Сопло Лаваля

Андрей Киркича, Б01-202, МФТИ, 2023

Сопло Лаваля - канал особого профиля, который используется для разгона газа до сверхзвуковых скоростей.

Основное применение сопла Лаваля - в ракетных двигателях.

1. Уравнение Эйлера

Выделим участок жидкости и запишем для него второй закон Ньютона в следующем виде:

$$\int\limits_V \vec{a} dm = \int\limits_V \vec{g} dm - \int\limits_S p d\vec{S}$$

Знак "$-$" перед вторым слагаемым связан с тем, что вектор площади направлен наружу, а сила, создаваемая давлением в жидкости, считается направленной внутрь участка.
Здесь учтено влияние внешнего поля (гравитации).

Перейдя от поверхностного интеграла к объёмному по формуле Гаусса-Остроградского, можем это переписать так:

$$\int\limits_V \vec{a} dm = \int\limits_V \vec{g} dm - \int\limits_V \vec{\nabla} p dV$$

$\vec{\nabla}$ - оператор Набла (применяя его к давлению, получаем градиент).

$$\int\limits_V \rho \vec{a} dV = \int\limits_V \rho \vec{g} dV - \int\limits_V \vec{\nabla} p dV$$

$$\rho \vec{a} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p \tag{1}$$

В трубке мы имеем поле скоростей $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$. Мы получили выражение $\frac{d\vec{v}}{dt}$ для некоторого участка жидкости, который как-то перемещается по трубке. Но нужно описать скорость течения в конкретной статичной точке жидкости.

Запишем полный дифференциал скорости:

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}dz$$

И разделим на dt:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}v_z$$

Перепишем иначе:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{v}$$

При этом оператор $\vec{\nabla}$ действует на вектор $\vec{v}$, стоящий справа от него.

Выражение $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{v}$ называется *конвективной производной*.
Выражение для $\frac{d\vec{v}}{dt}$ называется *субстанциональной производной*.

Тогда с учётом этого из (1) получаем *уравнение Эйлера*:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p}$$

2. Форма канала

Рассматриваем следующую модель:

- Газ идеален
- Поток адиабатичен
- Поток одномерен
- Массовый расход газа постоянен
- Влияние внешних полей принебрежимо мало

Тогда уравнение Эйлера приобретёт вид:

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} \tag{2}$$

Введём *число Маха* $M = \frac{\upsilon}{c}$, где υ - скорость газа в рассматриваемой точке, c - скорость звука в газе.

Преобразуем (2):

$$\upsilon \frac{d\upsilon}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{dx}$$

Из термодинамики известно, что при адиабатическом процессе $\frac{dp}{d\rho} = c^2$.

$$\upsilon^2 \frac{d\upsilon}{dx} = -\frac{\upsilon}{\rho} c^2 \frac{d\rho}{dx}$$

$$M^2 \frac{d\upsilon}{dx} = -\frac{\upsilon}{\rho} \frac{d\rho}{dx} \tag{3}$$

Запишем уравнение непрерывности:

$$\rho \upsilon S = const$$

$$\ln(\rho \upsilon S) = \ln \rho + \ln \upsilon + \ln S = const$$

Продифференцируем по x:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{\upsilon} \frac{d\upsilon}{dx} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = -\frac{1}{\upsilon} \frac{d\upsilon}{dx} - \frac{1}{S} \frac{dS}{dx}$$

Тогда (3) принимает вид:

$$M^2 \frac{1}{\upsilon} \frac{d\upsilon}{dx} = \frac{1}{\upsilon} \frac{d\upsilon}{dx} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx}$$

$$\boxed{\frac{dS}{dx} = \frac{S}{\upsilon} \frac{d\upsilon}{dx} (M^2 - 1)}$$

Теперь проанализируем полученную формулу. Нас интересует повышение скорости газа, поэтому $\frac{dv}{dx} > 0$.

- При $M < 1$ $(v < c)$ получаем $\frac{dS}{dx} < 0$. То есть при разгоне до скорости звука сопло сужается.
- При $M = 1$ $(v = c)$ получаем $\frac{dS}{dx} = 0$. В этой точке площадь сечения сопла минимальна. Газ здесь имеет звуковую скорость.
- При $M > 1$ $(v > c)$ получаем $\frac{dS}{dx} > 0$. При дальнейшем ускорении газа сопло расширяется.

