Необычная задача кубического представления

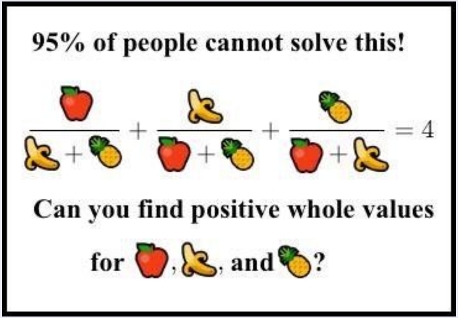
Алексей Кислицын   Андрей Владимиров   Всеволод Триль

Механико-математический факультет МГУ

28 ноября 2022 г.

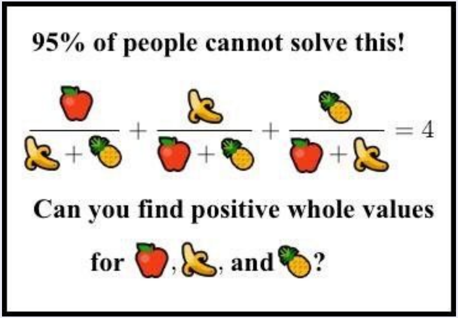
Постановка задачи

Всё началось с, кажущейся на первый взгляд, детской задачки:



Постановка задачи

Всё началось с, кажущейся на первый взгляд, детской задачки:



В этом докладе мы предъявим алгоритм решения данной задачи, а также постараемся её обобщить и проанализировать.

Переформулируем ей в математических терминах: требуется найти все натуральные решения следующего уравнения при $N = 4$:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = N, \qquad x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Мы пока не будем придавать значения тому, что $N = 4$, а сразу будем рассматривать постановку задачи для произвольного $N \in \mathbb{N}$.

Переформулируем ей в математических терминах: требуется найти все натуральные решения следующего уравнения при $N = 4$:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = N, \qquad x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Мы пока не будем придавать значения тому, что $N = 4$, а сразу будем рассматривать постановку задачи для произвольного $N \in \mathbb{N}$.

Заметим, что решение исходного уравнения равносильно нахождению натуральных точек на кубике, заданной в однородных координатах $(x : y : z)$ следующим уравнением:

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) + (3 - 2N)xyz = 0.$$

Переформулируем ей в математических терминах: требуется найти все натуральные решения следующего уравнения при $N = 4$:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = N, \qquad x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Мы пока не будем придавать значения тому, что $N = 4$, а сразу будем рассматривать постановку задачи для произвольного $N \in \mathbb{N}$.

Заметим, что решение исходного уравнения равносильно нахождению натуральных точек на кубике, заданной в однородных координатах $(x : y : z)$ следующим уравнением:

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) + (3 - 2N)xyz = 0.$$

Сразу отметим, что так как мы работаем в проективных координатах, то это равносильно нахождению точек с рациональными координатами, у которых знаки одинаковы.

Переформулируем ей в математических терминах: требуется найти все натуральные решения следующего уравнения при $N = 4$:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = N, \qquad x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Мы пока не будем придавать значения тому, что $N = 4$, а сразу будем рассматривать постановку задачи для произвольного $N \in \mathbb{N}$.

Заметим, что решение исходного уравнения равносильно нахождению натуральных точек на кубике, заданной в однородных координатах $(x : y : z)$ следующим уравнением:

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) + (3 - 2N)xyz = 0.$$

Сразу отметим, что так как мы работаем в проективных координатах, то это равносильно нахождению точек с рациональными координатами, у которых знаки одинаковы.

Но перед тем, как перейти к решению исходной задачи, рассмотрим более простую задачу – поиск натуральных точек на квадрике

Описание рациональных точек на квадрике

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz = 0, \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

Метод секущих

Для начала заметим, что зная одну рациональную точку на квадрике можно получить все методом секущих. (картинка)

Поиск рациональной точки. Шаг 1.

Приведем квадрику рациональным преобразованием к одному из следующих видов.

$$x^2 - Az^2 = 0$$
$$x^2 - Ayz = 0$$
$$Ax^2 + By^2 - Cz^2 = 0$$

Шаг 2.

