

# Необычная задача кубического представления

Алексей Кислицын   Андрей Владимиров   Всеволод Триль

Механико-математический факультет МГУ

28 ноября 2022 г.

## Постановка задачи

Всё началось с, кажущейся на первый взгляд, детской задачи:

**95% of people cannot solve this!**

$$\frac{\text{apple}}{\text{banana} + \text{orange}} + \frac{\text{banana}}{\text{apple} + \text{orange}} + \frac{\text{orange}}{\text{apple} + \text{banana}} = 4$$

**Can you find positive whole values**




**for , , and ?**

## Постановка задачи

Всё началось с, кажущейся на первый взгляд, детской задачи:

**95% of people cannot solve this!**

$$\frac{\text{apple}}{\text{banana} + \text{orange}} + \frac{\text{banana}}{\text{apple} + \text{orange}} + \frac{\text{orange}}{\text{apple} + \text{banana}} = 4$$

**Can you find positive whole values  
for , , and .**

В этом докладе мы предъявим алгоритм решения данной задачи, а также постараемся её обобщить и проанализировать.

Переформулируем ей в математических терминах: требуется найти все натуральные решения следующего уравнения при  $N = 4$ :

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = N, \quad x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Мы пока не будем придавать значения тому, что  $N = 4$ , а сразу будем рассматривать постановку задачи для произвольного  $N \in \mathbb{N}$ .

Переформулируем ей в математических терминах: требуется найти все натуральные решения следующего уравнения при  $N = 4$ :

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = N, \quad x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Мы пока не будем придавать значения тому, что  $N = 4$ , а сразу будем рассматривать постановку задачи для произвольного  $N \in \mathbb{N}$ .

Заметим, что решение исходного уравнения равносильно нахождению натуральных точек на кубике, заданной в однородных координатах  $(x : y : z)$  следующим уравнением:

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) + (3 - 2N)xyz = 0.$$

Переформулируем ей в математических терминах: требуется найти все натуральные решения следующего уравнения при  $N = 4$ :

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = N, \quad x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Мы пока не будем придавать значения тому, что  $N = 4$ , а сразу будем рассматривать постановку задачи для произвольного  $N \in \mathbb{N}$ .

Заметим, что решение исходного уравнения равносильно нахождению натуральных точек на кубике, заданной в однородных координатах  $(x : y : z)$  следующим уравнением:

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) + (3 - 2N)xyz = 0.$$

Сразу отметим, что так как мы работаем в проективных координатах, то это равносильно нахождению точек с рациональными координатами, у которых знаки одинаковы.

Но перед тем, как перейти к решению исходной задачи, рассмотрим более простую задачу – поиск натуральных точек на квадрике

<здесь будет продолжение про квадрику>

Но перед тем, как перейти к решению исходной задачи, рассмотрим более простую задачу – поиск натуральных точек на квадрике

## Описание рациональных точек на квадрике

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz = 0, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

<здесь будет продолжение про квадратiku>



Но перед тем, как перейти к решению исходной задачи, рассмотрим более простую задачу – поиск натуральных точек на квадрике

## Описание рациональных точек на квадрике

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz = 0, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

## Метод секущих

Для начала заметим, что зная одну рациональную точку на квадрике можно получить все методом секущих. (картинка)

<здесь будет продолжение про квадратiku>

## Поиск рациональной точки. Шаг 1.

Приведём quadriku рациональным преобразованием к одному из следующих видов.

$$x^2 - Az^2 = 0$$

$$x^2 - Ayz = 0$$

$$Ax^2 + By^2 - Cz^2 = 0$$

## Поиск рациональной точки. Шаг 1.

Приведём quadriku рациональным преобразованием к одному из следующих видов.

$$x^2 - Az^2 = 0$$

$$x^2 - Ayz = 0$$

$$Ax^2 + By^2 - Cz^2 = 0$$

## Шаг 2.

Случаи 1 и 2 разбираются тривиально. В третьем случае используем критерий Лежандра, согласно нему уравнение 3 имеет целочисленное решение тогда и только тогда когда  $BC$  квадратичный вычет по модулю  $A$ ,  $AC$  - по модулю  $B$  и  $-AB$  по модулю  $C$ .

