Конкурентные прямые.

В этом разделе мы рассмотрим целый класс задач, в которых требуется доказать, что какие-то прямые пересекаются в одной точке (или параллельны), такие прямые ещё называют *конкурентными*. Как правило их три, но может быть сколько угодно. В данном разделе мы ограничимся рассмотрением примеров, где *в основном* фигурируют только три прямые.

Методы решения задач

Метод масс

Для начала введем несколько базовых понятий и обозначений, которыми мы в дальнейшем будем пользоваться.

Обозначения

- $A(m)$ — точка A, которой сопоставлена масса m.
- $\mathfrak{M}$ [1] $= \{A_1(m_1),\, A_2(m_2), \dots, A_n(m_n)\}$ — система матриальных точек, состоящая из $A_1(m_1)$, $A_2(m_2), \dots$, $A_n(m_n)$.
  Отметим, что так как $\mathfrak{M}$ — множество, то оно не может содержать одинаковые элементы. А значит, если $A_i = A_j (i \neq j)$, предварительно заменим их одной точкой, например, $A_i(m_i + m_j)$, где m_i и m_j — массы в точках A_i и A_j соответственно.
- Запись $Z = C(\mathfrak{M})$ будет обозначать, что *центр масс* системы $\mathfrak{M}$ существует и находится в Z. Иногда мы будем писать напрямую: $Z = C(A_1, A_2, \dots, A_n)$, считая что массы $m_1, m_2, \dots, m_n$, находящиеся в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ соответственно, заранее оговорены.

Определение. **Материальная точка** — точка, которой *приписана* некоторая масса.

Определение. **Моментом** материальной точки $A(m)$ относительно точки Z называют вектор $m\overrightarrow{ZA}$.

Определение. Точка Z называется **центром масс** системы материальных точек $A_1(m_1)$, $A_2(m_2), \dots$, $A_n(m_n)$, если $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{ZA_i} = \overrightarrow{0}$.

[1] $\mathfrak{M}$ читается как *«эм готическая»*

Договоримся о следующем:

Пусть имеется система материальных точек $\mathfrak{M}$ и $Z = C(\mathfrak{M})$. Тогда, говоря в дальнейшем о системе материальных точек $\mathfrak{M}$, мы будем подразумевать подсистему $\mathfrak{M}'$, такую что $\mathfrak{M}' = \{A_i(m_i) \mid A_i(m_i) \in \mathfrak{M}, A_i \neq Z, m_i \neq 0\}$.

В качестве физической интерпретации теории масс можно использовать следующие соображения: **положительной** массе материальной точки m_1 сопоставить *грузик* массы m_1, а **отрицательной** массе m_2 — *шарик* с соответствующей подъемной силой, по модулю равной силе тяжести, действующей на грузик массой $|m_2|$.

Теорема (о существовании центра масс). *Центр масс произвольной системы $A_1(m_1), \dots, A_n(m_n)$ всегда существует, если $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \neq 0$.*

Доказательство.

$\square$ Рассмотрим произвольную точку X. Тогда для любой точки плоскости O имеет место равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\left(\overrightarrow{XA_i} - \overrightarrow{OX}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{OA_i}$. Тогда, чтобы точка O была центром масс системы, должно выполняться равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{0} \iff \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\left(\overrightarrow{XA_i} - \overrightarrow{OX}\right) = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{XO} = \dfrac{\sum\left(m_i\overrightarrow{XA_i}\right)}{\sum m_i}$. Таким образом, утверждение о существовании *центра масс* свелось к утверждению, что существует вектор $\overrightarrow{XO}$, заданный соответствующим соотношением, а он, понятное дело, существует. $\blacksquare$

Примечание. Если условие $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \neq 0$ не выполняется, то величина $\left|\overrightarrow{XO}\right| = \dfrac{\left|\sum m_i\overrightarrow{XA_i}\right|}{\sum m_i}$ не имеет смысла, поэтому это ограничение на сумму масс существенно.

Физически объяснить отсутствие центра масс у системы материальных точек, сумма масс которой равна нулю, можно, например, следующим способом. От противного. Действительно, пусть имеется $\mathfrak{M} = \{A_i(m_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$, причем $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i = 0$, $Z = C(\mathfrak{M})$. Пусть $\mathfrak{M}_{A_1} = \mathfrak{M} \setminus \{A_1(m_1)\}$, $B = C\left(\mathfrak{M}_{A_1}\right)$, тогда система $A_1(m_1)$, $B(-m_1)$ имеет ц.м. Z (по теореме о группировке масс, см. далее). Тогда, по определению центра масс, $m_1\overrightarrow{ZA_1} + (-m_1)\overrightarrow{ZB} = \overrightarrow{0} \iff A_1 = B$. То есть $A_1 = C\left(\mathfrak{M}_{A_1}\right)$, а значит $A_1 = C(\mathfrak{M})$, что противоречит договоренности, описанной выше. Полученное противоречие завершает доказательство.