Случаи 1 и 2 разбираются тривиально. В третьим случае используем критерий Лежандра, согласно нему уравнение 3 имеет целочисленное решение тогда и только тогда когда BC квадратичный вычет по модулю A, AC - по модулю B и $-AB$ по модулю C.

Замечание

Таким образом поиск рациональной точки это полностью решенная проблема в случае квадрики. Более того есть теорема Хольцера, которая дает верхнюю оценку на границы в которых его надо искать.

Приведение к нормальной форме Вейерштрасса

Перейдём к основной задаче, как и в случае квадрики приведём кубику

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1 - N)(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) + (3 - 2N)xyz = 0$$

к наиболее простому виду – нормальной форме Вейерштрасса, которая может записывается так:

$$y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Приведение к нормальной форме Вейерштрасса

Перейдём к основной задаче, как и в случае квадрики приведём кубику

$$x^3 + y^3 + z^3 + (1-N)(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) + (3-2N)xyz = 0$$

к наиболее простому виду – нормальной форме Вейерштрасса, которая может записывается так:

$$y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

В нашем случае, так как коэффициенты кубики целые и проективные преобразования будут с целыми коэффициентами, то $a, b \in \mathbb{Z}$.
Далее, под проективными преобразованиями мы будем понимать только целочисленные проективные преобразования.

Приведение к нормальной форме Вейерштрасса

Перейдём к основной задаче, как и в случае квадрики приведём кубику

$$x^3+y^3+z^3+(1-N)(x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y)+(3-2N)xyz=0$$

к наиболее простому виду – нормальной форме Вейерштрасса, которая может записывается так:

$$y^2z=x^3+axz^2+bz^3, \quad a,b\in\mathbb{C}.$$

В нашем случае, так как коэффициенты кубики целые и проективные преобразования будут с целыми коэффициентами, то $a,b\in\mathbb{Z}$.
Далее, под проективными преобразованиями мы будем понимать только целочисленные проективные преобразования.

Мы предъявим алгоритм приведения кубики к нормальной форме Вейерштрасса для произвольной кубики с целыми(рациональными) коэффициентами.

Шаг 0. Нахождение рациональных точек перегиба

Итак, пусть у нас есть кубика, заданная уравнением $F(x, y, z) = 0$, где

$$F(x,y,z) = a_{30}x^3 + a_{03}y^3 + a_{00}z^3 + a_{01}yz^2 + a_{10}xz^2 + a_{11}xyz + \\ + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{20}x^2z + a_{02}y^2z,$$

то есть $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ – коэффициент при мономе $x^i y^j z^{3-i-j}$.

Шаг 0. Нахождение рациональных точек перегиба

Итак, пусть у нас есть кубика, заданная уравнением $F(x, y, z) = 0$, где

$$F(x, y, z) = a_{30}x^3 + a_{03}y^3 + a_{00}z^3 + a_{01}yz^2 + a_{10}xz^2 + a_{11}xyz + \\ + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{20}x^2z + a_{02}y^2z,$$

то есть $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ – коэффициент при мономе $x^i y^j z^{3-i-j}$.

Определение

Точка P_0 кубики $F(x^1, x^2, x^3) = 0$ называется *точкой перегиба*, если касательная к ней в точке P имеет касание третьего порядка, то есть для любой точки $Q = (x_q^1 : x_q^2 : x_q^3)$ на касательной выполнено

$$\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(P_0)\, x_q^i x_q^j = 0.$$

Определение

Гессианом кубики $F(x^1, x^2, x^3) = 0$ называется кубика

$$H(F) := \det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}\right)_{ij}.$$

Определение

Гессианом кубики $F(x^1, x^2, x^3) = 0$ называется кубика

$$H(F) := \det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}\right)_{ij}.$$

Теорема

Точки перегиба неособой кубики в $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ – в точности точки пересечения кубики с её Гессианом.

