

Конкурентные прямые.

В этом разделе мы рассмотрим целый класс задач, в которых требуется доказать, что какие-то прямые пересекаются в одной точке (или параллельны), такие прямые ещё называют *конкурентными*. Как правило их три, но может быть сколько угодно. В данном разделе мы ограничимся рассмотрением примеров, где в основном фигурируют только три прямые.

Методы решения задач

Метод масс

Для начала введем несколько базовых понятий и обозначений, которыми мы в дальнейшем будем пользоваться.

Обозначения

- $A(m)$ — точка A , которой сопоставлена масса m .
- $\mathfrak{M}^1 = \{A_1(m_1), A_2(m_2), \dots, A_n(m_n)\}$ — система материальных точек, состоящая из $A_1(m_1), A_2(m_2), \dots, A_n(m_n)$.
Отметим, что так как \mathfrak{M} — множество, то оно не может содержать одинаковые элементы. А значит, если $A_i = A_j (i \neq j)$, предварительно заменим их одной точкой, например, $A_i(m_i + m_j)$, где m_i и m_j — массы в точках A_i и A_j соответственно.
- Запись $Z = C(\mathfrak{M})$ будет обозначать, что *центр масс* системы \mathfrak{M} существует и находится в Z . Иногда мы будем писать напрямую: $Z = C(A_1, A_2, \dots, A_n)$, считая что массы m_1, m_2, \dots, m_n , находящиеся в точках A_1, A_2, \dots, A_n соответственно, заранее оговорены.

Определение. Материальная точка — точка, которой приписана некоторая масса.

Определение. Моментом материальной точки $A(m)$ относительно точки Z называют вектор $m\overrightarrow{ZA}$.

Определение. Точка Z называется **центром масс** системы материальных точек $A_1(m_1), A_2(m_2), \dots, A_n(m_n)$, если $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{ZA_i} = \vec{0}$.

¹ \mathfrak{M} читается как «эм готическая»

Договоримся о следующем:

Пусть имеется система материальных точек \mathfrak{M} и $Z = C(\mathfrak{M})$. Тогда, говоря в дальнейшем о системе материальных точек \mathfrak{M} , мы будем подразумевать подсистему \mathfrak{M}' , такую что $\mathfrak{M}' = \{A_i(m_i) \mid A_i(m_i) \in \mathfrak{M}, A_i \neq Z, m_i \neq 0\}$.

В качестве физической интерпретации теории масс можно использовать следующие соображения: **положительной** массе материальной точки m_1 сопоставить *грузик* массы m_1 , а **отрицательной** массе m_2 — *шарик* с соответствующей подъемной силой, по модулю равной силе тяжести, действующей на грузик массой $|m_2|$.

(Т) Теорема (о существовании центра масс). *Центр масс произвольной системы $A_1(m_1), \dots, A_n(m_n)$ всегда существует, если $\sum_{i=1}^n m_i \neq 0$.*

Доказательство.

□ Рассмотрим произвольную точку X . Тогда для любой точки плоскости O имеет место равенство $\sum_{i=1}^n m_i (\overrightarrow{XA_i} - \overrightarrow{OX}) = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i}$. Тогда, чтобы точка O была центром масс системы, должно выполняться равенство $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0} \iff \sum_{i=1}^n m_i (\overrightarrow{XA_i} - \overrightarrow{OX}) = \vec{0} \iff \overrightarrow{XO} = \frac{\sum (m_i \overrightarrow{XA_i})}{\sum m_i}$. Таким образом, утверждение о существовании *центра масс* свелось к утверждению, что существует вектор \overrightarrow{XO} , заданный соответствующим соотношением, а он, понятное дело, существует. ■

Примечание. Если условие $\sum_{i=1}^n m_i \neq 0$ не выполняется, то величина

$|\overrightarrow{XO}| = \frac{|\sum m_i \overrightarrow{XA_i}|}{\sum m_i}$ не имеет смысла, поэтому это ограничение на сумму масс существенно.

Физически объяснить отсутствие центра масс у системы материальных точек, сумма масс которой равна нулю, можно, например, следующим способом.

От противного. Действительно, пусть имеется $\mathfrak{M} = \{A_i(m_i) \mid i = 1, \dots, n\}$, причем $\sum_{i=1}^n m_i = 0$, $Z = C(\mathfrak{M})$. Пусть $\mathfrak{M}_{A_1} = \mathfrak{M} \setminus \{A_1(m_1)\}$, $B = C(\mathfrak{M}_{A_1})$, тогда система $A_1(m_1)$, $B(-m_1)$ имеет ц.м. Z (по теореме о группировке масс, см. далее). Тогда, по определению центра масс, $m_1 \overrightarrow{ZA_1} + (-m_1) \overrightarrow{ZB} = \vec{0} \iff A_1 = B$. То есть $A_1 = C(\mathfrak{M}_{A_1})$, а значит $A_1 = C(\mathfrak{M})$, что противоречит договоренности, описанной выше. Полученное противоречие завершает доказательство.

