

# Конкурентные прямые.

В этом разделе мы рассмотрим одну из самых встречающихся тем в олимпиадной геометрии (планиметрии). Это целый класс задач, в которых требуется доказать, что какие-то прямые пересекаются в одной точке (или параллельны), такие прямые ещё называют *конкурентными*. Как правило их три, но может быть и больше. В данном разделе мы ограничимся рассмотрением примеров, где в основном фигурируют только три прямые.

## Методы решения задач

### Метод масс

Для начала введем несколько базовых понятий.

**Материальная точка** — точка, которой «приписана» некоторая масса.

**Моментом** материальной точки  $A(m)$  относительно точки  $Z$  называют вектор  $m \overrightarrow{ZA}$ .

Точка  $Z$  называется **центром масс** системы материальных точек

$A_1(m_1), A_2(m_2), \dots, A_n(m_n)$ , если  $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{ZA_i} = \vec{0}$ .

**Теорема** (о существовании центра масс). *Центр масс произвольной системы  $A_1(m_1), \dots, A_n(m_n)$  всегда существует, если  $\sum_{i=1}^n m_i \neq 0$ .*

*Доказательство.*

□ Рассмотрим произвольную точку  $X$ . Тогда для любой точки плоскости  $O$  имеет место равенство  $\sum_{i=1}^n m_i (\overrightarrow{XA_i} - \overrightarrow{OX}) = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i}$ . Тогда, чтобы точка  $O$  была **центром масс** системы, должно выполняться равенство  $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0} \iff \sum_{i=1}^n m_i (\overrightarrow{XA_i} - \overrightarrow{OX}) = \vec{0} \iff \overrightarrow{XO} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{XA_i}}{\sum m_i}$ . То есть

утверждение о существовании **центра масс** свелось к утверждению, что существует вектор  $\overrightarrow{XO}$ , заданный соответствующим соотношением, а он, понятное дело, существует. ■

**Комментарий.** Если условие  $\sum_{i=1}^n m_i \neq 0$  не выполняется, то величина

$|\overrightarrow{XO}| = \left| \frac{\sum m_i \overrightarrow{XA_i}}{\sum m_i} \right|$  не имеет смысла, поэтому это ограничение на сумму масс существенно.

**Теорема** (о единственности центра масс). *Если центр масс системы  $A_1(m_1), \dots, A_n(m_n)$  существует, то он единственен.*

*Доказательство.*

□ От противного. Пусть существуют два различных центра масс  $Z$  и  $Z'$ . Тогда по определению имеем:  $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{ZA_i} = \vec{0}$ ,  $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{Z'A_i} = \vec{0}$ .  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{ZZ'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{ZZ'} \sum_{i=1}^n m_i = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{ZZ'} = \vec{0}$  (последний переход верен, так как центр масс существует, то есть  $\sum_{i=1}^n m_i \neq 0$ )  $\Leftrightarrow Z = Z'$ , что противоречит предположению, что точки  $Z$  и  $Z'$  различны.  $\Rightarrow$  центр масс  $Z$  единственен. ■

Далее будем считать, что  $\sum_{i=1}^n m_i \neq 0$ .

**Теорема** (о группировке масс). *Пусть есть система материальных точек  $A_1(m_1), A_2(m_2), \dots, A_n(m_n), B_1(k_1), B_2(k_2), \dots, B_l(k_l)$ , и подсистема  $A_1(m_1), A_2(m_2), \dots, A_n(m_n)$  имеет центр масс  $W$ . Назовем редуцированной системой систему  $W(m_1 + \dots + m_n), B_1(k_1), B_2(k_2), \dots, B_l(k_l)$ . Тогда исходная система имеет ц.м.  $Z$  в том и только том случае, когда редуцированная система имеет ц.м.  $Z$ .*

*Доказательство.*

□ Согласно определению центра масс, надо доказать равносильность  $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{ZA_i} + \sum_{j=1}^l k_j \overrightarrow{ZB_j} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^l k_j \overrightarrow{ZB_j} + \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{ZW} = \vec{0}$ . То есть надо показать равенство:  $\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{ZA_i} = \overrightarrow{ZW} \sum_{i=1}^n m_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n m_i (\overrightarrow{ZA_i} - \overrightarrow{ZW}) = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{WA_i} = \vec{0}$ , что верно в силу того, что  $W$  — центр масс подсистемы  $A_1(m_1), A_2(m_2), \dots, A_n(m_n)$ . ■

Метод масс широко используется при доказательстве теорем и задач на конкурентность прямых, причем их может быть любое количество, а ключевым элементом решения является именно *теорема о группировке масс*.