Теорема (о единственности центра масс). *Если центр масс системы $A_1(m_1)$, $A_2(m_2)$, ..., $A_n(m_n)$ существует, то он единственен.*

Доказательство.

□ От противного. Пусть существуют два различных центра масс Z и Z'. Тогда по определению имеем: $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{ZA_i} = \overrightarrow{0}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{Z'A_i} = \overrightarrow{0}$. $\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{ZZ'} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{ZZ'}\sum\limits_{i=1}^{n} m_i = \overrightarrow{0}$. $\iff \overrightarrow{ZZ'} = \overrightarrow{0}$ (последний переход верен, так как центр масс существует, то есть $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \neq 0$) $\iff Z = Z'$, что противоречит предположению, что точки Z и Z' различны. Следовательно, центр масс Z единственен, что и требовалось. ■

Примечание. Стоит отметить, что единственность мгновенно следует из единственности вектора $\overrightarrow{XO}$ (см. предыущее доказательство).

Далее будем считать, что $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \neq 0$.

Теорема (о группировке масс). *Пусть есть система материальных точек $A_1(m_1)$, $A_2(m_2)$, ..., $A_n(m_n)$, $B_1(k_1)$, $B_2(k_2)$, ..., $B_l(k_l)$, и подсистема $A_1(m_1)$, $A_2(m_2)$, ..., $A_n(m_n)$ имеет центр масс W. Назовем редуцированной системой систему $W(m_1 + \ldots + m_n)$, $B_1(k_1)$, $B_2(k_2)$, ..., $B_l(k_l)$. Тогда исходная система имеет ц.м. Z в том и только том случае, когда редуцированная система имеет ц.м. Z.*

Доказательство.

□ Согласно *определению* центра масс, надо доказать равносильность $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\,\overrightarrow{ZA_i} + \sum\limits_{j=1}^{l} k_j\,\overrightarrow{ZB_j} = \overrightarrow{0} \iff \sum\limits_{j=1}^{l} k_j\,\overrightarrow{ZB_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{ZW} = \overrightarrow{0}$. То есть надо показать равенство: $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{ZA_i} = \overrightarrow{ZW} \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \iff \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \left(\overrightarrow{ZA_i} - \overrightarrow{ZW}\right) = \overrightarrow{0}$ $\iff \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{WA_i} = \overrightarrow{0}$, что верно в силу того, что W — центр масс подсистемы $A_1(m_1)$, $A_2(m_2)$, ..., $A_n(m_n)$. ■

Метод масс широко используется при доказательстве теорем и задач на конкурентность прямых, причем их может быть любое количество, а ключевым элементом решения является именно *теорема о группировке масс.* Рассуждения могут выглядеть следующим образом: *«Докажем, что прямые x, y и z пересекаются в точке M. Если нам удастся найти такие $X \in x$, $Y \in y$, $Z \in z$, что $M = C(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M} = \{X(m_x), Y(m_y), Z(m_z)\}$ для некоторых масс m_x, m_y, m_z, $C(X,Y) \in z$, $C(X,Z) \in y$, $C(Z,Y) \in x$, то мы выполнили требуемое условие в силу* ***единственности*** *ц.м. M.»*
А затем подбираются соответствующие точки X, Y, Z и соотвествующие массы m_x, m_y, m_z.

Теорема Чевы

Один из самых мощных методов доказательства того, что три прямые проходят через одну точку или параллельны. Приведем ниже доказательство через *метод масс*. С другими доказательствами этой теоремы (через площадь, подобие и др.) вы можете ознакомится в других источниках, например, в книге Я. П. Понарина «Элементарная геометрия. Том 1».

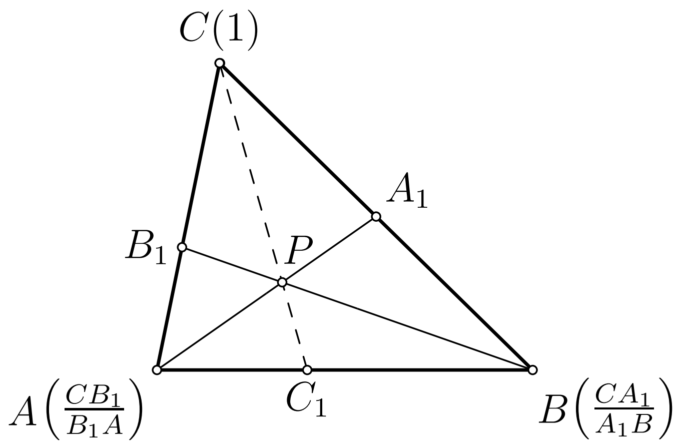
Теорема Чевы. *Пусть на прямых AB, BC, CA, определяющих треугольник ABC, даны точки C_1, A_1, B_1. Для того, чтобы прямые AA_1, BB_1, CC_1 были конкурентны необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = 1$$