Мы не будем проверять кубику на наличие особенностей, а просто найдём все точки пересечения с Гессианом и посмотрим, есть ли там особенности. Если среди общих точек есть неособая, то нам эта точка подходит и мы можем переходить к следующему шагу. Если все точки особые, то алгоритм продолжить нельзя.

Мы не будем проверять кубику на наличие особенностей, а просто найдём все точки пересечения с Гессианом и посмотрим, есть ли там особенности. Если среди общих точек есть неособая, то нам эта точка подходит и мы можем переходить к следующему шагу. Если все точки особые, то алгоритм продолжить нельзя.

Для поиска общих точек рассмотрим результант $R(F, H(F))$ по переменной z. Получим однородный многочлен 9-той степени. (дописать уточнение) Находим все его рациональный корни – пары (x, y) и подставляем в F и в $H(F)$ для нахождения общей точки (или удостоверении, что при данных (x_0, y_0) её нет).

Мы не будем проверять кубику на наличие особенностей, а просто найдём все точки пересечения с Гессианом и посмотрим, есть ли там особенности. Если среди общих точек есть неособая, то нам эта точка подходит и мы можем переходить к следующему шагу. Если все точки особые, то алгоритм продолжить нельзя.

Для поиска общих точек рассмотрим результант $R(F, H(F))$ по переменной z. Получим однородный многочлен 9-той степени. (дописать уточнение) Находим все его рациональный корни – пары (x, y) и подставляем в F и в $H(F)$ для нахождения общей точки (или удостоверении, что при данных (x_0, y_0) её нет).

Этот шаг реализован в файле InflectionPoints.py в функции find_non_singular_inflection_point.

Шаг 1. Избавление от монома y^3

Выберем какую-то рациональную точку перегиба P и переведём её в точку $(0:1:0)$ некоторым проективным преобразованием. После проективного преобразования, наша кубика имеет уравнение $\widetilde{F}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})$, в котором нет $\widetilde{y}$. Таким образом, у нас уйдёт моном y^3.

Шаг 1. Избавление от монома y^3

Выберем какую-то рациональную точку перегиба P и переведём её в точку $(0:1:0)$ некоторым проективным преобразованием. После проективного преобразования, наша кубика имеет уравнение $\widetilde{F}(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})$, в котором нет $\widetilde{y}$. Таким образом, у нас уйдёт моном y^3.

Этот шаг реализован в файле WeierstrassForm.py в функции weierstrass_form_step1.

Шаг 2. Избавление от мономов y^2x и yx^2

Теперь мы хотим сделать преобразование, сохраняющее точку $O = (0:1:0)$, так, чтобы прямая $z = 0$ была касательной к кубике $\widetilde{F}$ в точке O, то есть сделать преобразование $(\widetilde{x}:\widetilde{y}:\widetilde{z}) \to (x':y':z')$, такое что для $F'(x',y',z')$ будет выполнено:

$$\frac{\partial F'}{\partial x'}(O) = \frac{\partial F'}{\partial y'}(O) = 0, \quad \frac{\partial F'}{\partial z'}(O) \neq 0.$$

То есть нет монома xy^2, однако, коэффициент при y^2z отличен от нуля, и поэтому, разделив на него, можем считать, что он равен 1. Кроме того, так как O – точка перегиба, то касание прямой $z = 0$ с нашей кубикой имеет порядок 3, таким образом нет монома x^2y.

Шаг 3. Выделение y^2z и избавление от x^2z

После второго преобразования, уравнение нашей кубики стало $F'(x', y', z') = 0$, где

$$F'(x', y', z') = a'_{30}\left(x'\right)^3 + a'_{20}\left(x'\right)^2 z' + a'_{11}x'y'z' + \left(y'\right)^2 z' + \\ + a'_{10}x'\left(z'\right)^2 + a'_{01}y'\left(z'\right)^2 + a'_{00}\left(z'\right)^3.$$

Шаг 3. Выделение y^2z и избавление от x^2z

После второго преобразования, уравнение нашей кубики стало $F'(x',y',z')=0$, где

$$F'(x',y',z') = a'_{30}\left(x'\right)^3 + a'_{20}\left(x'\right)^2 z' + a'_{11}x'y'z' + \left(y'\right)^2 z' + \\ + a'_{10}x'\left(z'\right)^2 + a'_{01}y'\left(z'\right)^2 + a'_{00}\left(z'\right)^3 .$$