## Теорема Чевы

Один из самых мощных методов доказательства того, что три прямые проходят через одну точку или параллельны. Приведем ниже доказательство через *метод масс*. С другими доказательствами этой теоремы (через площадь, подобие и др.) вы можете ознакомиться в других источниках, например, в книге Я. П. Понарина «Элементарная геометрия. Том 1».

**Теорема (Чевы).** Пусть на прямых  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ , определяющих треугольник  $ABC$ , даны точки  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ . Для того, чтобы прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекались в одной точке или были параллельными, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = 1$$

*Доказательство.*

□ Пусть  $AA_1 \cap BB_1 = P$ ,  $CP \cap AB = C_1$ . Поместим массы 1,  $\frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}}$ ,  $\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}$  (здесь за  $\bar{v}$  обозначается вектор  $v$ ) в точки  $C$ ,  $B$ ,  $A$  соответственно. Тогда центр масс точек  $B$  и  $C$  находится в  $A_1$ , а значит, по теореме о группировке масс, центр масс вершин  $\triangle ABC$  лежит на прямой  $AA_1$ . Аналогично получаем, что он лежит и на  $BB_1$ . Следовательно,  $P$  — центр масс вершин  $\triangle ABC$ , согласно теореме о единственности центра масс.

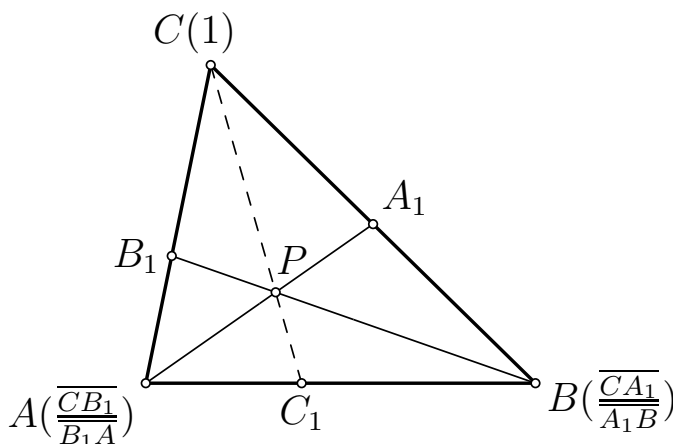
Так как  $P \in CC_1$ , центр масс точек  $B$  и  $A$  находится в  $C_1$ . Из этого

следует, что  $\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{C_1B} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} = \vec{0} \iff \frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = 1$ . Мы

доказали сразу и *необходимость*, и *достаточность*, потому что полученное выражение является критерием принадлежности точки  $P$  прямой  $CC_1$ , то есть

того, что все три чевианы проходят через одну точку.

Пусть теперь прямые  $AA_1$  и  $BB_1$  параллельны. Докажем, что тогда прямая  $CC_1$  им параллельна. От противного. Пусть  $CC_1 \cap BB_1 = P$ , тогда, аналогично доказанному выше, получаем, что через точку  $P$  проходит прямая  $AA_1$ , так как  $P$  — центр масс вершин  $\triangle ABC$ , а мы доказали, что если две прямые



через него проходят, то и третья тоже через него проходит, но  $P \in AA_1$  противоречит предположению  $AA_1 \parallel BB_1 \Rightarrow CC_1 \parallel BB_1 \parallel AA_1$ . ■

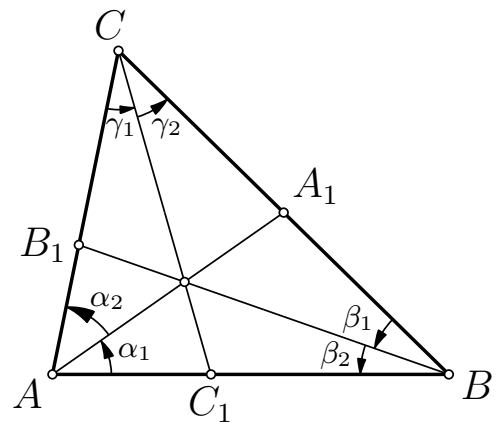
Формулу теоремы Чебы несложно запомнить, если при записи отношений пользоваться правилом «в числителе: вектор от текущей вершины до основания чевяны, для которого еще не записано отношение, а в знаменателе: вектор от текущего основания чевяны до другой вершины на данной прямой, содержащей основание чевяны и предыдущую вершину». То есть мы обходим треугольник по или против часовой стрелки и записываем отношения по данному правилу.