Мы же ограничемся лишь частным случаем данной теоремы, который используется чаще всего. А именно, когда точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах треугольника ABC. С помощью метода масс можно доказать и общий вид данной теоремы, однако для этого придётся дополнительно разобрать несколько случаев, чего мы не будем делать, чтобы не усложнять восприятие самой идеи доказательства.

Доказательство.

□ Заметим, что существует ц.м. у $\triangle ABC$ и у системы, содержащей любые две вершины треугольника ABC. Поместим массы 1, $\frac{CA_1}{A_1B}$, $\frac{CB_1}{B_1A}$ в точки C, B, A соответственно.



Пусть $BB_1 \cap AA_1 = P$. Тогда, по теореме о группировке масс, $C(A,B,C) \in BB_1$ (сгруппировали массы из точек A и C в B_1) и $C(A,B,C) \in AA_1$ (по той же причине). Следовательно, $P = C(A,B,C)$ в силу единственности центра масс. Тогда $P \in CC_1$ тогда и только тогда, когда $C_1 = C(A,B)$. А это, в свою очередь, равносильно тому, что $\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\overrightarrow{C_1A}+\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\overrightarrow{C_1B}=\overrightarrow{0} \iff \frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1.$

Полученное соотношение завершает доказательство, так как A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах треугольника ABC. ■

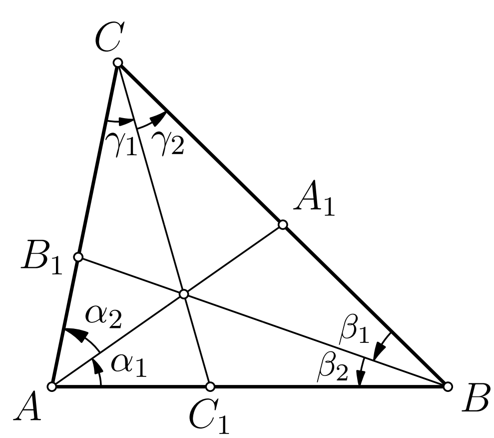
Примечание. Формулу теоремы Чевы несложно запомнить, если при записи отношений пользоваться правилом «*в числителе: вектор от текущей вершины до основания чевианы, для которого еще не записано отношение и которое лежит на прямой, содержащей вершину и сторону треугольника, а в знаменателе: вектор от текущего основания чевианы до другой вершины на данной прямой*».То есть мы обходим треугольник по или против часовой стрелки и записываем отношения по данному правилу. Аналогичное правило применимо и к *угловой* теореме Чевы.

Дополнение

Тригонометрическая (угловая) форма теоремы Чевы.

Если ввести в рассмотрение *ориентированные* углы $\alpha_1 = \angle BAA_1$, $\alpha_2 = \angle A_1AC$, $\gamma_1 = \angle ACC_1$, $\gamma_2 = \angle C_1CB$, $\beta_1 = \angle CBB_1$, $\beta_2 = \angle B_1BA$, то соотношение теоремы Чевы можно представить в эквивалентном виде через синусы этих углов, а именно

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}=1$$



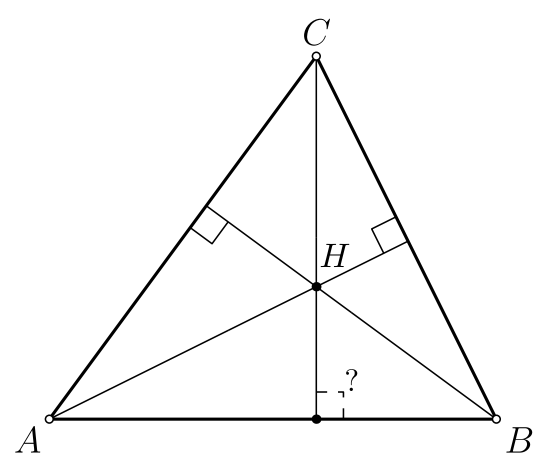
Предлагаем читателю доказать данное утверждение самостоятельно, это будет хорошим упражнением.

