PACS 07.05.Kf, 02.10.Ox

© 2010 г. Д.И.Коган, д-р техн. наук
(Московский государственный университет приборостроения и информатики),
Ю.С.Федосенко, д-р техн. наук
(Волжская государственная академии водного транспорта, Нижний Новгород)

ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ОБЪЕКТОВ В ОДНОМЕРНОЙ РАБОЧЕЙ ЗОНЕ ПРОЦЕССОРА

Вводится модель одностадийного обслуживания группы стационарных объектов, расположенных вдоль одномерной рабочей зоны перемещающегося процессора. Для обслуживания процессор последовательно выполняет два рейса между крайними точками рабочей зоны: прямой, в этом рейсе обслуживается часть объектов, и обратный, в котором обслуживаются все остальные объекты группы. С каждым объектом ассоциирован индивидуальный штраф, являющийся монотонно возрастающей функцией от момента завершения его обслуживания. Формулируются задачи синтеза оптимальных стратегий обслуживания, излагаются алгоритмы их решения, исследуются вопросы вычислительной сложности.

Ключевые слова: теория расписаний, стратегия обслуживания, *NP*-трудность, полиномиальная разрешимость.

D.I.Kogan, Ph.D., professor
(Moscow State University of Instrument Engineering and Informatics),
Yu.S.Fedosenko, Ph.D., professor
(Volzhskiy State Academy of Water Transport, Nizhny Novgorod)

PROBLEMS OF SYNTHESIS OF THE OPTIMAL STRATEGIES OF SERVICE FOR STATIONARY OBJECTS IN THE ONE-DIMENSIONAL WORKING ZONE OF A PROCESSOR

The model of single-stage service of the group of stationary objects, located along one-dimensional working zone of moving processor is introduced. For performing the service, processor sequentially executes two routes between extreme points of the working zone: direct route, where some part of the objects is served, and reverse route, where all remaining objects are served. For each object we consider individual penalty function increasing with the moment of finishing service. Problems of synthesis of the optimal strategies of service are formulated, solving algorithms are stated, computational complexity is investigated.

Keywords: scheduling theory, service policy, *NP*-complexity, polynomial decidability.

1. Введение

Рассматриваемая модель предназначена для описания систем, в которых перемещающийся процессор должен обслужить совокупность стационарных объектов, расположенных в пределах одномерной рабочей зоны. Считается, что процессор реализует два рейса между крайними точками зоны: прямой, в котором обслуживается часть объектов, и обратный, в котором обслуживаются все остальные объекты. С каждым объектом ассоциируется функция индивидуального штрафа, выражающая зависящую от момента завершения его обслуживания величину потерь. Модель описывает осуществляемые судном-заправщиком процессы снабжения дизельным топливом технологических комплексов в крупномасштабных речных районах русловой добычи нерудных строительных материалов. В рамках вводимой модели формулируются и изучаются задачи синтеза оптимальных стратегий обслуживания.

В типовых моделях теории расписаний полагается, что процессоры стационарны, а требующие обслуживания объекты поступают к ним в заданные моменты времени [1-5]. Специфика изучаемой проблематики заключается в том, что объекты считаются стационарными, перемещается выполняющий их обслуживание процессор. В работах [6, 7] рассматриваются модели, в которых объекты стационарны и пространственно рассредоточены; возможными считаются любые перемещения процессора и, следовательно, любые последовательности обслуживания; здесь возникают и решаются различные обобщения задачи коммивояжера. В модели, являющейся предметом рассмотрения данной статьи, предписанный режим перемещений процессора влечет за собой жесткое ограничение в возможных последовательностях обслуживания. Дополнительно отметим публикации [8, 9], где вводятся задачи, в которых процессор движется по круговой околоземной орбите; отмечается случай, когда возможны встречные движения процессора и подлежащих обслуживанию объектов.

Центральное внимание в данной статье уделяется вопросам вычислительной сложности задач и алгоритмов их решения. Реальная специфика имеющихся прикладных задач диспетчеризации состоит в том, что между моментом, когда полностью определились исходные данные подлежащей решению задачи, и моментом, когда следует начать обслуживание, проходит малый промежуток времени; в течение указанного промежутка стратегия обслуживания должна быть определена [10]. Поэтому в случаях, когда изучаемая задача в своей общей постановке *NP*-трудна [11], необходимо рассмотреть вопрос о наличии ее практически значимых полиномиально разрешимых конкретизаций (частных случаев). Указанный подход систематически проводился в исследованиях В.С.Танаева и возглавляемого им коллектива; адекватное отображение он нашел в монографиях [1-3].

Вячеслав Сергеевич Танаев, начиная с семидесятых годов, являлся ведущим в стране специалистом в области математической кибернетики, активно занимающимся проблемами теории расписаний. Упомянутые выше монографии, написанные на высоком научном и методическом уровне, и сейчас являются настольными книгами для всех специалистов в данном научном направлении. Авторам настоящей работы посчастливилось знать Вячеслава Сергеевича со дня его доклада по представленной к защите кандидатской диссертации в Научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики Горьковского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. Встречи и беседы с ним по широкому кругу задач и методов дискретной оптимизации всегда были для нас очень важными, интересными и продуктивными. Став крупным ученым, академиком, директором Института технической кибернетики и Объединенного института проблем информатики НАН Беларуси, Вячеслав Сергеевич Танаев сохранил лучшие свои качества – сердечность, доброжелательность, простоту и приятность в общении.

Данная статья, развивая применительно к новым моделям подходы, заложенные В.С. Танаевым, состоит из четырех разделов и Приложения. В следующем за введением разделе 2 приводится описание изучаемой модели обслуживания, формулируются оптимизационные задачи 1 и 2. Алгоритм решения задачи 1 (минимизируется величина максимального из индивидуальных штрафов) изложен и продемонстрирован на примере в разделе 3. Алгоритмы решения задачи 2 (минимизируется суммарный по всем объектам штраф) в общей постановке с численным примером и для двух конкретизаций, когда продолжительности обслуживания объектов одинаковы или все функции индивидуального штрафа линейны, приведены в разделе 4. В отличие от алгоритма решения задачи 2 в общей постановке, процедуры ее решения в указанных частных случаях имеют полиномиальные оценки вычислительной сложности. Рассмотрена также задача 2*, отличающаяся от задачи 2 дополнительным заданием директивных сроков окончания обслуживания объектов. Раздел 4 завершают результаты об *NP*-трудности задачи 2 (для случаев кусочно-линейных и кусочнопостоянных функций индивидуального штрафа) и задачи 2* (для случая кусочно-линейных функций индивидуального штрафа). Доказательства теорем о вычислительной сложности вынесены в Приложение.