## Поиск рациональной точки. Шаг 1.

Приведём квадратику рациональным преобразованием к одному из следующих видов.

$$x^2 - Az^2 = 0$$

$$x^2 - Ayz = 0$$

$$Ax^2 + By^2 - Cz^2 = 0$$

## Шаг 2.

Случаи 1 и 2 разбираются тривиально. В третьем случае используем критерий Лежандра, согласно нему уравнение 3 имеет целочисленное решение тогда и только тогда когда  $BC$  квадратичный вычет по модулю  $A$ ,  $AC$  - по модулю  $B$  и  $-AB$  по модулю  $C$ .

## Замечание

Таким образом поиск рациональной точки это полностью решённая проблема в случае квадратики. Более того есть теорема Хольцера, которая даёт верхнюю оценку на границы в которых его надо искать.

## Приведение к нормальной форме Вейерштрасса

Перейдём к основной задаче, как и в случае квадрики приведём кубику

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) + (3 - 2N)xyz = 0$$

к наиболее простому виду – нормальной форме Вейерштрасса, которая может записывается так:

$$y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

## Приведение к нормальной форме Вейерштрасса

Перейдём к основной задаче, как и в случае квадрики приведём кубику

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) + (3 - 2N)xyz = 0$$

к наиболее простому виду – нормальной форме Вейерштрасса, которая может записывается так:

$$y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

В нашем случае, так как коэффициенты кубики целые и проективные преобразования будут с целыми коэффициентами, то  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

Далее, под проективными преобразованиями мы будем понимать только целочисленные проективные преобразования.

## Приведение к нормальной форме Вейерштрасса

Перейдём к основной задаче, как и в случае квадратики приведём кубику

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) + (3 - 2N)xyz = 0$$

к наиболее простому виду – нормальной форме Вейерштрасса, которая может записываться так:

$$y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

В нашем случае, так как коэффициенты кубики целые и проективные преобразования будут с целыми коэффициентами, то  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

Далее, под проективными преобразованиями мы будем понимать только целочисленные проективные преобразования.

Мы предъявим алгоритм приведения кубики к нормальной форме Вейерштрасса для произвольной кубики с целыми(рациональными) коэффициентами.

## Шаг 0. Нахождение рациональных точек перегиба

Итак, пусть у нас есть кубика, заданная уравнением  $F(x, y, z) = 0$ , где

$$F(x, y, z) = a_{30}x^3 + a_{03}y^3 + a_{00}z^3 + a_{01}yz^2 + a_{10}xz^2 + a_{11}xyz + \\ + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{20}x^2z + a_{02}y^2z,$$

то есть  $a_{ij} \in \mathbb{Z}$  – коэффициент при мономе  $x^i y^j z^{3-i-j}$ .



## Шаг 0. Нахождение рациональных точек перегиба

Итак, пусть у нас есть кубика, заданная уравнением  $F(x, y, z) = 0$ , где

$$F(x, y, z) = a_{30}x^3 + a_{03}y^3 + a_{00}z^3 + a_{01}yz^2 + a_{10}xz^2 + a_{11}xyz + \\ + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{20}x^2z + a_{02}y^2z,$$

то есть  $a_{ij} \in \mathbb{Z}$  – коэффициент при мономе  $x^i y^j z^{3-i-j}$ .

## Определение

Точка  $P_0$  кубики  $F(x^1, x^2, x^3) = 0$  называется *точкой перегиба*, если касательная к ней в точке  $P$  имеет касание третьего порядка, то есть для любой точки  $Q = (x_q^1 : x_q^2 : x_q^3)$  на касательной выполнено

$$\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(P_0) x_q^i x_q^j = 0.$$

## Определение

Гессианом кубики  $F(x^1, x^2, x^3) = 0$  называется кубика

$$H(F) := \det \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} \right)_{ij}.$$

## Определение

Гессианом кубики  $F(x^1, x^2, x^3) = 0$  называется кубика

$$H(F) := \det \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} \right)_{ij}.$$

## Теорема

Точки перегиба неособой кубики в  $\mathbb{CP}^2$  – в точности точки пересечения кубики с её Гессианом.

Мы не будем проверять кубику на наличие особенностей, а просто найдём все точки пересечения с Гессианом и посмотрим, есть ли там особенности. Если среди общих точек есть неособая, то нам эта точка подходит и мы можем переходить к следующему шагу. Если все точки особые, то алгоритм продолжить нельзя.