Теорема Дезарга

Теорема Дезарга (обратная)**.** *Если точки пересечения прямых* AB *и* A_1B_1, BC *и* B_1C_1, CA *и* C_1A_1 *лежат на одной прямой, то прямые* AA_1, BB_1, CC_1, *соединяющие вершины треугольников* ABC *и* $A_1B_1C_1$, *проходят через одну точку.*

Доказательство данного факта мы здесь приводить не будем, так как это выходит за рамки данного раздела. Отметим только, что эту теорему можно доказать, например, с использованием теоремы Менелая или с помощью выхода в пространство. С одним из них вы можете ознакомиться самостоятельно, скажем, в книге «Элементарная Геометрия Том 1».

Принадлежность точки пересечения двух прямых третьей



Можно попробовать доказать, что точка пересечения каких-то двух прямых из трех принадлежит третьей. Классическим примером является доказательство того, что *высоты*, *медианы*, *серединные перпендикуляры* и *биссекрисы* треугольника пересекаются в одной точке. С помощью данного метода иногда так же легко доказываются и более сложные вещи, например, то, что *радикальные оси* трех окружностей конкурентны. Точнее, таким способом можно доказать, что в *нетривиальном* случае они проходят через одну точку, а *тривиальный* случай можно разобрать отдельно. Этот метод можно поразному использовать, например, доказать конкурентность высот треугольника можно исходя из следующих соображений: *проведем две высоты и третью прямую, проходящую через точку пересечения двух высот и через третью вершину треугольника, а потом докажем, что это и будет искомая высота.*

Преобразование плоскости

Можно сделать *преобразование плоскости* f, отображающее плоскость на себя, которое переводит исходные прямые a, b, c, про которые нам нужно доказать, что они конкурентны, в некоторые прямые a', b', c', причем, $a \parallel a'$, $b \parallel b'$, $c \parallel c'$. Тогда их образы a', b', c' конкурентны в том и только том случае,

когда исходные прямые a, b, c являются таковыми.
Доказательство.

$\square$ *Необходимость.*

Пусть $a \cap b \cap c = M$; $\forall i \in \{a,\ b,\ c\}\colon f(i) = i'$ и $f(M) = M'$. Заметим, что $\forall i \in \{a,\ b,\ c\}\colon M \in i \Rightarrow M' \in f(i) \implies M' \in a',\ b',\ c'$.

Если же $a \parallel b \parallel c$, то, т.к. f переводит a, b, c в параллельные им прямые, имеем следующее: $a \parallel b \parallel c \implies f^{-1}(a) \parallel f^{-1}(b) \parallel f^{-1}(c) \iff a' \parallel b' \parallel c'$.

Достаточность.

Пусть a', b', c' — образы прямых a, b, c соответственно при преобразовании плоскости f, $a' \cap b' \cap c' = M'$, $f^{-1}(M') = M$. Тогда

$$\left.\begin{matrix} f^{-1}(a') = a \\ f^{-1}(b') = b \\ f^{-1}(c') = c \\ f^{-1}(M') = M \\ M' \in a', b',\ c' \end{matrix}\right\} \Rightarrow M \in a,\ b,\ c$$

Если же $a' \parallel b' \parallel c'$, то, т.к. f переводит a, b, c в параллельные им прямые и f — *биективное* преобразование плоскости, имеем следующее: $a' \parallel b' \parallel c' \implies f^{-1}(a') \parallel f^{-1}(b') \parallel f^{-1}(c') \iff a \parallel b \parallel c$. $\blacksquare$
(Данный метод применим не только для случая $n = 3$, но и для любого количества прямых)
Примечание. Если требуется только, чтобы прямые a, b, c пересекались в одной точке, то достаточно, чтобы f переводило a, b, c в любые прямые. В таком случае пересечение прямых a, b, c в одной точке, по вышеописанным причинам, также сохраняется.

Известные прямые

Посмотреть, может быть это какие-то известные три прямые, про которые вы знаете, что они конкурентны, например, это могут быть три прямые, которые являются радикальными осями каких-то окружностей или медианами/биссектрисами/высотами, или просто конкурентными чевианами в каком-нибудь треугольнике. Можно также начать действовать с конца. То есть в предположении, что утверждение доказано выявить какие-нибудь полезные *признаки* картинки и попытаться ими воспользоваться. Таким образом можно свести исходную задачу к равенству углов, подобию/гомотетичности треугольника и т.п., и постараться доказать уже новое утверждение.