2. Математическая модель обслуживания и постановки оптимизационных задач

Считается заданной группа $O_n = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$ стационарных объектов, расположенных в рабочей зоне Ξ обслуживающего процессора P. Зона Ξ представляет собой направленный отрезок L, начальная точка A которого является базовой для процессора; объекты считаем пронумерованными в порядке возрастания их расстояний от точки A; конечная точка B отрезка L является местом расположения объекта o_n. Из точки A, начиная от момента времени $t = 0$, процессор поступательно перемещается к конечной точке B (прямой рейс, примем для него обозначение λ_+), а затем, достигнув ее, также поступательно возвращается в точку A (обратный рейс, примем для него обозначение λ_-).

З а м е ч а н и е 1. На содержательном уровне рейс λ_+ соответствует перемещению судна-заправщика по течению реки, а рейс λ_- – его движению против течения; скорости указанных перемещений различны.

При реализации цикла $\lambda_+\lambda_-$ процессор P выполняет однократное без прерываний обслуживание объектов группы O_n: часть объектов обслуживается в рейсе λ_+, а остальные − в рейсе λ_-. С каждым объектом o_j ассоциируется монотонно возрастающая (в нестрогом смысле) функция индивидуального штрафа $\varphi_j(t)$, выражающая зависящую от момента завершения его обслуживания величину потерь.

Примем обозначения: $1, 2, \dots, n$ – точки отрезка L, в которых соответственно расположены объекты $o_1, o_2, \dots, o_n$ (точки n и B совпадают); τ_j – продолжительность обслуживания процессором P объекта o_j; $\gamma_{j\text{-}1,j}$ и $\gamma_{j,j\text{-}1}$ – затраты времени на перемещения процессора между точками j-1 и j в рейсах λ_+ и λ_- соответственно ($j = \overline{1,n}$), при этом $\gamma_{0,1}$ и $\gamma_{1,0}$ – затраты времени на перемещение процессора между точкой A и точкой 1 в прямом и обратном рейсах. Параметры модели τ_j, $\gamma_{j\text{-}1,j}$, $\gamma_{j,j\text{-}1}$ считаем принимающими значения из натурального ряда.

Стратегией обслуживания именуем произвольное подмножество элементов V из совокупности индексов $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Объекты o_j, $j \in V$, в реализации стратегии V

обслуживаются процессором в рейсе λ_+, все остальные объекты группы O_n – в рейсе λ_-. Далее для определенности полагаем, что объект o_n обслуживается при завершении процессором рейса λ_+. Таким образом, $n\in V$ и число различных стратегий обслуживания равно 2^{n-1}.

Обслуживание любого объекта o_j, $j\in N$, начинается от момента прибытия процессора в точку j при реализации определяемого стратегией V рейса; по завершению обслуживания процессор продолжает своё движение. Не связанные с обслуживанием объектов промежуточные простои процессора запрещены. Любая стратегия однозначно определяет моменты начала и завершения обслуживания каждого из объектов. Для объекта o_j через $t_j^*(V)$ обозначим момент завершения его обслуживания при реализации стратегии V ($j = \overline{1,n}$).

Если объект o_j обслуживается в рейсе λ_+, т.е. $j\in V$, то $t_j^*(V) = \sum_{k=1}^{j}\gamma_{k-1,\,k} + \sum_{k\in V(j)}\tau_k$, где $V(j)$ – совокупность не превосходящих j элементов из V; для величины $\sum_{k=1}^{j}\gamma_{k-1,\,k} + \sum_{k\in V(j)}\tau_k$ введем обозначение δ_j. Если $j\in N\setminus V$, то обслуживание объекта o_j реализуется позже. Обозначим через $M(j)$ задержку по объекту o_j при переносе его обслуживания с прямого рейса на обратный; $M(j)$ – это сумма трех слагаемых: $\sum_{k=j+1}^{n}\gamma_{k-1,\,k}$ (затраты времени на перемещение процессора от точки j к точке n), $\sum_{k=j+1}^{n}\gamma_{k,\,k-1}$ (затраты времени на перемещение процессора от точки n к точке j), $\sum_{k=j+1}^{n}\tau_k$ (суммарная продолжительность обслуживания объектов $o_{j+1}, o_{j+2},\dots, o_n$). В итоге имеем общую формулу

$$(1)\qquad t_j^*(V) = \begin{cases} \delta_j, & \text{если } j\in V, \\ \delta_j + M(j), & \text{если } j\notin V, \end{cases}$$

здесь $j = \overline{1,n}$.

Существенно, что величины $M(j)$, $j = \overline{1,n-1}$, не зависят от того, какие объекты обслуживаются в прямом, а какие – в обратном рейсе процессора P.

Л е м м а 1. Пусть V – произвольная стратегия, $\alpha\in V$, $\alpha\neq n$. Тогда выполняются следующие соотношения: $t^*_\alpha(V\setminus\{\alpha\})>t^*_\alpha(V)$, $t^*_\beta(V\setminus\{\alpha\})=t^*_\beta(V)$ для $\beta=1, 2, \dots, \alpha-1$ и $t^*_\gamma(V\setminus\{\alpha\})<t^*_\gamma(V)$ для $\gamma=\alpha+1, \alpha+2, \dots, n$.

Справедливость леммы вытекает из формулы (1).

С позиций повышения эффективности диспетчерского управления возникают следующие две задачи.

З а д а ч а 1. Найти стратегию обслуживания, минимизирующую величину максимального из индивидуальных штрафов по всем объектам:

$$(2) \quad \min_V (\max_j \varphi_j (t_j^*(V))) .$$

З а д а ч а 2. Найти стратегию обслуживания, минимизирующую величину суммарного по всем объектам штрафа:

$$(3) \quad \min_V \sum_{j=1}^{n} \varphi_j (t_j^*(V)) .$$

3. Алгоритм решения задачи 1

Излагаемый алгоритм основан на принципе дихотомии. Сначала определяются границы числового отрезка, в котором находится оптимальное значение критерия. Далее на каждом из последовательно выполняемых этапов отрезок, в котором локализовано оптимальное значение критерия, делится пополам и выясняется, в каком из полуотрезков лежит искомый минимум; дальнейшему исследованию подлежит отрезок, длина которого не превышает половины длины предшествующего отрезка. Циклический процесс завершается, когда в очередном отрезке локализации оптимального значения критерия имеется только одна целочисленная точка.