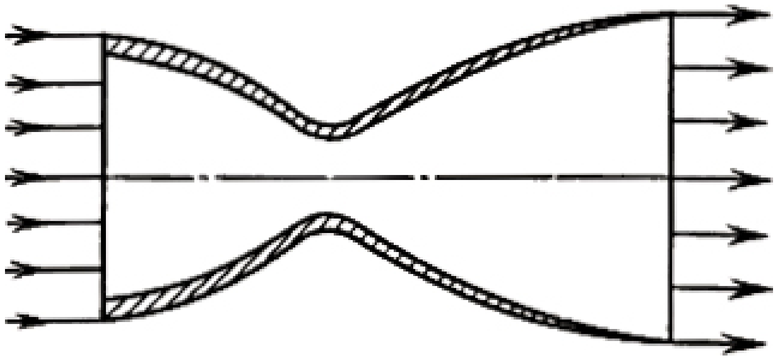

Рисунок 1: форма сопла Лаваля

3. Характеристики и работа в среде

Сечение сопла, имеющее минимальную площадь, называется *критическим.*

Для ракетных двигателей вводят несколько характеристик:

- $\frac{S_{\text{вых}}}{S_{\text{кр}}}$ - *степень расширения* сопла

  ($S_{\text{вых}}$ - площадь сечения сопла на выходе, $S_{\text{кр}}$ - площадь критического сечения)

- $\frac{p_{\text{вых}}}{p_{\text{атм}}}$ - *степень нерасчётности* сопла

  ($p_{\text{вых}}$ - давление газа на выходе сопла, $p_{\text{атм}}$ - давление со стороны окружающей среды)

- $I = \frac{P}{\dot{m}}$ - *удельный импульс* $(\frac{\text{м}}{\text{с}})$

  (P - сила тяги (Н), $\dot{m}$ - массовый расход $(\frac{\text{кг}}{\text{с}})$)

Вообще сила тяги складывается из собственной тяги ракеты и силы со стороны внешней среды, препятствующей выходу газа. Поэтому:

$$I = \frac{P_0 + \Delta p S_{\text{вых}}}{\dot{m}} = \frac{d(m\upsilon_0)/dt}{dm/dt} + \frac{\Delta p S_{\text{вых}}}{\dot{m}} = \upsilon_0 \cdot \frac{dm/dt}{dm/dt} + \frac{\Delta p S_{\text{вых}}}{\dot{m}} = \upsilon_0 + \frac{(p_{\text{вых}} - p_{\text{атм}}) S_{\text{вых}}}{\dot{m}} \quad (4)$$

υ_0 - это расчётная скорость истечения газа. Видно, что в зависимости от окружающей среды итоговая скорость будет отлична от υ_0.

Будем учитывать, что давление газа по мере продвижения по соплу уменьшается.

Выделяют несколько режимов работы в среде:

- $p_{\text{вых}} = p_{\text{атм}}$ - *оптимальный (расчётный)* режим

  В нём достигается расчётная скорость.

- $p_{\text{вых}} > p_{\text{атм}}$ - режим *недорасширения*

  Излишняя энергия газа расходуется на разгон внешней среды за соплом. Можно было бы использовать эту энергию для разгона самой ракеты, продлив для этого сопло.

  Недорасширение возможно в верхних слоях атмосферы, когда $p_{\text{атм}}$ мало. Для более эффективной работы двигателя создают сопловые насадки. Они продлевают сопло (тем самым увеличивая степень расширения) и больше энергии газа расходуется на пользу (то есть на разгон аппарата). Однако тут появляется другая проблема: насадки имеют массу и на разгон этой дополнительной массы тоже нужно тратить топливо. В этой ситуации учитывают конструктивные особенности всего аппарата, чтобы найти оптимальное решение.

  В вакууме недорасширение неизбежно.

- $p_{\text{вых}} < p_{\text{атм}}$ - режим *перерасширения*

  Газ в сопле расширяется до конца и дальше встречает слои атмосферы, которые его останавливают. По формуле (4) видно, что при этом скорость истечения газа из сопла ниже расчётной. Перерасширение становится опасным при степени нерасчётности ниже 0.4. Возникает резкое уплотнение газа, которое может породить обратную звуковую волну. Волна будет двигаться со сверхзвуковой скоростью навстречу потоку газа и сможет достичь критического сечения. Такой процесс способен сорвать течение газа и серьёзно повредить двигатель.

  Однако конструкторы иногда сознательно идут на перерасширение в начале полёта ракеты. Как показывает практика, это оказывается более выгодно относительно трат топлива. С набором высоты атмосфера разряжается и давление $p_{\text{атм}}$ падает, наступает оптимальный режим.