Analisis Numerico

Julian Carrillo Chiquiza

Cristian Camilo Contreras Borja
Kevin Andres Garzon Opsina

February 2021

1 Preguntas

1.1 Metodo Secante

Es un método para encontrar la raíz de una función de forma iterativa. Se considera una variación del método de Newton-Raphson donde en vez de calcular la derivada de la función en el punto de estudio, teniendo en mente la definición de derivada, se aproxima la pendiente a la recta que une la función evaluada en el punto de estudio y en el punto de la iteración anterior.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

Figure 1: Ecuacion Metodo Secante.

1.1.1 ¿Cuales son condiciones para aplicar el método?

El principal inconveniente del método de Newton está en que requiere conocer el valor de la primera derivada de la función en el punto. Sin embargo, la forma funcional de f(x) dificulta en ocasiones el cálculo de la derivada. En estos casos es más útil emplear el método de la secante.

Es necesario conocer los valores Xi y Xi-1 para poder sacar el valor de Xi+1.

Es necesario dar dos valores iniciales que no se encuentren afectados por asíntotas, puntos de inflexión, mínimos o máximos locales y pendientes que se aproximan a cero.

1.1.2 Proporcione una explicación geométrica del algoritmo (*excepto para la convergencia acelerada)

La recta secante es una recta que corta a una circunferencia en dos puntos. Conforme estos puntos de corte se acercan, dicha recta se aproxima a un punto y, cuando solo existe un punto que toca la circunferencia la cual se llama tangente, dado los puntos de intersección A y B se puede calcular la ecuación de la secante.

Lo que se realiza es empezar a marcar rectas secantes a la curva de la ecuación que se tiene originalmente y así revisar la intersección de esas rectas con el eje de las X para ver si es la raíz buscada.

El método de la secante parte de dos puntos y estima la tangente por una aproximación. Al reemplazar esta expresion en la ecuacion del metodo de

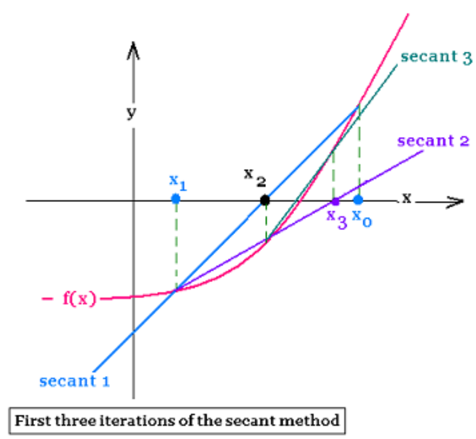

Figure 2: Metodo Secante.

Newton se obtiene la expresion del metodo secante que proporciona el siguiente punto de iteracion: Y tras ejecutar la siguiente iteracion se tomaran las dos puntos X1,X2 para estimar el punto mas proximo a la raiz dependiendo de la ecuacion inicial.

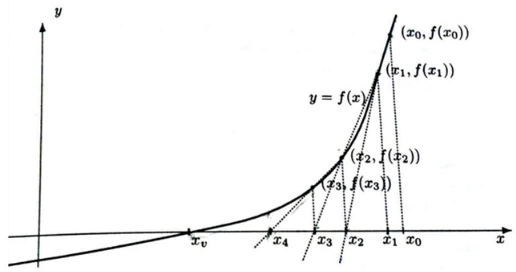

Figure 3: Metodo secante geometricamente.

1.1.3 Realice un diagrama de flujo que muestre como se debe operar el algoritmo.

Diagrama de flujo:

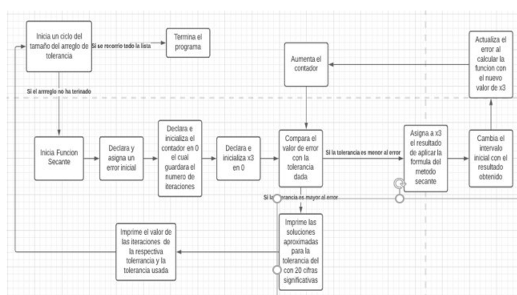

Figure 4: Diagrama de flujo metodo secante implementacion

Implementacion:

```python
import matplotlib.pyplot as plt

def ciclo(f,x1,x2,aux):
    for i in aux:
        secant(f, x1, x2, i)

def secant(f, x1, x2, tol):
    error = 1e3
    acum = []
    iteraciones = []
    n = 0
    x3 = 0
    while error > tol:
        x3 = x1 - ((x2 - x1) / (f(x2) - f(x1))) * f(x1)
        x1 = x2
        x2 = x3
        error = abs(f(x3))
        acum.append(error)
        ##print(error)
        iteraciones.append(n)
        n += 1
    print("Tolerancia usada: " + str(tol))
    print("Solucion Aproximada: {:.20f}".format(x3))
    print("Numero de iteraciones: {:d}".format(n))
    print(" ")

    plt.plot(iteraciones,acum)
    plt.xlabel('Iteaciones')
    plt.ylabel('Error')
    plt.title('METODO DE SECANTE CON TOLERANCIA = ' + str(tol))
    plt.show()
```

Figure 5: Implementacion Phyton Metodo Secante

1.1.4 ¿Cuál son las raíces?. Valide su resultado.(Se uso la plataforma Wolfram para validar los resultados)

- Ejercicio 1.

$$f(x) = cos^2(x) - x^2$$

Figure 6: Ecuacion ejercicio 1

Result:

$$x = -0.73908513333537457$$

Figure 7: Resultado de la raiz ejercicio 1(Wolfram)

```
In [99]: ciclo(f,-5,6,a)
Tolerancia usada: 1e-08
Solucion Aproximada: 0.73908513321615265657
Numero de iteraciones: 12

Tolerancia usada: 1e-16
Solucion Aproximada: 0.73908513321516067229
Numero de iteraciones: 13

Tolerancia usada: 1e-32
Solucion Aproximada: 0.73908513321516067229
Numero de iteraciones: 13

Tolerancia usada: 1e-56
Solucion Aproximada: 0.73908513321516067229
Numero de iteraciones: 13
```

Figure 8: Resultado de la raiz ejercicio 1(Phyton)

- Ejercicio 2

f(x)=xsin(x)-1 en [-1,2]

Figure 9: Ecuacion ejercicio 2

Result:

$x = -1.114157140871930$

Figure 10: Resultado de la raiz ejercicio 2(Wolfram)

```
In [53]: secant(f,-1,2,1e-16)
Traceback (most recent call last):

  File "<ipython-input-53-77e527f5cfbd>", line 1, in <module>
    secant(f,-1,2,1e-16)

  File "C:\Users\kevin andres\.spyder-py3\temp.py", line 11, in secant
    x3 = x1 - ((x2 - x1) / (f(x2) - f(x1))) * f(x1)

ZeroDivisionError: float division by zero
```

```
In [101]: ciclo(f,-1,2,a)
Tolerancia usada: 1e-08
Solucion Aproximada: -1.11415714086789652271
Numero de iteraciones: 11
```

Figure 11: Resultado de la raiz ejercicio 2(Phyton)

- Ejercicio 3

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$$

Figure 12: Ecuacion ejercicio 3

Exact root result:

$$x = \frac{2}{3} \approx 0.6666666666666667$$
$$x = \frac{2}{3} \approx 0.6666666666666667$$
$$x = \frac{2}{3} \approx 0.6666666666666667$$

Figure 13: Resultado de la raiz ejercicio 3(Wolfram)

```
In [103]: ciclo(f,-5,6,a)
Tolerancia usada: 1e-08
Solucion Aproximada: 0.66858101172910588961
Numero de iteraciones: 20

Tolerancia usada: 1e-16
Solucion Aproximada: 0.66666895389209268608
Numero de iteraciones: 44

Tolerancia usada: 1e-32
Solucion Aproximada: 0.66666895389209268608
Numero de iteraciones: 44

Tolerancia usada: 1e-56
Solucion Aproximada: 0.66666895389209268608
Numero de iteraciones: 44
```

Figure 14: Resultado de la raiz ejercicio 3(Phyton)