### Примечание

**Тригонометрическая (угловая) форма теоремы Чебы.**

Если ввести в рассмотрение *ориентированные* углы  $\alpha_1 = \angle BAA_1$ ,  $\alpha_2 = \angle A_1AC$ ,  $\gamma_1 = \angle ACC_1$ ,  $\gamma_2 = \angle C_1CB$ ,  $\beta_1 = \angle CBB_1$ ,  $\beta_2 = \angle B_1BA$ , то соотношение теоремы Чебы можно представить в эквивалентном виде через синусы этих углов, а именно

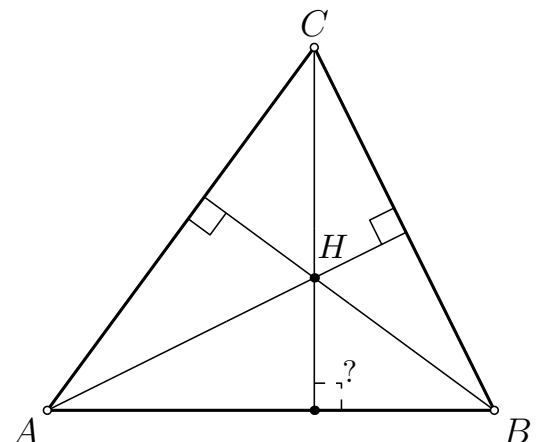
$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = 1$$



Предлагаем читателю доказать данное утверждение самостоятельно, это будет хорошим упражнением.

## Принадлежность точки пересечения двух прямых третьей

Можно попробовать доказать, что точка пересечения каких-то двух прямых из трех принадлежит третьей прямой. Классическим примером является доказательство того, что высоты, медианы и биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. С помощью данного метода иногда так же легко доказываются и более сложные вещи, например, то, что *радикальные оси* трех окружностей конкurentны. Точнее, таким способом можно доказать, что в *нетривиальном* случае они проходят через одну точку, а *тривиальный* случай



можно разобрать отдельно. Этот метод можно по-разному использовать, например, доказать конкурентность высот треугольника можно исходя из следующих соображений: *проведем две высоты и третью прямую, проходящую через точку пересечения двух высот и через третью вершину треугольника, а потом докажем, что это и будет искомая высота.*

## Преобразование плоскости

Можно сделать *преобразование плоскости*  $f$ , отображающее плоскость на себя, которое переводит исходные прямые  $a, b, c$ , про которые нам нужно доказать, что они конкурентны, в некоторые прямые  $a', b', c'$ , причем,  $a \parallel a', b \parallel b', c \parallel c'$ . Тогда, если их образы  $a', b', c'$  конкурентны, то и исходные прямые были таковыми.

Докажем равносильность конкурентности образов прямых и исходных прямых.

*Необходимость.*

Пусть  $a \cap b \cap c = M$ ;  $\forall i \in \{a, b, c\}: f(i) = i'$  и  $f(M) = M'$ . Заметим, что  $\forall i \in \{a, b, c\}: M \in i \Rightarrow M' \in f(i) \Rightarrow M' \in a', b', c'$ .

Если же  $a \parallel b \parallel c$ , то, т.к.  $f$  переводит  $a, b, c$  в параллельные им прямые, имеем следующее:  $a \parallel b \parallel c \Rightarrow f^{-1}(a) \parallel f^{-1}(b) \parallel f^{-1}(c) \Leftrightarrow a' \parallel b' \parallel c'$ .