Мы не будем проверять кубику на наличие особенностей, а просто найдём все точки пересечения с Гессианом и посмотрим, есть ли там особенности. Если среди общих точек есть неособая, то нам эта точка подходит и мы можем переходить к следующему шагу. Если все точки особые, то алгоритм продолжить нельзя.

Для поиска общих точек рассмотрим результат  $R(F, H(F))$  по переменной  $z$ . Получим однородный многочлен 9-той степени. (дописать уточнение) Находим все его рациональные корни – пары  $(x, y)$  и подставляем в  $F$  и в  $H(F)$  для нахождения общей точки (или удостоверении, что при данных  $(x_0, y_0)$  её нет).

Мы не будем проверять кубику на наличие особенностей, а просто найдём все точки пересечения с Гессианом и посмотрим, есть ли там особенности. Если среди общих точек есть неособая, то нам эта точка подходит и мы можем переходить к следующему шагу. Если все точки особые, то алгоритм продолжить нельзя.

Для поиска общих точек рассмотрим результат  $R(F, H(F))$  по переменной  $z$ . Получим однородный многочлен 9-той степени. (дописать уточнение) Находим все его рациональные корни – пары  $(x, y)$  и подставляем в  $F$  и в  $H(F)$  для нахождения общей точки (или удостоверении, что при данных  $(x_0, y_0)$  её нет).

Этот шаг реализован в файле `InflectionPoints.py` в функции `find_non_singular_inflection_point`.

## Шаг 1. Избавление от монома $y^3$

Выберем какую-то рациональную точку перегиба  $P$  и переведём её в точку  $(0 : 1 : 0)$  некоторым проективным преобразованием. После проективного преобразования, наша кубика имеет уравнение  $\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ , в котором нет  $\tilde{y}$ . Таким образом, у нас уйдёт моном  $y^3$ .

## Шаг 1. Избавление от монома $y^3$

Выберем какую-то рациональную точку перегиба  $P$  и переведём её в точку  $(0 : 1 : 0)$  некоторым проективным преобразованием. После проективного преобразования, наша кубика имеет уравнение  $\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ , в котором нет  $\tilde{y}$ . Таким образом, у нас уйдёт моном  $y^3$ .

Этот шаг реализован в файле `WeierstrassForm.py` в функции `weierstrass_form_step1`.



## Шаг 2. Избавление от мономов $y^2x$ и $yx^2$

Теперь мы хотим сделать преобразование, сохраняющее точку  $O = (0 : 1 : 0)$ , так, чтобы прямая  $z = 0$  была касательной к кубике  $\tilde{F}$  в точке  $O$ , то есть сделать преобразование  $(\tilde{x} : \tilde{y} : \tilde{z}) \rightarrow (x' : y' : z')$ , такое что для  $F'(x', y', z')$  будет выполнено:

$$\frac{\partial F'}{\partial x'}(O) = \frac{\partial F'}{\partial y'}(O) = 0, \quad \frac{\partial F'}{\partial z'}(O) \neq 0.$$

То есть нет монома  $xu^2$ , однако, коэффициент при  $y^2z$  отличен от нуля, и поэтому, разделив на него, можем считать, что он равен 1. Кроме того, так как  $O$  – точка перегиба, то касание прямой  $z = 0$  с нашей кубикой имеет порядок 3, таким образом нет монома  $x^2y$ .

### Шаг 3. Выделение $y^2z$ и избавление от $x^2z$

После второго преобразования, уравнение нашей кубики стало

$F'(x', y', z') = 0$ , где

$$F'(x', y', z') = a'_{30} (x')^3 + a'_{20} (x')^2 z' + a'_{11} x' y' z' + (y')^2 z' + \\ + a'_{10} x' (z')^2 + a'_{01} y' (z')^2 + a'_{00} (z')^3.$$

### Шаг 3. Выделение $y^2z$ и избавление от $x^2z$

После второго преобразования, уравнение нашей кубики стало

$F'(x', y', z') = 0$ , где

$$F'(x', y', z') = a'_{30} (x')^3 + a'_{20} (x')^2 z' + a'_{11} x' y' z' + (y')^2 z' + \\ + a'_{10} x' (z')^2 + a'_{01} y' (z')^2 + a'_{00} (z')^3.$$