Очевидно, что стратегия обслуживания $V=\{p\}$ обеспечивает минимально возможную величину индивидуального штрафа по объекту o_p ($p=\overline{1,n}$); поэтому значение критерия в задаче 1 не может быть меньше, чем $S_1=\max_p \varphi_p(t^*_p(\{p\}))$. Ясно также, что оптимальное значение критерия в рассматриваемой задаче не превышает $W_1=\max_p \varphi_p(t^*_p(V))$, где $V=\{1, 2, \ldots , n\}$, и, следовательно, оно находится в пределах отрезка $[S_1, W_1]$.

Стратегии обслуживания, при реализации которых значение максимального из индивидуальных штрафов не превышает константы F, будем именовать F-стратегиями. Алгоритм решения задачи 1 поэтапно использует вводимый модуль $\Pi(F)$, определяющий наличие в рассматриваемой задаче F-стратегий. В пошаговом режиме модуль $\Pi(F)$ функционирует следующим образом.

1. Полагается $V=\{1, 2, \dots, n\}$, $i=1$.

2. Если $\varphi_i(t^*_i(V))>F$, то F-стратегий в рассматриваемой задаче не существует, реализуется переход к шагу 7; в противном случае – переход к шагу 3.

3. Если $\varphi_i(t^*_i(V\backslash\{i\}))\leq F$, выполняется к шагу 4; в противном случае – переход к шагу 5.

4. Полагается $V=V\backslash\{i\}$.

5. Если $i=n$-1, выполняется переход к шагу 6; в противном случае полагается $i = i + 1$ и выполняется переход к шагу 2.

6. Если $\varphi_n(t^*_n(V))>F$, то F-стратегий в рассматриваемой задаче не существует, осуществляется переход к шагу 7; в противном случае F-стратегией является полученная в итоге стратегия V, выполняется переход к шагу 7.

7. Завершение работы модуля $\Pi(F)$.

Верность вырабатываемых модулем $\Pi(F)$ результатов легко доказывается методом от противного с учётом леммы 1. Если ответ на выходе модуля $\Pi(F)$ положителен (F-стратегии существуют), то для полученной в итоге его работы стратегии примем обозначение V^F.

Реализующий принцип дихотомии и использующий модуль $\Pi(F)$ алгоритм решения задачи 1 сначала определяет границы начального отрезка локализации оптимального значения критерия: $S_1=\max\limits_p \varphi_p(t^*_p(\{p\})$ и $W_1=\max\limits_p \varphi_p(t^*_p(\{1, 2, \dots, n\}))$. Далее выполняется процедура, состоящая не более чем из $log_2(W_1$-$S_1)+1$ однотипных этапов. На произвольном k-м этапе имеющийся отрезок $[S_k, W_k]$, в котором локализовано оптимальное значение критерия, делится пополам; координату середины отрезка обозначаем F_k; далее работает модуль $\Pi(F_k)$. Если получаемый ответ положителен, то оптимальное значение критерия с учётом очевидного неравенства $\max\limits_p \varphi_p(t^*_p(V^{F_k}))\leq F_k$ оказывается локализованным в диапазоне $[S_k, \max\limits_p \varphi_p(t^*_p(V^{F_k}))]$. Если ответ отрицателен, это значение находится в диапазоне $[F_k+1, W_k]$. Поэтому в случае положительного ответа полагаем $S_{k+1}=S_k$ и $W_{k+1}=\max\limits_p \varphi_p(t^*_p(V^{F_k}))$, в противном случае устанавливаем $S_{k+1}=F_k+1$ и $W_{k+1}=W_k$. После определения величин S_{k+1} и W_{k+1} переходим к выполнению следующего этапа. Процесс заканчивается, когда в полученном отрезке локализации имеется только одна целочисленная точка, обозначим ее через M. В таком случае V^M – оптимальная стратегия обслуживания в рассматриваемой задаче 1.

Здесь и далее будем считать, что все функции индивидуального штрафа либо заданы таблично, либо значение каждой из них в любой точке вычисляется путем выполнения не превышающего некоторой константы C числа элементарных действий. В таком случае, как легко видеть, модуль $\Pi(F)$ имеет линейно зависящую от n верхнюю оценку числа выполняемых элементарных операций, а изложенный алгоритм решения задачи 1 имеет оценку временной вычислительной сложности $O(n\log_2(W_1\text{-}S_1))$.

П р и м е р 1. Требуется найти стратегию, минимизирующую значение критерия $\max\limits_{p} \varphi_p(t^*_p(V))$ при условиях: $\gamma_{01}=2$, $\gamma_{12}=4$, $\gamma_{23}=3$, $\gamma_{34}=5$, $\gamma_{45}=4$, $\gamma_{56}=1$, $\gamma_{65}=3$,$\gamma_{54}= 6$, $\gamma_{43}=7$, $\gamma_{32}=5$, $\gamma_{21}=6$ (значение γ_{10} для синтеза оптимальной стратегии роли не играет); $\tau_1=1$, $\tau_2=2$, $\tau_3=1$, $\tau_4=3$, $\tau_5=1$, $\tau_6=1$; функции индивидуального штрафа определяются следующими выражениями:

$$\varphi_1(t)=\begin{cases}0 \text{ при } t\le 30,\\ 3(t-30) \text{ при } t>30;\end{cases} \quad \varphi_2(t)=\begin{cases}0 \text{ при } t\le 16,\\ 2(t-16) \text{ при } t>16;\end{cases} \quad \varphi_3(t)=\begin{cases}0 \text{ при } t\le 23,\\ 3(t-23) \text{ при } t>23;\end{cases}$$

