Приведение кубики к нормальной форме Вейерштрасса

Для нашей кубики

$$F(x,y,z) = a_{30}x^3 + a_{03}y^3 + a_{00}z^3 + a_{01}yz^2 + a_{10}xz^2 + a_{11}xyz + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{20}x^2z + a_{02}y^2z,$$

то есть $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ – коэффициент при мономе $x^i y^j z^{3-i-j}$.

- Шаг 0. Нахождение рациональных точек перегиба.

  Для того, чтобы сделать первый шаг в алгоритме приведения неособой кубики к нормальной форме Вейерштрасса целочисленным проективным преобразованием нам сначала понадобиться найти рациональную точку перегиба. Для этого, мы рассмотрим гессиан нашей кубики $H(F) := \det\left(\frac{\partial F}{\partial x^i \partial x^j}\right)_{ij}$, где $x = x^1, y = x^2, z = x^3$. Далее, под проективными преобразованиями мы будем понимать только целочисленные проективные преобразования.

  Теорема 1. Точки перегиба неособой кубики в $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ – в точности точки пересечения кубики с её гессианом.

  Доказательство можно посмотреть в [1].

  Итак, для нахождения рациональных точек перегиба, нам достаточно найти все общие рациональные корни F и $H(F)$. Для этого, мы рассмотрим F и $H(F)$ как многочлены от z:

  $$F = b_0(x,y)z^3 + b_1(x,y)z^2 + b_2(x,y)z + b_3(x,y)$$
  $$H(F) = c_0(x,y)z^3 + c_1(x,y)z^2 + c_2(x,y)z + c_3(x,y),$$

  где $b_k(x,y)$ и $c_k(x,y)$ – однородные многочлены от x, y степени k.

  Если $c_0(x,y) \cdot b_0(x,y) = 0$, то есть если F или $H(F)$ проходит через точку $(0:0:1)$, то мы можем сделать проективное преобразование так, что ни одна из кубик не будет через неё проходить. Сделать это можно, например, так: найти точку, которая не лежит ни на одной из наших кубик и «обменять» её с $(0:0:1)$. Итак, будем искать точку в виде $(0:i:1),\ i = 1, 2, \ldots$. Так как кубика неособая, то она не распадающаяся (то есть не содержит прямой) и различные кубики могут пересекаться не более, чем в 9 точках, то процесс перебора закончится не позднее, чем через 10 шагов. (Условие $c_0 b_0 \neq 0$ нужно, чтобы ... ?)

  Далее считаем, что $c_0(x,y) \cdot b_0(x,y) \neq 0$. Рассмотрим $R(F, H(F))$ – результант F и $H(F)$ по переменной z (При фиксированных x, y – это обычный результант двух многочленов). Непосредственной проверкой проверяется, что $R(F, H(F))$ – либо однородный многочлен от x, y степени 9, либо тождественный ноль. Перебирая все рациональные корни этого многочлена – получаем все потенциальные рациональные точки перегиба. Подставляя их в исходное уравнение F, смотрим, есть ли точка с такими рациональными координатами по x, y с рациональной координатой и по z. Таким образом, мы находим все рациональные точки перегиба на нашей кубике.

  <надо подправить потом>

  Данный алгоритм реализован в файле InflectionPoints.py в функции find_inflection_points с помощью вспомогательных функций get_hessian и intersection_points. Далее в функции find_non_singular_inflection_point мы отбираем только неособые точки перегиба.

- Шаг 1. Выберем какую-то рациональную точку перегиба P. Переведём точку P в точку $(0:1:0)$ некоторым проективным преобразованием. Например, подойдёт такое: ...

  После проективного преобразования, наша кубика имеет уравнение $\widetilde{F}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})$, в котором нет $\widetilde{y}$.

  Этот шаг реализован в файле WeierstrassForm.py в функции weierstrass_form_step1.

- Шаг 2. Теперь мы хотим сделать преобразование, сохраняющее точку $O=(0:1:0)$, так, чтобы прямая $z=0$ была касательной к кубике $\widetilde{F}$ в точке O, то есть сделать преобразование $(\widetilde{x}:\widetilde{y}:\widetilde{z})\to(x':y':z')$, такое что для $F'(x',y',z')$ будет выполнено:

$$\frac{\partial F'}{\partial x'}(O)=\frac{\partial F'}{\partial y'}(O)=0,\quad \frac{\partial F'}{\partial z'}(O)\neq 0.$$

  Этот шаг реализован в файле WeierstrassForm.py в функции weierstrass_form_step2.

