Приведение кубики к нормальной форме Вейерштрасса

Для нашей кубики

$$F(x,y,z) = a_{30}x^3 + a_{03}y^3 + a_{00}z^3 + a_{01}yz^2 + a_{10}xz^2 + a_{11}xyz + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{20}x^2z + a_{02}y^2z,$$

то есть $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ – коэффициент при мономе $x^i y^j z^{3-i-j}$.

- Шаг 0. Нахождение рациональных точек перегиба.

  Для того, чтобы сделать первый шаг в алгоритме приведения неособой кубики к нормальной форме Вейерштрасса целочисленным проективным преобразованием нам сначала понадобиться найти рациональную точку перегиба. Для этого, мы рассмотрим гессиан нашей кубики $H(F) := \det\left(\frac{\partial F}{\partial x^i \partial x^j}\right)_{ij}$, где $x = x^1, y = x^2, z = x^3$. Далее, под проективными преобразованиями мы будем понимать только целочисленные проективные преобразования.

  Теорема. Точки перегиба неособой кубики в $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ – в точности точки пересечения кубики с её гессианом.

  Доказательство можно посмотреть в (..) .

  Итак, для нахождения рациональных точек перегиба, нам достаточно найти все общие рациональные корни F и $H(F)$. Для этого, мы рассмотрим F и $H(F)$ как многочлены от z:

  $$\begin{aligned} F &= b_0(x,y)z^3 + b_1(x,y)z^2 + b_2(x,y)z + b_3(x,y) \\ H(F) &= c_0(x,y)z^3 + c_1(x,y)z^2 + c_2(x,y)z + c_3(x,y), \end{aligned}$$

  где $b_k(x,y)$ и $c_k(x,y)$ – однородные многочлены от x, y степени k.

  Если $c_0(x,y) \cdot b_0(x,y) = 0$, то есть если F или $H(F)$ проходит через точку $(0 : 0 : 1)$, то мы можем сделать проективное преобразование так, что ни одна из кубик не будет через неё проходить. Сделать это можно, например, так: найти точку, которая не лежит ни на одной из наших кубик и «обменять» её с $(0 : 0 : 1)$. Итак, будем искать точку в виде $(0 : i : 1)$, $i = 1, 2, \ldots$. Так как кубика неособая, то она не распадающаяся (то есть не содержит прямой) и различные кубики могут пересекаться не более, чем в 9 точках, то процесс перебора закончится не позднее, чем через 10 шагов. (Условие $c_0 b_0 \neq 0$ нужно, чтобы ... ?)

  Далее считаем, что $c_0(x,y) \cdot b_0(x,y) \neq 0$. Рассмотрим $R(F, H(F))$ – результант F и $H(F)$ по переменной z (При фиксированных x, y – это обычный результант двух многочленов). Непосредственной проверкой проверяется, что $R(F, H(F))$ – либо однородный многочлен от x, y степени 9, либо тождественный ноль. Перебирая все рациональные корни этого многочлена – получаем все потенциальные рациональные точки перегиба. Подставляя их в исходное уравнение F, смотрим, есть ли точка с такими рациональными координатами по x, y с рациональной координатой и по z. Таким образом, мы находим все рациональные точки перегиба на нашей кубике.

- Шаг 1. Выберем какую-то рациональную точку перегиба P. Переведём точку P в точку $(0 : 1 : 0)$ некоторым проективным преобразованием. Например, подойдёт такое: ...

  После проективного преобразования, наша кубика имеет уравнение $\widetilde{F}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})$, в котором нет $\widetilde{y}$.

