

# Конкурентные прямые.

В этом разделе мы рассмотрим целый класс задач, в которых требуется доказать, что какие-то прямые пересекаются в одной точке (или параллельны), такие прямые ещё называют *конкурентными*. Как правило их три, но может быть сколько угодно. В данном разделе мы ограничимся рассмотрением примеров, где в основном фигурируют только три прямые.

## Методы решения задач

### Метод масс

Для начала введем несколько базовых понятий.

**Определение.** Материальная точка — точка, которой *приписана* некоторая масса.

**Определение.** Моментом материальной точки  $A(m)$  относительно точки  $Z$  называют вектор  $m\overrightarrow{ZA}$ .

**Определение.** Точка  $Z$  называется **центром масс** системы материальных точек  $A_1(m_1), A_2(m_2), \dots, A_n(m_n)$ , если  $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{ZA_i} = \vec{0}$ .

**Договоримся о следующем:** Пусть имеется любая система материальных точек  $\mathfrak{M} = \{A_1(m_1), A_2(m_2), \dots, A_n(m_n)\}$  с центром масс  $Z$ . Тогда, говоря в дальнейшем о *системе материальных точек*  $\mathfrak{M}$  (возможно, опуская значок  $\mathfrak{M}$ ), мы будем подразумевать подсистему  $\mathfrak{M}'$ , такую что  $\mathfrak{M}' = \{A_i(m_i) \mid A_i(m_i) \in \mathfrak{M}, A_i \neq Z, m_i \neq 0\}$ . То есть, мы просто убрали из  $\mathfrak{M}$  материальные точки, которые не влияют на *центр масс* системы. А так как нас по сути интересует только центр масс системы, то можно считать, что в рамках нашей теории  $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}'$ .

В качестве физической интерпретации теории масс можно использовать следующие соображения: положительной массе материальной точки мы сопоставим *грузик* соответствующей массы, а отрицательной массе — *шарик* с соответствующей подъемной силой.

**Теорема** (о существовании центра масс). *Центр масс произвольной системы  $A_1(m_1), \dots, A_n(m_n)$  всегда существует, если  $\sum_{i=1}^n m_i \neq 0$ .*

*Доказательство.*

□ Рассмотрим произвольную точку  $X$ . Тогда для любой точки плоскости  $O$  имеет место равенство  $\sum_{i=1}^n m_i (\overrightarrow{XA_i} - \overrightarrow{OX}) = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i}$ . Тогда, чтобы точка  $O$  была *центром масс* системы, должно выполняться равенство  $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0} \iff \sum_{i=1}^n m_i (\overrightarrow{XA_i} - \overrightarrow{OX}) = \vec{0} \iff \overrightarrow{XO} = \frac{\sum (m_i \overrightarrow{XA_i})}{\sum m_i}$ . Таким образом, утверждение о существовании *центра масс* свелось к утверждению, что существует вектор  $\overrightarrow{XO}$ , заданный соответствующим соотношением, а он, понятное дело, существует. ■

**Примечание.** Если условие  $\sum_{i=1}^n m_i \neq 0$  не выполняется, то величина

$|\overrightarrow{XO}| = \frac{|\sum m_i \overrightarrow{XA_i}|}{\sum m_i}$  не имеет смысла, поэтому это ограничение на сумму масс существенно.

Физически объяснить отсутствие центра масс у системы материальных точек, сумма масс которой равна нулю, можно, например, следующим способом. Действительно, пусть имеется центр масс  $Z$  у системы  $\mathfrak{M} = \{A_i(m_i) \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ , причем  $\sum_{i=1}^n m_i = 0$ . Тогда система  $A_1(m_1), B(-m_1)$  имеет ц.м.  $Z$  (по теореме о группировке масс, см. далее), где  $B$  — ц.м. системы  $\mathfrak{M} \setminus \{A_1(m_1)\}$ . Тогда, по определению центра масс,  $\exists O: m_1 \overrightarrow{OA_1} + (-m_1) \overrightarrow{OB} = \vec{0} \iff A_1 = B$ . Таким образом, мы доказали, что если центр масс у системы  $\mathfrak{M}$  существует, то он обязательно совпадает с одной из ее материальных точек, что противоречит договоренности, описанной выше. Полученное противоречие завершает доказательство.

**Теорема** (о единственности центра масс). *Если центр масс системы  $A_1(m_1), \dots, A_n(m_n)$  существует, то он единственен.*

*Доказательство.*

□ От противного. Пусть существуют два различных центра масс  $Z$  и  $Z'$ . Тогда по определению имеем:  $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{ZA_i} = \vec{0}, \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{Z'A_i} = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{ZZ'} =$

$$\vec{0} \iff \overrightarrow{ZZ'} \sum_{i=1}^n m_i = \vec{0}. \iff \overrightarrow{ZZ'} = \vec{0} \text{ (последний переход верен, так как}$$

центр масс существует, то есть  $\sum_{i=1}^n m_i \neq 0$ )  $\iff Z = Z'$ , что противоречит предположению, что точки  $Z$  и  $Z'$  различны.  $\implies$  центр масс  $Z$  единственен. ■

Далее будем считать, что  $\sum_{i=1}^n m_i \neq 0$ .

