Промежуточный этап

16 декабря 2024 г.

1 Постановка задачи

В прямоугольной области решается задача

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \ \mathrm{tr}\boldsymbol{\mathcal{E}} \ \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\mathcal{E}} - \alpha p \ \mathbf{I}, \tag{2}$$

$$S_\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\frac{k}{\mu}\nabla p - \alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right), \tag{3}$$

$$\Gamma_{R,T,L}: \ p = p_0, \ \boldsymbol{\sigma}\left\langle \mathbf{n} \right\rangle = \boldsymbol{\sigma}_0 \left\langle \mathbf{n} \right\rangle, \tag{4}$$

$$\Gamma_B: \ p = p_w, \tag{5}$$

$$\Gamma_B: \ \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\left\langle \mathbf{n} \right\rangle = -p, \tag{6}$$

условие (5) нужно заменить на условие с источником и дельта функцией.

2 Валидация решения

Для проверки взято решение $u_{ex} = \frac{kt^2}{\mu\alpha} - \frac{S_\varepsilon x^3 t + x}{3\alpha}$, $v_{ex} = y^4$, $p_{ex} = x + tx^2$, которое является точным для системы

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \ \mathrm{tr}\boldsymbol{\mathcal{E}} \ \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\mathcal{E}} - \alpha p \ \mathbf{I}, \tag{8}$$

$$S_\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\frac{k}{\mu}\nabla p - \alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right), \tag{9}$$

$$\Gamma_{R,T,L}: \ p = p_{ex}, \ \boldsymbol{\sigma}\left\langle \mathbf{n} \right\rangle = \boldsymbol{\sigma}_{ex} \left\langle \mathbf{n} \right\rangle, \tag{10}$$

$$\Gamma_B: \ p = p_{ex}, \tag{11}$$

$$\Gamma_B: \ \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\left\langle \mathbf{n} \right\rangle = -p + g, \tag{12}$$

где $\mathbf{f}$ и g - поправки для соответствия решению.

Перед решения данной системы ищется начальное приближение при помощи решения системы

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \ \mathrm{tr}\boldsymbol{\mathcal{E}} \ \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\mathcal{E}} - \alpha p \ \mathbf{I}, \tag{14}$$

$$\frac{2k}{\mu} t = \operatorname{div}\left(\frac{k}{\mu}\nabla p\right), \tag{15}$$

$$\Gamma_{R,T,L}: \ p = p_{ex}, \ \boldsymbol{\sigma}\left\langle \mathbf{n} \right\rangle = \boldsymbol{\sigma}_{ex} \left\langle \mathbf{n} \right\rangle, \tag{16}$$

$$\Gamma_B: \ p = p_{ex}, \tag{17}$$

$$\Gamma_B: \ \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\left\langle \mathbf{n} \right\rangle = -p + g, \tag{18}$$

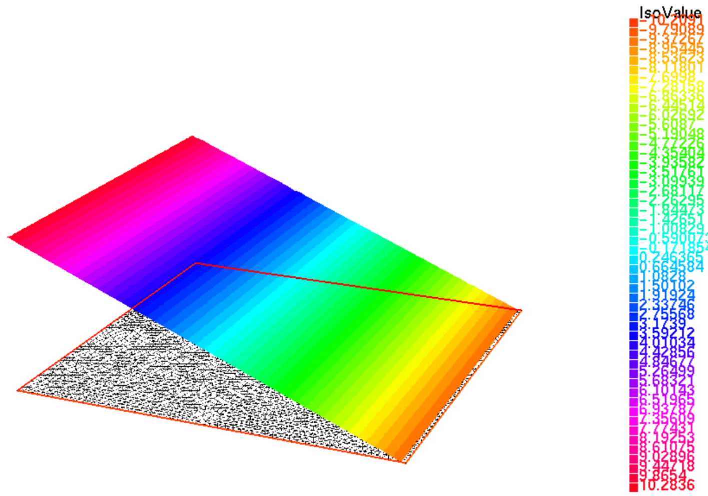
После этого запускается цикл по времени для решения (7) – (12).

