

# Необычная задача кубического представления

Алексей Кислицын   Андрей Владимиров   Всеволод Триль

Механико-математический факультет МГУ

25 ноября 2022 г.

## Постановка задачи

Всё началось с, кажущейся на первый взгляд, детской задачи:

**95% of people cannot solve this!**

$$\frac{\text{apple}}{\text{banana} + \text{orange}} + \frac{\text{banana}}{\text{apple} + \text{orange}} + \frac{\text{orange}}{\text{apple} + \text{banana}} = 4$$

**Can you find positive whole values**

**for , , and ?**

## Постановка задачи

Всё началось с, кажущейся на первый взгляд, детской задачи:

**95% of people cannot solve this!**

$$\frac{\text{apple}}{\text{banana} + \text{pineapple}} + \frac{\text{banana}}{\text{apple} + \text{pineapple}} + \frac{\text{pineapple}}{\text{apple} + \text{banana}} = 4$$

**Can you find positive whole values**

**for apple, banana, and pineapple?**

В этом докладе мы предъявим алгоритм решения данной задачи, а также постараемся её обобщить и проанализировать.

Переформулируем ей в математических терминах: требуется найти все натуральные решения следующего уравнения при  $N = 4$ :

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = N, \quad x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Мы пока не будем придавать значения тому, что  $N = 4$ , а сразу будем рассматривать постановку задачи для произвольного  $N \in \mathbb{N}$ .

Переформулируем ей в математических терминах: требуется найти все натуральные решения следующего уравнения при  $N = 4$ :

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = N, \quad x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Мы пока не будем придавать значения тому, что  $N = 4$ , а сразу будем рассматривать постановку задачи для произвольного  $N \in \mathbb{N}$ .

Заметим, что решение исходного уравнения равносильно нахождению натуральных точек на кубике, заданной в однородных координатах  $(x : y : z)$  следующим уравнением:

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) + (3 - 2N)xyz = 0.$$

Переформулируем ей в математических терминах: требуется найти все натуральные решения следующего уравнения при  $N = 4$ :

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = N, \quad x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Мы пока не будем придавать значения тому, что  $N = 4$ , а сразу будем рассматривать постановку задачи для произвольного  $N \in \mathbb{N}$ .

Заметим, что решение исходного уравнения равносильно нахождению натуральных точек на кубике, заданной в однородных координатах  $(x : y : z)$  следующим уравнением:

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) + (3 - 2N)xyz = 0.$$

Сразу отметим, что так как мы работаем в проективных координатах, то это равносильно нахождению точек с рациональными координатами, у которых знаки одинаковы.

Переформулируем ей в математических терминах: требуется найти все натуральные решения следующего уравнения при  $N = 4$ :

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = N, \quad x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Мы пока не будем придавать значения тому, что  $N = 4$ , а сразу будем рассматривать постановку задачи для произвольного  $N \in \mathbb{N}$ .

Заметим, что решение исходного уравнения равносильно нахождению натуральных точек на кубике, заданной в однородных координатах  $(x : y : z)$  следующим уравнением:

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) + (3 - 2N)xyz = 0.$$

Сразу отметим, что так как мы работаем в проективных координатах, то это равносильно нахождению точек с рациональными координатами, у которых знаки одинаковы.

Но перед тем, как перейти к решению исходной задачи, рассмотрим более простую задачу – поиск натуральных точек на квадрике

здесь будет про квадрату



## Приведение к нормальной форме Вейерштрасса

Перейдём к основной задаче, как и в случае квадрики приведём кубику

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) + (3 - 2N)xyz = 0$$

к наиболее простому виду – нормальной форме Вейерштрасса, которая может записывается так:

$$y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

## Приведение к нормальной форме Вейерштрасса

Перейдём к основной задаче, как и в случае квадррики приведём кубики

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) + (3 - 2N)xyz = 0$$

к наиболее простому виду – нормальной форме Вейерштрасса, которая может записывается так:

$$y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

В нашем случае, так как коэффициенты кубики целые и проективные преобразования будут с целыми коэффициентами, то  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

Далее, под проективными преобразованиями мы будем понимать только целочисленные проективные преобразования.

## Приведение к нормальной форме Вейерштрасса

Перейдём к основной задаче, как и в случае квадрики приведём кубику

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) + (3 - 2N)xyz = 0$$

к наиболее простому виду – нормальной форме Вейерштрасса, которая может записываться так:

$$y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

В нашем случае, так как коэффициенты кубики целые и проективные преобразования будут с целыми коэффициентами, то  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

Далее, под проективными преобразованиями мы будем понимать только целочисленные проективные преобразования.

