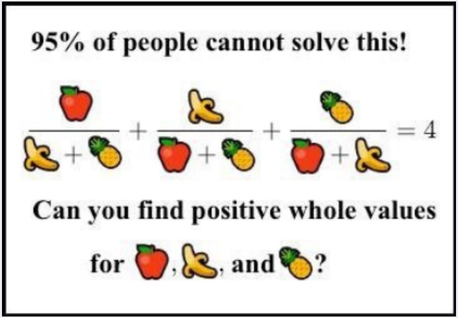
Необычная задача кубического представления

Алексей Кислицын   Андрей Владимиров   Всеволод Триль

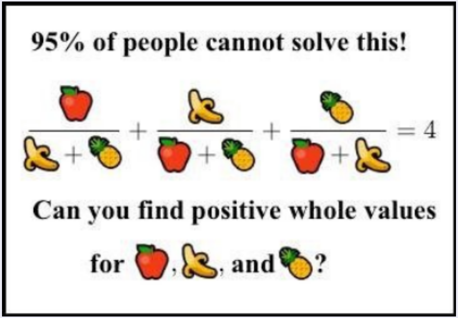
Механико-математический факультет МГУ

24 ноября 2022 г.

Всё началось с решения, кажущейся на первый взгляд, детской задачки:



Всё началось с решения, кажущейся на первый взгляд, детской задачки:



В этом докладе мы предъявим решение данной задачи, а также постараемся её обобщить и проанализировать.

Переформулируем ей в математических терминах: требуется найти все натуральные решения следующего уравнения

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = N, \qquad N, a, b, c \in \mathbb{N}.$$

Для задачи на картинке имеем $N = 4$.

Переформулируем ей в математических терминах: требуется найти все натуральные решения следующего уравнения

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=N, \qquad N,a,b,c\in\mathbb{N}.$$

Для задачи на картинке имеем $N=4$.

Заметим, что решение исходного уравнения равносильно нахождению натуральных точек на следующей кубике:

$$a^3+b^3+c^3+(1-N)(a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b)+(3-2N)abc=0.$$

Переформулируем ей в математических терминах: требуется найти все натуральные решения следующего уравнения

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = N, \qquad N, a, b, c \in \mathbb{N}.$$

Для задачи на картинке имеем $N = 4$.

Заметим, что решение исходного уравнения равносильно нахождению натуральных точек на следующей кубике:

$$a^3+b^3+c^3+(1-N)(a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b)+(3-2N)abc=0.$$

Но перед тем, как перейти к решению исходной задачи, рассмотрим более простую задачу – поиск натуральных точек на квадрике здесь будет про квадрику

Приведение к нормальной форме Вейерштрасса

Перейдём к основной задаче, как и в случае квадрики приведём кубику

$$a^3+b^3+c^3+(1-N)(a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b)+(3-2N)abc=0$$

к наиболее простому виду – нормальной форме Вейерштрасса, которая в однородных координатах $(x:y:z)$ может быть записана так:

$$y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Приведение к нормальной форме Вейерштрасса

Перейдём к основной задаче, как и в случае квадрики приведём кубику

$$a^3+b^3+c^3+(1-N)(a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b)+(3-2N)abc=0$$

к наиболее простому виду – нормальной форме Вейерштрасса, которая в однородных координатах $(x:y:z)$ может быть записана так:

$$y^2z=x^3+axz^2+bz^3, \quad a,b\in\mathbb{C}.$$

В нашем случае, так как коэффициенты кубики целые и проективные преобразования будут с целыми коэффициентами, то $a,b\in\mathbb{Z}$.

Шаг 0. Нахождение рациональных точек перегиба

Шаг 1. Избавление от монома y^3

Шаг 2. Избавление от мономов y^2x и yx^2

Шаг 3. Выделение y^2z и избавление от x^2z