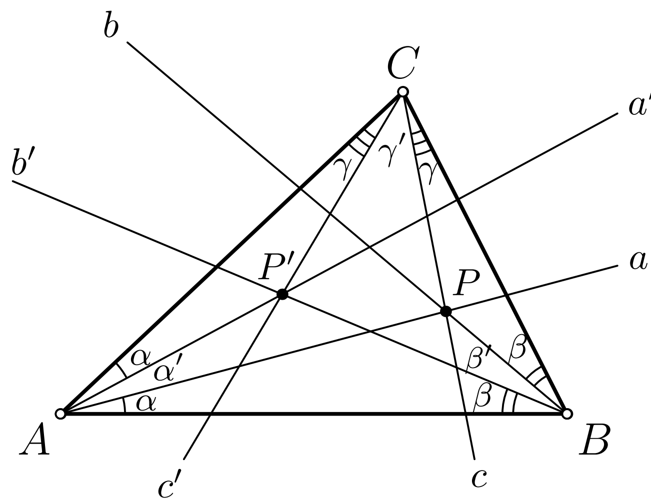
Изогонали и изогональное сопряжение

В продолжение предыдущего подраздела про известные прямые рассмотрим такие прямые, которые называют *изогоналями.*

Определение. Прямые AP и AQ называются ***изогоналями*** относительно данного угла BAC, если $\angle PAB = \angle QAC$. (Что, очевидно, эквивалентно следующему: AP и AQ симметричны относительно биссектрисы угла BAC).

Теорема (*основная теорема об изогоналях*)**.** *Пусть имеются прямые a, b, c, проходящие через вершины A, B, C внутри треугольника ABC соответственно. Тогда, если $a \cap b \cap c = P$, то $a' \cap b' \cap c' = P'$, где a' и a; b' и b; c' и c — изогонали относительно углов A, B, C соответственно.*

Доказательство.



□ Положим $\angle PCB = \gamma$, $\angle BAP = \alpha$, $\angle CBP = \beta$, $\angle P'CP = \gamma'$, $\angle PAP' = \alpha'$, $\angle PBP' = \beta'$ (здесь все углы ориентированные). Тогда для прямых a, b, c из угловой теореме Чевы имеем следующее:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\alpha')}\cdot\frac{\sin(\gamma+\gamma')}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\beta')} = 1$$

А теперь заметим, что

$$\frac{\sin(\alpha+\alpha')}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma+\gamma')}\cdot\frac{\sin(\beta+\beta')}{\sin\beta} = 1$$

Но ведь это — выражение угловой формы теоремы Чевы для прямых a', b', c'. А значит, согласно угловой теореме Чевы, a', b', c' проходят через P'. ■

Примечание. Точки P и P' называют *изогонально сопряжёнными* относительно **треугольника** ABC, если они существуют, то есть если соответствующие прямые непараллельны. Отметим также, что в общем случае, то есть в случае, когда a, b и c могут быть вне треугольника ABC, из конкурентности a, b и c не следует конкурентность a', b' и c', так как в угловую теорему Чевы входят имеено *ориентированные* углы, синусы которых меняются при отражении относительно биссектрисы угла.

Используя данный метод, можно мгновенно получить, например, что высоты пересекаются в одной точке. Для этого достаточно заметить, что $\angle OAC =$

$\angle H_a AB$, где AH_a — высота в треугольнике ABC. То есть AH_a и AO — изогонали относительно угла CAB треугольника ABC. Проведя аналогичные рассуждения для оставшихся двух высот и применив к ним вышесформулированную теорему, получим требуемое.

Пересечение *симедиан* в одной точке также доказывается в один ход, а именно: медианы пересекаются в одной точке, а симедианы *по определению* симметричны медианам относительно биссектрис углов. Применяя теперь только что доказанную теорему, получим искомое утверждение.

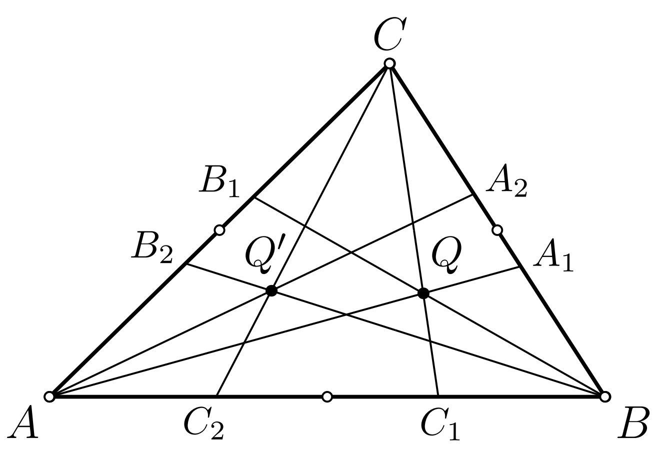
Приведем ниже, как дополнение, интересный факт, доказательство которого вы можете найти, например, в статье «Теорема об изогоналях» А.Куликовой и Д.Прокопенко.

Теорема. *Пусть OB и OC — изогонали угла AOD. Прямые AC и BD пересекаются в точке Q, прямые AB и CD — в точке P. Тогда OP и OQ — также изогонали относительно угла AOD.*

Изотомическое сопряжение

Определение. Точки P и Q называются **изотомически сопряженными** относитильно **отрезка** AB, если они симметричны относительно середины этого отрезка.