3 Результаты валидации

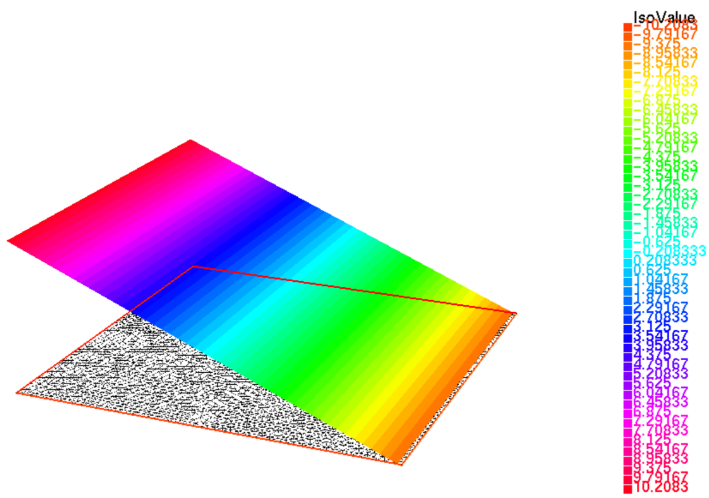
В файле TASK_5_VALID_TIME_STATIC.edp написана проверка для решения стационарной задачи.

В файле TASK_5_VALID_TIME_EVOL.edp написана проверка для решения стационарной задачи.

Результаты:

