

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)

Отчёт о выполнении лабораторной работы 3.6.1

Спектральный анализ электрических
сигналов

Автор:
Киркича Андрей Александрович
Б01-202

Долгопрудный, 29 сентября 2023 г.

Цель работы: исследование резонанса токов в параллельном колебательном контуре с изменяемой ёмкостью, получение амплитудно-частотных и фазово-частотных характеристик, определение основных параметров контура.

В работе используются: генератор сигналов произвольной формы, цифровой осциллограф с функцией быстрого преобразования Фурье.

Теоретические сведения

Разложение сложных сигналов на периодические колебания

В работе используется разложение функции в сумму синусов и косинусов с различными аргументами или, как чаще его называют, *разложение в ряд Фурье*.

Пусть задана функция $f(t)$, которая периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов. Её разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)] \quad (1)$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n). \quad (2)$$

Если сигнал чётен относительно $t = 0$, в тригонометрической записи остаются только члены с косинусами. Для нечетного — наоборот.

Коэффициенты определяются по формулам:

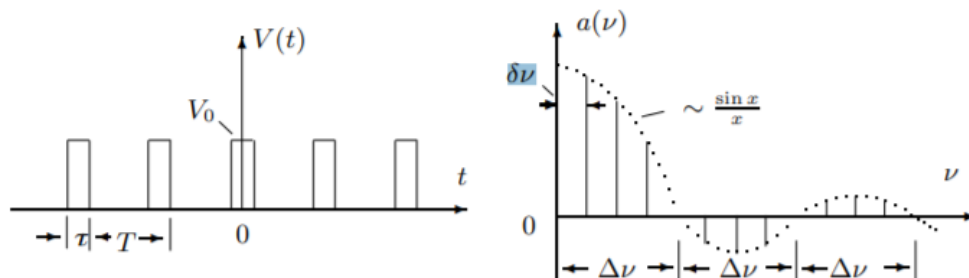
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь t_1 — время, с которого мы начинаем отсчет.

Сравнив формулы (1) и (2), можно получить выражения для A_n и ψ_n :

$$\begin{aligned} A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \\ \psi_n &= \arctan \frac{b_n}{a_n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Периодическая последовательность прямоугольных импульсов



Введем величину: $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов.

Коэффициенты при косинусных составляющих будут равны:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \tau/2)}{n\Omega_1 \tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}. \quad (5)$$

Здесь V_0 - амплитуда сигнала.

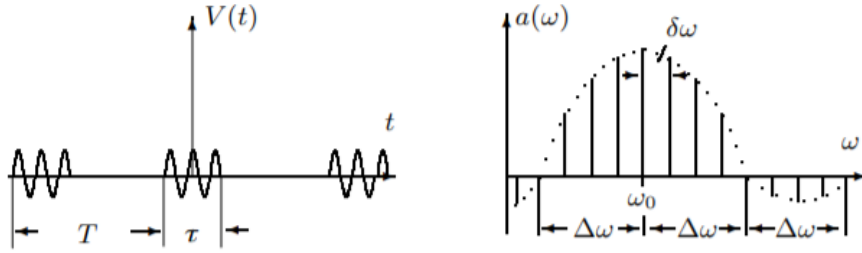
Поскольку наша функция четная, $b_n = 0$.

Пусть T кратно τ . Тогда введем ширину спектра, равную $\Delta\omega$ — расстоянию от главного максимума до первого нуля огибающей, возникающего, как нетрудно убедиться, при $n = \frac{2\pi}{\tau\Omega_1}$. При этом:

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \Rightarrow \Delta\nu\Delta t \simeq 1. \quad (6)$$

В работе мы будем проверять справедливость этой формулы.

Периодическая последовательность цугов



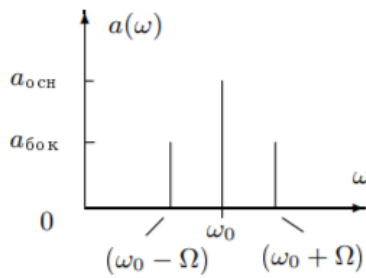
Возьмём цуги колебания $V_0 \cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторений T .