- Ejercicio 4

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

Figure 15: Ecuacion ejercicio 4

Result:

$x = 2.094551481542414$

Figure 16: Resultado de la raiz ejercicio 4(Wolfram)

```
In [47]: secant(f,-5,5,10e-8)
Approximate solution: 2.094551
Number of iterations: 11
```

```
In [106]: ciclo(f,-5,6,a)
Tolerancia usada: 1e-08
Solucion Aproximada: 2.094551481168868894448
Numero de iteraciones: 24
```

```
In [55]: secant(f,-5,5,10e-17)
Traceback (most recent call last):

  File "<ipython-input-55-0f3af31c4049>", line 1, in <module>
    secant(f,-5,5,10e-17)

  File "C:\Users\julia\.spyder-py3\temp.py", line 6, in secant
    x3 = x1 - ((x2 - x1) / (f(x2) - f(x1))) * f(x1)

ZeroDivisionError: float division by zero
```

Figure 17: Resultado de la raiz ejercicio 4(Phyton)

- Ejercicio 5

Determinar el coeficiente de arrastre W necesario para que un paracaidista de masa m=68.1 kg tenga una velocidad de 40 m/s después de una caída libre de t=10 s.

$$f(c) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right) - v$$

Figure 18: Ecuacion ejercicio 5

```
In [22]: ciclo(f,-5,6,a)
Tolerancia:1e-08
Solucion Aproximada: 13.96859959253249172662
Numero de iteraciones: 9

Tolerancia:1e-16
Solucion Aproximada: 13.96859959255723815374
Numero de iteraciones: 10

Tolerancia:1e-32
Solucion Aproximada: 13.96859959255723815374
Numero de iteraciones: 10

Tolerancia:1e-56
Solucion Aproximada: 13.96859959255723815374
Numero de iteraciones: 10
```

Figure 19: Resultado de la raiz ejercicio 5(Phyton)

1.1.5 ¿Como se comporta el método en cuanto a: perdida de significancia, el número de iteraciones, la convergencia, en cada caso?

El método de la Secante tiene un comportamiento directamente (DP) o inversamente (IP) proporcional dependiendo del caso a tratar, dado el caso de aumentar la tolerancia del proceso se obtiene como resultado:

- Aumento en el número de iteraciones, y una disminución en la perdida de significancia (IP)

- Cumple el principio de la convergencia superlineal pues entre más iteraciones posibles más exacto será el resultado final (DP)

1.1.6 ¿Cómo se puede solucionar el problema de significancia?, es remediable o está destinado al fracaso, en los casos que se presente el problema.

El problema de perdida de significancia se presenta al reducir la tolerancia y por ende la cantidad de iteraciones que realizara el proceso, para solucionar esto se debe buscar un proceso más extenso, pero con una mayor precisión aumentando la cantidad de iteraciones que se realizaran.

1.1.7 ¿Que pasa con el método cuando hay más de dos raíces?, explique su respuesta, encontrar la multiplicidad (sugerencia utilice Wólfram para factorizar).

El método presenta limitaciones cuando se desea trabajar algunas funciones pares o impares, pues al momento de presentarse simetría es posible obtener un error al calcular la raíz. El método de la Secante tiene como limitación el solo poder hallar o aproximar a una raíz por proceso, por lo tanto, al tener más de dos raíces no será posible dar con estas.

1.1.8 ¿Qué pasa con el método cuando la función es periódica, par o impar, estas características influyen?

El método presenta limitaciones cuando se desea trabajar algunas funciones pares o impares, pues al momento de presentarse simetría es posible obtener un error al calcular la raíz.

