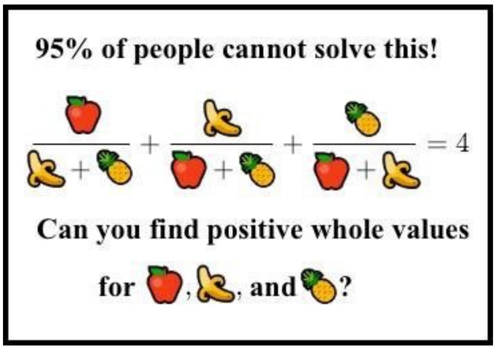
Компьютерный практикум по геометрии

Постановка задачи

Первая задача имеет теоретико–числовую природу. Она представлена на картинке (см. обсуждение здесь [1])



Переформулируем ее в сухих алгебраических терминах и на русском языке

Задача 1. Найдите решение в натуральных числах следующего уравнения

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = 4 \tag{1}$$

Рассмотрим более общую задачу (см. работу [2])

Задача 2. Найдите решение в натуральных числах следующего уравнения

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = N, \tag{2}$$

где N натуральное число.
Приведем все к общему знаменателю

$$a^3 + b^3 + c^3 + (1-N)(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + (3-2N)abc = 0 \tag{3}$$

Теперь нас интересуют натуральные решения этого уравнения. Начнем с более понятной задачи нахождения целочисленных решений этого уравнения. Для этого заметим, что оно однородно и тем самым определяет алгебраческую кривую, которую мы будем называть Γ_N в $\mathbb{CP}^2$. В этом контексте задача нахождения целочисленных решений уравнения сводится к задаче поиска рациональных точек на кривой Γ_N. Обратимся к общей теории поиска рациональных точек на алгебраических кривых в $\mathbb{CP}^2$.

Рациональные точки на алгебраических кривых

Пусть $P(x, y, z)$ — однородный многочлен степени n с целыми коэффициентами. Наша цель — разобраться как описать все рациональные точки на кривой Γ: $P(x, y, z) = 0$.

Случай $n = 1$.
Тут все тривиально

Случай $n = 2$.
Если мы нашли хотя бы одну рациональную точку, то дальше действуем, используя метод **секущих Диофанта** (см. например брошюру [3]).

Алгоритм 1. Реализовать алгоритм поиска формулы для нахождения всех рациональных точек на квадрике при наличии какой-то

Для нахождения рациональной точки нужно сначала привести кривую к нормальной форме, используя метод Лагранжа.
В итоге мы приведем нашу кривую к одному из следующих типов

$$x^2 - Az^2 = 0$$

$$x^2 - Ayz = 0$$

$$Ax^2 + By^2 - Cz^2 = 0$$

Первые два уравнения исследуются просто. В третьем случае можно считать, что A, B, C натуральные числа, которые попарно взаимно просты и свободны от квадратов.

Теорема 1 (Критерий Лежандра)**.** *Пусть A, B, C натуральные числа, которые попарно взаимно просты и свободны от квадратов. Тогда уравнение*

$$Ax^2 + By^2 - Cz^2 = 0$$

имеет нетривиальное целочисленное решение тогда и только тогда, когда разрешимы все три сравнения

$$x^2 - BC \equiv 0 \pmod{A}$$

$$x^2 - AC \equiv 0 \pmod{B}$$

$$x^2 + AB \equiv 0 \pmod{C}$$

Доказательство. Доказательство можно посмотреть в [4] □

Алгоритм 2. Реализовать проверку критерия Лежандра

Если критерий Лежандра выполнен, то рациональную точку на квадрике нужно еще найти. Поиск может быть проведен перебором на основе следующего результата.

Теорема 2 (Хольцер)**.** *Пусть A, B, C натуральные числа, которые попарно взаимно просты и свободны от квадратов. Тогда если уравнение*

$$Ax^2 + By^2 - Cz^2 = 0$$

имеет ненулевое целочисленное решение, то оно имеет также ненулевое целочисленное решение (x_0, y_0, z_0), для которого выполнено

$$x_0^2 \leqslant BC, \quad y_0^2 \leqslant AC, \quad z_0^2 \leqslant AB$$

Доказательство. Доказательство можно посмотреть в [4] □

Алгоритм 3. Реализовать общий алгоритм поиска всех рациональных точек на квадрике

Случай $n = 3$.
Начнем с определений

Определение 1. Пусть $\Gamma\colon F(x, y, z) = 0$ — алгебраическая кривая в $\mathbb{CP}^2$. Точка $P \in \Gamma$ называется **особой**, если $\dfrac{\partial F}{\partial x}(P) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(P) = \dfrac{\partial F}{\partial z}(P) = 0$. Кривая Γ называется **особой**, если содержит хоть одну особую точку и **неособой**, если не содержит таких точек.