Теорема. *Пусть на прямых BC, AC, AB, образующих треугольник ABC, отмечены точки A_1, B_1, C_1 соответственно. Точки A_2, B_2, C_2 изотомически сопряжены точкам A_1, B_1, C_1 относительно отрезков BC, AC, AB соответственно. Тогда для того, чтобы прямые AA_1, BB_1, CC_1 были конкурентны, необходимо и достаточно, чтобы прямые AA_2, BB_2, CC_2 были таковыми.*



Доказательство.

□ Докажем сначала, что из конкурентности прямых AA_1, BB_1, CC_1 следует конкурентность прямых AA_2, BB_2, CC_2.

По определению *изотомического сопряжения* имеем: $\overrightarrow{AB_2} = \overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{CA_2} = \overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{C_2A} = \overrightarrow{z}$. Положим $\overrightarrow{B_2B_1} = \overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{A_2A_1} = \overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{C_2C_1} = \overrightarrow{z_1}$.

Тогда, применив теорему Чевы для прямых AA_1, BB_1, CC_1, получим:

$$\frac{\overrightarrow{x} + \overrightarrow{x_1}}{\overrightarrow{x}} \cdot \frac{\overrightarrow{y} + \overrightarrow{y_1}}{\overrightarrow{y}} \cdot \frac{\overrightarrow{z} + \overrightarrow{z_1}}{\overrightarrow{z}} = 1$$

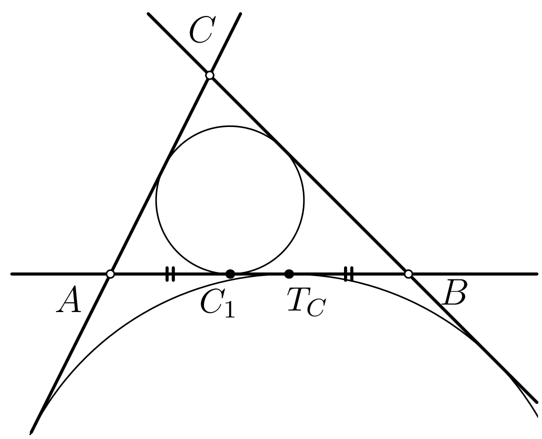
Теперь заметим, что имеет место равенство

$$\frac{\overrightarrow{x}}{\overrightarrow{x} + \overrightarrow{x_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{y}}{\overrightarrow{y} + \overrightarrow{y_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{z}}{\overrightarrow{z} + \overrightarrow{z_1}} = 1$$

А значит, согласно теореме Чевы, прямые AA_2, BB_2, CC_2 конкурентны. Следствие в обратную сторону доказывается аналогично. ■

Примечание. Точки Q и Q' называются *изотомически сопряженными* относительно **треугольника** ABC, если они существуют, то есть если соответствующие прямые непараллельны. Стоит отметить, что в отличие от *изогонального сопряжения* точки A_1, B_1 и C_1 не обязаны принадлежать сторонам треугольника ABC, они могут лежать и вне их на прямых, содержащие стороны треугольника ABC.

Несложно видеть, что точки касания вписанной и соответствующей вневписанной оружностей изотомически сопряжены относительно соответствующей стороны треугольника ABC (см. рис.). Тогда, проделывая аналогичные рассуждения для всех сторон треугольника ABC и применяя только что доказанну теорему, получим, что точки Нагеля и Жергонна *изотомически сопряжены.*



Примеры

Давайте рассмотрим теперь применение данных методов при решение конкретных задач. Примеры специально разбираются так подробно, чтобы продемонстрировать решение задачи от идеи до полного, окончательного решения.

Пример 1. В треугольнике ABC AL_a, BL_b, CL_c — биссектрисы, K_a — точка пересечения касательных к описанной окружности в вершинах B и C, K_b, K_c

определены аналогично. Докажите, что прямые K_aL_a, K_bL_b и K_cL_c пересекаются в одной точке. *(Заочный тур олимпиады им. И.Ф.Шарыгина 2019)*

Решение. Чтобы понять, какой из вышеописанных методов поможет в решении данной задаче, обратимся к рисунку (см. рис. 1). Из известных преобразований плоскости тут мало что может помочь. Действительно, используя *поворот*, или *осевую симметрию*, или *параллельный перенос* — не совсем понятно относительно чего производить эти преобразования, и что куда при них перейдет. *Инверсия* здесь явно не поможет, потому что данные прямые не проходят через центр какой-нибудь «*удобной*» окружности, и поэтому вообще перейдут в окружности, следовательно нам ничего доказать не удастся. Использование *гомотетии* также не кажется, по крайней мере на первый взгляд, осмысленным, т.к. мы ничего не можем сказать про отношения отрезков (кроме, разве что, в $\triangle ABC$), поэтому не поймем что куда перейдет. Остается последний вариант — теорема Чевы. На первый взгляд её использование здесь вам может показаться неуместным, но не торопитесь с выводами. Итак, давайте разбираться, как же все-таки здесь использовать теорему Чевы.