Функция $f(t)$ снова является четной относительно $t = 0$. Коэффициент при n -ой гармонике согласно формуле (3) равен:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t) dt = V_0 \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin\left[(\omega_0 - n\Omega_1) \frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 - n\Omega_1) \frac{\tau}{2}} + \frac{\sin\left[(\omega_0 + n\Omega_1) \frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 + n\Omega_1) \frac{\tau}{2}} \right). \quad (7)$$

Пусть T кратно τ . Тогда спектры последовательности прямоугольных сигналов и цугов аналогичны, но максимумы сдвинуты на ω_0 .

Амплитудно-модулированные колебания



Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой $\Omega \ll \omega_0$:

$$f(t) = A_0 [1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t. \quad (8)$$

Коэффициент m называется *глубиной модуляции*. При $m < 1$ амплитуда меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1 - m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1 + m)$.

Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}. \quad (9)$$

Простым тригонометрическим преобразованием уравнения (8) можно найти спектр колебаний:

$$f(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{A_0 m}{2} \cos (\omega_0 + \Omega) t + \frac{A_0 m}{2} \cos (\omega_0 - \Omega) t. \quad (10)$$

В дальнейшем мы будем использовать эту формулу.

Результаты измерений

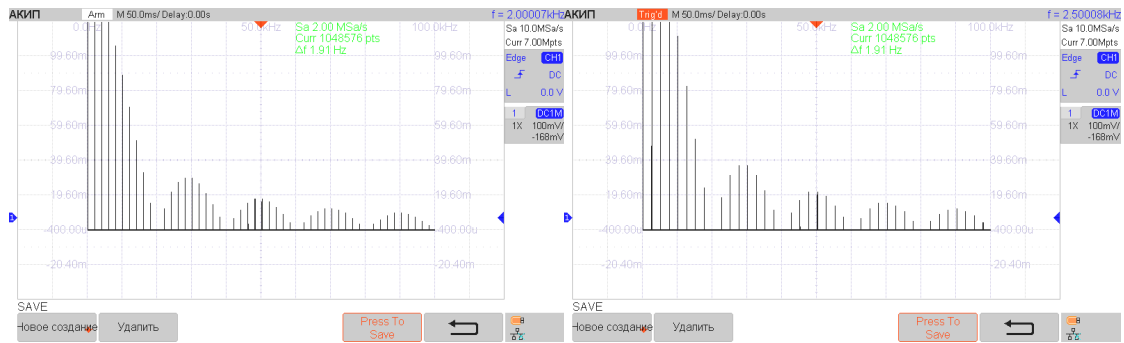
Исследование спектра периодических последовательностей прямоугольных импульсов

Установив прямоугольные колебания с $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц (период $T = 1$ мс) и длительностью импульса $\tau = T/20 = 50$ мкс, мы получили на экране спектр сигнала и, изменяя либо τ , либо $\nu_{\text{повт}}$, наблюдали, как изменяется спектр.



(a) $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 50$ мкс

(b) $\nu_{\text{повт}} = 1.5$ кГц, $\tau = 50$ мкс



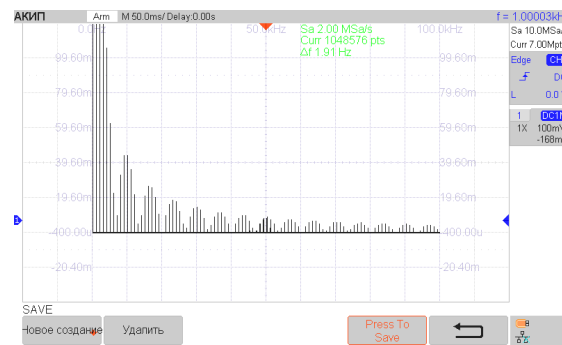
(c) $\nu_{\text{повт}} = 2 \text{ кГц}$, $\tau = 50 \text{ мкс}$

(d) $\nu_{\text{повт}} = 2.5 \text{ кГц}$, $\tau = 50 \text{ мкс}$



(e) $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$, $\tau = 60 \text{ мкс}$

(f) $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$, $\tau = 100 \text{ мкс}$



(g) $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$, $\tau = 150 \text{ мкс}$

Проведя измерения зависимости ширины спектра от $\Delta\nu$, установили связь между $\Delta\nu$ и τ , полученную из формулы (6):

τ , мкс	50	75	100	125	150	175	200
$\Delta\nu$, кГц	19.6	13.4	9.8	8.0	6.5	5.5	4.5
$1/\tau \cdot 10^3$, с ⁻¹	20	13	10	8	7	6	5

$$\Delta\nu\tau = 1,00 \pm 0,02$$

Формула (6) действительно выполняется.

