократятся и в итоге у нас получится:

$$\begin{aligned} -(y'')^2 z' &= (x'')^3 + \frac{1}{48} (-16N^4 - 96N^3 - 120N^2 + 168N + 279) x'' (z'')^2 \\ &+ \frac{1}{864} (-64N^6 - 576N^5 - 1584N^4 - 288N^3 + 4644N^2 + 4428N - 1269) (z'')^3. \end{aligned}$$

Окончательно, делая замены $x''' = \frac{1}{6}x''$, $z''' = -\frac{1}{6^3}z''$, получаем:

$$\begin{aligned} (y''')^2 z''' &= (x''')^3 + (-432N^4 - 2592N^3 - 3240N^2 + 4536N + 7533) x''' (z''')^2 \\ &+ (3456N^6 + 31104N^5 + 85536N^4 + 15552N^3 - 250776N^2 - 239112N + 68526) (z''')^3. \end{aligned}$$

Преобразования в шаге 3:

$$\lambda \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{20N^2+96N+111}{180+132N+24N^2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2N^2+11N+15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

И

$$\lambda \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{216} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}.$$

Итого, собирая все преобразования вместе, получаем искомое проективное преобразование:

$$\lambda \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{216} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{20N^2+96N+111}{180+132N+24N^2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2N^2+11N+15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -N-1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ N+2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

То есть искомая матрица есть

$$\begin{pmatrix} \frac{-4N^3-20N^2-9N+42}{72(N+3)(2N+5)} & \frac{-4N^3-20N^2-9N+42}{72(N+3)(2N+5)} & \frac{4N^2+36N+69}{72(N+3)(2N+5)} \\ \frac{\frac{1}{2}}{\frac{-N-2}{216(N+3)(2N+5)}} & \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{-N-2}{216(N+3)(2N+5)}} & \frac{0}{\frac{1}{216(N+3)(2N+5)}} \\ \frac{-N-2}{216(N+3)(2N+5)} & \frac{-N-2}{216(N+3)(2N+5)} & \frac{1}{216(N+3)(2N+5)} \end{pmatrix}.$$

Так как матрица проективного преобразования определена с точностью до умножения на скаляр, то умножая всю матрицу на $216(3+N)(5+2N)$, имеем:

$$\begin{pmatrix} -12N^3 - 60N^2 - 27N + 126 & -12N^3 - 60N^2 - 27N + 126 & 12N^2 + 108N + 207 \\ 216N^2 + 1188N + 1620 & -216N^2 - 1188N - 1620 & 0 \\ -N - 2 & -N - 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подытожим: исходная кубика, заданная уравнением

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + (3 - 2N)xyz = 0$$

приводится к кубике, заданной уравнением

$$(y'')^2 z''' = (x''')^3 + (-432N^4 - 2592N^3 - 3240N^2 + 4536N + 7533) x''' (z''')^2 + (3456N^6 + 31104N^5 + 85536N^4 + 15552N^3 - 250776N^2 - 239112N + 68526) (z''')^3$$

проективным преобразованием с матрицей:

$$\begin{pmatrix} -12N^3 - 60N^2 - 27N + 126 & -12N^3 - 60N^2 - 27N + 126 & 12N^2 + 108N + 207 \\ 216N^2 + 1188N + 1620 & -216N^2 - 1188N - 1620 & 0 \\ -N - 2 & -N - 2 & 1 \end{pmatrix}.$$