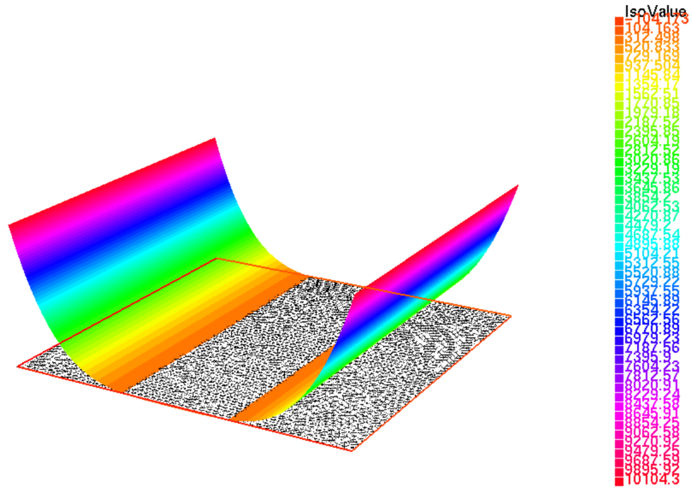


а) Численное решение

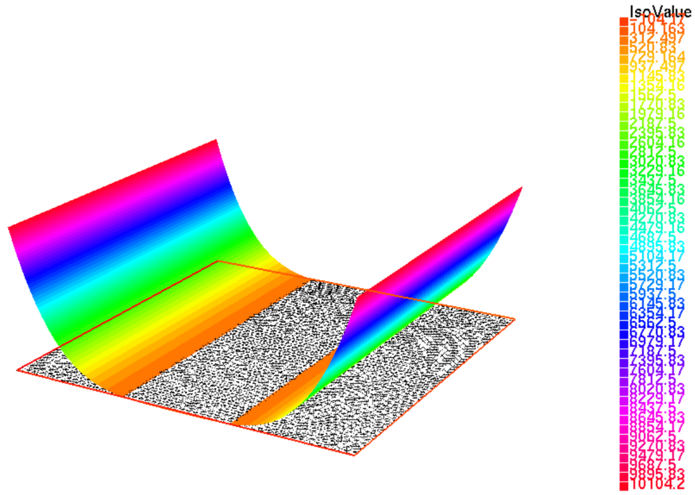


б) Точное решение

Рис. 3.1: Численное решение и точное значение для u

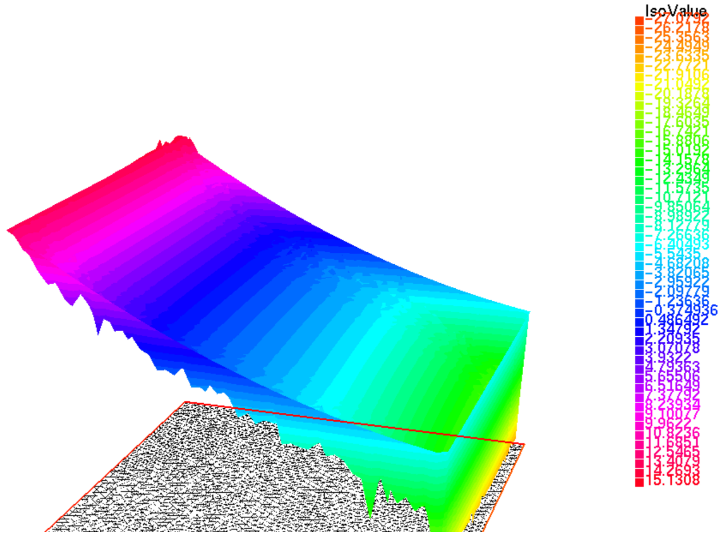


а) Численное решение

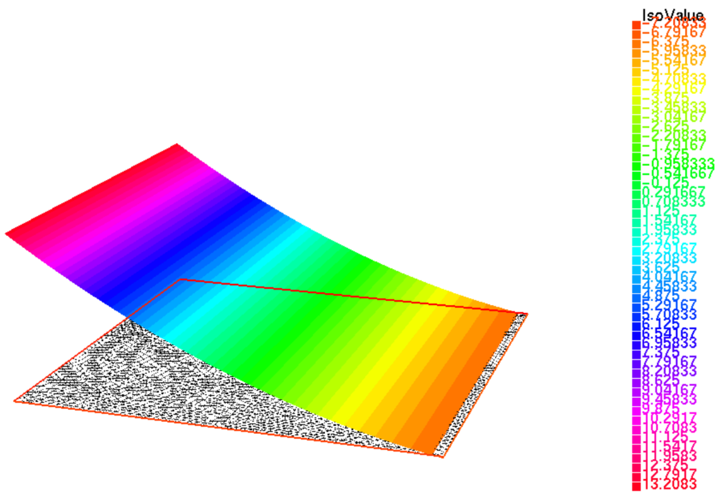


б) Точное решение

Рис. 3.2: Численное решение и точное значение для v



а) Численное решение



б) Точное решение

Рис. 3.3: Численное решение и точное значение для p

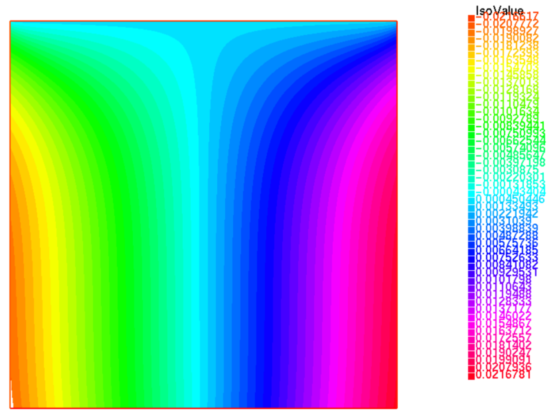
Видно, что давление в целом совпадает с решением, то осцилирует около границ, что влияет на относительную погрешность.

nn	u	v	p
50	0.0020498	3.89938e-06	0.847973
100	0.000147262	3.01451e-07	0.853958

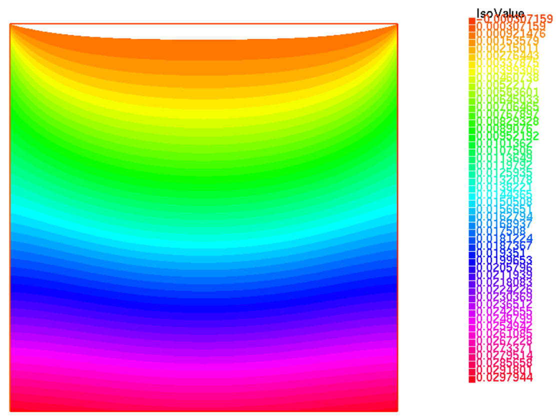
Таблица 1: Относительные погрешности для u, v и p для параметра сетки nn

4 Результаты для "реальной"задачи

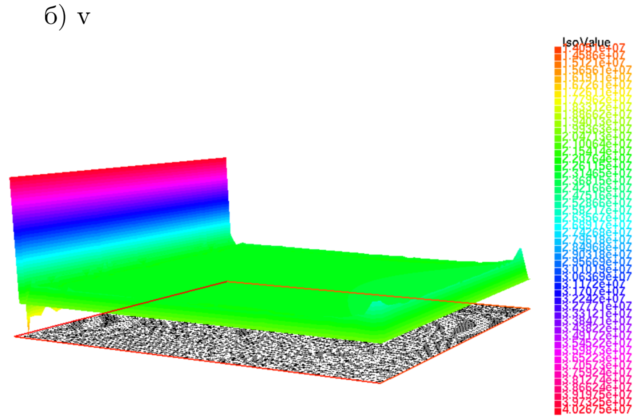
Решение (из файла TASK_5.edp) задачи (1) – (6):



а) u



б) v



в) p

Рис. 4.1: Численное решение для "реальной"задачи

5 Дельта функция

В файле DeltaFunc.edp приведен пример решения системы уравнений с дельта функцией:

$$\Delta\left(u\left(r\right)\right) = -2\pi\delta(r), \tag{19}$$

$$\Delta\left(v\left(x,y\right)\right) = 4, \tag{20}$$

$$+ \text{ граничные условия из точного решения}$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, а точное решение имеет вид $u = \ln\left(r\right)$, $v = x^2+y^2$