

Конкурентные прямые.

В этом разделе мы рассмотрим одну из самых встречающихся тем в олимпиадной геометрии (планиметрии). Это целый класс задач, в которых требуется доказать, что какие-то прямые пересекаются в одной точке (или параллельны), такие прямые ещё называют *конкурентными*. Как правило их три, но может быть и больше. В данном разделе мы ограничимся рассмотрением примеров, где в основном фигурируют только три прямые.

Методы решения задач

Метод масс

Для начала введем несколько базовых понятий.

Материальная точка — точка, которой «приписана» некоторая масса.

Моментом материальной точки $A(m)$ относительно точки Z называют вектор $m \overrightarrow{ZA}$.

Точка Z называется **центром масс** системы материальных точек

$A_1(m_1), A_2(m_2), \dots, A_n(m_n)$, если $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{ZA_i} = \vec{0}$.

Теорема (о существовании центра масс). *Центр масс произвольной системы $A_1(m_1), \dots, A_n(m_n)$ всегда существует, если $\sum_{i=1}^n m_i \neq 0$.*

Доказательство.

□ Рассмотрим произвольную точку X . Тогда для любой точки плоскости O имеет место равенство $\sum_{i=1}^n m_i (\overrightarrow{XA_i} - \overrightarrow{OX}) = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i}$. Тогда, чтобы точка O была **центром масс** системы, должно выполняться равенство $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0} \iff \sum_{i=1}^n m_i (\overrightarrow{XA_i} - \overrightarrow{OX}) = \vec{0} \iff \overrightarrow{XO} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{XA_i}}{\sum m_i}$. То есть

утверждение о существовании **центра масс** свелось к утверждению, что существует вектор \overrightarrow{XO} , заданный соответствующим соотношением, а он, понятное дело, существует. ■

Комментарий. Если условие $\sum_{i=1}^n m_i \neq 0$ не выполняется, то величина

$|\overrightarrow{XO}| = \left| \frac{\sum m_i \overrightarrow{XA_i}}{\sum m_i} \right|$ не имеет смысла, поэтому это ограничение на сумму масс существенно.

Теорема (о единственности центра масс). *Если центр масс системы $A_1(m_1), \dots, A_n(m_n)$ существует, то он единственен.*

Доказательство.

□ От противного. Пусть существуют два различных центра масс Z и Z' . Тогда по определению имеем: $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{ZA_i} = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{Z'A_i} = \vec{0}. \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{ZZ'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{ZZ'} \sum_{i=1}^n m_i = \vec{0}. \Leftrightarrow \overrightarrow{ZZ'} = \vec{0}$ (последний переход верен, так как центр масс существует, то есть $\sum_{i=1}^n m_i \neq 0$) $\Leftrightarrow Z = Z'$, что противоречит предположению, что точки Z и Z' различны. \Rightarrow центр масс Z единственен. ■

Далее будем считать, что $\sum_{i=1}^n m_i \neq 0$.

Теорема (о группировке масс). *Пусть есть система материальных точек $A_1(m_1), A_2(m_2), \dots, A_n(m_n), B_1(k_1), B_2(k_2), \dots, B_l(k_l)$, и подсистема $A_1(m_1), A_2(m_2), \dots, A_n(m_n)$ имеет центр масс W . Назовем редуцированной системой систему $W(m_1 + \dots + m_n), B_1(k_1), B_2(k_2), \dots, B_l(k_l)$. Тогда исходная система имеет ц.м. Z в том и только том случае, когда редуцированная система имеет ц.м. Z .*

Доказательство.

□ Согласно определению центра масс, надо доказать равносильность $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{ZA_i} + \sum_{j=1}^l k_j \overrightarrow{ZB_j} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^l k_j \overrightarrow{ZB_j} + \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{ZW} = \vec{0}$. То есть надо показать равенство: $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{ZA_i} = \overrightarrow{ZW} \sum_{i=1}^n m_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n m_i (\overrightarrow{ZA_i} - \overrightarrow{ZW}) = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{WA_i} = \vec{0}$, что верно в силу того, что W — центр масс подсистемы $A_1(m_1), A_2(m_2), \dots, A_n(m_n)$. ■

Метод масс широко используется при доказательстве теорем и задач на конкурентность прямых, причем их может быть любое количество, а ключевым элементом решения является именно *теорема о группировке масс*.