(Т) Теорема (о единственности центра масс). *Если центр масс системы $A_1(m_1), A_2(m_2), \dots, A_n(m_n)$ существует, то он единственен.*

Доказательство.

□ От противного. Пусть существуют два различных центра масс Z и Z' . Тогда по определению имеем: $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{ZA_i} = \vec{0}$, $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{Z'A_i} = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{ZZ'} = \vec{0} \iff \overrightarrow{ZZ'} \sum_{i=1}^n m_i = \vec{0} \iff \overrightarrow{ZZ'} = \vec{0}$ (последний переход верен, так как центр масс существует, то есть $\sum_{i=1}^n m_i \neq 0$) $\iff Z = Z'$, что противоречит предположению, что точки Z и Z' различны. Следовательно, центр масс Z единственен, что и требовалось. ■

Примечание. Стоит отметить, что единственность мгновенно следует из единственности вектора \overrightarrow{XO} (см. предыдущее доказательство).

Далее будем считать, что $\sum_{i=1}^n m_i \neq 0$.

(Т) Теорема (о группировке масс). *Пусть есть система материальных точек $A_1(m_1), A_2(m_2), \dots, A_n(m_n), B_1(k_1), B_2(k_2), \dots, B_l(k_l)$, и подсистема $A_1(m_1), A_2(m_2), \dots, A_n(m_n)$ имеет центр масс W . Назовем редуцированной системой систему $W(m_1 + \dots + m_n), B_1(k_1), B_2(k_2), \dots, B_l(k_l)$. Тогда исходная система имеет ц.м. Z в том и только том случае, когда редуцированная система имеет ц.м. Z .*

Доказательство.

□ Согласно определению центра масс, надо доказать равносильность

$$\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{ZA_i} + \sum_{j=1}^l k_j \overrightarrow{ZB_j} = \vec{0} \iff \sum_{j=1}^l k_j \overrightarrow{ZB_j} + \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{ZW} = \vec{0}. \text{ То есть надо}$$

показать равенство: $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{ZA_i} = \overrightarrow{ZW} \sum_{i=1}^n m_i \iff \sum_{i=1}^n m_i (\overrightarrow{ZA_i} - \overrightarrow{ZW}) = \vec{0}$

$$\iff \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{WA_i} = \vec{0}, \text{ что верно в силу того, что } W \text{ — центр масс подсистемы } A_1(m_1), A_2(m_2), \dots, A_n(m_n). \blacksquare$$

Метод масс широко используется при доказательстве теорем и задач на конкурентность прямых, причем их может быть любое количество, а ключевым элементом решения является именно *теорема о группировке масс*.

Рассуждения могут выглядеть следующим образом: «Докажем, что прямые x, y и z пересекаются в точке M . Если нам удастся найти такие $X \in x, Y \in y, Z \in z$, что $M = C(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M} = \{X(m_x), Y(m_y), Z(m_z)\}$ для некоторых масс m_x, m_y, m_z , $C(X, Y) \in z, C(X, Z) \in y, C(Z, Y) \in x$, то мы выполнили требуемое условие в силу *единственности* ц.м. M .»

А затем подбираются соответствующие точки X, Y, Z и соответствующие массы m_x, m_y, m_z .

Теорема Чевы

Один из самых мощных методов доказательства того, что три прямые проходят через одну точку или параллельны. Приведем ниже доказательство через *метод масс*. С другими доказательствами этой теоремы (через площадь, подобие и др.) вы можете ознакомиться в других источниках, например, в книге Я. П. Понарина «Элементарная геометрия. Том 1».

(Т) Теорема Чевы. Пусть на прямых AB, BC, CA , определяющих треугольник ABC , даны точки C_1, A_1, B_1 . Для того, чтобы прямые AA_1, BB_1, CC_1 были конкурентны необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = 1$$

Мы же ограничимся лишь частным случаем данной теоремы, который используется чаще всего. А именно, когда точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах треугольника ABC . С помощью метода масс можно доказать и общий вид данной теоремы, однако для этого придётся дополнительно разобрать несколько случаев, чего мы не будем делать, чтобы не усложнять восприятие самой идеи

доказательства.