- Шаг 3. После второго преобразования, наше уравнение приняло вид:

  Этот шаг реализован в файле WeierstrassForm.py в функции weierstrass_form_step3.

Поиск рациональных точек

Итак, нам дана кубика в форме Вейерштрасса, наша задача понять, как устроены рациональные точки на ней. Для этого удобно ввести дополнительную структуру на множестве рациональных точек. Определим сложение точек. Суммой P и Q назовём третью точку пересечения прямой проходящей через P и Q с кубикой. Понятно, что если исходные точки был рациональны, то $P+Q$, тоже будет рациональной. Оказывается, что множество рациональных точек, на кубике в форме Вейерштрасса образуют абелеву группу, для данной операции сложения. Более того, даже для произвольной кубики что-то можно сказать про устройство этой группы. Имеет место следующая теорема:

Теорема 2. На эллиптической кривой E, заданной уравнением с рациональными коэффициентами, группа $E(\mathbb{Q})$ рациональных точек является конечно порождённой абелевой группой.

В нашем случае известно (2) устройство этой группы: $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_6$. Это позволяет нам конструктивно описать много рациональных точек, ибо есть явные формулы для сложения точек на кубике в форме Вейерштрасса, приведём их. Пусть $P=(x_p,y_p), Q=(x_q,y_q), R=(x_r,y_r)$, где $R=P+Q$. Тогда мы имеем:

$$\begin{aligned} x_r &= m^2-x_p-x_q \\ y_r &= y_p+m(x_r-x_p) \end{aligned} \qquad (*),$$

где $m=(y_p-y_q)/(xp-xq)$.

Замечание 1. Эти формулы справедливы для различных P и Q, однако несложно получить и для случая $P=Q$.

Замечание 2. Эти формулы работают только в аффинной карте $Z=1$, однако это не ограничивает общность, т.к. единственная точка кубики вне этой карты это $(0:1:0)$ является единичным элементом в группе рациональных точек. (м.б. сюда картинку).

Теперь мы можем описать алгоритм. Программа получает на вход произвольную $(*)$ кубику и приводит её к форме Вейерштрасса, и заодно находит прямое и обратное преобразование. После этого на кривой ищется произвольная рациональная точка, которая не является точкой кручения, то есть рациональная P, такая что, среди $P, 2P, 3P, 4P, 5P, 6P$ нет единичного элемента. Функция FindRational получает коэффициенты a, b и радиус в котором следует искать рациональную точку, а выдаёт её координаты. Точки вида nP находятся в функции ScMult, которая складывает точку P с собой n раз с помощью PoinSum - функции складывающей произвольные две точки на кубике с помощью формул $(*)$ (в аффинной карте $z = 1$).

Замечание 3. Поиск рациональной точкой перебором является самой вычислительное сложной частью алгоритма, например, для некоторых коэффициентов a, b кубики в форме $y^2 = x^3 + ax + b$ рациональная точка не находится за разумное время, хоть и известно, что она существует (а есть ли вообще хороший алгоритм её поиска?).

После этого программа находит точки $P, 2P, ..., nP$, с помощью функции GenerateNpoints. Затем находит координаты каждой из них в начальной системе координат посредством Reverse. Чтобы точка соответствовала натуральному решению исходного уравнения, все координаты должны быть одного знака. После чего домножая их на общий знаменатель получаем решение исходной задачи. Это выполняется в функции RevNFind. Таким образом, вызывая данную функцию от коэффициентов кубики, найденной рациональной точки и количества точек, которое мы хотим перебрать - n, получаем натуральные решения исходного уравнения. Например, в случае $N = 4$, достаточно взять $n = 9$, т.е. точка $9P$ будет соответствовать натуральному решению.

Заметим только, что размер полученного решения зависит от выбора точки P, неудачный выбор может привести к тому, что количество цифр в ответе станет 400, вместо 80.

Последний вопрос, который мы рассмотрим - это нижняя оценка количества цифр в ответе
to be continued

Список литературы

[1] Ю.П. Соловьёв В.В. Прасолов. *Эллиптические функции и алгебраические уравнения.* Факториал, 1997.