- Шаг 2. Теперь мы хотим сделать преобразование, сохраняющее точку $O = (0:1:0)$, так, чтобы прямая $z=0$ была касательной к кубике $\widetilde{F}$ в точке O, то есть сделать преобразование $(\widetilde{x}:\widetilde{y}:\widetilde{z}) \to (x':y':z')$, такое что для $F'(x',y',z')$ будет выполнено:
$$\frac{\partial F'}{\partial x'}(O) = \frac{\partial F'}{\partial y'}(O) = 0, \quad \frac{\partial F'}{\partial z'}(O) \neq 0.$$
Пусть имеет место соотношение
$$\begin{pmatrix}\widetilde{x}\\ \widetilde{y}\\ \widetilde{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}.$$
Так как точка O должна быть неподвижна, то:
$$\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},$$
откуда $c_{12} = 0, c_{22} = 1, c_{32} = 0$.
Кроме того, поскольку $F'(x',y',z') = \widetilde{F}(\widetilde{x}(x',y',z'), \widetilde{y}(x',y',z'), \widetilde{z}(x',y',z'))$, то мы имеем:
$$\begin{aligned}\frac{\partial F'}{\partial x'}(O) &= \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}}(\widetilde{x}(O), \widetilde{y}(O), \widetilde{z}(O))\frac{\partial \widetilde{x}}{\partial x'}(O) + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}}(\widetilde{x}(O), \widetilde{y}(O), \widetilde{z}(O))\frac{\partial \widetilde{y}}{\partial x'}(O)\\ &+ \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{z}}(\widetilde{x}(O), \widetilde{y}(O), \widetilde{z}(O))\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial x'}(O)\\ &= \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}}(c_{12}, c_{22}, c_{32})c_{11} + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}}(c_{12}, c_{22}, c_{32})c_{21} + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{z}}(c_{12}, c_{22}, c_{32})c_{31}\\ &= \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}}(0,1,0)c_{11} + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}}(0,1,0)c_{21} + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{z}}(0,1,0)c_{31} = (2+N)c_{11} - c_{31}.\end{aligned}$$
Аналогично получаем:
$$\frac{\partial F'}{\partial y'}(O) = \left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}}\frac{\partial \widetilde{x}}{\partial y'} + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}}\frac{\partial \widetilde{y}}{\partial y'} + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{z}}\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial y'}\right)\Bigg|_O = (2+N)\frac{\partial \widetilde{x}}{\partial y'}(O) - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial y'}(O) = (2+N)c_{12} - c_{32}$$
$$\frac{\partial F'}{\partial z'}(O) = \left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{x}}\frac{\partial \widetilde{x}}{\partial z'} + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{y}}\frac{\partial \widetilde{y}}{\partial z'} + \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \widetilde{z}}\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial z'}\right)\Bigg|_O = (2+N)\frac{\partial \widetilde{x}}{\partial z'}(O) - \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial z'}(O) = (2+N)c_{13} - c_{33}.$$
Итак, мы получаем следующие условия на матрицу $C = (c_{ij})$:
$$\begin{aligned}(2+N)c_{11} - c_{31} &= 0\\ (2+N)c_{12} - c_{32} &= 0\\ (2+N)c_{13} - c_{33} &\neq 0\\ c_{12} = c_{32} &= 0\\ c_{22} &= 1.\end{aligned}$$
Итого, получаем, что в качестве искомой матрицы можно взять следующую:
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2+N & 0 & N+1\end{pmatrix}.$$

А тогда наше преобразование будет иметь вид:

$$\lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N-1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ N+2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{pmatrix}.$$

- Шаг 3. После второго преобразования, наше уравнение приняло вид:

$$F'(x',y',z') = \left(2N^2+11N+15\right)(x')^3 + \left(5N^2+24N+28\right)(x')^2 z' + \left(4N^2+17N+18\right) x' (z')^2 + \left(N^2+4N+4\right)(z')^3 + x'y'z' + (y')^2 z' + y' (z')^2.$$

Поэтому условие $F'(x',y',z')=0$ можно переписать как

$$-(y')^2 z' - x'y'z' - y'(z')^2 = \left(2N^2+11N+15\right)(x')^3 + \left(5N^2+24N+28\right)(x')^2 z' + \left(4N^2+17N+18\right) x' (z')^2 + \left(N^2+4N+4\right)(z')^3.$$

Выделяем полный квадрат по y':

$$-\left(y' + \frac{1}{2}(x'+z')\right)^2 z' + \frac{1}{2}(x'+z')^2 z' = \left(2N^2+11N+15\right)(x')^3 + \left(5N^2+24N+28\right)(x')^2 z' + \left(4N^2+17N+18\right) x' (z')^2 + \left(N^2+4N+4\right)(z')^3.$$

Переносим свободные члены от y' в правую часть:

$$-\left(y' + \frac{1}{2}(x'+z')\right)^2 z' = \left(2N^2+11N+15\right)(x')^3 + \left(5N^2+24N+28-\frac{1}{4}\right)(x')^2 z' + \left(4N^2+17N+18-\frac{1}{2}\right) x' (z')^2 + \left(N^2+4N+4-\frac{1}{4}\right)(z')^3.$$

Как известно, многочлен ax^3+bx^2+cx+d линейной заменой $x \mapsto x - \frac{b}{3a}$ приводится к виду px^3+qx+s. В нашем случае замена будет такой:

$$x'' = x' + \frac{5N^2+24N+28-\frac{1}{4}}{3(2N^2+11N+15)} z'.$$

После подстановки получим:

$$-\left(y' + \frac{1}{2}(x'+z')\right)^2 z' = \left(2N^2+11N+15\right)(x'')^3 + Ax''(z')^2 + B(z')^3,$$