Теорема Чевы

Один из самых мощных методов доказательства того, что три прямые проходят через одну точку или параллельны. Приведем ниже доказательство через *метод масс*. С другими доказательствами этой теоремы (через площадь, подобие и др.) вы можете ознакомиться в других источниках, например, в книге Я. П. Понарина «Элементарная геометрия. Том 1».

Теорема (Чевы). Пусть на прямых AB , BC , CA , определяющих треугольник ABC , даны точки C_1 , A_1 , B_1 . Для того, чтобы прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекались в одной точке или были параллельными, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = 1$$

Доказательство.

□ Пусть $AA_1 \cap BB_1 = P$, $CP \cap AB = C_1$. Поместим массы 1, $\frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}}$, $\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}$ (здесь за \bar{v} обозначается вектор v) в точки C , B , A соответственно. Тогда центр масс точек B и C находится в A_1 , а значит, по теореме о группировке масс, центр масс вершин $\triangle ABC$ лежит на прямой AA_1 . Аналогично получаем, что он лежит и на BB_1 . Следовательно, P — центр масс вершин $\triangle ABC$, согласно теореме о единственности центра масс.

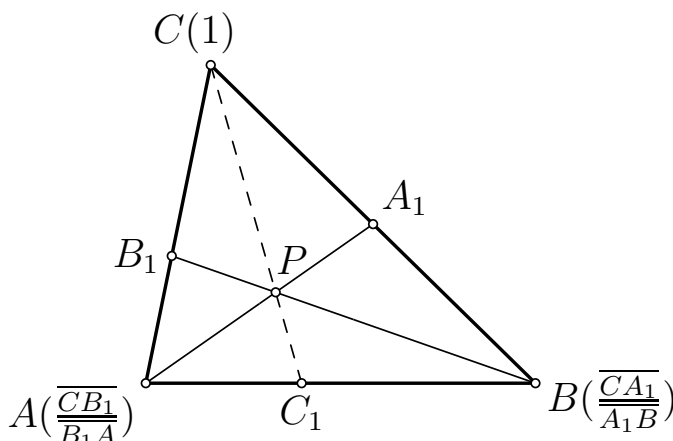
Так как $P \in CC_1$, центр масс точек B и A находится в C_1 . Из этого

следует, что $\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{C_1B} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} = \vec{0} \iff \frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = 1$. Мы

доказали сразу и *необходимость*, и *достаточность*, потому что полученное выражение является критерием принадлежности точки P прямой CC_1 , то есть

того, что все три чевианы проходят через одну точку.

Пусть теперь прямые AA_1 и BB_1 параллельны. Докажем, что тогда прямая CC_1 им параллельна. От противного. Пусть $CC_1 \cap BB_1 = P$, тогда, аналогично доказанному выше, получаем, что через точку P проходит прямая AA_1 , так как P — центр масс вершин $\triangle ABC$, а мы доказали, что если две прямые



через него проходят, то и третья тоже через него проходит, но $P \in AA_1$ противоречит предположению $AA_1 \parallel BB_1 \Rightarrow CC_1 \parallel BB_1 \parallel AA_1$. ■

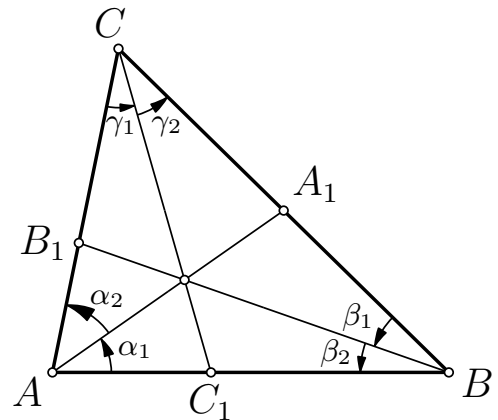
Формулу теоремы Чебы не сложно запомнить, если при записи отношений пользоваться правилом «в числителе: вектор от текущей вершины до основания чевяны, для которого еще не записано отношение, а в знаменателе: вектор от текущего основания чевяны до другой вершины на данной прямой, содержащей основание чевяны и предыдущую вершину». То есть мы обходим треугольник по или против часовой стрелки и записываем отношения по данному правилу.