Делая замену $y''=y'+(a'_{01}z'+a'_{11}x')/2$, выделяем полный квадрат по y' и уравнение кубики становится:

$$\left(y''\right)^2 z' = a''_{30}\left(x'\right)^3 + a''_{20}\left(x'\right)^2 z' + a''_{10}x'\left(z'\right)^2 + a''_{00}\left(z'\right)^3 .$$

Шаг 3. Выделение y^2z и избавление от x^2z

После второго преобразования, уравнение нашей кубики стало $F'(x', y', z') = 0$, где

$$F'(x',y',z') = a'_{30}\left(x'\right)^3 + a'_{20}\left(x'\right)^2 z' + a'_{11}x'y'z' + \left(y'\right)^2 z' + \\ + a'_{10}x'\left(z'\right)^2 + a'_{01}y'\left(z'\right)^2 + a'_{00}\left(z'\right)^3.$$

Делая замену $y'' = y' + (a'_{01}z' + a'_{11}x')/2$, выделяем полный квадрат по y' и уравнение кубики становится:

$$\left(y''\right)^2 z' = a''_{30}\left(x'\right)^3 + a''_{20}\left(x'\right)^2 z' + a''_{10}x'\left(z'\right)^2 + a''_{00}\left(z'\right)^3.$$

Теперь линейной заменой $x'' = x' - \dfrac{a''_{20}}{3a''_{30}}z'$ избавляемся от монома $\left(x'\right)^2 z'$ и получаем:

$$\left(y''\right)^2 z' = a'''_{30}\left(x''\right)^3 + a'''_{10}x''\left(z'\right)^2 + a'''_{00}\left(z'\right)^3.$$

Далее, делаем замену $z'' = \dfrac{1}{a'''_{30}} z'$ и получаем:

$$\left(y''\right)^2 z'' = \left(x''\right)^3 + a'''_{30} a'''_{10} x'' \left(z''\right)^2 + a'''_{00} \left(a'''_{30}\right)^2 \left(z''\right)^3 .$$

Обозначая $a := a'''_{30} a'''_{10}, b := a'''_{00} \left(a'''_{30}\right)^2$, получаем требуемую форму:

$$\left(y''\right)^2 z'' = \left(x''\right)^3 + a x'' \left(z''\right)^2 + b \left(z''\right)^3 .$$

Далее, делаем замену $z'' = \dfrac{1}{a'''_{30}} z'$ и получаем:

$$\left(y''\right)^2 z'' = \left(x''\right)^3 + a'''_{30} a'''_{10} x'' \left(z''\right)^2 + a'''_{00} \left(a'''_{30}\right)^2 \left(z''\right)^3 .$$

Обозначая $a := a'''_{30} a'''_{10}, b := a'''_{00} \left(a'''_{30}\right)^2$, получаем требуемую форму:

$$\left(y''\right)^2 z'' = \left(x''\right)^3 + a x'' \left(z''\right)^2 + b \left(z''\right)^3 .$$

Замечание

Отметим, что все коэффициенты в ходе алгоритма получались целочисленными или рациональными (так как совершались только целочисленные проективные преобразования). Соответственно, если коэффициенты a, b оказались рациональными, мы их можем сделать целыми с помощью замены $x''' = \dfrac{1}{d} x'', z''' = \dfrac{1}{d^3} z''$, где d – наименьшее общее кратное знаменателей a, b.

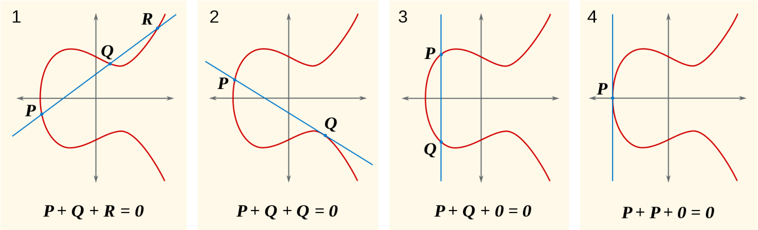
Опишем рациональные точки на кубике в форме Вейерштрасса. Пусть нам известно несколько точек, можно ли по ним как в случае квадрики получить ещё?