**Теорема** (о группировке масс). Пусть есть система материальных точек  $A_1(m_1), A_2(m_2), \dots, A_n(m_n), B_1(k_1), B_2(k_2), \dots, B_l(k_l)$ , и подсистема  $A_1(m_1), A_2(m_2), \dots, A_n(m_n)$  имеет центр масс  $W$ . Назовем редуцированной системой систему  $W(m_1 + \dots + m_n), B_1(k_1), B_2(k_2), \dots, B_l(k_l)$ . Тогда исходная система имеет ц.м.  $Z$  в том и только том случае, когда редуцированная система имеет ц.м.  $Z$ .

*Доказательство.*

□ Согласно определению центра масс, надо доказать равносильность  $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{ZA_i} + \sum_{j=1}^l k_j \overrightarrow{ZB_j} = \vec{0} \iff \sum_{j=1}^l k_j \overrightarrow{ZB_j} + \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{ZW} = \vec{0}$ . То есть надо показать равенство:  $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{ZA_i} = \overrightarrow{ZW} \sum_{i=1}^n m_i \iff \sum_{i=1}^n m_i (\overrightarrow{ZA_i} - \overrightarrow{ZW}) = \vec{0} \iff \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{WA_i} = \vec{0}$ , что верно в силу того, что  $W$  — центр масс подсистемы  $A_1(m_1), A_2(m_2), \dots, A_n(m_n)$ . ■

Метод масс широко используется при доказательстве теорем и задач на конкурентность прямых, причем их может быть любое количество, а ключевым элементом решения является именно *теорема о группировке масс*.

## Теорема Чевы

Один из самых мощных методов доказательства того, что три прямые проходят через одну точку или параллельны. Приведем ниже доказательство через *метод масс*. С другими доказательствами этой теоремы (через площадь, подобие и др.) вы можете ознакомиться в других источниках, например, в книге Я. П. Понарина «Элементарная геометрия. Том 1».

**Теорема Чевы.** Пусть на прямых  $AB, BC, CA$ , определяющих треугольник  $ABC$ , даны точки  $C_1, A_1, B_1$ . Для того, чтобы прямые  $AA_1, BB_1, CC_1$

пересекались в одной точке или были параллельными, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = 1$$

*Доказательство.*

□ Пусть  $AA_1 \cap BB_1 = P$ ,  $CP \cap AB = C_1$ . Поместим массы 1,  $\frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}}$ ,

$\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}$  в точки  $C$ ,  $B$ ,  $A$  соответственно.

Тогда центр масс точек  $B$  и  $C$  находится в  $A_1$ , а значит, сгруппировав массы из  $B$  и  $C$  в  $A_1$  получим, что центр масс вершин  $\triangle ABC$  лежит на прямой  $AA_1$  (центр масс двух точек лежит на прямой, содержащей эти точки).

Аналогично получаем, что он лежит и на  $BB_1$ . Следовательно,  $P$  — центр масс вершин  $\triangle ABC$ , согласно *теореме о единственности центра масс*. Так как  $P \in CC_1$ , центр масс точек  $B$

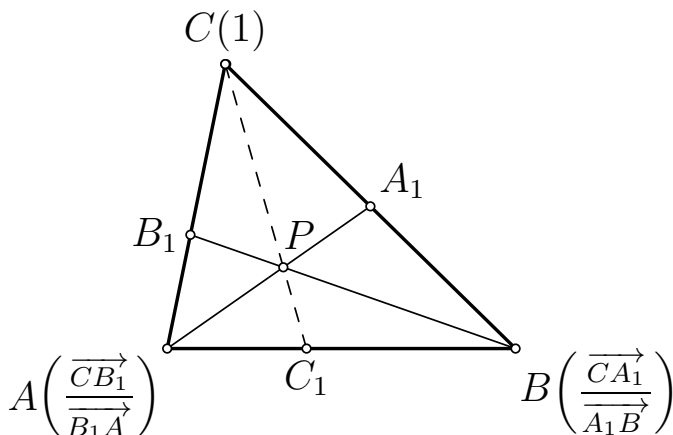
и  $A$  находится в  $C_1$ . Из этого следует, что  $\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{C_1B} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} = \vec{0} \iff$

$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = 1$ . Мы доказали сразу и *необходимость*, и *достаточность*, потому что полученное выражение является критерием принадлежности точки  $P$  прямой  $CC_1$ , то есть того, что все три чевианы проходят через одну точку.