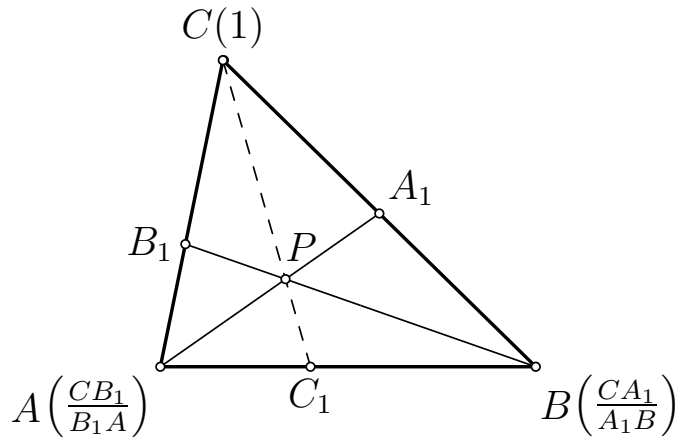
Доказательство.

□ Заметим, что существует ц.м. у $\triangle ABC$ и у системы, содержащей любые две вершины треугольника ABC . Поместим массы $1, \frac{CA_1}{A_1B}, \frac{CB_1}{B_1A}$ в точки C, B, A соответственно.

Пусть $BB_1 \cap AA_1 = P$. Тогда, по теореме о группировке масс, $C(A, B, C) \in BB_1$ (сгруппировали массы из точек A и C в B_1) и $C(A, B, C) \in AA_1$ (по той же причине). Следовательно, $P =$

$C(A, B, C)$ в силу единственности центра масс. Тогда $P \in CC_1$ тогда и только тогда, когда $C_1 = C(A, B)$. А это, в свою очередь, равносильно тому, что $\frac{CB_1}{B_1A} \cdot \overrightarrow{C_1A} + \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \overrightarrow{C_1B} = \vec{0} \iff \frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$.

Полученное соотношение завершает доказательство, так как A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах треугольника ABC . ■

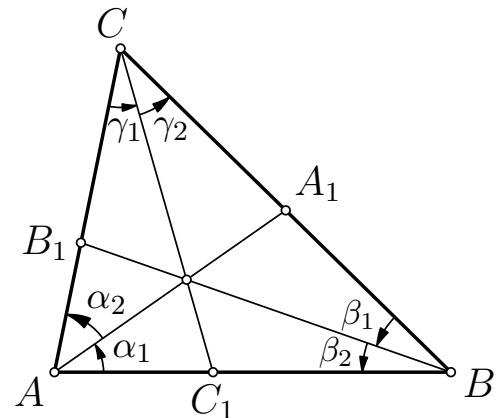


Примечание. Формулу теоремы Чевы несложно запомнить, если при записи отношений пользоваться правилом «в числителе: вектор от текущей вершины до основания чевианы, для которого еще не записано отношение и которое лежит на прямой, содержащей вершину и сторону треугольника, а в знаменателе: вектор от текущего основания чевианы до другой вершины на данной прямой». То есть мы обходим треугольник по или против часовой стрелки и записываем отношения по данному правилу. Аналогичное правило применимо и к *угловой* теореме Чевы.

Дополнение

Тригонометрическая (угловая) форма теоремы Чевы.

Если ввести в рассмотрение *ориентированные* углы $\alpha_1 = \angle BAA_1$, $\alpha_2 = \angle A_1AC$, $\gamma_1 = \angle ACC_1$, $\gamma_2 = \angle C_1CB$, $\beta_1 = \angle CBB_1$, $\beta_2 = \angle B_1BA$, то соотношение теоремы Чевы можно представить в эквивалентном виде через синусы этих углов, а именно



$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = 1$$

Предлагаем читателю доказать данное утверждение самостоятельно, это будет хорошим упражнением.

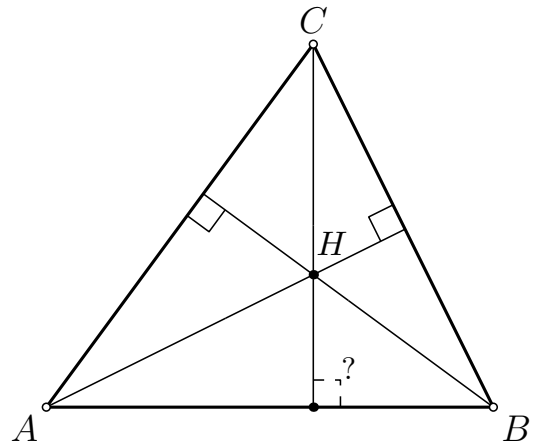
Теорема Дезарга

Ⓓ Теорема Дезарга (обратная). *Если точки пересечения прямых AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , CA и C_1A_1 лежат на одной прямой, то прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 , соединяющие вершины треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, проходят через одну точку.*

Доказательство данного факта мы здесь приводить не будем, так как это выходит за рамки данного раздела. Отметим только, что эту теорему можно доказать, например, с использованием теоремы Менелая или с помощью выхода в пространство. С одним из них вы можете ознакомиться самостоятельно, скажем, в книге «Элементарная Геометрия Том 1».