1.1.9 Realice una gráfica que muestre la relación entre el Ei+1 , que representa esa gráfica, encuentre una relación de la forma Ei+1=f(Ei):

- Ejercicio 1

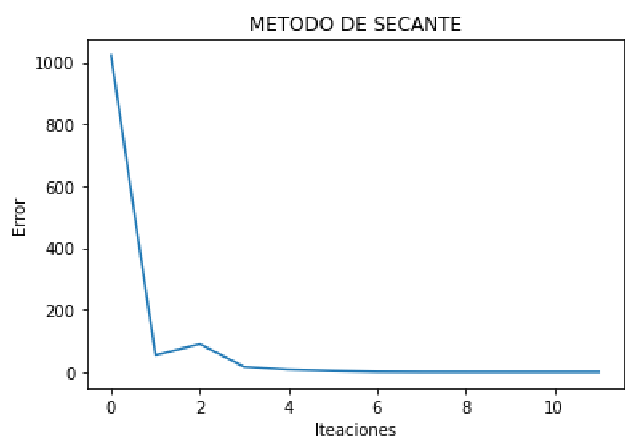

Figure 20: Grafica de errores ejercicio 1

- Ejercicio 2

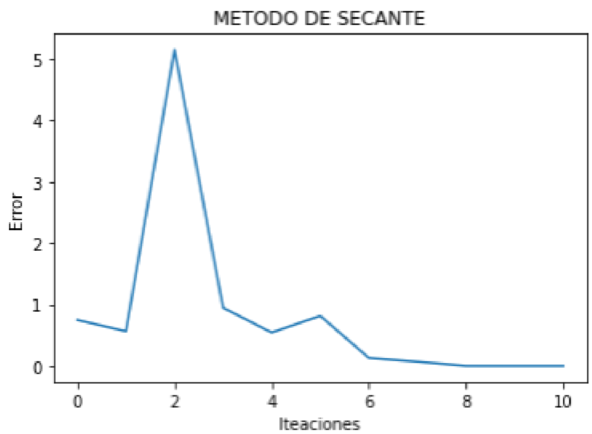

Figure 21: Grafica de errores ejercicio 2

- Ejercicio 3

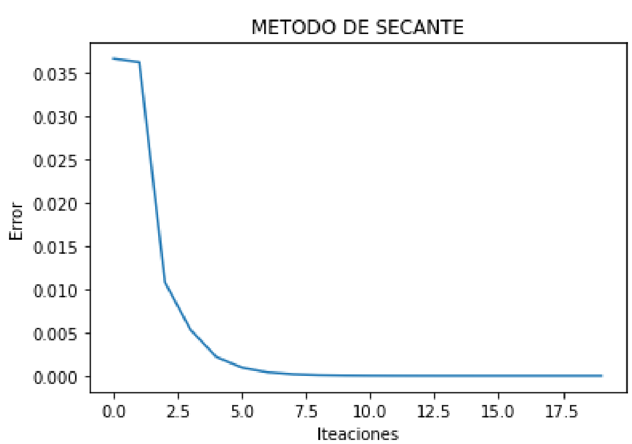

Figure 22: Grafica de errores ejercicio 3

- Ejercicio 4

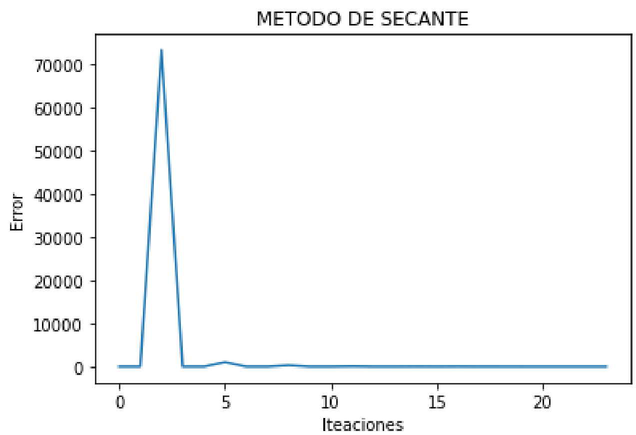

Figure 23: Grafica de errores ejercicio 4

- Ejercicio 5

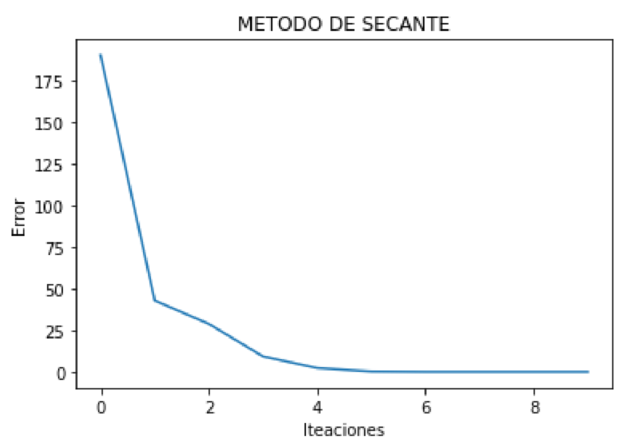

Figure 24: Grafica de errores ejercicio 5

1.1.10 Realice una gráfica que muestre cómo se comporta el método en cada caso con respecto a la tolerancia y al número de iteraciones.

- Ejercicio 1

$$f(x) = cos^2(x) - x^2$$

Figure 25: Ecuacion ejercicio 1

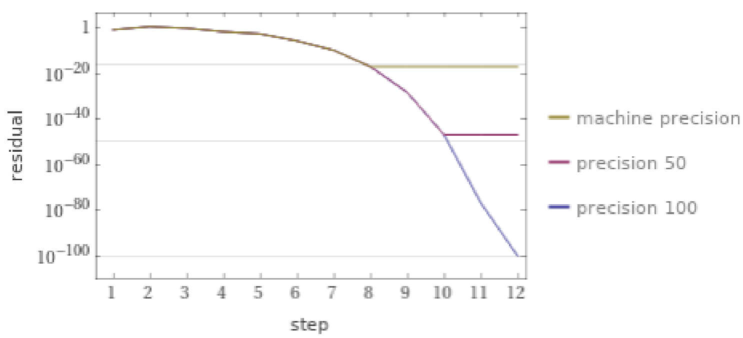