Пусть теперь прямые  $AA_1$  и  $BB_1$  параллельны. Докажем, что тогда прямая  $CC_1$  им параллельна. От противного. Пусть  $CC_1 \cap BB_1 = P$ , тогда, аналогично доказанному выше, получаем, что через точку  $P$  проходит прямая  $AA_1$ , так как  $P$  — центр масс вершин  $\triangle ABC$ , а мы доказали, что если две прямые через него проходят, то и третья тоже через него проходит, но  $P \in BB_1$  противоречит предположению  $AA_1 \parallel BB_1$ .  $\implies CC_1 \parallel BB_1 \parallel AA_1$ . ■

**Примечание.** По сути  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$  равносильно тому, что у треугольника с заданными массами не существует центра масс.

К этому ещё можно относиться так: будем считать, что существует *бесконечно удаленная* прямая, содержащая *бесконечно удаленные* точки, через каждую из которых проходит свое семейство параллельных прямых. Тогда, в случае, ко-



гда  $AA_1 \parallel BB_1$ , можно считать, что  $AA_1 \cap BB_1 = M$ , где  $M$  — бесконечно удаленная точка. А так как  $M \in CC_1$ , то  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ .

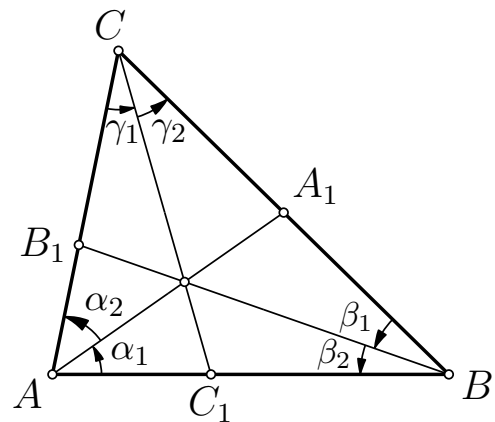
Формулу теоремы Чевы несложно запомнить, если при записи отношений пользоваться правилом «в числителе: вектор от текущей вершины до основания чевяны, для которого еще не записано отношение, а в знаменателе: вектор от текущего основания чевяны до другой вершины на данной прямой, содержащей основание чевяны и предыдущую вершину». То есть мы обходим треугольник по или против часовой стрелки и записываем отношения по данному правилу. Аналогичное правило применимо и к угловой теореме Чевы.

## Дополнение

### Тригонометрическая (угловая) форма теоремы Чевы.

Если ввести в рассмотрение *ориентированные* углы  $\alpha_1 = \angle BAA_1$ ,  $\alpha_2 = \angle A_1AC$ ,  $\gamma_1 = \angle ACC_1$ ,  $\gamma_2 = \angle C_1CB$ ,  $\beta_1 = \angle CBB_1$ ,  $\beta_2 = \angle B_1BA$ , то соотношение теоремы Чевы можно представить в эквивалентном виде через синусы этих углов, а именно

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = 1$$



Предлагаем читателю доказать данное утверждение самостоятельно, это будет хорошим упражнением.

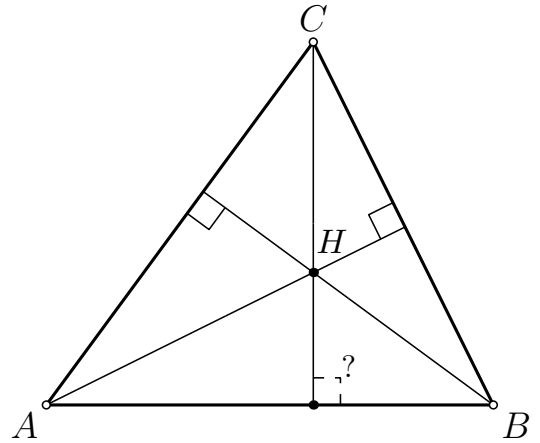
## Теорема Дезарга

**Теорема Дезарга (обратная).** Если прямые  $AB$  и  $A_1B_1$ ,  $BC$  и  $B_1C_1$ ,  $CA$  и  $C_1A_1$  пересекаются, и точки их пересечения лежат на одной прямой, то прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ , соединяющие вершины треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ , конкурентны.

Доказательство данного факта мы здесь приводить не будем, так как это выходит за рамки данного раздела. Отметим только, что эту теорему можно доказать, например, с использованием теоремы Менелая или с помощью выхода в пространство. С одним из них вы можете ознакомиться самостоятельно, скажем, в книге «Элементарная Геометрия Том 1».