Принадлежность точки пересечения двух прямых третьей

Можно попробовать доказать, что точка пересечения каких-то двух прямых из трех принадлежит третьей. Классическим примером является доказательство того, что *высоты, медианы, серединные перпендикуляры и биссектрисы* треугольника пересекаются в одной точке. С помощью данного метода иногда так же легко доказываются и более сложные вещи, например, то, что *радикальные оси* трех окружностей конкурентны. Точнее, таким способом можно доказать, что в *нетривиальном* случае они проходят через одну точку, а *тривиальный* случай можно разобрать отдельно. Этот метод можно по-разному использовать, например, доказать конкурентность высот треугольника можно исходя из следующих соображений: *проведем две высоты и третью прямую, проходящую через точку пересечения двух высот и через третью вершину треугольника, а потом докажем, что это и будет искомая высота.*



Преобразование плоскости

Можно сделать *преобразование плоскости* f , отображающее плоскость на себя, которое переводит исходные прямые a, b, c , про которые нам нужно доказать, что они конкурентны, в некоторые прямые a', b', c' , причем, $a \parallel a', b \parallel b', c \parallel c'$. Тогда их образы a', b', c' конкурентны в том и только том случае, когда исходные прямые a, b, c являются таковыми.

Доказательство.

□ *Необходимость.*

Пусть $a \cap b \cap c = M$; $\forall i \in \{a, b, c\}: f(i) = i'$ и $f(M) = M'$. Заметим, что $\forall i \in \{a, b, c\}: M \in i \Rightarrow M' \in f(i) \Rightarrow M' \in a', b', c'$.

Если же $a \parallel b \parallel c$, то, т.к. f переводит a, b, c в параллельные им прямые, имеем следующее: $a \parallel b \parallel c \Rightarrow f^{-1}(a) \parallel f^{-1}(b) \parallel f^{-1}(c) \Leftrightarrow a' \parallel b' \parallel c'$.

Достаточность.

Пусть a', b', c' — образы прямых a, b, c соответственно при преобразовании плоскости f , $a' \cap b' \cap c' = M'$, $f^{-1}(M') = M$. Тогда

$$\left. \begin{array}{l} f^{-1}(a') = a \\ f^{-1}(b') = b \\ f^{-1}(c') = c \\ f^{-1}(M') = M \\ M' \in a', b', c' \end{array} \right\} \Rightarrow M \in a, b, c$$

Если же $a' \parallel b' \parallel c'$, то, т.к. f переводит a, b, c в параллельные им прямые и f — биективное преобразование плоскости, имеем следующее: $a' \parallel b' \parallel c' \Rightarrow f^{-1}(a') \parallel f^{-1}(b') \parallel f^{-1}(c') \Leftrightarrow a \parallel b \parallel c$. ■

(Данный метод применим не только для случая $n = 3$, но и для любого количества прямых)

Примечание. Если требуется только, чтобы прямые a, b, c пересекались в одной точке, то достаточно, чтобы f переводило a, b, c в любые прямые. В таком случае пересечение прямых a, b, c в одной точке, по вышеописанным причинам, также сохраняется.

Известные прямые

Посмотреть, может быть это какие-то известные три прямые, про которые вы знаете, что они конкурентны, например, это могут быть три прямые, которые являются радикальными осями каких-то окружностей или медианами/биссектрисами/высотами, или просто конкурентными чевианами в каком-нибудь треугольнике. Можно также начать действовать с конца. То есть в

предположении, что утверждение доказано выявить какие-нибудь полезные *признаки* картинки и попытаться ими воспользоваться. Таким образом можно свести исходную задачу к равенству углов, подобию/гомотетичности треугольника и т.п., и постараться доказать уже новое утверждение.

Изогонали и изогональное сопряжение

В продолжение предыдущего подраздела про известные прямые рассмотрим такие прямые, которые называют *изогоналями*.

Определение. Прямые AP и AQ называются *изогоналями* относительно данного угла BAC , если $\angle PAB = \angle QAC$. (Что, очевидно, эквивалентно следующему: AP и AQ симметричны относительно биссектрисы угла BAC).

(Т) Теорема (основная теорема об изогоналях). Пусть имеются прямые a, b, c , проходящие через вершины A, B, C внутри треугольника ABC соответственно. Тогда, если $a \cap b \cap c = P$, то $a' \cap b' \cap c' = P'$, где a' и a ; b' и b ; c' и c — изогонали относительно углов A, B, C соответственно.