Исследование спектра периодической последовательности цугов

На экране была получена последовательность цугов с характерными параметрами: $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 1$ мс, число периодов в одном импульсе $N = 5$ (длительность импульса $\tau = T/\nu_0 = 100$ мкс).



(h) Последовательность цугов

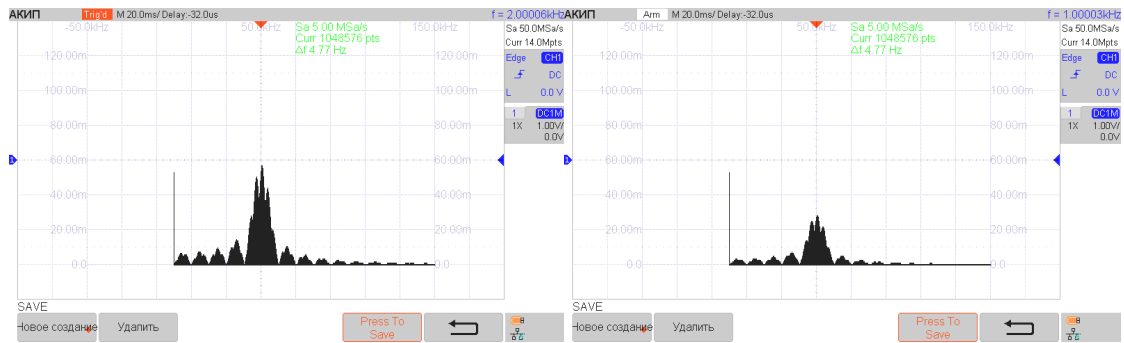
(i) Спектр для цугов

Мы изменяли эти параметры по одному и фиксировали результат:



(j) $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 1$ мс, $N = 10$

(k) $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 1$ мс, $N = 15$



(l) $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 2.5$ мс, $N = 5$

(m) $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 5$ мс, $N = 5$



(n) $\nu_0 = 75$ кГц, $T = 1$ мс, $N = 5$

(o) $\nu_0 = 100$ кГц, $T = 1$ мс, $N = 5$

Далее мы зафиксировали $\nu_0 = 50$ кГц, $N = 5$. Для этих параметров измерили, меняя T ($\nu_{\text{повт}}$), зависимость $\delta\nu$ от τ .

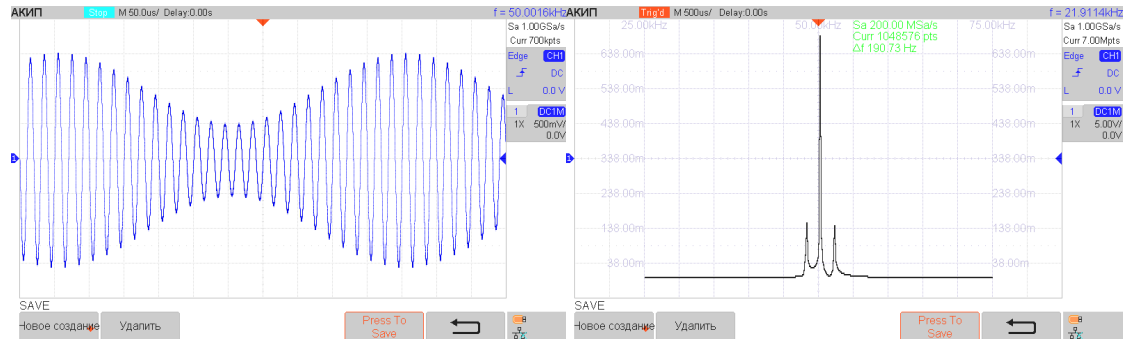
$\Delta\nu$, кГц	23	32	35	38	35	45
n	42	33	18	13	10	8
$\nu_{\text{повт}}$, кГц	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	6.0