Figure 26: Grafica respecto tolerancia ejercicio 1(Wolfram)

- Ejercicio 2

f(x)=xsin(x)-1 en [-1,2]

Figure 27: Ecuacion ejercicio 2

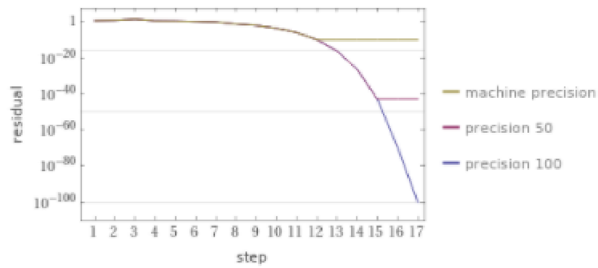

Figure 28: Grafica respecto tolerancia ejercicio 2(Wolfram)

- Ejercicio 4.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$$

Figure 29: Ecuacion ejercicio 3

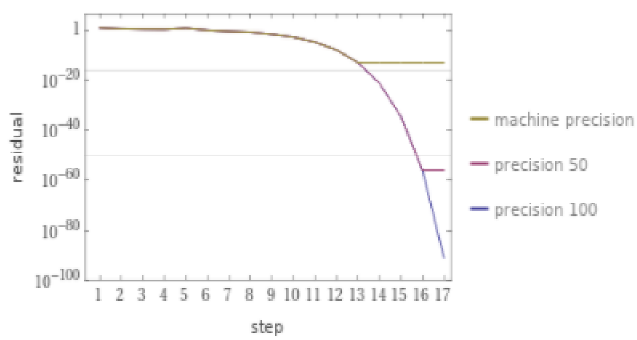

Figure 30: Grafica respecto tolerancia ejercicio 3(Wolfram)

1.1.11 Como se comporta el método con respecto al de bisección.

En comparación con el método de bisección que tiene un comportamiento más inestable debido a su lenta convergencia como al alto riesgo de divergencia en los procesos que se realizan. Por su contra parte, la Secante evita la complejidad y mantiene una convergencia superlineal más rápida. Sin embargo, se tiene que no asegura la primera aproximación de la raíz.