Доказательство.

□ Положим $\angle PCB = \gamma$, $\angle BAP = \alpha$, $\angle CBP = \beta$, $\angle P'CP = \gamma'$, $\angle PAP' = \alpha'$, $\angle PBP' = \beta'$ (здесь все углы ориентированные). Тогда для прямых a, b, c из угловой теореме Чевы имеем следующее:

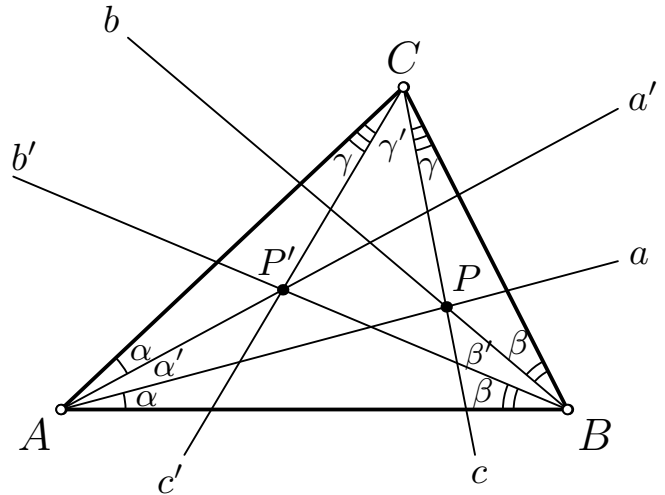
$$\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \alpha')} \cdot \frac{\sin(\gamma + \gamma')}{\sin \gamma} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \beta')} = 1$$

А теперь заметим, что

$$\frac{\sin(\alpha + \alpha')}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin(\gamma + \gamma')} \cdot \frac{\sin(\beta + \beta')}{\sin \beta} = 1$$

Но ведь это — выражение угловой формы теоремы Чевы для прямых a', b', c' . А значит, согласно угловой теореме Чевы, a', b', c' проходят через P' . ■

Примечание. Точки P и P' называют *изогонально сопряжёнными* относительно **треугольника** ABC , если они существуют, то есть если соответствующие прямые непараллельны. Отметим также, что в общем случае, то есть в случае, когда a, b и c могут быть вне треугольника ABC , из конкурентности a, b и c не следует конкурентность a', b' и c' , так как в угловую теорему Чевы



входят именно *ориентированные* углы, синусы которых меняются при отражении относительно биссектрисы угла.

Используя данный метод, можно мгновенно получить, например, что высоты пересекаются в одной точке. Для этого достаточно заметить, что $\angle OAC = \angle H_a AB$, где AH_a — высота в треугольнике ABC . То есть AH_a и AO — изогоналы относительно угла CAB треугольника ABC . Проведя аналогичные рассуждения для оставшихся двух высот и применив к ним вышесформулированную теорему, получим требуемое.

Пересечение *симедиан* в одной точке также доказывается в один ход, а именно: медианы пересекаются в одной точке, а симедианы *по определению* симметричны медианам относительно биссектрис углов. Применяя теперь только что доказанную теорему, получим искомое утверждение.

Приведем ниже, как дополнение, интересный факт, доказательство которого вы можете найти, например, в статье «Теорема об изогоналях» А.Куликовой и Д.Прокопенко.

(Т) Теорема. Пусть OB и OC — изогоналы угла AOD . Прямые AC и BD пересекаются в точке Q , прямые AB и CD — в точке P . Тогда OP и OQ — также изогоналы относительно угла AOD .

Изотомическое сопряжение

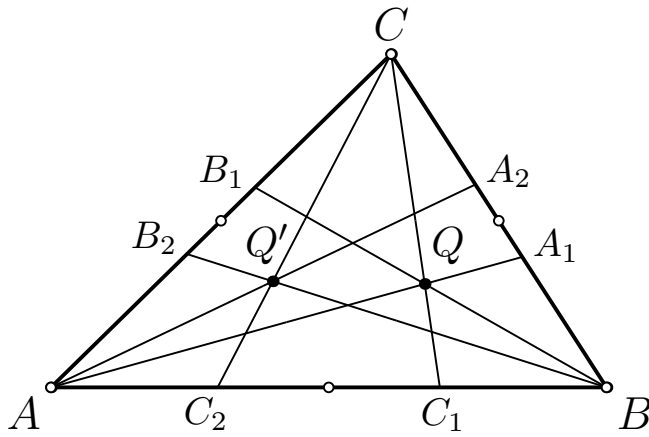
Определение. Точки P и Q называются **изотомически сопряженными** относительно отрезка AB , если они симметричны относительно середины этого отрезка.