Примечание

Тригонометрическая (угловая) форма теоремы Чебы.

Если ввести в рассмотрение *ориентированные* углы $\alpha_1 = \angle BAA_1$, $\alpha_2 = \angle A_1AC$, $\gamma_1 = \angle ACC_1$, $\gamma_2 = \angle C_1CB$, $\beta_1 = \angle CBB_1$, $\beta_2 = \angle B_1BA$, то соотношение теоремы Чебы можно представить в эквивалентном виде через синусы этих углов, а именно

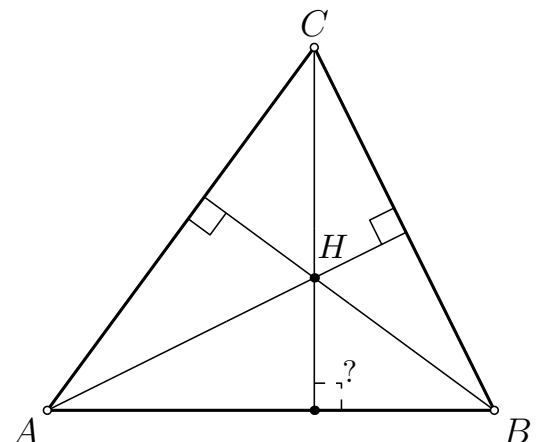
$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = 1$$



Предлагаем читателю доказать данное утверждение самостоятельно, это будет хорошим упражнением.

Принадлежность точки пересечения двух прямых третьей

Можно попробовать доказать, что точка пересечения каких-то двух прямых из трех принадлежит третьей прямой. Классическим примером является доказательство того, что высоты, медианы и биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. С помощью данного метода иногда так же легко доказываются и более сложные вещи, например, то, что *радикальные оси* трех окружностей конкurentны. Точнее, таким способом можно доказать, что в *нетривиальном* случае они проходят через одну точку, а *тривиальный* случай



можно разобрать отдельно. Этот метод можно по-разному использовать, например, доказать конкурентность высот треугольника можно исходя из следующих соображений: *проведем две высоты и третью прямую, проходящую через точку пересечения двух высот и через третью вершину треугольника, а потом докажем, что это и будет искомая высота.*

Преобразование плоскости

Можно сделать *преобразование плоскости* f , отображающее плоскость на себя, которое переводит исходные прямые a, b, c , про которые нам нужно доказать, что они конкурентны, в некоторые прямые a', b', c' , причем, $a \parallel a', b \parallel b', c \parallel c'$. Тогда, если их образы a', b', c' конкурентны, то и исходные прямые были таковыми.

Докажем равносильность конкурентности образов прямых и исходных прямых.

Необходимость.

Пусть $a \cap b \cap c = M$; $\forall i \in \{a, b, c\}: f(i) = i'$ и $f(M) = M'$. Заметим, что $\forall i \in \{a, b, c\}: M \in i \Rightarrow M' \in f(i) \Rightarrow M' \in a', b', c'$.

Если же $a \parallel b \parallel c$, то, т.к. f переводит a, b, c в параллельные им прямые, имеем следующее: $a \parallel b \parallel c \Rightarrow f^{-1}(a) \parallel f^{-1}(b) \parallel f^{-1}(c) \Leftrightarrow a' \parallel b' \parallel c'$.

Достаточность.

Пусть a', b', c' — образы прямых a, b, c соответственно при преобразовании плоскости f , $a' \cap b' \cap c' = M'$, $f^{-1}(M') = M$. Тогда

$$\left. \begin{array}{l} f^{-1}(a') = a \\ f^{-1}(b') = b \\ f^{-1}(c') = c \\ f^{-1}(M') = M \\ M' \in a', b', c' \end{array} \right\} \Rightarrow M \in a, b, c$$

Если же $a' \parallel b' \parallel c'$, то, т.к. f переводит a, b, c в параллельные им прямые и f — *биективное* преобразование плоскости, имеем следующее: $a' \parallel b' \parallel c' \Rightarrow f^{-1}(a') \parallel f^{-1}(b') \parallel f^{-1}(c') \Leftrightarrow a \parallel b \parallel c$.