Делая замену  $y'' = y' + (a'_{01} z' + a'_{11} x')/2$ , выделяем полный квадрат по  $y'$  и уравнение кубики становится:

$$(y'')^2 z' = a''_{30} (x')^3 + a''_{20} (x')^2 z' + a''_{10} x' (z')^2 + a''_{00} (z')^3.$$

### Шаг 3. Выделение $y^2z$ и избавление от $x^2z$

После второго преобразования, уравнение нашей кубики стало  $F'(x', y', z') = 0$ , где

$$F'(x', y', z') = a'_{30} (x')^3 + a'_{20} (x')^2 z' + a'_{11} x' y' z' + (y')^2 z' + \\ + a'_{10} x' (z')^2 + a'_{01} y' (z')^2 + a'_{00} (z')^3.$$

Делая замену  $y'' = y' + (a'_{01} z' + a'_{11} x')/2$ , выделяем полный квадрат по  $y'$  и уравнение кубики становится:

$$(y'')^2 z' = a''_{30} (x')^3 + a''_{20} (x')^2 z' + a''_{10} x' (z')^2 + a''_{00} (z')^3.$$

Теперь линейной заменой  $x'' = x' - \frac{a''_{20}}{3a''_{30}} z'$  избавляемся от монома  $(x')^2 z'$  и получаем:

$$(y'')^2 z' = a'''_{30} (x'')^3 + a'''_{10} x'' (z')^2 + a'''_{00} (z')^3.$$

Далее, делаем замену  $z'' = \frac{1}{a_{30}'''} z'$  и получаем:

$$(y'')^2 z'' = (x'')^3 + a_{30}''' a_{10}''' x'' (z'')^2 + a_{00}''' (a_{30}''')^2 (z'')^3.$$

Обозначая  $a := a_{30}''' a_{10}'''$ ,  $b := a_{00}''' (a_{30}''')^2$ , получаем требуемую форму:

$$(y'')^2 z'' = (x'')^3 + a x'' (z'')^2 + b (z'')^3.$$

Далее, делаем замену  $z'' = \frac{1}{a_{30}'''} z'$  и получаем:

$$(y'')^2 z'' = (x'')^3 + a_{30}''' a_{10}''' x'' (z'')^2 + a_{00}''' (a_{30}''')^2 (z'')^3.$$

Обозначая  $a := a_{30}''' a_{10}'''$ ,  $b := a_{00}''' (a_{30}''')^2$ , получаем требуемую форму:

$$(y'')^2 z'' = (x'')^3 + ax'' (z'')^2 + b (z'')^3.$$

## Замечание

Отметим, что все коэффициенты в ходе алгоритма получались целочисленными или рациональными (так как совершались только целочисленные проективные преобразования). Соответственно, если коэффициенты  $a, b$  оказались рациональными, мы их можем сделать целыми с помощью замены  $x''' = \frac{1}{d} x''$ ,  $z''' = \frac{1}{d^3} z''$ , где  $d$  – наименьшее общее кратное знаменателей  $a, b$ .

Опишем рациональные точки на кубике в форме Вейерштрасса. Пусть нам известно несколько точек, можно ли по ним как в случае квадрики получить ещё?

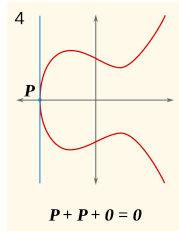
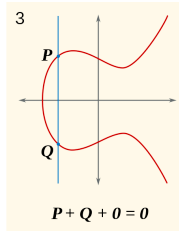
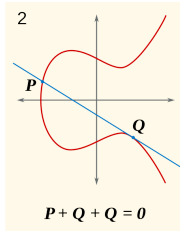
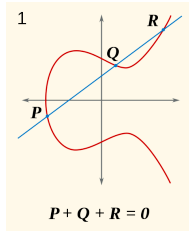
Опишем рациональные точки на кубике в форме Вейерштрасса. Пусть нам известно несколько точек, можно ли по ним как в случае квадратики получить ещё?