## Принадлежность точки пересечения двух прямых третьей

Можно попробовать доказать, что точка пересечения каких-то двух прямых из трех принадлежит третьей. Классическим примером является доказательство того, что *высоты, медианы, серединные перпендикуляры и биссектрисы* треугольника пересекаются в одной точке. С помощью данного метода иногда так же легко доказываются и более сложные вещи, например, то, что *радикальные оси* трех окружностей конкурентны. Точнее, таким способом можно доказать, что в *нетривиальном* случае они проходят через одну точку, а *тривиальный* случай можно разобрать отдельно. Этот метод можно по-разному использовать, например, доказать конкурентность высот треугольника можно исходя из следующих соображений: *проведем две высоты и третью прямую, проходящую через точку пересечения двух высот и через третью вершину треугольника, а потом докажем, что это и будет искомая высота.*



## Преобразование плоскости

Можно сделать *преобразование плоскости*  $f$ , отображающее плоскость на себя, которое переводит исходные прямые  $a, b, c$ , про которые нам нужно доказать, что они конкурентны, в некоторые прямые  $a', b', c'$ , причем,  $a \parallel a', b \parallel b', c \parallel c'$ . Тогда их образы  $a', b', c'$  конкурентны в том и только том случае, когда исходные прямые  $a, b, c$  были таковыми.

*Необходимость.*

Пусть  $a \cap b \cap c = M; \forall i \in \{a, b, c\}: f(i) = i'$  и  $f(M) = M'$ . Заметим, что  $\forall i \in \{a, b, c\}: M \in i \Rightarrow M' \in f(i) \Rightarrow M' \in a', b', c'$ .

Если же  $a \parallel b \parallel c$ , то, т.к.  $f$  переводит  $a, b, c$  в параллельные им прямые, имеем следующее:  $a \parallel b \parallel c \Rightarrow f^{-1}(a) \parallel f^{-1}(b) \parallel f^{-1}(c) \iff a' \parallel b' \parallel c'$ .

*Достаточность.*

Пусть  $a', b', c'$  — образы прямых  $a, b, c$  соответственно при преобразовании плоскости  $f, a' \cap b' \cap c' = M', f^{-1}(M') = M$ . Тогда

$$\left. \begin{array}{l} f^{-1}(a') = a \\ f^{-1}(b') = b \\ f^{-1}(c') = c \\ f^{-1}(M') = M \\ M' \in a', b', c' \end{array} \right\} \Rightarrow M \in a, b, c$$

Если же  $a' \parallel b' \parallel c'$ , то, т.к.  $f$  переводит  $a, b, c$  в параллельные им прямые и  $f$  — биективное преобразование плоскости, имеем следующее:  $a' \parallel b' \parallel c' \implies f^{-1}(a') \parallel f^{-1}(b') \parallel f^{-1}(c') \iff a \parallel b \parallel c$ .

(Данный метод применим не только для случая  $n = 3$ , но и для любого количества прямых)

**Примечание.** Если требуется только, чтобы прямые  $a, b, c$  пересекались в одной точке, то достаточно, чтобы  $f$  переводило  $a, b, c$  в любые прямые. В таком случае пересечение прямых  $a, b, c$  в одной точке, по вышеописанным причинам, также сохраняется.

## Известные прямые

Посмотреть, может быть это какие-то известные три прямые, про которые вы знаете, что они конкурентны, например, это могут быть три прямые, которые являются радикальными осями каких-то окружностей или медианами/биссектрисами/высотами, или просто конкурентными чевианами в каком-нибудь треугольнике. Можно также начать действовать с конца. То есть в предположении, что утверждение доказано выявить какие-нибудь полезные *признаки* картинки и попытаться ими воспользоваться. Таким образом можно свести исходную задачу к равенству углов, подобию/гомотетичности треугольника и т.п., и постараться доказать уже новое утверждение.

## Изогонали и изогональное сопряжение

В продолжение предыдущего подраздела про известные прямые рассмотрим такие прямые, которые называют *изогоналями*.

**Определение.** Прямые  $AP$  и  $AQ$  называются *изогоналями* относительно данного угла  $BAC$ , если  $\angle PAB = \angle QAC$ . (Что, очевидно, эквивалентно следующему:  $AP$  и  $AQ$  симметричны относительно биссектрисы угла  $BAC$ ).

**Теорема (основная теорема об изогоналях).** Пусть имеются прямые  $a, b, c$ , проходящие через точки  $A, B, C$  соответственно. Тогда  $a, b, c$  конкурентны  $\iff a', b', c'$  конкурентны, где  $a'$  и  $a$ ;  $b'$  и  $b$ ;  $c'$  и  $c$  — изогонали относительно углов  $A, B, C$  соответственно.

*Доказательство.*

□ Докажем сначала, что из конкурентности прямых  $a, b, c$  следует конкурентность прямых  $a', b', c'$ .