Мы предъявим алгоритм приведения кубики к нормальной форме Вейерштрасса для произвольной кубики с целыми(рациональными) коэффициентами.

## Шаг 0. Нахождение рациональных точек перегиба

Итак, пусть у нас есть кубика, заданная уравнением  $F(x, y, z) = 0$ , где

$$F(x, y, z) = a_{30}x^3 + a_{03}y^3 + a_{00}z^3 + a_{01}yz^2 + a_{10}xz^2 + a_{11}xyz + \\ + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{20}x^2z + a_{02}y^2z,$$

то есть  $a_{ij} \in \mathbb{Z}$  – коэффициент при мономе  $x^i y^j z^{3-i-j}$ .

## Шаг 0. Нахождение рациональных точек перегиба

Итак, пусть у нас есть кубика, заданная уравнением  $F(x, y, z) = 0$ , где

$$F(x, y, z) = a_{30}x^3 + a_{03}y^3 + a_{00}z^3 + a_{01}yz^2 + a_{10}xz^2 + a_{11}xyz + \\ + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{20}x^2z + a_{02}y^2z,$$

то есть  $a_{ij} \in \mathbb{Z}$  – коэффициент при мономе  $x^i y^j z^{3-i-j}$ .

## Определение

Точка  $P_0$  кубики  $F(x^1, x^2, x^3) = 0$  называется *точкой перегиба*, если касательная к ней в точке  $P$  имеет касание третьего порядка, то есть для любой точки  $Q = (x_q^1 : x_q^2 : x_q^3)$  на касательной выполнено

$$\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(P_0) x_q^i x_q^j = 0.$$

## Определение

Гессианом кубики  $F(x^1, x^2, x^3) = 0$  называется кубика

$$H(F) := \det \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} \right)_{ij}.$$

## Определение

Гессианом кубики  $F(x^1, x^2, x^3) = 0$  называется кубика

$$H(F) := \det \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} \right)_{ij}.$$

## Теорема

Точки перегиба неособой кубики в  $\mathbb{CP}^2$  – в точности точки пересечения кубики с её Гессианом.

Мы не будем проверять кубику на наличие особенностей, а просто найдём все точки пересечения с Гессианом и посмотрим, есть ли там особенности. Если среди общих точек есть неособая, то нам эта точка подходит и мы можем переходить к следующему шагу. Если все точки особые, то алгоритм продолжить нельзя.



Мы не будем проверять кубику на наличие особенностей, а просто найдём все точки пересечения с Гессианом и посмотрим, есть ли там особенности. Если среди общих точек есть неособая, то нам эта точка подходит и мы можем переходить к следующему шагу. Если все точки особые, то алгоритм продолжить нельзя.

Для поиска общих точек рассмотрим результат  $R(F, H(F))$  по переменной  $z$ . Получим однородный многочлен 9-той степени. (дописать уточнение) Находим все его рациональные корни – пары  $(x, y)$  и подставляем в  $F$  и в  $H(F)$  для нахождения общей точки (или удостоверении, что при данных  $(x_0, y_0)$  её нет).

## Шаг 1. Избавление от монома $y^3$

Выберем какую-то рациональную точку перегиба  $P$  и переведём её в точку  $(0 : 1 : 0)$  некоторым проективным преобразованием. После проективного преобразования, наша кубика имеет уравнение  $\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ , в котором нет  $\tilde{y}$ . Таким образом, у нас уйдёт моном  $y^3$ .

## Шаг 1. Избавление от монома $y^3$

Выберем какую-то рациональную точку перегиба  $P$  и переведем её в точку  $(0 : 1 : 0)$  некоторым проективным преобразованием. После проективного преобразования, наша кубика имеет уравнение  $\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ , в котором нет  $\tilde{y}$ . Таким образом, у нас уйдёт моном  $y^3$ .

Этот шаг реализован в файле `WeierstrassForm.py` в функции `weierstrass_form_step1`.

## Шаг 2. Избавление от мономов $y^2x$ и $yx^2$

Теперь мы хотим сделать преобразование, сохраняющее точку  $O = (0 : 1 : 0)$ , так, чтобы прямая  $z = 0$  была касательной к кубике  $\tilde{F}$  в точке  $O$ , то есть сделать преобразование  $(\tilde{x} : \tilde{y} : \tilde{z}) \rightarrow (x' : y' : z')$ , такое что для  $F'(x', y', z')$  будет выполнено:

$$\frac{\partial F'}{\partial x'}(O) = \frac{\partial F'}{\partial y'}(O) = 0, \quad \frac{\partial F'}{\partial z'}(O) \neq 0.$$

То есть нет монома  $xu^2$ , однако, коэффициент при  $y^2z$  отличен от нуля, и поэтому, разделив на него, можем считать, что он равен 1. Кроме того, так как  $O$  – точка перегиба, то касание прямой  $z = 0$  с нашей кубикой имеет порядок 3, таким образом нет монома  $x^2y$ .