$$\varphi_4(t)=2t;\ \varphi_5(t)=2t;\ \varphi_6(t)=3t.$$

Решение примера начинаем с определения значений $S_1=\max\limits_{p=1,2,\ldots 6} \varphi_p(t^*_p(\{p\})$ и $W_1=\max\limits_{p=1,2,\ldots 6} \varphi_p(t^*_p(\{1, 2, \ldots , 6\}))$. Легко подсчитывается, что $S_1=60$ и $W_1= 84$. Таким образом, искомое оптимальное значение критерия лежит на отрезке [60, 84], соответственно устанавливаем $F_1=72$. Далее работает модуль $\Pi(F_1)$. Выполнив первые два шага, этот модуль на шаге 3 определяет $t^*_1(\{2, 3, 4, 5, 6\})=55$ и $\varphi_1(55)>72$; реализуется переход к шагу 5, на котором значение i устанавливается равным 2. Первая итерация модулем $\Pi(F_1)$ выполнена; в ее результате индекс 1 в конструируемой стратегии сохранился. На второй итерации после шага 2 реализуется шаг 3 (где подсчитывается $t^*_2(V\backslash\{2\})=49$ и $\varphi_2(49)=66$), после чего последовательно выполняются шаг 4 (индекс 2 из стратегии V изымается) и шаг 5 (значение i устанавливается равным 3). Вторая итерация модулем $\Pi(F_1)$ выполнена, в результате чего индекс 2 из конструируемой стратегии изъят. Аналогичным образом выполняются третья, четвертая и пятая итерации, на которых последовательно подсчитываются значения $t^*_3(V\backslash\{2, 3\})=42$, $\varphi_3(42)=57$, $t^*_4(V\backslash\{2, 3, 4\})=34$, $\varphi_4(34)=68$, $t^*_5(V\backslash\{2, 3, 4, 5\})=25$, $\varphi_5(25)=50$; из стратегии V последовательно изымаются индексы 3, 4, 5. Реализовав шаг 5 на пятой итерации, модуль $\Pi(F_1)$ реализует шаг 6, где подсчитывается значение $\varphi_6(t^*_6(\{1, 6\})=63$. В результате работы модуля построена стратегия $V(F_1)=\{1, 6\}$; при этом $\max\limits_{p=1,2,\ldots 6} \varphi_p(t^*_p(\{1, 6\})=68$. Таким образом определилось, что оптимальное значение критерия в решаемой задаче 1 находится в пределах отрезка [60, 68] и устанавливается $F_2=64$. Далее работает модуль $\Pi(F_2)$. В результате выполнения первой итерации этот модуль индекс 1 из стратегии V не изымает; при выполнении второй итерации

($t^*_2(V\backslash\{2\})=49$ и $\varphi_2(49)=66$) получаем, что индекс 2 в стратегии V также сохраняется. На третьей итерации получаем $t^*_3(V\backslash\{3\})=44$ и $\varphi_3(44)=63$, индекс 3 из стратегии V изымается. На четвертой итерации определяем $t^*_4(V\backslash\{3,4\})=36$, $\varphi_4(36)=72$ и, следовательно, индекс 4 в совокупности V сохраняется. На пятой итерации находим $t^*_5(V\backslash\{3,5\})=30$, $\varphi_5(30)=60$ и индекс 5 из формируемой стратегии изымается. В итоге получаем стратегию $V=\{1, 2, 4, 6\}$, при этом $t^*_6(\{1, 2, 4, 6\}=26$ и $\varphi_6(26)=78$. Результат работы модуля $\Pi(F_2)$ отрицателен: стратегий, обеспечивающих значение критерия не выше $F_2=64$, не существует. Таким образом, оптимальное значение критерия лежит в пределах отрезка [65, 68]. Назначив $F_3=66$, далее реализуем модуль $\Pi(F_3)$, который дает отрицательный ответ. Модуль $\Pi(F_4)$ проверяет, можно ли обеспечить значение критерия, равное 67, ответ отрицателен. Получаем, что оптимальной в рассматриваемом примере является стратегия $\{1, 6\}$, при этом $\max\limits_p \varphi_p(t^*_p(\{1, 6\})=68$.

З а м е ч а н и е 2. Возможны модификации изложенного алгоритма решения задачи 1, которые путём усложнения его структуры позволят несколько повысить быстродействие. В частности, дополнительно можно учесть, что если при исследовании очередного отрезка $[S_k, W_k]$ модуль $\Pi(F_k)$ дает положительный ответ и V^{F_k} – получаемая при этом F_k-стратегия, то при работе модуля $\Pi(F_{k+1})$ все принадлежащие V^{F_k} индексы из совокупности $\{1, 2, \ldots, n\}$ не изымаются. Если же модуль $\Pi(F_k)$ дает отрицательный ответ, то все исключенные этим модулем из совокупности $\{1, 2 \ldots, n\}$ индексы заведомо изымаются из той же совокупности модулем $\Pi(F_{k+1})$.

4. Алгоритмы решения задачи 2 и ее конкретизаций

4.1. *Общий случай*

Общий алгоритм решения задачи 2 основан на принципе динамического программирования [12]. Пусть $B(i, D)$ – минимальная величина суммарного штрафа по объектам совокупности $o_1, o_2, \ldots, o_i$ $(i\in\{1, 2, \ldots, n\})$ при условии, что общее время, затрачиваемое на их обслуживание в рейсе λ_+, равно D. Пары (i, D) далее будем именовать ситуациями. Не все ситуации реализуемы в процессах обслуживания; так для $i=1$ реализуемы только ситуации $(1, \tau_1)$ и $(1, 0)$. Удобно считать, что для всех нереализуемых ситуаций (i, D) имеет место $B(i, D)=+\infty$. Отметим, что для всех значений параметра D, не принадлежащих множеству $\{0, 1, 2, \ldots, \sum_{k=1}^{n}\tau_k\}$, ситуации (i, D) нереализуемы. В частности, $B(i, D)=+\infty$ при отрицательных значениях параметра D.

Как очевидно, $B(1, 0)$ – величина индивидуального штрафа по объекту o_1 в случае, когда его обслуживание реализуется в рейсе λ_- и, следовательно, завершается в момент времени $\gamma_{0,1}+M(1)+\tau_1$; напомним, что $M(j)$ – задержка по объекту o_j при переносе его обслуживания с прямого рейса на обратный ($j = \overline{1, n-1}$). В то же время $B(1, \tau_1)$ – величина индивидуального штрафа по объекту o_1, если его обслуживание выполняется в рейсе λ_+, т.е. завершается в момент $\gamma_{0,1}+\tau_1$. При $D \notin \{0, \tau_1\}$ величины $B(1, D)$ смысла не имеют. Поэтому

(4) $B(1, 0)=\varphi_1(\gamma_{0,1}+M(1)+\tau_1)$,

(5) $B(1, \tau_1)=\varphi_1(\gamma_{0,1}+\tau_1)$,

(6) $B(1, D)=+\infty$ при $D \notin \{0, \tau_1\}$.

Пусть все значения $B(i, D)$ для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, n\text{-}2\}$ уже найдены. При отыскании значений $B(i+1, D)$ следует учитывать две возможности.

1) Объект o_{i+1} обслуживается в рейсе λ_+, и тогда рассматриваемой ситуации $(i+1, D)$ непосредственно предшествует ситуация $(i, D\text{-}\tau_{i+1})$.

2) Объект o_{i+1} обслуживается в рейсе λ_-, и тогда ситуации $(i+1, D)$ непосредственно предшествует ситуация (i, D).

С учетом указанных возможностей для $i \in \{1, 2, \dots, n\text{-}2\}$ получаем соотношение

(7) $B(i+1, D)=\min\{B(i, D\text{-}\tau_{i+1})+\varphi_{i+1}(\gamma_{0,1}+\gamma_{1,2}+\ldots+\gamma_{i,i+1}+D), B(i, D)+\varphi_{i+1}(\gamma_{0,1}+\gamma_{1,2}+\ldots+\gamma_{i,i+1}+D+\tau_{i+1}+M(i+1)\}$.