(Т) Теорема. Пусть на прямых BC , AC , AB , образующих треугольник ABC , отмечены точки A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Точки A_2 , B_2 , C_2 изотомически сопряжены точкам A_1 , B_1 , C_1 относительно отрезков BC , AC , AB соответственно. Тогда для того, чтобы прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 были конкурентны, необходимо и достаточно, чтобы прямые AA_2 , BB_2 , CC_2 были таковыми.

Доказательство.

□ Докажем сначала, что из конкурентности прямых AA_1 , BB_1 , CC_1 следует конкурентность прямых AA_2 , BB_2 , CC_2 .

По определению имеем: $\overrightarrow{AB_2} = \overrightarrow{B_1C} = \vec{x}$, $\overrightarrow{CA_2} = \overrightarrow{A_1B} = \vec{y}$, $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{C_2A} = \vec{z}$. Положим $\overrightarrow{B_2B_1} = \vec{x}_1$, $\overrightarrow{A_2A_1} = \vec{y}_1$, $\overrightarrow{C_2C_1} = \vec{z}_1$.



Тогда, применив теорему Чебы для прямых AA_1 , BB_1 , CC_1 , получим:

$$\frac{\vec{x} + \vec{x}_1}{\vec{x}} \cdot \frac{\vec{y} + \vec{y}_1}{\vec{y}} \cdot \frac{\vec{z} + \vec{z}_1}{\vec{z}} = 1$$

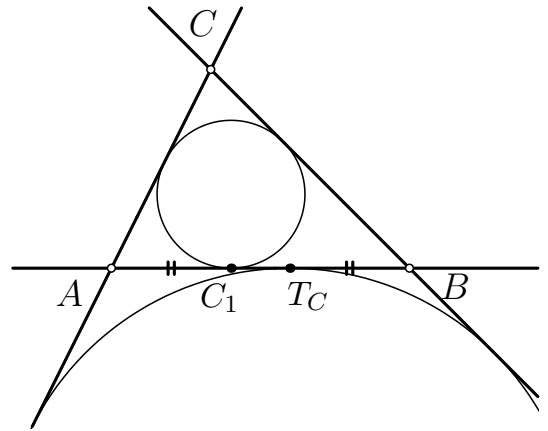
Теперь заметим, что имеет место равенство

$$\frac{\vec{x}}{\vec{x} + \vec{x}_1} \cdot \frac{\vec{y}}{\vec{y} + \vec{y}_1} \cdot \frac{\vec{z}}{\vec{z} + \vec{z}_1} = 1$$

А значит, согласно теореме Чебы, прямые AA_2 , BB_2 , CC_2 конкурентны. Следствие в обратную сторону доказывается аналогично. ■

Примечание. Точки Q и Q' называются *изотомически сопряженными* относительно **треугольника** ABC , если они существуют, то есть если соответствующие прямые непараллельны. Стоит отметить, что в отличие от *изогонального сопряжения* точки A_1 , B_1 и C_1 не обязаны принадлежать сторонам треугольника ABC , они могут лежать и вне их, на прямых, содержащие стороны треугольника ABC .

Несложно видеть, что точки касания вписанной и соответствующей внеписанной окружностей изотомически сопряжены относительно соответствующей стороны треугольника ABC (см. рис.). Тогда, проделывая аналогичные рассуждения для всех сторон треугольника ABC и применяя только что доказанную теорему, получим, что точки Нагеля и Жергонна *изотомически сопряжены*.



Примеры

Давайте рассмотрим теперь применение данных методов при решении конкретных задач. Примеры специально разбираются так подробно, чтобы продемонстрировать решение задачи от идеи до полного, окончательного решения.

Пример 1. В треугольнике ABC AL_a , BL_b , CL_c — биссектрисы, K_a — точка пересечения касательных к описанной окружности в вершинах B и C , K_b , K_c

определены аналогично. Докажите, что прямые K_aL_a , K_bL_b и K_cL_c пересекаются в одной точке. (*Заочный тур олимпиады им. И.Ф.Шарыгина 2019*)

Решение. Чтобы понять, какой из вышеописанных методов поможет в решении данной задачи, обратимся к рисунку (см. рис. 1). Из известных преобразований плоскости тут мало что может помочь. Действительно, используя, *поворот*, или *осевую симметрию*, или *параллельный перенос* — не совсем понятно относительно чего производить эти преобразования, и что куда при них перейдет. *Инверсия* здесь явно не поможет, потому что данные прямые не проходят через центр какой-нибудь «удобной» окружности, и поэтому вообще перейдут в окружности, следовательно нам ничего доказать не удастся. Использование *гомотетии* также не кажется, по крайней мере на первый взгляд, осмысленным, т.к. мы ничего не можем сказать про отношения отрезков (кроме, разве что, в $\triangle ABC$), поэтому не поймем что куда перейдет. Остается последний вариант — теорема Чевы. На первый взгляд её использование здесь вам может показаться неуместным, но не торопитесь с выводами. Итак, давайте разбираться, как же все-таки здесь использовать теорему Чевы.