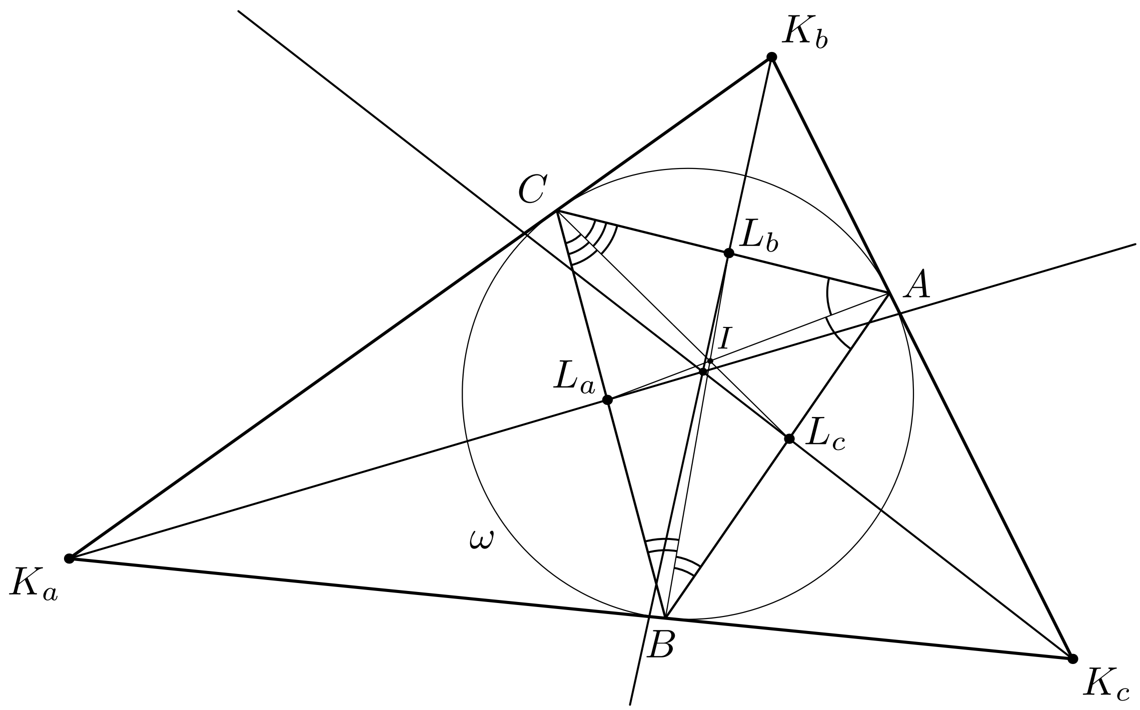
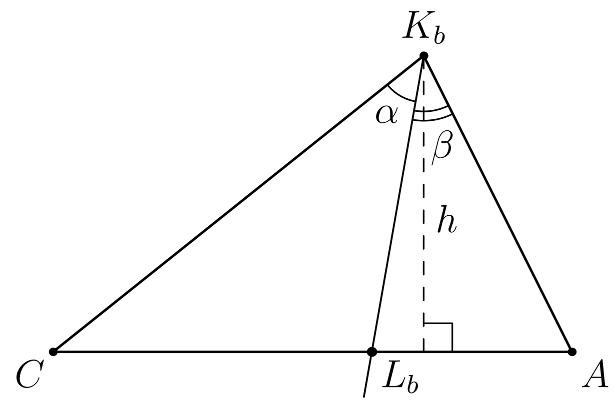


Рис. 1

Как мы помним, в теореме Чевы нам нужно, чтобы произведение отношений соответствующих направленных отрезков было равно 1, тогда и только тогда прямые пересекутся в одной точке. Здесь отношения таких отрезков считать неудобно, поэтому давайте лучше постараемся все-таки понять что-то про расположение данных прямых. Единственное, отношение чего мы знаем

— отношения отрезков, содержащие основания биссекрис $\triangle ABC$. Было бы хорошо понять что-нибудь про расположение самих прямых, например, углы относительно сторон $\triangle K_aK_bK_c$. Давайте отдельно перерисуем фрагмент рисунка, содержащий одну из трех прямых (K_aL_a, K_bL_b, K_cL_c), и исследуем его.



