Приведение кубики к нормальной форме Вейерштрасса

Для нашей кубики

$$F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + (1-N)(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + (3-2N)xyz$$

рациональная точка $P = (1 : -1 : 0)$ является также точкой перегиба (проверяется непосредственно подстановкой в Гессиан).

- Шаг 1. Переведём точку $P = (1 : -1 : 0)$ в точку $(0 : 1 : 0)$ некоторым проективным преобразованием. Например, подойдёт такое:

$$\lambda \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{pmatrix}.$$

Тогда наше уравнение преобразуется в следующее:

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}) = (\widetilde{z})^3 - (N+2)\,(\widetilde{x})^2\,\widetilde{y} + (1-N)\,(\widetilde{x})^2\,\widetilde{z} + (N+2)\,\widetilde{x}\,(\widetilde{y})^2 \\ + (1-N)\,\widetilde{x}\,(\widetilde{z})^2 + (\widetilde{x})^3 + \widetilde{x}\,\widetilde{y}\,\widetilde{z} - (\widetilde{y})^2\,\widetilde{z}. \end{aligned}$$

- Шаг 2. Теперь мы хотим сделать преобразование, сохраняющее точку $O = (0 : 1 : 0)$, так, чтобы прямая $z = 0$ была касательной к кубике $\widetilde{F}$ в точке O, то есть сделать преобразование $(\widetilde{x} : \widetilde{y} : \widetilde{z}) \to (x' : y' : z')$, такое что для $F'(x', y', z')$ будет выполнено:

$$\frac{\partial F'}{\partial x'}(O) = \frac{\partial F'}{\partial y'}(O) = 0, \quad \frac{\partial F'}{\partial z'}(O) \neq 0.$$

Пусть имеет место соотношение

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Так как точка O должна быть неподвижна, то:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда $c_{12} = 0, c_{22} = 1, c_{32} = 0$.

Кроме того, поскольку $F'(x', y', z') = \widetilde{F}(\widetilde{x}(x', y', z'), \widetilde{y}(x', y', z'), \widetilde{z}(x', y', z'))$, то мы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F'}{\partial x'}(O) &= \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}}(\widetilde{x}(O), \widetilde{y}(O), \widetilde{z}(O)) \frac{\partial \widetilde{x}}{\partial x'}(O) + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}}(\widetilde{x}(O), \widetilde{y}(O), \widetilde{z}(O)) \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial x'}(O) \\ &+ \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{z}}(\widetilde{x}(O), \widetilde{y}(O), \widetilde{z}(O)) \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial x'}(O) \\ &= \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}}(c_{12}, c_{22}, c_{32}) c_{11} + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}}(c_{12}, c_{22}, c_{32}) c_{21} + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{z}}(c_{12}, c_{22}, c_{32}) c_{31} \\ &= \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}}(0,1,0) c_{11} + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}}(0,1,0) c_{21} + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{z}}(0,1,0) c_{31} = (2+N)c_{11} - c_{31}. \end{aligned}$$

Аналогично получаем:

$$\frac{\partial F'}{\partial y'}(O) = \left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}}\frac{\partial \widetilde{x}}{\partial y'} + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}}\frac{\partial \widetilde{y}}{\partial y'} + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{z}}\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial y'}\right)\bigg|_O = (2+N)\frac{\partial \widetilde{x}}{\partial y'}(O) - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial y'}(O) = (2+N)c_{12} - c_{32}$$
$$\frac{\partial F'}{\partial z'}(O) = \left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}}\frac{\partial \widetilde{x}}{\partial z'} + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}}\frac{\partial \widetilde{y}}{\partial z'} + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{z}}\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial z'}\right)\bigg|_O = (2+N)\frac{\partial \widetilde{x}}{\partial z'}(O) - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial z'}(O) = (2+N)c_{13} - c_{33}.$$

Итак, мы получаем следующие условия на матрицу $C = (c_{ij})$:

$$\begin{aligned} (2+N)c_{11} - c_{31} &= 0 \\ (2+N)c_{12} - c_{32} &= 0 \\ (2+N)c_{13} - c_{33} &\neq 0 \\ c_{12} = c_{32} &= 0 \\ c_{22} &= 1. \end{aligned}$$

Итого, получаем, что в качестве искомой матрицы можно взять следующую:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2+N & 0 & N+1 \end{pmatrix}.$$

А тогда наше преобразование будет иметь вид:

$$\lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N-1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ N+2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{pmatrix}.$$

- Шаг 3. После второго преобразования, наше уравнение приняло вид:

$$\begin{aligned} F'(x', y', z') = &\left(2N^2 + 11N + 15\right)(x')^3 + \left(5N^2 + 24N + 28\right)(x')^2 z' \\ &+ \left(4N^2 + 17N + 18\right) x' (z')^2 + \left(N^2 + 4N + 4\right)(z')^3 + x'y'z' + (y')^2 z' + y' (z')^2. \end{aligned}$$

Поэтому условие $F'(x', y', z') = 0$ можно переписать как

$$\begin{aligned} -(y')^2 z' - x'y'z' - y'(z')^2 = &\left(2N^2 + 11N + 15\right)(x')^3 + \left(5N^2 + 24N + 28\right)(x')^2 z' \\ &+ \left(4N^2 + 17N + 18\right) x' (z')^2 + \left(N^2 + 4N + 4\right)(z')^3. \end{aligned}$$