Определение 2. Пусть $\Gamma\colon F(x, y, z) = 0$ — алгебраическая кривая в $\mathbb{CP}^2$. Она называется **неприводимой** (над $\mathbb{C}$), если многочлен F не представляется в виде произведения многочленов ненулевой степени.

Ограничимся рассмотрением случая неособых кубик (это автоматически исключает из рассмотрения приводимые кривые), которые еще называются **эллиптическими кривыми**. Также, как и при рассмотрении случая квадрик будем предполагать, что наша кривая Γ содержит рациональную точку P.

Теорема 3 (Нормальная форма Вейерштрасса)**.** *Пусть $F(x, y, z)$ однородный многочлен третьей степени с целыми коэффициентами и Γ соответствующая кубика. Пусть кроме того Γ — неособая и содержит рациональную точку P. Тогда существует бирациональное отображение $\mathbb{CP}^2 \to \mathbb{CP}^2$ с рациональными коэффициентами, которое переводит Γ в кривую $E\colon y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, а точку P в точку $(0 : 1 : 0)$.*

Доказательство. Доказательство можно посмотреть в [4] □

Замечание 1. *Если рациональная точка P является точкой **перегиба**, то есть касательная к кривой в этой точке имеет порядок касания 3 или более, то существует проективное преобразование, которое переводит Γ в нормальную форму Вейерштрасса.*

Задача 1. Найти на кривой Γ_N рациональную точку перегиба и выписать соответствующую нормальную форму Вейерштрасса для кривой, а также формулы соответствующего проективного преобразования.

Если кубическая кривая Γ приведена к нормальной форме Вейерштрасса, то легко определить сложение точек на этой кривой.

Определение 3. Пусть P, Q — две точки на кубической кривой $E\colon y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3$. Рассмотрим точку пересечения $R(x, y)$ секущей PQ (или касательной, если точки P, Q совпали) с кривой E. Тогда суммой точек $P + Q$ назовем точку с координатами $(x, -y)$.

Задача 2. Найти явные формулы для координат точки $P+Q$ в терминах координат точек P, Q и коэффициентов кубики a, b в Вейерштрассовой нормальной форме и доказать, что если P, Q — рациональные точки и $a, b \in \mathbb{Z}$, то $P+Q$ рациональная точка.

Теорема 4. *Множество точек кубики E, записанной в Вейерштрассовой нормальной форме, является абелевой группой относительно сложения.*

Доказательство. Доказательство можно посмотреть в [4] □

Надежда, что есть возможность описать все рациональные точки на эллиптической кривой, дает теорема Морделла.

Теорема 5 (Морделл)**.** *Подгруппа рациональных точек эллиптической кривой конечно порождена.*

В случае кривой Γ_N можно подсчитать кручение этой группы (см. [2]). Все эти точки не дают решений в натуральных числах исходной задачи. Поэтому надо обращаться к свободной части группы . В случае $N = 4$ эта свободная часть есть и с помощью нее можно получить натуральное решение (подробности см. в [2])

Задача 3. Выяснить, как вычисляется кручение группы рациональных точек эллиптической кривой и свободная часть этой группы(а именно ранг и образующие). На примере кривой Γ_4 реализовать это вычисление и изобразить соответствующие картинки. Исследовать, что это вычисление дает для других N. В частности описать случаи, когда свободная часть группы тривиально и когда имеет ранг больше 1.

Список литературы

[1] Alon Amit answer.

[2] Bremner A., Macleod A. An unusual cubic representation problem //Annales Mathematicae et Informaticae. – 2014. – С. 29-41.

[3] Острик В. В., Цфасман М. А. Алгебраическая геометрия и теория чисел: рациональные и эллиптические кривые.// МЦНМО, 2011.

[4] Прасолов В. В., Соловьев Ю. П. Эллиптические функции и алгебраические уравнения. – МЦНМО, 2022.