Попробуем что-то узнать про углы α и β, учитывая отношение $\dfrac{CL_b}{L_bA}$. Давайте вспомним, что площадь треугольника можно посчитать как полупроизведение сторон на синус угла между ними. То есть $S_{CK_bL_b} = \dfrac{CK_b \cdot K_bL_b \cdot \sin\alpha}{2}$. Аналогично $S_{AK_bL_b} = \dfrac{K_bL_b \cdot K_bA \cdot \sin\beta}{2}$. Откуда получаем $\dfrac{S_{CK_bL_b}}{S_{AK_bL_b}} = \dfrac{CK_b \cdot \sin\alpha}{K_bA \cdot \sin\beta}$. С другой стороны $S_{AK_bL_b} = \dfrac{h \cdot L_bA}{2}$ и $S_{CK_bL_b} = \dfrac{h \cdot L_bC}{2}$.

Тогда $\dfrac{S_{CK_bL_b}}{S_{AK_bL_b}} = \dfrac{L_bC}{L_bA}$. И окончательно $\dfrac{S_{CK_bL_b}}{S_{AK_bL_b}} = \dfrac{CK_b \cdot \sin\alpha}{K_bA \cdot \sin\beta} = \dfrac{L_bC}{L_bA}$.

Но ведь K_bC и K_bA — это отрезки касательных к окружности ω из одной точки $\Rightarrow K_bC = K_bA$.

В итоге полученное выражение преобретает вид $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{L_bC}{L_bA}$.

Мы видим отношение двух синусов, что наталкивает нас на мысль о том, что на самом деле мы будем использовать *угловую* форму теоремы Чевы.

Теперь остается лишь написать схожее отношение для всех трех прямых и перемножить.

$$\frac{\sin\angle K_cK_aL_a}{\sin\angle L_aK_aK_b} \cdot \frac{\sin\angle K_aK_bL_b}{\sin\angle L_bK_bK_c} \cdot \frac{\sin\angle K_bK_cL_c}{\sin\angle L_cK_cK_a} = \frac{BL_a}{L_aC} \cdot \frac{CL_b}{L_bA} \cdot \frac{AL_c}{L_cB} = 1$$

(последнее равенство верно, т.к. биссектрисы пересекаются в одной точке)

Тогда, согласно «*угловой*» форме теоремы Чевы, прямые K_aL_a, K_bL_b, K_cL_c пересекаются в одной точке. **Что и требовалось доказать.**

Комментарий. Вектора мы опустили, потому что основания биссектрис всегда лежат на сторонах треугольника. Однако стоит отметить, что условие «BL_b, AL_a, CL_c — биссектрисы» мы использовали, только когда считали отношение синусов соответствующих углов. То есть, вообще-то говоря, BL_b, AL_a, CL_c могли быть любыми *чевианами* в $\triangle ABC$, основания которых лежат на сторонах треугольника, и которые пересекаются в одной точке.

Пример 2. В треугольнике ABC AH_1 и BH_2 — высоты; касательная к описанной окружности в точке A пересекает BC в точке S_1, а касательная в точке B пересекает AC в точке S_2; T_1 и T_2 — середины отрезков AS_1 и BS_2. Докажите, что T_1T_2, AB и H_1H_2 пересекаются в одной точке. *(Заочный тур олимпиады им. И.Ф.Шарыгина 2019)*

Решение. На первый взгляд задача кажется достаточно трудной, однако можно снова обратиться к списку вышеописанных методов и выбрать нам подходящий, как мы делали в предыдущем примере.

Пример 3. Даны три окружности. Первая и вторая пересекаются в точках A_0 и A_1, вторая и третья — в точках B_0 и B_1, третья и первая — в точках C_0 и C_1. Пусть $O_{i,j,k}$ — центр описанной окружности треугольника $A_iB_jC_k$. Через все пары точек вида $O_{i,j,k}$ и $O_{1-i,1-j,1-k}$ провели прямые. Докажите, что эти 4 прямые пересекаются в одной точке или параллельны. *(Заочный тур олимпиады им. И.Ф.Шарыгина 2019)*

Решение.

Пример 4. Каждая из окружностей S_1, S_2 и S_3 касается внешним образом окружности S (в точках A_1, B_1, C_1 соответственно) и двух сторон треугольника ABC (см. рис.). Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. (*Всеросс., 1994, финал, 10*)

Решение.

Задачи

ТУТ БУДУТ ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

Подсказки

ТУТ БУДУТ ПОДСКАЗКИ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

Список литературы

[1] Я. П. Понарин Элементарная геометрия Том 1

[2] А.Куликова, Д.Прокопенко — «Теорема об изогоналях»
http://geometry.ru/articles/isogonal_theorem_kvant_04_05.pdf