Вычисляемое значение $B(i+1, D)$ оказывается равным $+\infty$ в том и только том случае, когда ситуация $(i+1, D)$ нереализуема. Величины $B(i, D\text{-}\tau_{i+1})+\varphi_{i+1}(\gamma_{0,1}+\gamma_{1,2}+\ldots+\gamma_{i,i+1}+D)$ и $B(i, D)+\varphi_{i+1}(\gamma_{0,1}+\gamma_{1,2}+\ldots+\gamma_{i,,i+1}+D+\tau_{i+1}+M(i+1))$ ниже именуем компонентой 1 и компонентой 2 правой части формулы (7).

При определении значений $B(n, D)$ следует иметь в виду, что объект o_n обслуживается в рейсе λ_+. Поэтому

(8) $B(n, D)=B(n\text{-}1, D\text{-}\tau_n)+\varphi_{n+1}(\gamma_{0,1}+\gamma_{1,2}+\ldots+\gamma_{n\text{-}1,n}+D)$.

Поскольку величина $B(n, D)$ представляет собой минимально возможный суммарный штраф по всем объектам, если в рейсе λ_+ на их обслуживание затрачивается время D, то оптимальное значение критерия K_{opt} в задаче 2 определяется по формуле

(9) $$K_{opt} = \min_{D} B(n, D).$$

Выражения (4) - (9) суть рекуррентные соотношения динамического программирования для решения задачи 2. Процесс вычислений по этим соотношениям удобно представлять как последовательное заполнение таблицы значений функции $B(i, D)$, строки которой соответствуют значениям индекса i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$), а столбцы – значениям параметра D ($D \in \{0, 1, 2, \dots, \sum_{k=1}^{n} \tau_k\}$). Таблица заполняется по строкам в порядке возрастания индекса i. Зафиксировав в процессе вычислений по формуле (7) для каждого найденного значения $B(i+1, D)$ номер компоненты, на которой реализуется минимум правой части, и, определив значение параметра D, на котором достигается минимум правой части (9), легко строим оптимальную стратегию. Общее число выполняемых изложенным алгоритмом элементарных операций прямо пропорционально количеству вычисляемых значений функции $B(i, D)$, т.е. произведению $n\sum_{k=1}^{n} \tau_k$. Данная оценка псевдополиномиальна [11].

Пример 2. Требуется найти стратегию, минимизирующую значение критерия $\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t^*_j(V))$ при следующих значениях параметров модели: $\gamma_{01}=\gamma_{12}=\gamma_{23}=\gamma_{34}=1$, $\gamma_{43}=\gamma_{32}=\gamma_{21}=2$ (значение γ_{10} для синтеза оптимальной стратегии роли не играет); $\tau_1=3$, $\tau_2=1$, $\tau_3=2$, $\tau_4=2$. Функции индивидуального штрафа определяются по формулам $\varphi_1(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t \le 10, \\ t-10 \text{ при } t > 10; \end{cases}$

$\varphi_2(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t \le 8, \\ 2(t-8) \text{ при } t > 8; \end{cases}$ $\varphi_3(t)=10t$; $\varphi_4(t)=t$.

Легко вычисляются необходимые для применения рекуррентных соотношений величины $M(1)=14$, $M(2)=10$, $M(3)=5$. Далее подсчитываются значения функции $B(i, D)$. По условиям примера индекс i принимает натуральные значения от 1 до 4; целочисленный параметр D принимает значения из отрезка [0, 8]. Результаты вычислений фиксируем в таблице значений функции $B(i, D)$, символы $+\infty$ в таблицу не вносим.

По формулам (4), (5) получаем: $B(1, 0)=\varphi_1(18)=8$; $B(1, 3)=\varphi_1(4)=0$, $B(1, D)=+\infty$ при $D\notin\{0, 3\}$. Все значения функции $B(i, D)$ при $i=1$ найдены, первая строка таблицы заполнена. Далее последовательно, пользуясь формулой (7), заполняем вторую и третью строки таблицы. В процессе вычислений по формуле (7) для каждого найденного значения $B(i+1, D)$ фиксируется номер компоненты, на которой реализуется минимум правой части; этот номер заключается в круглые скобки и вносится в клетку $(i+1, D)$ одновременно с записываемым в ней значением $B(i+1, D)$. Четвертую, последнюю строку таблицы заполняем путем вычислений по формуле (8).

Таблица 1.

Значения функции $B(i, D)$

$i\backslash D$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	8			0					
2	$18_{(2)}$	$8_{(1)}$		$16_{(2)}$	$0_{(1)}$				
3	$118_{(2)}$	$128_{(2)}$	$198_{(1)}$	$68_{(1)}$	$140_{(2)}$	$96_{(1)}$	$90_{(1)}$		
4			124	135	206	77	150	107	102

Согласно формуле (9) оптимальное значение критерия рассматриваемой задачи – это минимальное из вычисленных значений $B(4, D)$. Оно равно 77, соответствующее значение параметра D равно 5. Таким образом, оптимальная стратегия предусматривает, что на обслуживание объектов в рейсе λ_+ должно затрачиваться 5 единиц времени. При этом на обслуживание объекта o_4 в рейсе λ_+ затрачивается время $\tau_4=2$ и на обслуживание в этом же рейсе объектов из совокупности $\{o_1, o_2, o_3\}$ остается три единицы времени. При вычислении $B(3, 3)$ минимум реализуется на компоненте 1 правой части рекуррентного соотношения (7); следовательно, объект o_3 следует обслужить в рейсе λ_+, для чего потребуется две единицы времени. На обслуживание в этом рейсе объектов из совокупности $\{o_1, o_2\}$ остается одна единица времени. При вычислении $B(2, 1)$ минимум реализуется на компоненте 1 правой части рекуррентного соотношения (7); значит, объект o_2 следует обслужить в рейсе λ_+, а на обслуживание объекта o_1 в прямом рейсе времени не остается. Следовательно, он должен быть обслужен в рейсе λ_-. Таким образом, установлено, что в рассматриваемом примере оптимальной является стратегия $V=\{2, 3, 4\}$. Легко проверяется, что в этом случае суммарный штраф по всем объектам равен 77.