Опишем рациональные точки на кубике в форме Вейерштрасса. Пусть нам известно несколько точек, можно ли по ним как в случае квадрики получить ещё?

Сложение точек

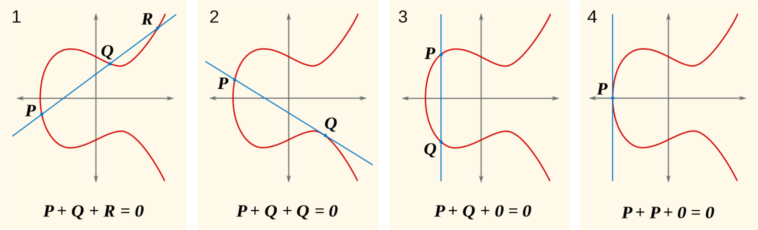
Опишем рациональные точки на кубике в форме Вейерштрасса. Пусть нам известно несколько точек, можно ли по ним как в случае квадрики получить ещё?

Сложение точек



Опишем рациональные точки на кубике в форме Вейерштрасса. Пусть нам известно несколько точек, можно ли по ним как в случае квадрики получить ещё?

Сложение точек



Определение

Суммой точек P и Q назовём точку пересечения прямой PQ с кубикой, отражённую относительно оси x и будем обозначать $P + Q$.

Теорема

Множество рациональных точек кубики $E(\mathbb{Q})$ в нормальной форме Вейерштрасса образуют абелеву группу.

Теорема

Множество рациональных точек кубики $E(\mathbb{Q})$ в нормальной форме Вейерштрасса образуют абелеву группу.

Теорема (Морде)

Группа $E(\mathbb{Q})$ конечно порождена.

Теорема

Множество рациональных точек кубики $E(\mathbb{Q})$ в нормальной форме Вейерштрасса образуют абелеву группу.

Теорема (Морде)

Группа $E(\mathbb{Q})$ конечно порождена.

Это даёт надежду на полное описание рациональных точек на кубике. Ведь есть явные формулы для сложения точек в нормальной форме.

Явные формулы для $P + Q$

Пусть $P = (x_p, y_p), Q = (x_q, y_q), R = (x_r, y_r)$, где $R = P + Q$ и $P \neq Q$. Тогда мы имеем:

$$x_r = m^2 - x_p - x_q$$
$$y_r = y_p + m(x_r - x_p)$$

где $m = (y_p - y_q)/(x_p - x_q)$.

Явные формулы для $P + Q$

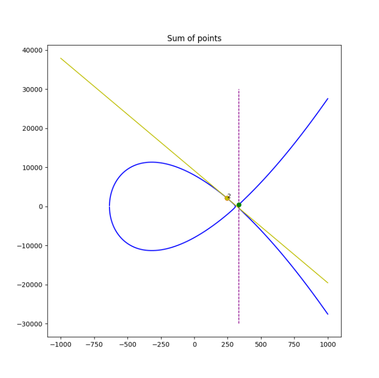
Пусть $P = (x_p, y_p), Q = (x_q, y_q), R = (x_r, y_r)$, где $R = P + Q$ и $P \neq Q$. Тогда мы имеем:

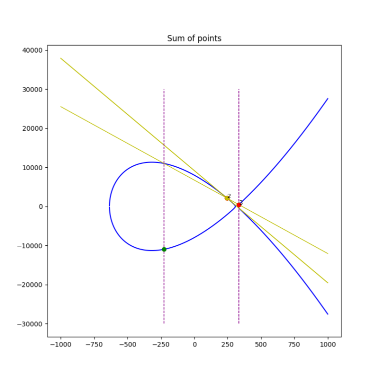
$$x_r = m^2 - x_p - x_q$$
$$y_r = y_p + m(x_r - x_p)$$

где $m = (y_p - y_q)/(x_p - x_q)$.