Положим  $\angle PCB = \gamma$ ,  $\angle BAP = \alpha$ ,  
 $\angle CBP = \beta$ ,  $\angle P'CP = \gamma'$ ,  $\angle PAP' = \alpha'$ ,  
 $\angle PBP' = \beta'$  (здесь все углы ориентированные). Тогда для прямых  $a, b, c$  из угловой теореме Чебы имеем следующее:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \alpha')} \cdot \frac{\sin(\gamma + \gamma')}{\sin \gamma} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \beta')} = 1$$

А теперь заметим, что

$$\frac{\sin(\alpha + \alpha')}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin(\gamma + \gamma')} \cdot \frac{\sin(\beta + \beta')}{\sin \beta} = 1$$

Но ведь это — выражение угловой формы теоремы Чебы для прямых  $a', b', c'$ . А значит, согласно угловой теореме Чебы,  $a', b', c'$  конкурентны. Обратное следствие доказывается аналогично. ■

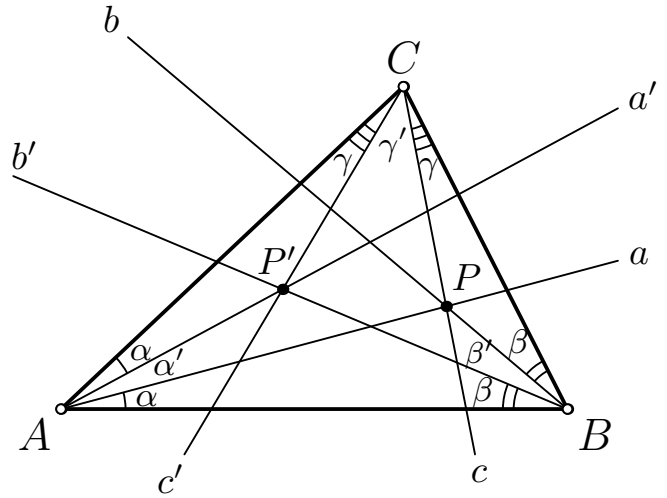
**Примечание.** Точки  $P$  и  $P'$  называют *изогонально сопряжёнными* относительно **треугольника**  $ABC$ , если они существуют, то есть если соответствующие прямые непараллельны. Отметим так же, что нам не пришлось отдельно разбирать случай, когда прямые  $a, b, c$  параллельны, так как это учтено в угловой теореме Чебы.

Используя данный метод, можно мгновенно получить, например, что высоты пересекаются в одной точке. Для этого достаточно заметить, что  $\angle OAC = \angle H_a AB$ , где  $AH_a$  — высота в треугольнике  $ABC$ . То есть  $AH_a$  и  $AO$  — изогоналы относительно угла  $CAB$  треугольника  $ABC$ . Проведя аналогичные рассуждения для оставшихся двух высот и применив к ним вышесформулированную теорему, получим требуемое.

Пересечение *симедиан* в одной точке также доказывается в один ход, а именно: медианы пересекаются в одной точке, а симедианы *по определению* симметричны медианам относительно биссектрис углов. Применяя теперь только что доказанную теорему, получим искомое утверждение.

Приведем ниже, как дополнение, интересный факт, доказательство которого вы можете найти, например, в статье «Теорема об изогоналях» А.Куликовой и Д.Прокопенко.

**Теорема.** Пусть  $OB$  и  $OC$  — изогоналы угла  $AOD$ . Прямые  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $Q$ , прямые  $AB$  и  $CD$  — в точке  $P$ . Тогда  $OP$  и  $OQ$  — также изогоналы относительно угла  $AOD$ .





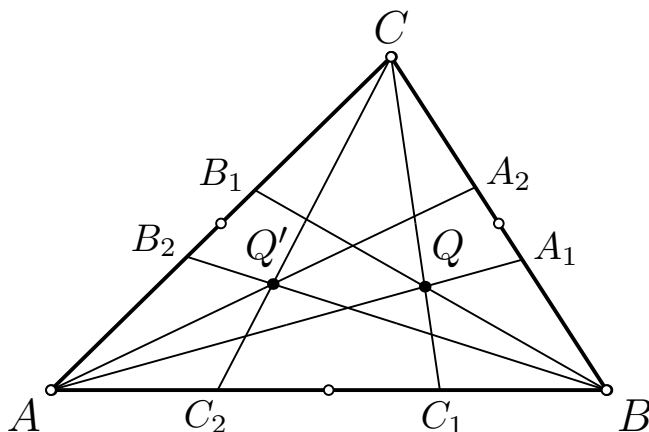
## Изотомическое сопряжение

**Определение.** Точки  $P$  и  $Q$  называются **изотомически сопряженными** относительно отрезка  $AB$ , если они симметричны относительно середины этого отрезка.

**Теорема.** Пусть на прямых  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$ , образующих треугольник  $ABC$ , отмечены точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  соответственно. Точки  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  изотомически сопряжены точкам  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  относительно отрезков  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  соответственно. Тогда для того, чтобы прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  были конкурентны, необходимо и достаточно, чтобы прямые  $AA_2$ ,  $BB_2$ ,  $CC_2$  были таковыми.