Выделяем полный квадрат по y':

$$\begin{aligned} -\left(y' + \frac{1}{2}(x'+z')\right)^2 z' + \frac{1}{2}(x'+z')^2 z' = &\left(2N^2 + 11N + 15\right)(x')^3 + \left(5N^2 + 24N + 28\right)(x')^2 z' \\ &+ \left(4N^2 + 17N + 18\right) x' (z')^2 + \left(N^2 + 4N + 4\right)(z')^3. \end{aligned}$$

Переносим свободные члены от y' в правую часть:

$$\begin{aligned} -\left(y' + \frac{1}{2}(x'+z')\right)^2 z' = &\left(2N^2 + 11N + 15\right)(x')^3 + \left(5N^2 + 24N + 28 - \frac{1}{4}\right)(x')^2 z' \\ &+ \left(4N^2 + 17N + 18 - \frac{1}{2}\right) x' (z')^2 + \left(N^2 + 4N + 4 - \frac{1}{4}\right)(z')^3. \end{aligned}$$

Как известно, многочлен ax^3+bx^2+cx+d линейной заменой $x\mapsto x-\frac{b}{3a}$ приводится к виду px^3+qx+s. В нашем случае замена будет такой:

$$x''=x'+\frac{5N^2+24N+28-\frac{1}{4}}{3(2N^2+11N+15)}z'.$$

После подстановки получим:

$$-\left(y'+\frac{1}{2}(x'+z')\right)^2 z'=\left(2N^2+11N+15\right)(x'')^3+Ax''\left(z'\right)^2+B\left(z'\right)^3,$$

где

$$A=-\frac{N^4}{3(N+3)(2N+5)}-\frac{2N^3}{(N+3)(2N+5)}-\frac{5N^2}{2(N+3)(2N+5)}+ \\ \frac{7N}{2(N+3)(2N+5)}+\frac{93}{16(N+3)(2N+5)}$$

$$B=-\frac{2N^6}{27(N+3)^2(2N+5)^2}-\frac{2N^5}{3(N+3)^2(2N+5)^2}-\frac{11N^4}{6(N+3)^2(2N+5)^2} \\ -\frac{N^3}{3(N+3)^2(2N+5)^2}+\frac{43N^2}{8(N+3)^2(2N+5)^2}. \\ +\frac{41N}{8(N+3)^2(2N+5)^2}-\frac{47}{32(N+3)^2(2N+5)^2}$$

Деля на $2N^2+11N+15$, получаем

$$-\left(y''\right)^2 z'=(x'')^3+ax''\left(z''\right)^2+b\left(z''\right)^3,$$

где

$$\begin{aligned} y''&=y'+\frac{1}{2}(x'+z') \\ z''&=\frac{z'}{2N^2+11N+15} \\ a&=A\left(2N^2+11N+15\right) \\ b&=B\left(2N^2+11N+15\right)^2. \end{aligned}$$

Заметим, что все N-ки в знаменателях сократятся и в итоге у нас получится:

$$-\left(y''\right)^2 z'=(x'')^3+\frac{1}{48}\left(-16N^4-96N^3-120N^2+168N+279\right)x''\left(z''\right)^2 \\ +\frac{1}{864}\left(-64N^6-576N^5-1584N^4-288N^3+4644N^2+4428N-1269\right)\left(z''\right)^3.$$

Окончательно, делая замены $x'''=6x'', z'''=-6^3z''$, получаем:

$$\left(y''\right)^2 z'''=(x''')^3+\left(-432N^4-2592N^3-3240N^2+4536N+7533\right)x'''\left(z'''\right)^2 \\ +\left(3456N^6+31104N^5+85536N^4+15552N^3-250776N^2-239112N+68526\right)\left(z'''\right)^3.$$

Преобразования в шаге 3:

$$\lambda \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{20N^2+96N+111}{180+132N+24N^2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2N^2+11N+15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

И

$$\lambda \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -216 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}.$$

Итого, собирая все преобразования вместе, получаем искомое проективное преобразование:

$$\lambda \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -216 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{20N^2+96N+111}{180+132N+24N^2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2N^2+11N+15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -N-1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ N+2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

То есть искомая матрица есть

$$\begin{pmatrix} -N + \frac{1}{N+\frac{5}{2}} + \frac{3}{2(N+3)} + \frac{1}{2} & -N + \frac{1}{N+\frac{5}{2}} + \frac{3}{2(N+3)} + \frac{1}{2} & \frac{4}{2N+5} + \frac{3}{2(N+3)} + 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{216(N+2)}{(N+3)(2N+5)} & -\frac{216(N+2)}{(N+3)(2N+5)} & \frac{216}{(N+3)(2N+5)} \end{pmatrix}.$$

Так как матрица проективного преобразования определена с точностью до умножения на скаляр, то умножая всю матрицу на $2(3+N)(5+2N)$, имеем:

$$\begin{pmatrix} -4N^3 - 20N^2 - 9N + 42 & -4N^3 - 20N^2 - 9N + 42 & 4N^2 + 36N + 69 \\ 2N^2 + 11N + 15 & -2N^2 - 11N - 15 & 0 \\ -432N - 864 & -432N - 864 & 432 \end{pmatrix}.$$