З а м е ч а н и е 3. Если при исходных данных примера 1 решать не задачу $\min\limits_V (\max\limits_j \varphi_j(t^*_j(V)))$, а задачу $\min\limits_V \sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_j(t^*_j(V))$, то применением изложенного общего алгоритма решения задачи 2 построим в качестве оптимальной стратегию $V'' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. При реализации этой стратегии обслуживание объектов $o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6$ завершается в моменты времени 3, 9, 13, 21, 26, 28 с индивидуальными штрафами 0, 0, 0, 42, 52, 84 соответственно. Легко определяется, что $\sum_{j=1}^{6} \varphi_j(t^*_j(V''))=178$ и $\max_j \varphi_j(t^*_j(V''))=84$. Вместе с тем, при решении примера 1 была построена оптимальная в задаче $\min_V (\max_j \varphi_j(t^*_j(V)))$ стратегия $V=\{1, 6\}$. При ее реализации обслуживание объектов $o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6$ завершается в моменты времени 3, 49, 42, 34, 25, 21 с индивидуальными штрафами 0, 66, 57, 68, 50, 63 соответственно. Легко подсчитывается, что $\sum_{j=1}^{6} \varphi_j(t^*_j(V))=304$ и $\max_j \varphi_j(t^*_j(V))=68$. Таким образом, при исходных данных примера 1 оптимальные для задач 1 и задачи 2 стратегии существенно различны как по своему составу, так и по значениям критериев.

С точки зрения приложений, важны следующие конкретизации задачи 2.

A) Продолжительности обслуживания процессором для всех объектов одинаковы;

B) Все функции индивидуального штрафа линейны;

C) Все функции индивидуального штрафа являются кусочно-линейными;

D) Все функции индивидуального штрафа являются ступенчатыми.

Как будет показано ниже, для случаев A и B имеются полиномиальные решающие алгоритмы (подраздел 4.2); случаи C и D являются *NP*-трудными (подраздел 4.3).

4.2. *Полиномиально разрешимые конкретизации*

A) Пусть $\tau_1=\tau_2=\ldots=\tau_n=\tau$. Тогда для каждого $i=1, 2, \ldots, n$ реализуемы только ситуации $(i, k\tau)$, где $k\in\{0, 1, \ldots, i\}$. По рекуррентным соотношениям (4) - (8) значения $B(i, D)$ при каждом $i=1, 2, \ldots, n$ следует определять только для $D=0, \tau, 2\tau, \ldots, i\tau$. При этом для вычисления каждого очередного значения $B(i, k\tau)$, где $k\in\{0, 1, \ldots, i\}$, достаточно знать только величины $B(i-1, k\tau)$ и $B(i-1, (k-1)\tau)$. Таким образом, общее число значений функции $B(i, D)$, которые следует вычислить, ограничено сверху величиной $n(n+1)$. Алгоритм решения задачи 2 в рассматриваемом частном случае имеет оценку временной вычислительной сложности $O(n^2)$.

B) Пусть $\varphi_i(t)=a_it+b_i$ $(i=\overline{1,n})$. Для этого случая опишем алгоритм синтеза оптимальной стратегии обслуживания, основанный на следующих соображениях.

Переход от обслуживания объекта o_j ($j\in\{1, 2, \dots , n\text{-}1\}$) в рейсе λ_+ к его обслуживанию в рейсе λ_- влечет за собой увеличение индивидуального штрафа по этому объекту на величину $a_jM(j)$. В то же время суммарный штраф по остальным объектам при таком переходе уменьшается на величину $S_j\tau_j$, где $S_j=\sum_{i=j+1}^{n}a_i$. Получаем, что при реализации оптимальной стратегии объект o_j должен обслуживаться в рейсе λ_-, если $a_jM(j)<S_j\tau_j$, и объект o_j должен обслуживаться в рейсе λ_+, если $a_jM(j)>S_j\tau_j$; в случае $a_jM(j)=S_j\tau_j$ объект o_j может быть обслужен в любом из рейсов. Для рассматриваемой конкретизации получаем следующий алгоритм.

1. Последовательно, в порядке уменьшения индекса j вычисляются суммы $S_j=\sum_{i=j+1}^{n}a_i$ и $M(j)=\sum_{k=j+1}^{n}\gamma_{k-1,\,k}+\sum_{k=j+1}^{n}\gamma_{k,\,k-1}+\sum_{k=j+1}^{n}\tau_k$, здесь $j=n\text{-}1, n\text{-}2, \dots , 1$.

2. Множество V определяется как состоящее из значений индекса j ($j\in\{1, 2, \dots , n\text{-}1\}$, для которых $a_jM(j)>S_j\tau_j$; дополнительно в множество V включается индекс n.

3. Построенное множество V – оптимальная стратегия обслуживания.

Как легко видеть, изложенный алгоритм функционирует в линейно зависящем от размерности решаемой задачи времени.

4.3. *Кусочно-линейные и ступенчатые функции штрафа*

C) Функцию $\varphi(t)$, заданную в области $[0, +\infty)$, назовем простейшей кусочно-линейной, если $\varphi(t)=0$ при $t\in[0, d]$ и $\varphi(t)=G(t\text{-}d)$ при $t>d$. Здесь G и d – неотрицательные константы.

Т е о р е м а 1. Задача 2, в которой все функции индивидуального штрафа являются простейшими кусочно-линейными, *NP*-трудна.

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

D) Функцию $\varphi(t)$, заданную в области $[0, +\infty)$, назовем простейшей ступенчатой, если $\varphi(t)=0$ при $t\in[0, d]$ и $\varphi(t)=G$ при $t>d$. Здесь G и d – неотрицательные константы.

Т е о р е м а 2. Задача 2, в которой все функции индивидуального штрафа являются простейшими ступенчатыми, *NP*-трудна.

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

4.4. *Задача* 2*

Модели, в которых с каждым объектом o_j ассоциируется штраф $\varphi_j(t)$, равный нулю при $t \in [0, d_j]$ и определяемый монотонно возрастающей от нуля функцией $\Phi_j(t\text{-}d_j)$ при $t > d_j$ ($j = \overline{1,n}$), возникают при наличии предписанных объектам директивных сроков. Нарушение директивного срока влечет монотонно возрастающий в зависимости от величины задержки штраф [1]. В таких моделях произвольную стратегию V целесообразно оценивать двумя критериями: $K_1(V)= \sum_{j=1}^{n} \text{sign}(\varphi_j(t_j^*(V)))$ – числом объектов, обслуживаемых с нарушениями директивных сроков, и $K_2(V)=\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t_j^*(V))$ – суммарным штрафом. Здесь возникает следующая задача.

З а д а ч а 2*. Найти стратегию обслуживания, оптимальную по двум лексикографически упорядоченным минимизируемым критериям $K_1(V)$, $K_2(V)$; при этом ведущим считается первый критерий.

Алгоритм решения задачи 2* предусматривает её сведение к задаче 2. Как очевидно, обслуживание всех объектов совокупности O_n завершается не позднее момента времени $H = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{k-1,\,k} + \sum_{k=2}^{n} \gamma_{k,\,k-1} + \sum_{k=1}^{n} \tau_k$. Величина $R=\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(H)$ – верхняя оценка значения критерия $K_2(V)$ в решаемой задаче.