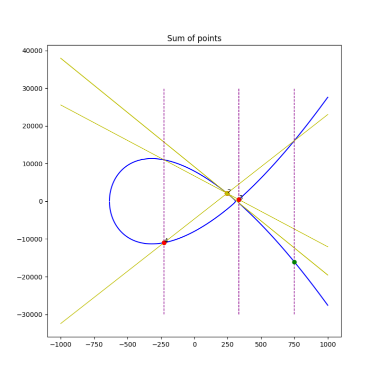
Таким образом зная хотя бы одну точку $P \notin \mathrm{Tor}\,(E(\mathbb{Q}))$, можно явно найти бесконечно точек вида $P, 2P, \ldots, nP$.

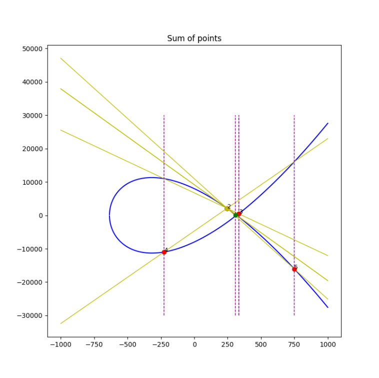
Наглядное умножение на скаляр в исходной задаче



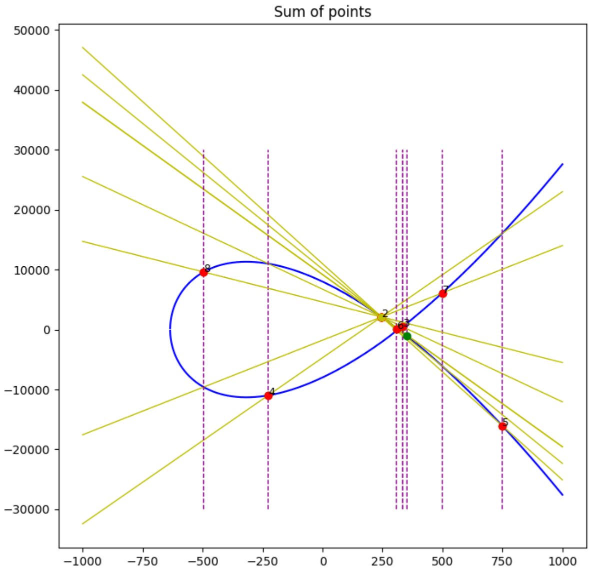


Наглядное умножение на скаляр в исходной задаче





Финальная картинка



Теперь у нас все готово для решения первоначальной задачи. Дадим краткое описания алгоритма, который был реализован.

Алгоритм. Шаг 1.

Программа приводит кубику

$$x^3+y^3+z^3+(1-N)(x^2y+y^2x+x^2z+z^2x+y^2z+z^2y)+(3-2N)xyz=0 \qquad (*).$$

к нормальной форме Вейештрасса. То есть находит коэффициенты a, b и прямое и обратное преобразование.

Замечание

Хоть для кубик вида $(*)$ известны явные формолы для коэффициентов a, b, а так же для преобразования в терминах N, программа проделывает это вычисления отдельно. Это позволяет применить этот алгоритм почти для произвольной кубики.

Алгоритм. Шаг 2.

На кубике находится произвольная рациональная точка $P \notin \mathrm{Tor}\,(E(\mathbb{Q}))$. Это выполняется простым перебором числа $x = \frac{p}{q}$ где p, q ищутся в определенных пределах.

Алгоритм. Шаг 3.

Далее найденная точка умножается на себя n раз. Именно поэтому важно, чтобы исходная точка не являлась точкой кручения.

Алгоритм. Шаг 4.

Находятся координаты точек в изначальной системе. Отбираются точки у которых все координаты одного знака.

Алгоритм. Итог

В случае исходной задачи

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = 4, \qquad x, y, z \in \mathbb{N}.$$

При удачном выборе P, точка $9P$ будет соответсвовать решению уравнения. В котором будет порядка 80 цифр.