*Достаточность.*

Пусть  $a', b', c'$  — образы прямых  $a, b, c$  соответственно при преобразовании плоскости  $f$ ,  $a' \cap b' \cap c' = M'$ ,  $f^{-1}(M') = M$ . Тогда

$$\left. \begin{array}{l} f^{-1}(a') = a \\ f^{-1}(b') = b \\ f^{-1}(c') = c \\ f^{-1}(M') = M \\ M' \in a', b', c' \end{array} \right\} \Rightarrow M \in a, b, c$$

Если же  $a' \parallel b' \parallel c'$ , то, т.к.  $f$  переводит  $a, b, c$  в параллельные им прямые и  $f$  — *биективное* преобразование плоскости, имеем следующее:  $a' \parallel b' \parallel c' \Rightarrow f^{-1}(a') \parallel f^{-1}(b') \parallel f^{-1}(c') \Leftrightarrow a \parallel b \parallel c$ .

(Данный метод применим не только для случая  $n = 3$ , но и для любого количества прямых)

**Комментарий.** Если требуется только, чтобы прямые  $a, b, c$  пересекались в одной точке, то достаточно, чтобы  $f$  переводило  $a, b, c$  в любые прямые. В таком случае пересечение прямых  $a, b, c$  в одной точке, по вышеописанным причинам, также сохраняется.

## Известные прямые

Посмотреть, может быть это какие-то известные три прямые, про которые вы знаете, что они конкурентны, например, это могут быть три прямые, которые являются радикальными осями каких-то окружностей или медианами/биссектрисами/высотами, или просто конкурентными чевианами в каком-нибудь треугольнике. Можно также начать действовать с конца. То есть в предположении, что утверждение доказано выявить какие-нибудь полезные *признаки* картинки и попытаться ими воспользоваться. Таким образом можно свести исходную задачу к равенству углов, подобию/гомотетичности треугольника и т.п., и постараться доказать уже новое утверждение.

## Изогонали и изогональное сопряжение

В продолжение предыдущего подраздела про известные прямые рассмотрим такие прямые, которые называют *изогоналями*.

**Определение.** Прямые  $AP$  и  $AQ$  называются *изогоналями* относительно данного угла  $BAC$ , если  $\angle PAB = \angle QAC$ . (Что, очевидно, эквивалентно следующему:  $AP$  и  $AQ$  симметричны относительно биссектрисы угла  $BAC$ ).

**Теорема (основная теорема об изогоналях).** Пусть имеются прямые  $a, b, c$ , проходящие через точки  $A, B, C$  соответственно. Тогда  $a, b, c$  конкурентны  $\iff a', b', c'$  конкурентны, где  $a'$  и  $a$ ;  $b'$  и  $b$ ;  $c'$  и  $c$  — изогонали относительно углов  $A, B, C$  соответственно.

*Доказательство.*

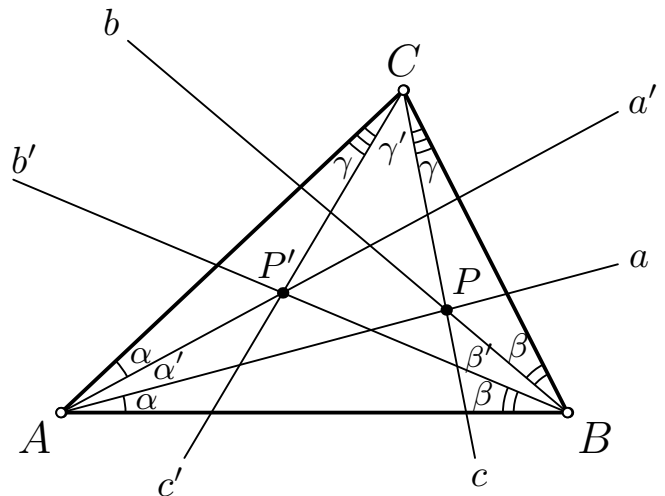
□ Докажем сначала, что из конкурентности прямых  $a, b, c$  следует конкурентность прямых  $a', b', c'$ .