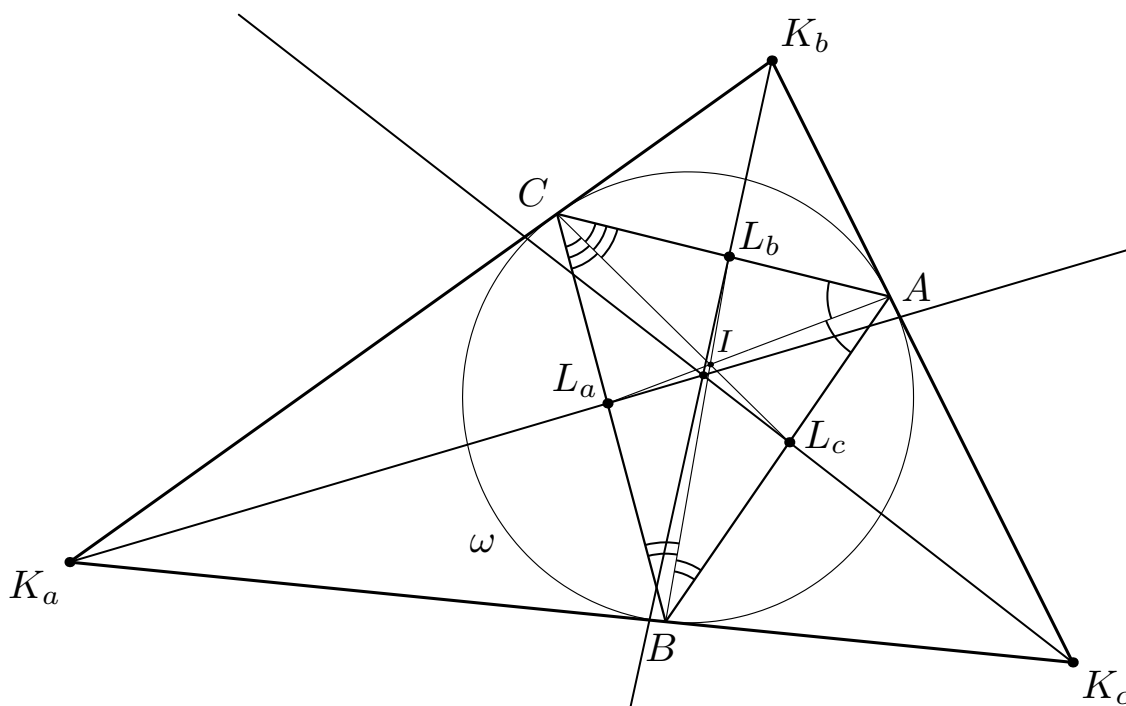
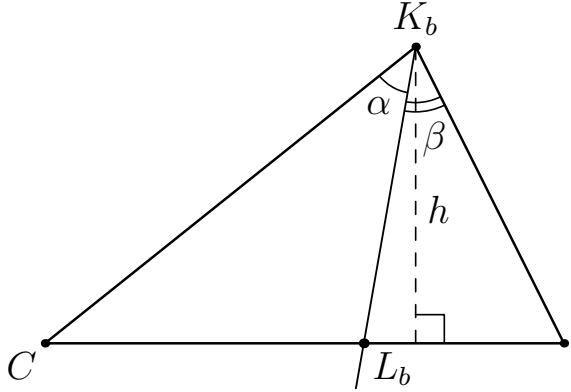


Рис. 1

Как мы помним, в теореме Чевы нам нужно, чтобы произведение отношений соответствующих направленных отрезков было равно 1, тогда и только тогда прямые пересекутся в одной точке. Здесь отношения таких отрезков считать неудобно, поэтому давайте лучше постараемся все-таки понять что-то про расположение данных прямых. Единственное, отношение чего мы знаем

— отношения отрезков, содержащие основания биссектрис $\triangle ABC$. Было бы хорошо понять что-нибудь про расположение самих прямых, например, углы относительно сторон $\triangle K_a K_b K_c$. Давайте отдельно перерисуем фрагмент рисунка, содержащий одну из трех прямых ($K_a L_a$, $K_b L_b$, $K_c L_c$), и исследуем его.