По заданным функциям $\varphi_j(t)$ определим новые функции индивидуального штрафа: $\varphi_j^*(t) = \varphi_j(t)$, если $t \le d_j$, и $\varphi_j^*(t) = \varphi_j(t) + R$ – в противном случае ($j = \overline{1,n}$). Решив задачу 2 для системы функций $\varphi_j^*(t)$, определим оптимальную в ней стратегию V*. Найденное минимальное значение критерия этой задачи представим в виде $kR+m$, где k – целочисленная неотрицательная константа, а m – неотрицательное число, меньшее R. Как легко видеть, стратегия V* является оптимальной и для исходной задачи 2*; при этом $K_1(V^*)=k$ и $K_2(V)=m$.

Т е о р е м а 3. *Задача* 2*, *в которой функции индивидуального штрафа являются простейшими кусочно-линейными, NP-трудна.*

Доказательство теоремы 3 приведено в Приложении.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

В излагаемых доказательствах результатов о труднорешаемости используется возможность полиномиального сведения *NP*-полной задачи «Разбиение» [11] к задачам, указанным в формулировках теорем 1 - 3. Задача «Разбиение» заключается в следующем: имеется конечное множество натуральных чисел $W=\{w_1, w_2, \ldots , w_n\}$. Спрашивается, можно ли это множество разбить на два непересекающихся подмножества так, чтобы сумма чисел, входящих в первое подмножество, оказалась равной сумме чисел, входящих во второе подмножество. Очевидным необходимым условием положительного ответа является четность суммы входящих в множество W чисел. Далее считаем, что $\sum_{i=1}^{n} w_i =2U$, где U – натуральное число. В Приложении используются введенные в основном тексте статьи обозначения.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. По исходным данным задачи «Разбиение» строим задачу Z_1, в которой обслуживания требуют стационарные объекты $o_1, o_2, \ldots , o_{n+1}$, расположенные в рабочей зоне Ξ процессора P. Объект o_i находится в точке i; каждая из величин $\gamma_{i-1,i}$, $\gamma_{i,i-1}$ равна единице ($i=\overline{1, n+1}$). В множестве $O_{n+1}=\{o_1, o_2, \ldots , o_n, o_{n+1}\}$ в качестве особого выделяется объект o_{n+1}; все остальные объекты именуем ординарными. Продолжительность обслуживания процессором ординарного объекта o_i полагается равной w_i ($i = \overline{1,n}$); продолжительность обслуживания особого объекта, примем для нее обозначение T, будет определена ниже. Для каждого ординарного объекта o_j функция индивидуального штрафа определяется как $\varphi_j(t) = w_j t$ ($j = \overline{1,n}$). Считаем, что для особого объекта $\varphi_{n+1}(t)=0$ при значениях аргумента, не превосходящих $t_1=n+1+U+T$, и $\varphi_{n+1}(t)=Q(t-t_1)$ при $t>t_1$ (Q – достаточно большая константа). Требуется найти стратегию, минимизирующую величину суммарного штрафа по всем объектам.

Легко подсчитывается, что при реализации стратегии, в которой все ординарные объекты обслуживаются в обратном рейсе (объект o_{n+1} при этом завершится обслуживанием ранее момента времени t_1), суммарный штраф по всем объектам не превосходит $2U(T+2U+2n+1)$. Положим $Q=2U(T+2U+2n+1)+1$. Очевидно, что в таком случае при реализации оптимальной стратегии обслуживание особого объекта завершается не позднее момента времени t_1. Далее ограничиваемся рассмотрением только стратегий V, для которых $t^*_{n+1}(V) \le t_1$. Тогда максимальное время, которое можно выделить на обслуживание ординарных объектов в прямом рейсе, равно U. Стратегии, при реализации которых суммарное время обслуживания ординарных объектов в прямом рейсе равно U, существуют лишь тогда, когда исходная задача

«Разбиение» имеет положительное решение. Если на обслуживание ординарных объектов в прямом рейсе затрачивается время U, то верхней оценкой значения критерия задачи Z_1 является $K^1{}_{\text{top}}(T)=2U(n+1+U)+UT+U(n+U)$. Записанные в этом выражении слагаемые суть легко определяемые верхние оценки суммарного штрафа по всем объектам за периоды времени соответственно: от момента 0 до момента $n+1+U$, от момента $n+1+U$ до момента $n+1+U+T$ и от момента $n+1+U+T$ до момента завершения обслуживания всех объектов совокупности O_{n+1}. Если на обслуживание ординарных объектов в прямом рейсе затрачивается время, меньшее U, то нижней оценкой значения критерия задачи Z_1 является $K^2{}_{\text{bot}}(T)=(U+1)T$. Сейчас положим $T=T^*=2U(n+1+U)+U(n+U)+1$. Легко проверяется, что в таком случае $K^1{}_{\text{top}}(T^*)<K^2{}_{\text{bot}}(T^*)$.

Для оптимального значения критерия K_{opt} построенной задачи оказываются возможными два следующих взаимоисключающих случая: $K_{\text{opt}}<K^1{}_{\text{top}}(T^*)$ и $K_{\text{opt}}>K^2{}_{\text{bot}}(T^*)$. Если $K_{\text{opt}}<K^1{}_{\text{top}}(T^*)$, то исходная задача «Разбиение» имеет положительное решение. Если же $K_{\text{opt}}>K^2{}_{\text{bot}}(T^*)$, то исходная задача «Разбиение» положительного решения не имеет. Таким образом, оптимальная в задаче Z_1 стратегия V_{opt} удовлетворяет условию $\sum_{j=1}^{n+1}\varphi_j(t_j^*(V_{\text{opt}}))\le K^1_{\text{top}}(T^*)$ тогда и только тогда, когда исходная задача «Разбиение» имеет положительный ответ. Полиномиальность выполненного сведения очевидна. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. По исходным данным задачи «Разбиение» строим задачу Z_2, которая отличается от введенной при доказательстве теоремы 1 задачи Z_1 только в следующем: здесь другие функции индивидуального штрафа, а продолжительность обслуживания процессором объекта o_{n+1} полагается равной 1. Функции индивидуального штрафа для ординарных объектов в задаче Z_2 определим так: $\varphi_i(t)=0$ при $t\le n+U$ и $\varphi_i(t)=w_i$ при $t>n+U$ ($i=\overline{1,n}$). Функцию штрафа для особого объекта зададим в виде: $\varphi_{n+1}(t)=0$ при $t\le n+U+2$; $\varphi_{n+1}(t)=3U$ при $t>n+U+2$.