(Данный метод применим не только для случая $n = 3$, но и для любого количества прямых)

Комментарий. Если требуется только, чтобы прямые a, b, c пересекались в одной точке, то достаточно, чтобы f переводило a, b, c в любые прямые. В таком случае пересечение прямых a, b, c в одной точке, по вышеописанным причинам, также сохраняется.

Известные прямые

Посмотреть, может быть это какие-то известные три прямые, про которые вы знаете, что они конкурентны, например, это могут быть три прямые, которые являются радикальными осями каких-то окружностей или медианами/биссектрисами/высотами, или просто конкурентными чевианами в каком-нибудь треугольнике. Можно также начать действовать с конца. То есть в предположении, что утверждение доказано выявить какие-нибудь полезные *признаки* картинки и попытаться ими воспользоваться. Таким образом можно свести исходную задачу к равенству углов, подобию/гомотетичности треугольника и т.п., и постараться доказать уже новое утверждение.

Изогонали и изогональное сопряжение

В продолжение предыдущего подраздела про известные прямые рассмотрим такие прямые, которые называют *изогоналями*.

Определение. Прямые AP и AQ называются *изогоналями* относительно данного угла BAC , если $\angle PAB = \angle QAC$. (Что, очевидно, эквивалентно следующему: AP и AQ симметричны относительно биссектрисы угла BAC).

Теорема (основная теорема об изогоналях). Пусть имеются прямые a, b, c , проходящие через точки A, B, C соответственно. Тогда a, b, c конкурентны $\iff a', b', c'$ конкурентны, где a' и a ; b' и b ; c' и c — изогонали относительно углов A, B, C соответственно.

Доказательство.

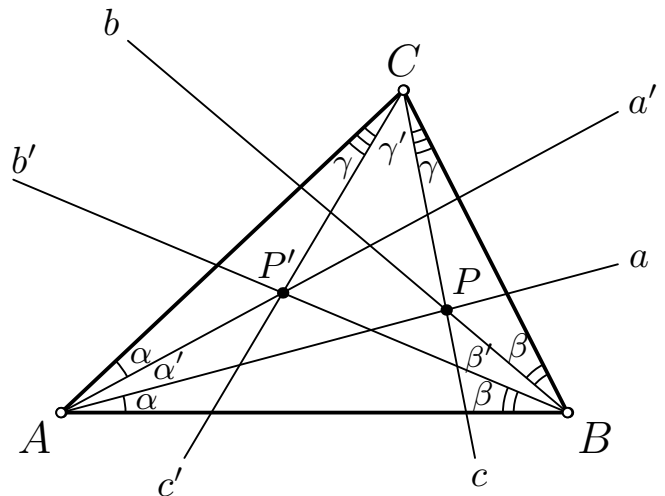
□ Докажем сначала, что из конкурентности прямых a, b, c следует конкурентность прямых a', b', c' .

Пусть $\angle PCB = \gamma$, $\angle BAP = \alpha$, $\angle CBP = \beta$. Пусть так же $\angle P'CP = \gamma'$, $\angle PAP' = \alpha'$, $\angle PBP' = \beta'$ (здесь все углы ориентированные). Тогда для прямых a, b, c из угловой теореме Чебы имеем следующее:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \alpha')} \cdot \frac{\sin(\gamma + \gamma')}{\sin \gamma} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \beta')} = 1$$

А теперь заметим, что

$$\frac{\sin(\alpha + \alpha')}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin(\gamma + \gamma')} \cdot \frac{\sin(\beta + \beta')}{\sin \beta} = 1$$



Но ведь это — выражение угловой формы теоремы Чевы для прямых a' , b' , c' . А значит, согласно угловой теореме Чевы, a' , b' , c' конкурентны. Обратное следствие доказывается аналогично. ■

Примечание. Точки P и P' называют *изогонально сопряжёнными*.