*Доказательство.*

□ Докажем сначала, что из конкурентности прямых  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  следует конкурентность прямых  $AA_2$ ,  $BB_2$ ,  $CC_2$ .



По определению *изотомического сопряжения* имеем:  $\overrightarrow{AB_2} = \overrightarrow{B_1C'} = \vec{x}$ ,  $\overrightarrow{CA_2} = \overrightarrow{A_1B} = \vec{y}$ ,  $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{C_2A} = \vec{z}$ . Положим  $B_2B_1 = \vec{x}_1$ ,  $A_2A_1 = \vec{y}_1$ ,  $C_2C_1 = \vec{z}_1$ .

Тогда, применив теорему Чебы для прямых  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ , получим:

$$\frac{\vec{x} + \vec{x}_1}{\vec{x}} \cdot \frac{\vec{y} + \vec{y}_1}{\vec{y}} \cdot \frac{\vec{z} + \vec{z}_1}{\vec{z}} = 1$$

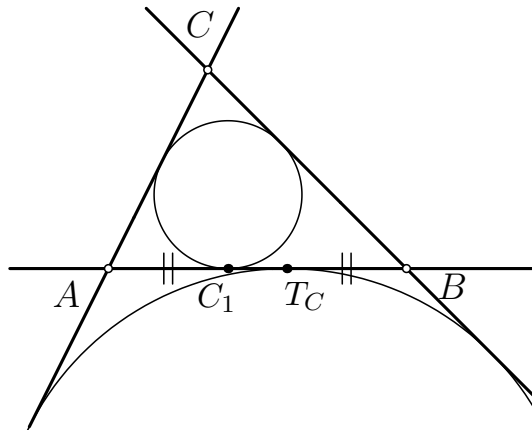
Теперь заметим, что имеет место равенство

$$\frac{\vec{x}}{\vec{x} + \vec{x}_1} \cdot \frac{\vec{y}}{\vec{y} + \vec{y}_1} \cdot \frac{\vec{z}}{\vec{z} + \vec{z}_1} = 1$$

А значит, согласно теореме Чебы, прямые  $AA_2$ ,  $BB_2$ ,  $CC_2$  конкурентны. Следствие в обратную сторону доказывается аналогично. ■

**Примечание.** Точки  $Q$  и  $Q'$  называются *изотомически сопряженными* относительно **треугольника**  $ABC$ , если они существуют, то есть если соответствующие прямые непараллельны. Отметим так же, что нам не пришлось отдельно разбирать случай, когда прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  параллельны, так как это учтено в теореме Чебы.

Несложно видеть, что точки касания вписанной и соответствующей внеписанной окружностей изотомически сопряжены относительно соответствующей стороны треугольника  $ABC$  (см. рис.). Тогда, проделывая аналогичные рассуждения для всех сторон треугольника  $ABC$  и применяя только что доказанную теорему, получим, что точки Нагеля и Жергонна *изотомически сопряжены*.



Понятное дело, что это далеко не самый полный список методов доказательства подобного рода задач. Цель данного раздела — показать, в каких направлениях можно начать действовать в задачах такого типа.

## Примеры

Давайте рассмотрим теперь применение данных методов при решении конкретных задач. Примеры специально разбираются так подробно, чтобы продемонстрировать решение задачи от идеи до полного, окончательного решения.

**Пример 1.** В треугольнике  $ABC$   $AL_a$ ,  $BL_b$ ,  $CL_c$  — биссектрисы,  $K_a$  — точка пересечения касательных к описанной окружности в вершинах  $B$  и  $C$ ,  $K_b$ ,  $K_c$  определены аналогично. Докажите, что прямые  $K_aL_a$ ,  $K_bL_b$  и  $K_cL_c$  пересекаются в одной точке. (*Заочный тур олимпиады им. И.Ф.Шарыгина 2019*)

**Решение.** Чтобы понять, какой из вышеописанных методов поможет в решении данной задачи, обратимся к рисунку (см. рис. 1). Из известных преобразований плоскости тут мало что может помочь. Действительно, используя, *поворот*, или *осевую симметрию*, или *параллельный перенос* — не совсем понятно относительно чего производить эти преобразования, и что куда при них перейдет. *Инверсия* здесь явно не поможет, потому что данные прямые не проходят через центр какой-нибудь «удобной» окружности, и поэтому вообще перейдут в окружности, следовательно нам ничего доказать не удастся. Использование *гомотетии* также не кажется, по крайней мере на первый взгляд, осмысленным, т.к. мы ничего не можем сказать про отношения отрезков (кроме, разве что, в  $\triangle ABC$ ), поэтому не поймем что куда перейдет. Остается последний вариант — теорема Чевы. На первый взгляд её использование здесь вам может показаться неуместным, но не торопитесь с выводами.