Легко видеть, что при реализации стратегии, в которой все ординарные объекты обслуживаются в обратном рейсе, суммарный штраф по всем объектам не превосходит $2U$. Поэтому при реализации оптимальной стратегии обслуживание особого объекта должно завершиться не позднее момента времени $n+U+2$; это означает, что время, выделяемое на обслуживание ординарных объектов в прямом рейсе, не должно превосходить U (в противном случае суммарный штраф по всем объектам будет не меньше $3U$).

Если обслуживание ординарных объектов в прямом рейсе занимает время U, то суммарный штраф по всем объектам оказывается равным U (штрафы по ординарным объектам, обслуживаемым в прямом рейсе, являются нулевыми; суммарный штраф по всем остальным ординарным объектам равен U; по особому объекту штраф нулевой).

Если обслуживание ординарных объектов в прямом рейсе занимает время x, где $U>x\geq 0$, то от момента времени $n+x+1$ до момента времени $n+x+2$ обслуживается особый объект. Начиная от момента $n+x+3$, в обратном рейсе обслуживаются все необслуженные ранее ординарные объекты, совокупность таких объектов обозначим через H. Суммарное время обслуживания объектов совокупности H равно $2U-x$. Подмножество объектов совокупности H, обслуживание которых завершается не позднее момента $n+U$, обозначим H_1; подмножество всех остальных объектов этой совокупности обозначим H_2. Суммарное время обслуживания объектов подмножества H_1 не может превысить $(n+U)-(n+x+3)=U-x-3$. Суммарное время обслуживания объектов подмножества H_2 не меньше $(2U-x)-(U-x-3)=U+3$. По объектам подмножества H_1 все индивидуальные штрафы равны нулю. Для каждого объекта o_i подмножества H_2 величина индивидуального штрафа равна w_i; такова и продолжительность его обслуживания. Поэтому суммарный штраф по объектам подмножества H_2 оказывается величиной не меньшей, чем $U+3$.

Проанализировав все возможные варианты, мы установили, что в рассматриваемой задаче Z_2 суммарный штраф по всем объектам не может быть меньшим U. Он равен U только для стратегии V', при реализации которой суммарное время обслуживания в прямом рейсе ординарных объектов равно U. Указанная стратегия существует тогда и только тогда, когда для исходной задачи «Разбиение» имеется положительный ответ. Полиномиальность выполненного сведения очевидна. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Доказательство данной теоремы идентично доказательству теоремы 1. Дополнительно отметим, что определяемые в конструируемой задаче Z_1 кусочно-линейные функции штрафа соответствуют директивным срокам $d_1=d_2=\ldots=d_n=0$, $d_{n+1}=n+1+U+T$, а оптимальное значение критерия $K_1(V)$ равно n.

Заключение

В работе описана модель одностадийного обслуживания группы стационарных объектов, расположенных вдоль одномерной рабочей зоны перемещающегося процессора. Сформулированы задачи оптимизации с практически значимыми критериями, предложены алгоритмы синтеза оптимальных стратегий обслуживания.

Несмотря на полученные результаты об *NP*-трудности, выполненные по прикладным задачам расчеты потребовали вполне приемлемого расхода времени. Так, например, для каждой из реально возникших задач бункеровки топливом технологических комплексов из 18 - 20 земснарядов, ведущих добычу гравийной массы на трёхсоткилометровом русловом полигоне, синтез оптимального план-графика выполнялся ПК (процессор Celeron 1700 MHz, память 512 Mb) с расходом времени в пределах 7 - 10 минут; расчёты проводились в диспетчерской службе Камского грузового района в течение навигации ежедневно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Танаев В. С., Гордон В. С., Шафранский Я. М.* Теория расписаний. Одностадийные системы. М.: Наука, 1984.

2. *Танаев В. С., Сотсков Ю.Н., Струсевич В. А.* Теория расписаний. Многостадийные системы. М.: Наука, 1989.

3. *Танаев В. С., Ковалев М.Я., Шафранский Я. М.* Теория расписаний. Групповые технологии. Минск: ИТК НАН Беларуси, 1998.

4 *Brucker P., Knust S.* Complex Scheduling, Springer-Verlag, 2006.

5. *Pinedo M.* Scheduling. Theory, Algorithms and Sistems, Springer, 2008.

6. *Коган Д.И., Федосенко Ю.С., Шлюгаев А.Ю.* Задача одностадийного обслуживания добывающих комплексов в крупномасштабной акватории // Труды V Московской международной конференции по исследованию операций (ORM2007). М.: МАКС Пресс, 2007. С. 60-62.

7. *Коган Д.И., Федосенко Ю.С., Шлюгаев А. Ю.* Математическая модель и алгоритм синтеза субоптимальных расписаний однопроцессорного обслуживания пространственно рассредоточенной группы стационарных объектов. Труды 6 Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» М.: ИПУ РАН, 2007, с. 1026-1038.

8. *Shen H.* Optimal Scheduling for Satellite Refueling in Circular Orbits / PhD thesis, School of Aerospace Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia, March 2003.

9. *Shen H., Tsiotras P.* Peer-to-Peer Refueling for Circular Satellite Constellations // AIAA Journal of Guidance. Control and Dynamics. 2005. V. 28. No. 6. P. 1220-1230.

10. *Коган Д.И., Федосенко А.Ю.* Задача диспетчеризации: анализ вычислительной сложности и полиномиально разрешимые подклассы // Дискретная математика. 1996. Т. 8. Вып. 3. С. 135-147.

11. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

12. *Беллман Р., Дрейфус С.* Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука, 1965.

Дополнительные материалы и сведения

Коган Дмитрий Израилевич	Московский государственный университет приборостроения и информатики; кафедра прикладной математики и информатики; профессор	д-р тех. наук, профессор	*Рабочий тел.*: (499) 269 55 87 *Домашний тел.*: (499)135 65 35	*Рабочий адрес*: 107996 Москва, ул. Стромынка, д. 20 *Домашний адрес:* 119333, Москва, ул. Губкина, д. 4, кв. 64	kdi_41@mail.ru.
Федосенко Юрий Семёнович	Волжская государственная академия водного транспорта; кафедра информатики, систем управления и телекоммуникаций; заведующий кафедрой	д-р тех. наук, профессор	*Рабочий тел.*: (8312)419 7843 *Домашний тел.*: (8312)421 4652	*Рабочий адрес*: 603950 Нижний Новгород, ул. Нестерова, д. 5а *Домашний адрес:* 603105 Нижний Новгород, ул. Полтавская, д. 33/45, кв. 44	fds@aqua.sci-nnov.ru