Приведем ниже, как дополнение, интересный факт, доказательство которого Вы можете найти, например, в статье «Теорема об изогоналях» А.Куликовой и Д.Прокопенко.

Теорема. Пусть OB и OC — изогоналы угла AOD . Прямые AC и BD пересекаются в точке Q , прямые AB и CD — в точке P . Тогда OP и OQ — также изогоналы относительно угла AOD .

Теорема Дезарга

<ТУТ БУДЕТ ТЕОРЕМА ДЕЗАРГА>

Понятное дело, что это далеко не самый полный список методов доказательства таких задач. Цель данного раздела — показать, в каких направлениях можно продвигаться в задачах такого типа, если не понятно, как начать действовать.

Примеры

Давайте рассмотрим теперь применение данных методов при решении конкретных задач.

Пример 1. В треугольнике ABC AL_a , BL_b , CL_c — биссектрисы, K_a — точка пересечения касательных к описанной окружности в вершинах B и C , K_b , K_c определены аналогично. Докажите, что прямые K_aL_a , K_bL_b и K_cL_c пересекаются в одной точке. (Заочный тур олимпиады им. И.Ф.Шарыгина 2019)

Решение.

Чтобы понять, какой из вышеописанных методов поможет в решении данной задачи, обратимся к рисунку (см. рис. 1). Из известных преобразований плоскости тут мало что может помочь. Скажем, используя, *поворот*, или *осевую симметрию*, или *параллельный перенос* — не совсем понятно относительно чего производить эти преобразования, и что куда при них перейдет. Использование *гомотетии* также не кажется, по крайней мере на первый

Рис. 1

Как мы помним, в теореме Чебы нам нужно, чтобы произведение отношений соответствующих направленных отрезков было равно 1, тогда и только тогда прямые пересекутся в одной точке. Здесь отношения таких отрезков считать неудобно, поэтому давайте лучше постараемся все-таки понять что-то про расположение данных прямых. Единственное, отношение чего мы знаем — отношения отрезков, содержащие основания биссектрис $\triangle ABC$. Было бы хорошо понять что-нибудь про расположение самих прямых, например, углы относительно сторон $\triangle K_a K_b K_c$. Давайте отдельно перерисуем фрагмент рисунка, содержащий одну из трех прямых ($K_a L_a$, $K_b L_b$, $K_c L_c$), и исследуем его.

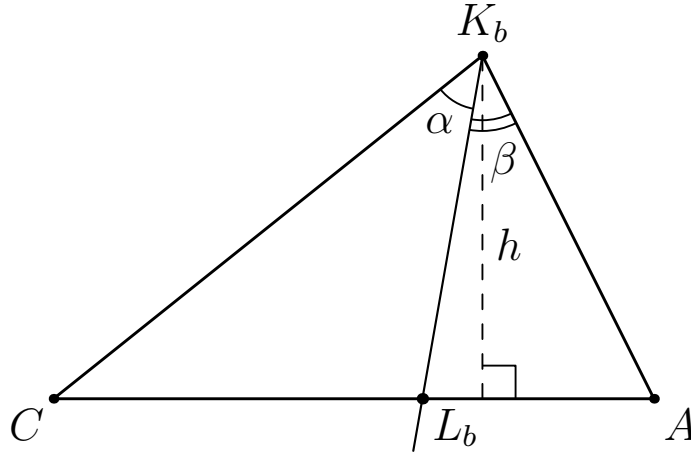


Рис. 2

Попробуем как-то привязаться к углам α и β , зная отношение $\frac{CL_b}{L_bA}$. Давайте вспомним, что площадь треугольника можно посчитать как полупроизведение сторон на синус угла между ними. То есть $S_{CK_bL_b} = \frac{CK_b \cdot K_bL_b \cdot \sin \alpha}{2}$. Аналогично $S_{AK_bL_b} = \frac{K_bL_b \cdot K_bA \cdot \sin \beta}{2}$. Откуда получаем $\frac{S_{CK_bL_b}}{S_{AK_bL_b}} = \frac{CK_b \cdot \sin \alpha}{K_bA \cdot \sin \beta}$. С другой стороны $S_{AK_bL_b} = \frac{h \cdot L_bA}{2}$ и $S_{CK_bL_b} = \frac{h \cdot L_bC}{2}$.