где

$$A = -\frac{N^4}{3(N+3)(2N+5)} - \frac{2N^3}{(N+3)(2N+5)} - \frac{5N^2}{2(N+3)(2N+5)} + \frac{7N}{2(N+3)(2N+5)} + \frac{93}{16(N+3)(2N+5)}$$

$$B = -\frac{2N^6}{27(N+3)^2(2N+5)^2} - \frac{2N^5}{3(N+3)^2(2N+5)^2} - \frac{11N^4}{6(N+3)^2(2N+5)^2} - \frac{N^3}{3(N+3)^2(2N+5)^2} + \frac{43N^2}{8(N+3)^2(2N+5)^2}. + \frac{41N}{8(N+3)^2(2N+5)^2} - \frac{47}{32(N+3)^2(2N+5)^2}$$

Деля на $2N^2+11N+15$, получаем

$$-\left(y''\right)^2 z' = \left(x''\right)^3 + ax''\left(z''\right)^2 + b\left(z''\right)^3,$$

где

$$\begin{aligned} y'' &= y' + \frac{1}{2}(x'+z') \\ z'' &= \frac{z'}{2N^2+11N+15} \\ a &= A\left(2N^2+11N+15\right) \\ b &= B\left(2N^2+11N+15\right)^2. \end{aligned}$$

Заметим, что все N-ки в знаменателях сократятся и в итоге у нас получится:

$$\begin{aligned} -\left(y''\right)^2 z' = \left(x''\right)^3 &+ \frac{1}{48}\left(-16N^4-96N^3-120N^2+168N+279\right)x''\left(z''\right)^2 \\ &+ \frac{1}{864}\left(-64N^6-576N^5-1584N^4-288N^3+4644N^2+4428N-1269\right)\left(z''\right)^3. \end{aligned}$$

Окончательно, делая замены $x''' = \frac{1}{6}x''$, $z''' = -\frac{1}{6^3}z''$, получаем:

$$\begin{aligned} \left(y''\right)^2 z''' = \left(x'''\right)^3 &+ \left(-432N^4-2592N^3-3240N^2+4536N+7533\right)x'''\left(z'''\right)^2 \\ &+ \left(3456N^6+31104N^5+85536N^4+15552N^3-250776N^2-239112N+68526\right)\left(z'''\right)^3. \end{aligned}$$

Преобразования в шаге 3:

$$\lambda\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{20N^2+96N+111}{180+132N+24N^2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2N^2+11N+15} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

И

$$\lambda\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{216} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}.$$

Итого, собирая все преобразования вместе, получаем искомое проективное преобразование:

$$\lambda\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{216} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{20N^2+96N+111}{180+132N+24N^2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2N^2+11N+15} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -N-1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ N+2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

То есть искомая матрица есть

$$\begin{pmatrix} \frac{-4N^3-20N^2-9N+42}{72(N+3)(2N+5)} & \frac{-4N^3-20N^2-9N+42}{72(N+3)(2N+5)} & \frac{4N^2+36N+69}{72(N+3)(2N+5)} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-N-2}{216(N+3)(2N+5)} & \frac{-N-2}{216(N+3)(2N+5)} & \frac{1}{216(N+3)(2N+5)} \end{pmatrix}.$$

Так как матрица проективного преобразования определена с точностью до умножения на скаляр, то умножая всю матрицу на $216(3+N)(5+2N)$, имеем:

$$\begin{pmatrix} -12N^3-60N^2-27N+126 & -12N^3-60N^2-27N+126 & 12N^2+108N+207 \\ 216N^2+1188N+1620 & -216N^2-1188N-1620 & 0 \\ -N-2 & -N-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подытожим: исходная кубика, заданная уравнением

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2 y + x^2 z + y^2 x + y^2 z + z^2 x + z^2 y) + (3 - 2N)xyz = 0$$

приводится к кубике, заданной уравнением

$$\begin{aligned}(y'')^2 z''' = (x''')^3 &+ \left(-432N^4 - 2592N^3 - 3240N^2 + 4536N + 7533\right) x''' (z''')^2 \\ &+ \left(3456N^6 + 31104N^5 + 85536N^4 + 15552N^3 - 250776N^2 - 239112N + 68526\right) (z''')^3\end{aligned}$$

проективным преобразованием с матрицей:

$$\begin{pmatrix} -12N^3 - 60N^2 - 27N + 126 & -12N^3 - 60N^2 - 27N + 126 & 12N^2 + 108N + 207 \\ 216N^2 + 1188N + 1620 & -216N^2 - 1188N - 1620 & 0 \\ -N - 2 & -N - 2 & 1 \end{pmatrix}.$$