1.2 Metodo Algoritmo de Aitken

En análisis numérico, el método de Aitken es un método de aceleración de la convergencia. Cuando se aplica el método de Aitken a una sucesión obtenida mediante una iteración de punto fijo se conoce como método de Steffensen.

$$\hat{x}_{n+2} = x_{n+2} - \frac{(x_{n+2} - x_{n+1})^2}{x_{n+2} - 2\,x_{n+1} + x_n}$$

Figure 31: Grafica ecuacion Metodo Aitken

1.2.1 ¿Cuales son condiciones para aplicar el método?

El método de Aitken acelerará la sucesión Xn si y solo si :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{x}_n - \ell}{x_n - \ell} = 0.$$

Debe mantenerse un caso de convergencia lineal para poder realizar la respectiva aceleracion de la misma.

1.2.2 Realice un diagrama de flujo que muestre como se debe operar el algoritmo.

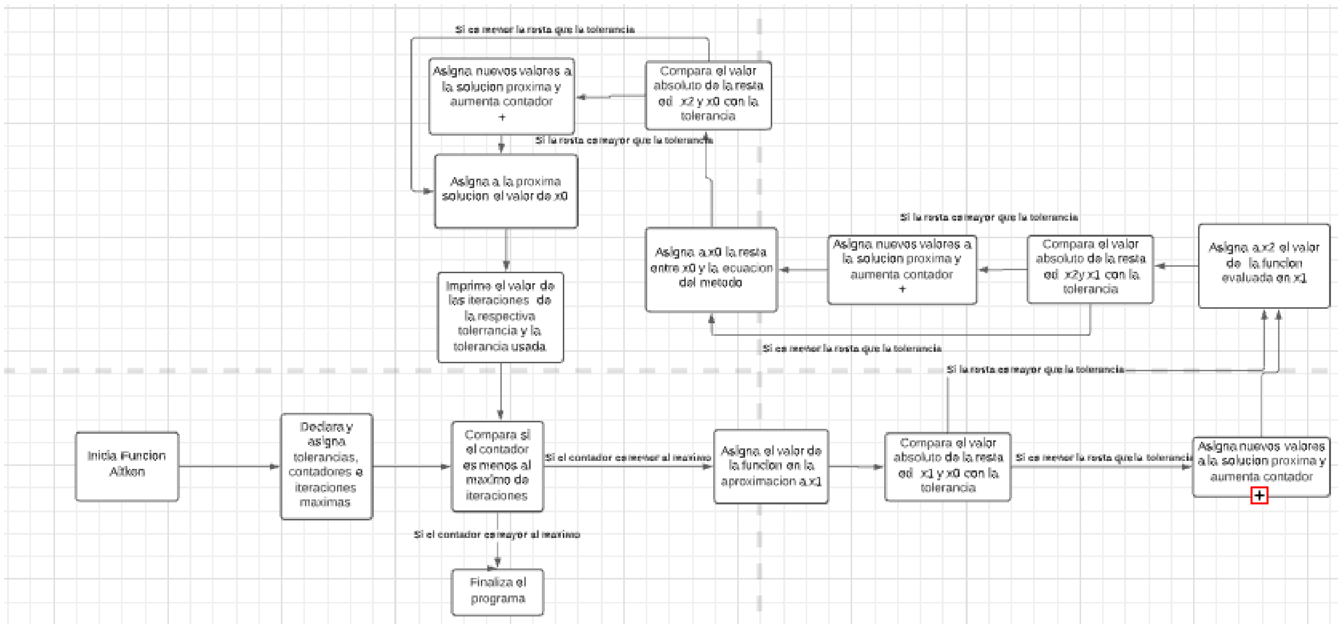

Figure 32: Diagrama de flujo Metodo Aitken

Implementacion:

```python
def Aitken(x0,g,nmax,tol):
    i=0
    while i<nmax:
        x1=g(x0)
        if abs(x1-x0)<tol:
            xg=x1
            i=i+1
            print("Resultado: " + str(xg) , str(i))
            return

        x2=g(x1)
        if abs(x2-x1)<tol:
            xg=x2
            i=i+1
            print("Resultado: " + str(xg) , str(i))
            return

        x0=x0-((x1-x0)**2)/(x2-2*x1+x0) #Ecuacion Aitken
        if abs(x2-x0)<tol:
            xg=x0
            i=i+1
            print("Resultado: " + str(xg) , str(i))
            return
        i=i+1

    xg=x0
    print("Resultado: " + str(xg) , str(i))
    return
```

Figure 33: Implementacion (Phyton)

1.2.3 ¿Cuál son las raíces?. Valide su resultado.