Пусть  $\angle PCB = \gamma$ ,  $\angle BAP = \alpha$ ,  $\angle CBP = \beta$ . Пусть так же  $\angle P'CP = \gamma'$ ,  $\angle PAP' = \alpha'$ ,  $\angle PBP' = \beta'$  (здесь все углы ориентированные). Тогда для прямых  $a, b, c$  из угловой теореме Чебы имеем следующее:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \alpha')} \cdot \frac{\sin(\gamma + \gamma')}{\sin \gamma} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \beta')} = 1$$

А теперь заметим, что

$$\frac{\sin(\alpha + \alpha')}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin(\gamma + \gamma')} \cdot \frac{\sin(\beta + \beta')}{\sin \beta} = 1$$



Но ведь это — выражение угловой формы теоремы Чебы для прямых  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ . А значит, согласно угловой теореме Чебы,  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  конкурентны. Обратное следствие доказывается аналогично. ■

**Примечание.** Точки  $P$  и  $P'$  называют *изогонально сопряжёнными*.

Приведем ниже, как дополнение, интересный факт, доказательство которого вы можете найти, например, в статье «Теорема об изогоналях» А.Куликовой и Д.Прокопенко.

**Теорема.** Пусть  $OB$  и  $OC$  — изогоналы угла  $AOD$ . Прямые  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $Q$ , прямые  $AB$  и  $CD$  — в точке  $P$ . Тогда  $OP$  и  $OQ$  — также изогоналы относительно угла  $AOD$ .

## Теорема Дезарга

<ТУТ БУДЕТ ТЕОРЕМА ДЕЗАРГА>

Понятное дело, что это далеко не самый полный список методов доказательства таких задач. Цель данного раздела — показать, в каких направлениях можно продвигаться в задачах такого типа, если не понятно, как начать действовать.

## Примеры

Давайте рассмотрим теперь применение данных методов при решении конкретных задач.

**Пример 1.** В треугольнике  $ABC$   $AL_a$ ,  $BL_b$ ,  $CL_c$  — биссектрисы,  $K_a$  — точка пересечения касательных к описанной окружности в вершинах  $B$  и  $C$ ,  $K_b$ ,  $K_c$  определены аналогично. Докажите, что прямые  $K_aL_a$ ,  $K_bL_b$  и  $K_cL_c$  пересекаются в одной точке. (Заочный тур олимпиады им. И.Ф.Шарыгина 2019)

**Решение.** Чтобы понять, какой из вышеописанных методов поможет в решении данной задачи, обратимся к рисунку (см. рис. 1). Из известных преобразований плоскости тут мало что может помочь. Скажем, используя, *поворот*, или *осевую симметрию*, или *параллельный перенос* — не совсем понятно относительно чего производить эти преобразования, и что куда при них перейдет. *Инверсия* здесь явно не поможет, потому что данные прямые не проходят через центр какой-нибудь «удобной» окружности, и поэтому вообще перейдут в окружности, следовательно нам ничего доказать не удастся. Использование

*гомотетии* также не кажется, по крайней мере на первый взгляд, осмысленным, т.к. мы ничего не можем сказать про отношения отрезков (кроме, разве что, в  $\triangle ABC$ ), поэтому не поймем что куда перейдет. Остается последний вариант — теорема Чебы. На первый взгляд её использование здесь вам может показаться неуместным, но не торопитесь с выводами. Итак, давайте разбираться, как же все-таки здесь использовать теорему Чебы.