Попробуем что-то узнать про углы α и β , учитывая отношение $\frac{CL_b}{L_b A}$. Давайте вспомним, что площадь треугольника можно посчитать как полупроизведение сторон на синус угла между ними. То есть

$$S_{CK_b L_b} = \frac{CK_b \cdot K_b L_b \cdot \sin \alpha}{2}.$$

Аналогично

$S_{AK_b L_b} = \frac{K_b L_b \cdot K_b A \cdot \sin \beta}{2}$. Откуда получаем $\frac{S_{CK_b L_b}}{S_{AK_b L_b}} = \frac{CK_b \cdot \sin \alpha}{K_b A \cdot \sin \beta}$. С другой стороны $S_{AK_b L_b} = \frac{h \cdot L_b A}{2}$ и $S_{CK_b L_b} = \frac{h \cdot L_b C}{2}$.

Тогда $\frac{S_{CK_b L_b}}{S_{AK_b L_b}} = \frac{L_b C}{L_b A}$. И окончательно $\frac{S_{CK_b L_b}}{S_{AK_b L_b}} = \frac{CK_b \cdot \sin \alpha}{K_b A \cdot \sin \beta} = \frac{L_b C}{L_b A}$.

Но ведь $K_b C$ и $K_b A$ — это отрезки касательных к окружности ω из одной точки $\Rightarrow K_b C = K_b A$.

В итоге полученное выражение приобретает вид $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{L_b C}{L_b A}$.

Мы видим отношение двух синусов, что наталкивает нас на мысль о том, что на самом деле мы будем использовать *угловую* формулу теоремы Чебы.

Теперь остается лишь написать схожее отношение для всех трех прямых и перемножить.

$$\frac{\sin \angle K_c K_a L_a}{\sin \angle L_a K_a K_b} \cdot \frac{\sin \angle K_a K_b L_b}{\sin \angle L_b K_b K_c} \cdot \frac{\sin \angle K_b K_c L_c}{\sin \angle L_c K_c K_a} = \frac{BL_a}{L_a C} \cdot \frac{CL_b}{L_b A} \cdot \frac{AL_c}{L_c B} = 1$$

(последнее равенство верно, т.к. биссектрисы пересекаются в одной точке)

Тогда, согласно «угловой» форме теоремы Чебы, прямые $K_a L_a$, $K_b L_b$, $K_c L_c$ пересекаются в одной точке. **Что и требовалось доказать.**

Комментарий. Вектора мы опустили, потому что основания биссектрис всегда лежат на сторонах треугольника. Однако стоит отметить, что условие « BL_b , AL_a , CL_c — биссектрисы» мы использовали, только когда считали отношение синусов соответствующих углов. То есть, вообще-то говоря, BL_b , AL_a , CL_c могли быть любыми *чевианами* в $\triangle ABC$, основания которых лежат на сто-

ронах треугольника, и которые пересекаются в одной точке.

Пример 2. В треугольнике ABC AN_1 и BN_2 — высоты; касательная к описанной окружности в точке A пересекает BC в точке S_1 , а касательная в точке B пересекает AC в точке S_2 ; T_1 и T_2 — середины отрезков AS_1 и BS_2 . Докажите, что T_1T_2 , AB и N_1N_2 пересекаются в одной точке. (Заочный тур олимпиады им. И.Ф.Шарыгина 2019)

Решение. На первый взгляд задача кажется достаточно трудной, однако можно снова обратиться к списку вышеописанных методов и выбрать нам подходящий, как мы делали в предыдущем примере.

Пример 3. Даны три окружности. Первая и вторая пересекаются в точках A_0 и A_1 , вторая и третья — в точках B_0 и B_1 , третья и первая — в точках C_0 и C_1 . Пусть $O_{i,j,k}$ — центр описанной окружности треугольника $A_iB_jC_k$. Через все пары точек вида $O_{i,j,k}$ и $O_{1-i,1-j,1-k}$ провели прямые. Докажите, что эти 4 прямые пересекаются в одной точке или параллельны. (Заочный тур олимпиады им. И.Ф.Шарыгина 2019)

Решение.

Пример 4. Каждая из окружностей S_1 , S_2 и S_3 касается внешним образом окружности S (в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно) и двух сторон треугольника ABC (см. рис.). Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке. (Всеросс., 1994, финал, 10)

Решение.

Задачи

ТУТ БУДУТ ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

Подсказки

ТУТ БУДУТ ПОДСКАЗКИ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

Список литературы

[1] Я. П. Понарин Элементарная геометрия Том 1

- [2] А.Куликова, Д.Прокопенко — «Теорема об изогоналях»
http://geometry.ru/articles/isogonal_theorem_kvant_04_05.pdf