Итак, давайте разбираться, как же все-таки здесь использовать теорему Чебы.

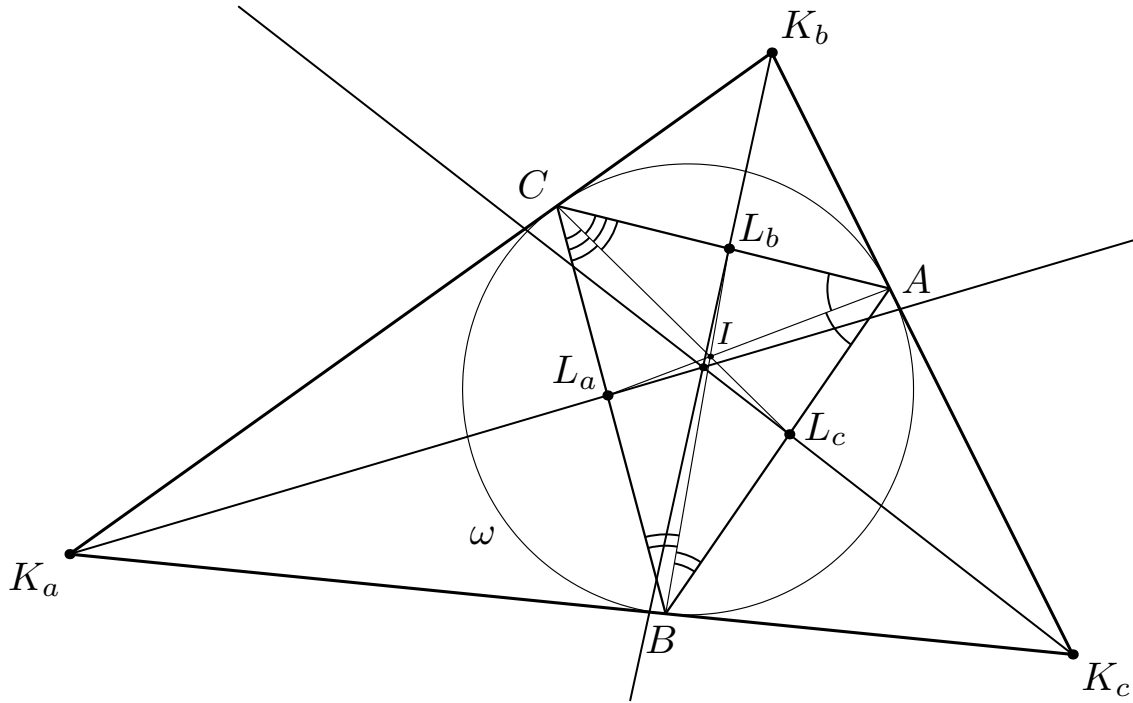
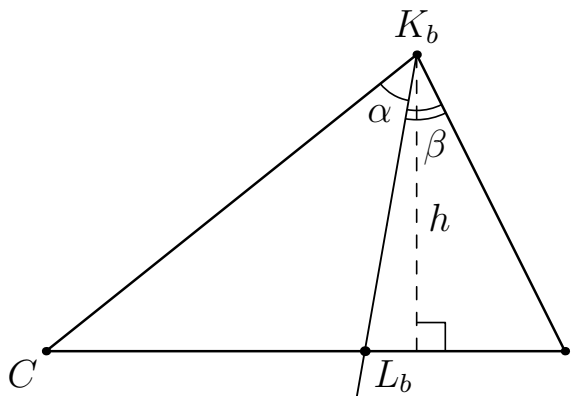


Рис. 1

Как мы помним, в теореме Чебы нам нужно, чтобы произведение отношений соответствующих направленных отрезков было равно 1, тогда и только тогда прямые пересекутся в одной точке. Здесь отношения таких отрезков считать неудобно, поэтому давайте лучше постараемся все-таки понять что-то про расположение данных прямых. Единственное, отношение чего мы знаем — отношения отрезков, содержащие основания биссекрис  $\triangle ABC$ . Было бы хорошо понять что-нибудь про расположение самих прямых, например, углы относительно сторон  $\triangle K_a K_b K_c$ . Давайте отдельно перерисуем фрагмент рисунка, содержащий одну из трех прямых ( $K_a L_a$ ,  $K_b L_b$ ,  $K_c L_c$ ), и исследуем его.



$$S_{AK_b L_b} = \frac{K_b L_b \cdot K_b A \cdot \sin \beta}{2}.$$

Попробуем что-то узнать про углы  $\alpha$  и  $\beta$ , учитывая отношение  $\frac{CL_b}{L_b A}$ . Давайте вспомним, что площадь треугольника можно посчитать как полупроизведение сторон на синус угла между ними. То есть  $S_{CK_b L_b} = \frac{CK_b \cdot K_b L_b \cdot \sin \alpha}{2}$ . Аналогично

$$\text{Откуда получаем } \frac{S_{CK_b L_b}}{S_{AK_b L_b}} = \frac{CK_b \cdot \sin \alpha}{K_b A \cdot \sin \beta}.$$

гой стороны  $S_{AK_bL_b} = \frac{h \cdot L_b A}{2}$  и  $S_{CK_bL_b} = \frac{h \cdot L_b C}{2}$ .