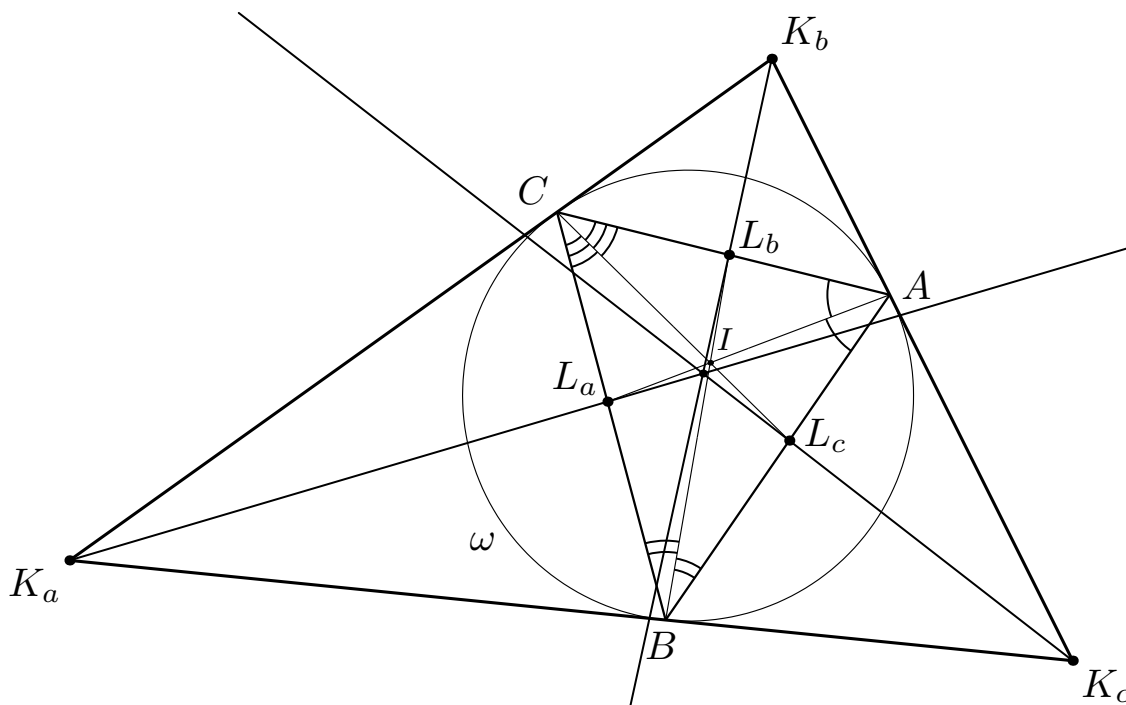


Рис. 1

Как мы помним, в теореме Чебы нам нужно, чтобы произведение отношений соответствующих направленных отрезков было равно 1, тогда и только тогда прямые пересекутся в одной точке. Здесь отношения таких отрезков считать неудобно, поэтому давайте лучше постараемся все-таки понять что-то про расположение данных прямых. Единственное, отношение чего мы знаем — отношения отрезков, содержащие основания биссекрис  $\triangle ABC$ . Было бы хорошо понять что-нибудь про расположение самих прямых, например, углы относительно сторон  $\triangle K_a K_b K_c$ . Давайте отдельно перерисуем фрагмент рисунка, содержащий одну из трех прямых ( $K_a L_a$ ,  $K_b L_b$ ,  $K_c L_c$ ), и исследуем его.



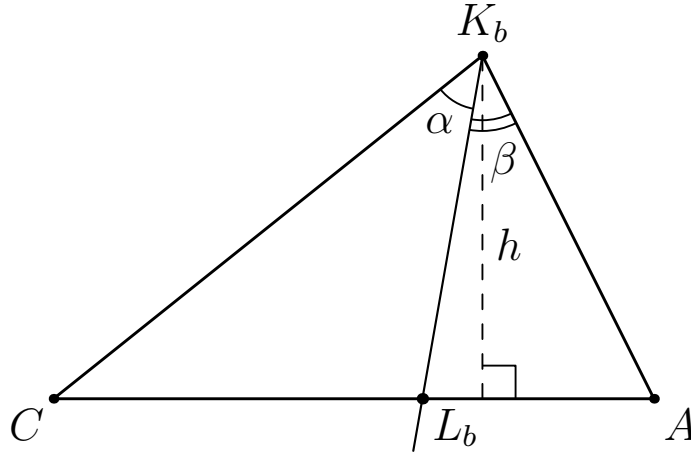


Рис. 2

Попробуем как-то привязаться к углам  $\alpha$  и  $\beta$ , зная отношение  $\frac{CL_b}{L_bA}$ . Давайте вспомним, что площадь треугольника можно посчитать как полупроизведение сторон на синус угла между ними. То есть  $S_{CK_bL_b} = \frac{CK_b \cdot K_bL_b \cdot \sin \alpha}{2}$ . Аналогично  $S_{AK_bL_b} = \frac{K_bL_b \cdot K_bA \cdot \sin \beta}{2}$ . Откуда получаем  $\frac{S_{CK_bL_b}}{S_{AK_bL_b}} = \frac{CK_b \cdot \sin \alpha}{K_bA \cdot \sin \beta}$ . С другой стороны  $S_{AK_bL_b} = \frac{h \cdot L_bA}{2}$  и  $S_{CK_bL_b} = \frac{h \cdot L_bC}{2}$ .