## Сложение точек



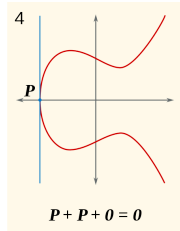
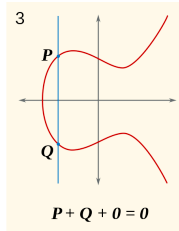
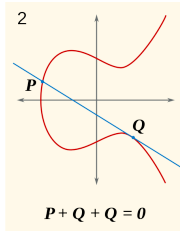
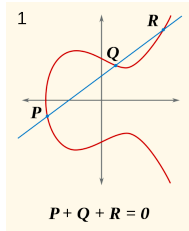
Опишем рациональные точки на кубике в форме Вейерштрасса. Пусть нам известно несколько точек, можно ли по ним как в случае квадратики получить ещё?

## Сложение точек



Опишем рациональные точки на кубике в форме Вейерштрасса. Пусть нам известно несколько точек, можно ли по ним как в случае квадррики получить ещё?

## Сложение точек



## Определение

Суммой точек  $P$  и  $Q$  назовём точку пересечения прямой  $PQ$  с кубикой, отражённую относительно оси  $x$  и будем обозначать  $P + Q$ .

## Теорема

Множество рациональных точек кубики  $E(\mathbb{Q})$  в нормальной форме Вейерштрасса образуют абелеву группу.

## Теорема

Множество рациональных точек кубики  $E(\mathbb{Q})$  в нормальной форме Вейерштрасса образуют абелеву группу.

## Теорема (Морде)

Группа  $E(\mathbb{Q})$  конечно порождена.

## Теорема

Множество рациональных точек кубики  $E(\mathbb{Q})$  в нормальной форме Вейерштрасса образуют абелеву группу.

## Теорема (Морде)

Группа  $E(\mathbb{Q})$  конечно порождена.

Это даёт надежду на полное описание рациональных точек на кубике. Ведь есть явные формулы для сложения точек в нормальной форме.

## Явные формулы для $P + Q$

Пусть  $P = (x_p, y_p)$ ,  $Q = (x_q, y_q)$ ,  $R = (x_r, y_r)$ , где  $R = P + Q$  и  $P \neq Q$ . Тогда мы имеем:

$$x_r = m^2 - x_p - x_q$$

$$y_r = y_p + m(x_r - x_p)$$

где  $m = (y_p - y_q)/(x_p - x_q)$ .

## Явные формулы для $P + Q$

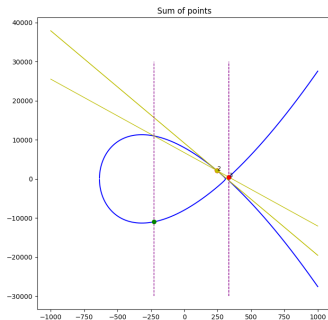
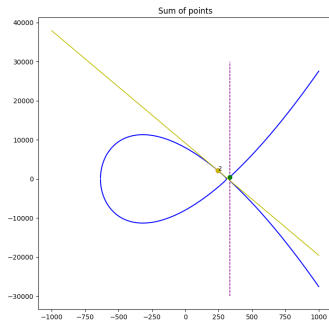
Пусть  $P = (x_p, y_p)$ ,  $Q = (x_q, y_q)$ ,  $R = (x_r, y_r)$ , где  $R = P + Q$  и  $P \neq Q$ . Тогда мы имеем:

$$\begin{aligned}x_r &= m^2 - x_p - x_q \\y_r &= y_p + m(x_r - x_p)\end{aligned}$$

где  $m = (y_p - y_q)/(x_p - x_q)$ .

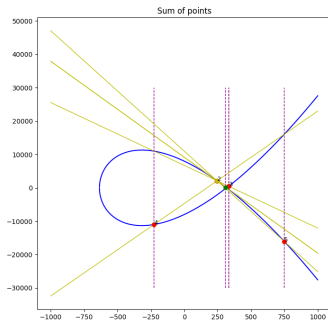
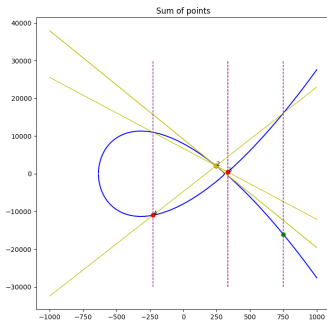
Таким образом зная хотя бы одну точку  $P \notin \text{Tor}(E(\mathbb{Q}))$ , можно явно найти бесконечно точек вида  $P, 2P, \dots, nP$ .