$$\text{Тогда } \frac{S_{CK_bL_b}}{S_{AK_bL_b}} = \frac{L_bC}{L_bA}. \text{ И окончательно } \frac{S_{CK_bL_b}}{S_{AK_bL_b}} = \frac{CK_b \cdot \sin \alpha}{K_bA \cdot \sin \beta} = \frac{L_bC}{L_bA}.$$

Но ведь K_bC и K_bA — это отрезки касательных к окружности ω из одной точки $\Rightarrow K_bC = K_bA$.

$$\text{В итоге полученное выражение приобретает вид } \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{L_bC}{L_bA}.$$

Мы видим отношение двух синусов, что наталкивает нас на мысль о том, что на самом деле мы будем использовать «угловую» форму теоремы Чевы.

Теперь остается лишь написать схожее отношение для всех трех прямых и перемножить.

$$\frac{\sin \angle K_c K_a L_a}{\sin \angle L_a K_a K_b} \cdot \frac{\sin \angle K_a K_b L_b}{\sin \angle L_b K_b K_c} \cdot \frac{\sin \angle K_b K_c L_c}{\sin \angle L_c K_c K_a} = \frac{BL_a}{L_a C} \cdot \frac{CL_b}{L_b A} \cdot \frac{AL_c}{L_c B} = 1$$

(последнее равенство верно, т.к. биссектрисы пересекаются в одной точке)

Тогда, согласно «угловой» форме теоремы Чевы, прямые $K_a L_a$, $K_b L_b$, $K_c L_c$ пересекаются в одной точке.

Комментарий. Вектора мы опустили, потому что основания биссектрис всегда лежат на сторонах треугольника. Однако стоит отметить, что условие

« BL_b, AL_a, CL_c — биссектрисы» мы использовали, только когда считали отношение синусов соответствующих углов. То есть, вообще-то говоря, BL_b, AL_a, CL_c могли быть любыми *чевианами* в $\triangle ABC$, основания которых лежат на сторонах треугольника, и которые пересекаются в одной точке.

Пример 2. В треугольнике ABC AN_1 и BH_2 — высоты; касательная к описанной окружности в точке A пересекает BC в точке S_1 , а касательная в точке B пересекает AC в точке S_2 ; T_1 и T_2 — середины отрезков AS_1 и BS_2 . Докажите, что T_1T_2 , AB и H_1H_2 пересекаются в одной точке. (*Заочный тур олимпиады им. И.Ф.Шарыгина 2019*)

Решение. На первый взгляд задача кажется достаточно трудной, однако можно снова обратиться к списку вышеописанных методов и выбрать нам подходящий, как мы делали в предыдущем примере.

Пример 3. Даны три окружности. Первая и вторая пересекаются в точках A_0 и A_1 , вторая и третья — в точках B_0 и B_1 , третья и первая — в точках C_0 и C_1 . Пусть $O_{i,j,k}$ — центр описанной окружности треугольника $A_iB_jC_k$. Через все пары точек вида $O_{i,j,k}$ и $O_{1-i,1-j,1-k}$ провели прямые. Докажите, что эти 4 прямые пересекаются в одной точке или параллельны. (*Заочный тур олимпиады им. И.Ф.Шарыгина 2019*)

Пример 4. Каждая из окружностей S_1, S_2 и S_3 касается внешним образом окружности S (в точках A_1, B_1, C_1 соответственно) и двух сторон треугольника ABC (см. рис.). Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

Задачи

ТУТ БУДУТ ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

Подсказки

ТУТ БУДУТ ПОДСКАЗКИ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

Список литературы

[1] Я. П. Понарин Элементарная геометрия Том 1

- [2] А.Куликова, Д.Прокопенко — «Теорема об изогоналях»
http://geometry.ru/articles/isogonal_theorem_kvant_04_05.pdf