- Ejercicio 1

$$f(x) = cos^2(x) - x^2$$

Figure 34: Ecuacion ejercicio 1

Result:

$x = -0.7390851333537457$

Figure 35: Resultado de la raiz ejercicio 1(Wolfram)

```
In [126]: Aitken(1,f,100,1e-8)
Resultado3: 0.5070648168813722 7
```

Figure 36: Resultado de la raiz ejercicio 1(Phyton/Aitken)

- Ejercicio 2

f(x)=xsin(x)-1 en [-1,2]

Figure 37: Ecuacion ejercicio 2

Result:

$$x = -1.114157140871930$$

Figure 38: Resultado de la raiz ejercicio 2(Wolfram)

```
In [132]: Aitken(-1,f,100,1e-8)
Resultados: -0.629446484073372 5
```

Figure 39: Resultado de la raiz ejercicio 2(Phyton/Aitken)

- Ejercicio 3

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$$

Figure 40: Ecuacion ejercicio 3

Exact root result:

$$x = \frac{2}{3} \approx 0.6666666666666667$$
$$x = \frac{2}{3} \approx 0.6666666666666667$$
$$x = \frac{2}{3} \approx 0.6666666666666667$$

Figure 41: Resultado de la raiz ejercicio 3(Wolfram)

```
In [123]: Aitken(0.6,f,100,1e-8)
Resultado3: 1.9066784763842926 58
```

Figure 42: Resultado de la raiz ejercicio 3(Phyton/Aitken)

- Ejercicio 4

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

Figure 43: Ecuacion ejercicio 4

Result:

$$x = 2.094551481542414$$

Figure 44: Resultado de la raiz ejercicio 4(Wolfram)

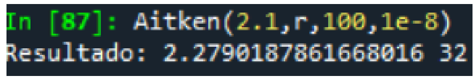

Figure 45: Resultado de la raiz ejercicio 4(Phyton/Aitken)

1.2.4 ¿Como se comporta el método en cuanto a: perdida de significancia, el número de iteraciones, la convergencia, en cada caso?

Normalmente los valores parecen converger al cabo de unas iteraciones y llegados a un punto empiezan a diverger con un empeoramiento de la estimación. Esto nos indica que pasado cierto punto no se gana precisión al utilizar más nodos de interpelación.

1.2.5 ¿Cómo se puede solucionar el problema de significancia?, es remediable o está destinado al fracaso, en los casos que se presente el problema.

En el momento de comenzar el descenso en la precisión del método se obtendrá una constante perdida de significancia.

1.2.6 ¿Que pasa con el método cuando hay más de dos raíces?, explique su respuesta, encontrar la multiplicidad

Como es bien sabido, para el método de aitken es necesario para su funcionamiento el uso de diversos factores como lo son una respectiva tolerancia o un polinomio, por lo que el agregar una tercera raíz, puede causar la invalidez del método, causando que por definición no sea posible la ejecución de este.

1.2.7 ¿Qué pasa con el método cuando la función es periódica, par o impar, estas características influyen?

Al ser la función par o impar no influye en el cálculo de la raíz ya que se realiza por sucesiones, pero al ser periódica se empiezan a realizar una mayor cantidad de iteraciones por lo cual el método hace que se empiece a alejar de la respuesta correcta.

1.2.8 Como se comporta el método con respecto al de bisección.

El método de Aitken presenta una búsqueda más eficaz frente al método de bisección ya que toma menos iteraciones y al aplicar la formula general se pueden verificar diferentes valores mediante sucesiones de tipo n y n+1. Sin embargo, cuando el método Aitken llega a un número variable de iteraciones el valor se comienza a alejar de la respuesta correcta lo cual lo hace ineficiente en problemas más complejos.

Programa usado: Overleaf.com
Link : https://www.overleaf.com/3989934284fbjntgrtgvhr