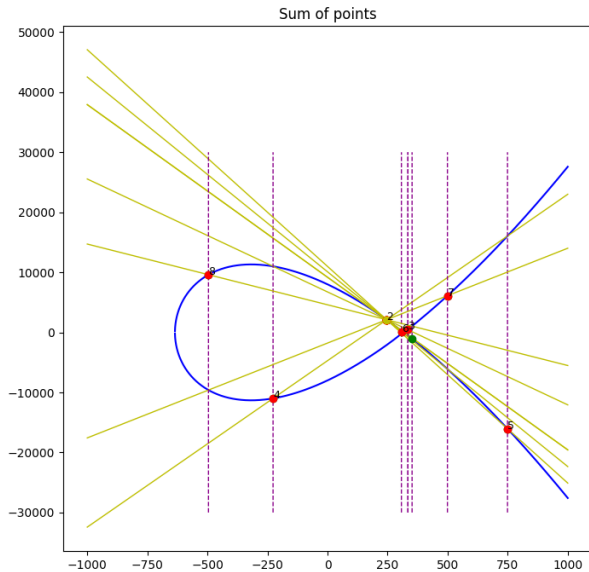
## Наглядное умножение на скаляр в исходной задаче





## Наглядное умножение на скаляр в исходной задаче





Теперь у нас все готово для решения первоначальной задачи. Дадим краткое описание алгоритма, который был реализован.

Теперь у нас все готово для решения первоначальной задачи. Дадим краткое описание алгоритма, который был реализован.

## Алгоритм. Шаг 1.

Программа приводит кубик

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) + (3 - 2N)xyz = 0 \quad (*)$$

к нормальной форме Вейерштрасса. То есть находит коэффициенты  $a$ ,  $b$  и прямое и обратное преобразование.

Теперь у нас все готово для решения первоначальной задачи. Дадим краткое описание алгоритма, который был реализован.

## Алгоритм. Шаг 1.

Программа приводит кубику

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) + (3 - 2N)xyz = 0 \quad (*)$$

к нормальной форме Вейерштрасса. То есть находит коэффициенты  $a$ ,  $b$  и прямое и обратное преобразование.

## Замечание

Хоть для кубик вида  $(*)$  известны явные формулы для коэффициентов  $a$ ,  $b$ , а так же для преобразования в терминах  $N$ , программа проделывает это вычисления отдельно. Это позволяет применить этот алгоритм почти для произвольной кубики.

## Алгоритм. Шаг 2.

На кубике находится произвольная рациональная точка  $P \notin \text{Tor}(E(\mathbb{Q}))$ . Это выполняется простым перебором числа  $x = \frac{p}{q}$  где  $p, q$  ищутся в определённых пределах.

## Алгоритм. Шаг 2.

На кубике находится произвольная рациональная точка  $P \notin \text{Tor}(E(\mathbb{Q}))$ . Это выполняется простым перебором числа  $x = \frac{p}{q}$  где  $p, q$  ищутся в определённых пределах.

## Алгоритм. Шаг 3.

Далее найденная точка умножается на себя  $n$  раз. Именно поэтому важно, чтобы исходная точка не являлась точкой кручения.

## Алгоритм. Шаг 2.

На кубике находится произвольная рациональная точка  $P \notin \text{Tor}(E(\mathbb{Q}))$ . Это выполняется простым перебором числа  $x = \frac{p}{q}$  где  $p, q$  ищутся в определённых пределах.

## Алгоритм. Шаг 3.

Далее найденная точка умножается на себя  $n$  раз. Именно поэтому важно, чтобы исходная точка не являлась точкой кручения.

## Алгоритм. Шаг 4.

Находятся координаты точек в изначальной системе. Отбираются точки у которых все координаты одного знака.



## Алгоритм. Итог

В случае исходной задачи

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = 4, \quad x, y, z \in \mathbb{N}.$$

При удачном выборе  $P$ , точка  $9P$  будет соответствовать решению уравнения. В котором будет порядка 80 цифр.