Итоговое отношение:
$$\frac{\delta\nu}{\nu_{\text{повт}}} = 1,05 \pm 0,08$$

Исследование спектра амплитудно-модулированного сигнала

На экран выводилась картина амплитудно-модулированного сигнала с характерными параметрами: несущая частота $\nu_0 = 50$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц, глубина

модуляции - 50 % ($m = 0.5$). Картины данного сигнала и его спектра выглядят следующим образом:



(p) Амплитудно-модулированный сигнал

(q) Спектр для $\nu_0 = 50$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц

Найдем для этого сигнала A_{max} и A_{min} и проверим справедливость формулы (9):

$$A_{\text{max}} = 1,52 \text{ В}, \quad A_{\text{min}} = 0,48 \text{ В}, \quad m = 0,52$$

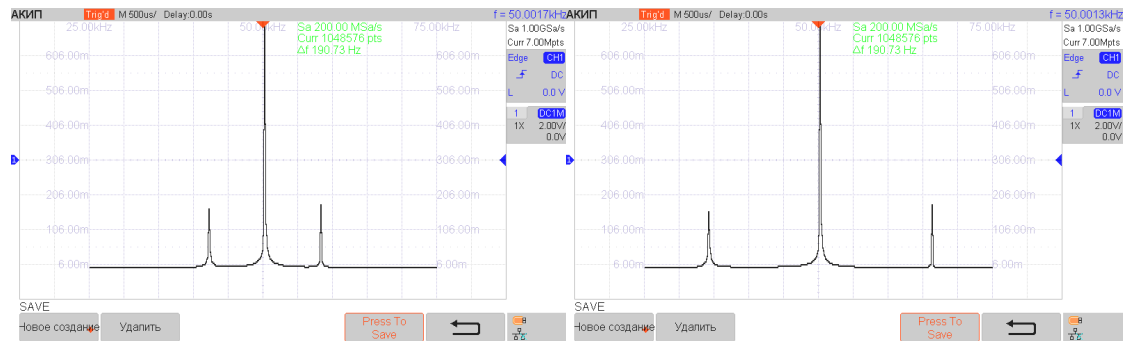
Поскольку мы установили глубину модуляции на 0.5, а из теоретических расчётов получили 0.52, то видно, что формула (9) верна.

Затем мы получили на экране спектр и изменяли параметры сигнала:



(r) $\nu_0 = 60$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц

(s) $\nu_0 = 70$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц



(т) $\nu_0 = 50$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 8$ кГц

(u) $\nu_0 = 50$ кГц, $\nu_{\text{мод}} = 16$ кГц

Из формулы (10) следует, что $a_{\text{осн}} = A_0$, а $a_{\text{бок}} = \frac{mA_0}{2}$.

$m, \%$	10	25	50	75	100
$a_{\text{бок}}, \text{ мВ}$	360	820	1660	2320	3260
$a_{\text{осн}}, \text{ мВ}$	6240	6240	6240	6240	6240
$a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$	0.06	0.13	0.27	0.37	0.52
$a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}} \cdot m, \%$	57.7	52.6	53.2	49.6	52.2
$a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}} \cdot m = (53,1 \pm 1,3)\%$					

Из (10) имеем $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}} \cdot m = 0.5$, что с высокой точностью повторяет наш результат.

Заключение

Исследования зависимости ширины спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов от длительности отдельного импульса в первой части работы полностью совпали с теоретическими расчетами. По наклону графика из этой части можно убедиться в соотношении неопределенностей ($\Delta\nu\Delta t \simeq 1$).

Исследования зависимости расстояния между ближайшими спектральными компонентами от частоты повторения пугов дали схожие результаты.

В последней части коэффициенты, получаемые в результате исследования зависимости отношения амплитуд спектральных линий синусоидального сигнала, модулированного низкочастотными гармоническими колебаниями, от коэффициента модуляции полностью совпали с теоретически рассчитанными.