$$\text{Тогда } \frac{S_{CK_bL_b}}{S_{AK_bL_b}} = \frac{L_bC}{L_bA}. \text{ И окончательно } \frac{S_{CK_bL_b}}{S_{AK_bL_b}} = \frac{CK_b \cdot \sin \alpha}{K_bA \cdot \sin \beta} = \frac{L_bC}{L_bA}.$$

Но ведь  $K_bC$  и  $K_bA$  — это отрезки касательных к окружности  $\omega$  из одной точки  $\Rightarrow K_bC = K_bA$ .

$$\text{В итоге полученное выражение приобретает вид } \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{L_bC}{L_bA}.$$

Мы видим отношение двух синусов, что наталкивает нас на мысль о том, что на самом деле мы будем использовать «угловую» форму теоремы Чевы.

Теперь остается лишь написать схожее отношение для всех трех прямых и перемножить.

$$\frac{\sin \angle K_c K_a L_a}{\sin \angle L_a K_a K_b} \cdot \frac{\sin \angle K_a K_b L_b}{\sin \angle L_b K_b K_c} \cdot \frac{\sin \angle K_b K_c L_c}{\sin \angle L_c K_c K_a} = \frac{BL_a}{L_a C} \cdot \frac{CL_b}{L_b A} \cdot \frac{AL_c}{L_c B} = 1$$

(последнее равенство верно, т.к. биссектрисы пересекаются в одной точке)

Тогда, согласно «угловой» форме теоремы Чевы, прямые  $K_a L_a$ ,  $K_b L_b$ ,  $K_c L_c$  пересекаются в одной точке.

**Комментарий.** Вектора мы опустили, потому что основания биссектрис всегда лежат на сторонах треугольника. Однако стоит отметить, что условие

« $BL_b, AL_a, CL_c$  — биссектрисы» мы использовали, только когда считали отношение синусов соответствующих углов. То есть, вообще-то говоря,  $BL_b, AL_a, CL_c$  могли быть любыми *чевианами* в  $\triangle ABC$ , основания которых лежат на сторонах треугольника, и которые пересекаются в одной точке.

**Пример 2.** В треугольнике  $ABC$   $AN_1$  и  $BN_2$  — высоты; касательная к описанной окружности в точке  $A$  пересекает  $BC$  в точке  $S_1$ , а касательная в точке  $B$  пересекает  $AC$  в точке  $S_2$ ;  $T_1$  и  $T_2$  — середины отрезков  $AS_1$  и  $BS_2$ . Докажите, что  $T_1T_2$ ,  $AB$  и  $H_1H_2$  пересекаются в одной точке. (*Заочный тур олимпиады им. И.Ф.Шарыгина 2019*)

**Решение.** На первый взгляд задача кажется достаточно трудной, однако можно снова обратиться к списку вышеописанных методов и выбрать нам подходящий, как мы делали в предыдущем примере.

**Пример 3.** Даны три окружности. Первая и вторая пересекаются в точках  $A_0$  и  $A_1$ , вторая и третья — в точках  $B_0$  и  $B_1$ , третья и первая — в точках  $C_0$  и  $C_1$ . Пусть  $O_{i,j,k}$  — центр описанной окружности треугольника  $A_iB_jC_k$ . Через все пары точек вида  $O_{i,j,k}$  и  $O_{1-i,1-j,1-k}$  провели прямые. Докажите, что эти 4 прямые пересекаются в одной точке или параллельны. (*Заочный тур олимпиады им. И.Ф.Шарыгина 2019*)

**Решение.**

**Пример 4.** Каждая из окружностей  $S_1, S_2$  и  $S_3$  касается внешним образом окружности  $S$  (в точках  $A_1, B_1, C_1$  соответственно) и двух сторон треугольника  $ABC$  (см. рис.). Докажите, что прямые  $AA_1, BB_1, CC_1$  пересекаются в одной точке. (*Всеросс., 1994, финал, 10*)

**Решение.**

## Задачи

ТУТ БУДУТ ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

## Подсказки

ТУТ БУДУТ ПОДСКАЗКИ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

## Список литературы

- [1] Я. П. Понарин Элементарная геометрия Том 1
- [2] А.Куликова, Д.Прокопенко — «Теорема об изогоналях»  
[http://geometry.ru/articles/isogonal\\_theorem\\_kvant\\_04\\_05.pdf](http://geometry.ru/articles/isogonal_theorem_kvant_04_05.pdf)