Тогда  $\frac{S_{CK_bL_b}}{S_{AK_bL_b}} = \frac{L_b C}{L_b A}$ . И окончательно  $\frac{S_{CK_bL_b}}{S_{AK_bL_b}} = \frac{CK_b \cdot \sin \alpha}{K_b A \cdot \sin \beta} = \frac{L_b C}{L_b A}$ .

Но ведь  $K_b C$  и  $K_b A$  — это отрезки касательных к окружности  $\omega$  из одной точки  $\Rightarrow K_b C = K_b A$ .

В итоге полученное выражение приобретает вид  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{L_b C}{L_b A}$ .

Мы видим отношение двух синусов, что наталкивает нас на мысль о том, что на самом деле мы будем использовать *угловую* форму теоремы Чевы.

Теперь остается лишь написать схожее отношение для всех трех прямых и перемножить.

$$\frac{\sin \angle K_c K_a L_a}{\sin \angle L_a K_a K_b} \cdot \frac{\sin \angle K_a K_b L_b}{\sin \angle L_b K_b K_c} \cdot \frac{\sin \angle K_b K_c L_c}{\sin \angle L_c K_c K_a} = \frac{BL_a}{L_a C} \cdot \frac{CL_b}{L_b A} \cdot \frac{AL_c}{L_c B} = 1$$

(последнее равенство верно, т.к. биссектрисы пересекаются в одной точке)

Тогда, согласно «*угловой*» форме теоремы Чевы, прямые  $K_a L_a$ ,  $K_b L_b$ ,  $K_c L_c$  пересекаются в одной точке. **Что и требовалось доказать.**

**Комментарий.** Вектора мы опустили, потому что основания биссектрис всегда лежат на сторонах треугольника. Однако стоит отметить, что условие « $BL_b$ ,  $AL_a$ ,  $CL_c$  — биссектрисы» мы использовали, только когда считали отношение синусов соответствующих углов. То есть, вообще-то говоря,  $BL_b$ ,  $AL_a$ ,  $CL_c$  могли быть любыми *чевианами* в  $\triangle ABC$ , основания которых лежат на сторонах треугольника, и которые пересекаются в одной точке.

**Пример 2.** В треугольнике  $ABC$   $AN_1$  и  $BN_2$  — высоты; касательная к описанной окружности в точке  $A$  пересекает  $BC$  в точке  $S_1$ , а касательная в точке  $B$  пересекает  $AC$  в точке  $S_2$ ;  $T_1$  и  $T_2$  — середины отрезков  $AS_1$  и  $BS_2$ . Докажите, что  $T_1 T_2$ ,  $AB$  и  $N_1 N_2$  пересекаются в одной точке. (*Заочный тур олимпиады им. И.Ф.Шарыгина 2019*)

**Решение.** На первый взгляд задача кажется достаточно трудной, однако можно снова обратиться к списку вышеописанных методов и выбрать нам подходящий, как мы делали в предыдущем примере.

**Пример 3.** Даны три окружности. Первая и вторая пересекаются в точках  $A_0$  и  $A_1$ , вторая и третья — в точках  $B_0$  и  $B_1$ , третья и первая — в точках  $C_0$  и  $C_1$ . Пусть  $O_{i,j,k}$  — центр описанной окружности треугольника  $A_i B_j C_k$ . Через все пары точек вида  $O_{i,j,k}$  и  $O_{1-i,1-j,1-k}$  провели прямые. Докажите, что эти 4 прямые пересекаются в одной точке или параллельны. (*Заочный тур*

**Решение.**

**Пример 4.** Каждая из окружностей  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  касается внешним образом окружности  $S$  (в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  соответственно) и двух сторон треугольника  $ABC$  (см. рис.). Докажите, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в одной точке. (*Всеросс., 1994, финал, 10*)

**Решение.**

## Задачи

ТУТ БУДУТ ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

## Подсказки

ТУТ БУДУТ ПОДСКАЗКИ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

## Список литературы

- [1] Я. П. Понарин Элементарная геометрия Том 1
- [2] А.Куликова, Д.Прокопенко — «Теорема об изогоналях»  
[http://geometry.ru/articles/isogonal\\_theorem\\_kvant\\_04\\_05.pdf](http://geometry.ru/articles/isogonal_theorem_kvant_04_05.pdf)