## Шаг 2. Избавление от мономов $y^2x$ и $yx^2$

Теперь мы хотим сделать преобразование, сохраняющее точку  $O = (0 : 1 : 0)$ , так, чтобы прямая  $z = 0$  была касательной к кубике  $\tilde{F}$  в точке  $O$ , то есть сделать преобразование  $(\tilde{x} : \tilde{y} : \tilde{z}) \rightarrow (x' : y' : z')$ , такое что для  $F'(x', y', z')$  будет выполнено:

$$\frac{\partial F'}{\partial x'}(O) = \frac{\partial F'}{\partial y'}(O) = 0, \quad \frac{\partial F'}{\partial z'}(O) \neq 0.$$

То есть нет монома  $xu^2$ , однако, коэффициент при  $y^2z$  отличен от нуля, и поэтому, разделив на него, можем считать, что он равен 1. Кроме того, так как  $O$  – точка перегиба, то касание прямой  $z = 0$  с нашей кубикой имеет порядок 3, таким образом нет монома  $x^2y$ .

Этот шаг реализован в файле `WeierstrassForm.py` в функции `weierstrass_form_step2`.

### Шаг 3. Выделение $y^2z$ и избавление от $x^2z$

После второго преобразования, уравнение нашей кубики стало

$F'(x', y', z') = 0$ , где

$$F'(x', y', z') = a'_{30} (x')^3 + a'_{20} (x')^2 z' + a'_{11} x' y' z' + (y')^2 z' + \\ + a'_{10} x' (z')^2 + a'_{01} y' (z')^2 + a'_{00} (z')^3.$$

### Шаг 3. Выделение $y^2z$ и избавление от $x^2z$

После второго преобразования, уравнение нашей кубики стало  $F'(x', y', z') = 0$ , где

$$F'(x', y', z') = a'_{30} (x')^3 + a'_{20} (x')^2 z' + a'_{11} x' y' z' + (y')^2 z' + \\ + a'_{10} x' (z')^2 + a'_{01} y' (z')^2 + a'_{00} (z')^3.$$

Делая замену  $y'' = y' + (a'_{01} z' + a'_{11} x')/2$ , выделяем полный квадрат по  $y'$  и уравнение кубики становится:

$$(y'')^2 z' = a''_{30} (x')^3 + a''_{20} (x')^2 z' + a''_{10} x' (z')^2 + a''_{00} (z')^3.$$

### Шаг 3. Выделение $y^2z$ и избавление от $x^2z$

После второго преобразования, уравнение нашей кубики стало

$F'(x', y', z') = 0$ , где

$$F'(x', y', z') = a'_{30} (x')^3 + a'_{20} (x')^2 z' + a'_{11} x' y' z' + (y')^2 z' + \\ + a'_{10} x' (z')^2 + a'_{01} y' (z')^2 + a'_{00} (z')^3.$$

Делая замену  $y'' = y' + (a'_{01} z' + a'_{11} x')/2$ , выделяем полный квадрат по  $y'$  и уравнение кубики становится:

$$(y'')^2 z' = a''_{30} (x')^3 + a''_{20} (x')^2 z' + a''_{10} x' (z')^2 + a''_{00} (z')^3.$$

Теперь линейной заменой  $x'' = x' - \frac{a''_{20}}{3a''_{30}} z'$  избавляемся от монома  $(x')^2 z'$  и получаем:

$$(y'')^2 z' = a'''_{30} (x'')^3 + a'''_{10} x'' (z')^2 + a'''_{00} (z')^3.$$



Далее, делаем замену  $z'' = \frac{1}{a_{30}'''} z'$  и получаем:

$$(y'')^2 z'' = (x'')^3 + a_{30}''' a_{10}''' x'' (z'')^2 + a_{00}''' (a_{30}''')^2 (z'')^3.$$

Обозначая  $a := a_{30}''' a_{10}'''$ ,  $b := a_{00}''' (a_{30}''')^2$ , получаем требуемую форму:

$$(y'')^2 z'' = (x'')^3 + a x'' (z'')^2 + b (z'')^3.$$