Лабораторная работа № 4 по курсу «Численные методы» «Численное интегрирование»[1]

1 Численное интегрирование в регулярном случае

1.1 Методы численного интегрирования и оценки погрешности

Пусть задана гладкая функция $f(x)$ при $x \in [a, b]$. Необходимо вычислить значение следующего определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

Вычислим значение интеграла (1) численно. Для этого воспользуемся **составными квадратурными формулами** численного интегрирования вида

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} C_i f(x_i), \tag{2}$$

где C_i – некоторые коэффициенты; $f(x)$ — подыинтегральная функция.
Для того, чтобы использовать составные квадратурные формулы необходимо сначала разбить отрезок $[a, b]$ на n равных промежутков с шагом $h = \dfrac{b-a}{n}$.
Получим узлы разбиения: $x_i = a + i \cdot h,\ i = 0, 1, 2, \dots n$; $m = n//2$. Причём, $x_0 = a$, $x_n = b$.
Важно! Для использования составной формулы Симпсона необходимо, чтобы n было **чётным**!

Составная квадратурная формула средних прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \tag{3}$$

Оценка погрешности для формулы средних прямоугольников:

$$|I_T - I^*| \le \frac{b-a}{24}\, h^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|, \tag{4}$$

где I_T — точное значение интеграла; I^* — приближённое значение интеграла, посчитанное численно.

Составная квадратурная формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(x_n)\right) \tag{5}$$

[1] Разработано А. М. Филимоновой, каф. ВМиМФ ИММиКН ЮФУ

Оценка погрешности для формулы трапеций:

$$|I_T - I^*| \leq \frac{b-a}{12}\, h^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|, \tag{6}$$

где I_T — точное значение интеграла; I^* — приближённое значение интеграла, посчитанное численно.

Составная квадратурная формула Симпсона:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) + f(x_n)\right) \tag{7}$$

Оценка погрешности для формулы Симпсона:

$$|I_T - I^*| \leq \frac{b-a}{180}\, h^4 \max_{x\in[a,b]} |f^{IV}(x)|, \tag{8}$$

где I_T — точное значение интеграла; I^* — приближённое значение интеграла, посчитанное численно.

1.2 Правило Рунге

Точность формул численного интегрирования напрямую зависит от числа точек разбиения отрезка $[a, b]$. Для того, чтобы вычислить определённый интеграл с необходимой точностью, используют *Правило Рунге:*

$$|I_{2n} - I_n| < C \cdot \varepsilon, \tag{9}$$

Согласно правилу Рунге, искомое число разбиений n найдено, когда увеличение числа разбиений отрезка $[a, b]$ в два раза не оказывает существенного влияния на величину интеграла.
Здесь: ε — необходимая точность вычислений; I_n — приближённое значение интеграла, посчитанное при n-точках разбиения; I_{2n} — приближённое значение интеграла, посчитанное при $2n$-точках разбиения; C — числовая константа, зависящая от метода численного интегрирования: $C = 1/3$ для формул средних прямоугольников и трапеций и $C = 1/15$ для формулы Симпсона.

2 Численное интегрирование несобственных интегралов

Рассматривается интеграл от функции $f(x)$, имеющей особенность в одной из точек отрезка интегрирования $[a, b]$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{10}$$

Для того, чтобы вычислить приближённое значение такого несобственного интеграла необходимо выделить из функции $f(x)$ некоторую функцию $g(x)$, которая имеет особенность в той же точке, что и $f(x)$, однако является легко интегрируемой. Т. е $f(x) = g(x) + \varphi(x)$. Причем $\varphi(x)$ должна быть гладкой функцией.
Пусть подынтегральная функция $f(x)$ имеет особенность в точке x^*. Тогда можем представить её в виде:

$$f(x) = (x - x^*)^{-p} \cdot \psi(x), \qquad 0 < p < 1, \qquad a \le x^* \le b.$$

В свою очередь функция $\psi(x)$ раскладывается в степенной ряд в окрестности точки x^*:

$$\psi(x) = c_0 + c_1\,(x - x^*) + c_2\,(x - x^*)^2 + c_3\,(x - x^*)^3 + \ldots \tag{11}$$

Тогда т. к. $f(x) = g(x) + \varphi(x)$, то первые n-слагаемых разложения (11) соответствуют функции $g(x)$, а все оставшиеся — функции $\varphi(x)$, т. е.:

$$g(x) = (x - x^*)^{-p} \cdot \left(c_0 + c_1\,(x - x^*) + c_2\,(x - x^*)^2 + c_3\,(x - x^*)^3 + \ldots + c_n\,(x - x^*)^n\right) \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (x - x^*)^{-p} \cdot (c_{n+1}\,(x - x^*)^{n+1} + c_{n+2}\,(x - x^*)^{n+2} + \ldots) = \\ &= (x - x^*)^{n+(1-p)}\,(c_{n+1} + c_{n+2}\,(x - x^*) + c_{n+3}\,(x - x^*)^2 + \ldots)\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, вычисление несобственного интеграла (10) сводится к вычислению суммы двух интегралов от функций $g(x)$ и $\varphi(x)$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \int\limits_a^b g(x)\,dx + \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx,$$

где функции $g(x)$ и $\varphi(x)$ вычисляются по формулам (12)–(13).

Порядок выполнения лабораторной работы

Лабораторная работа 4 состоит из трёх заданий. Задание 1 выполняется письменно как самостоятельная работа. Задания 2–3 выполняются на компьютере.
Индивидуальные задания для выполнения **Задания 2** Лабораторной работы находятся в файле «Варианты к лабораторной работе 4».

Лабораторная работа

Задание 1.

Используя составные квадратурные формулы, вычислить значение данного определённого интеграла. Интеграл, число разбиений n и методы численного интегрирования указаны в индивидуальном варианте в соответствующем задании в MS Teams.

Указания: Вычислить точное значение интеграла. Для каждого из приближённых значений интеграла найти абсолютную погрешность. Сделать вывод о точности предложенных методов.

Задание 2.

Используя составные квадратурные формулы, вычислить значение данного определённого интеграла. Интеграл, требуемая точность ε и методы численного интегрирования указаны в индивидуальном варианте в файле «Варианты к лабораторной работе 4».

Указания:

1. Для каждого из методов написать функцию, входными параметрами которой являются пределы интегрирования a, b, число точек разбиения n и сама подынтегральная функция $f(x)$. Выходной параметр: приближённое значение данного определённого интеграла.

2. Написать функцию, реализующую подбор числа разбиений n по правилу Рунге, входными параметрами которой являются пределы интегрирования a, b, некоторое начальное число точек разбиения n_0, точность ε и сама подынтегральная функция $f(x)$.

3. Вычислить точное значение интеграла, используя встроенные функции. Найти абсолютную погрешность для каждого из предложенных методов численного интегрирования.

4. Найти число разбиений n из соответствующей формулы оценки погрешности предложенного метода. Сравнить с числом разбиений n, полученным по правилу Рунге в п. 2.

Задание 3.

Вычислить несобственный интеграл, используя выделение особенности и разложение подынтегральной функции в степенной ряд.
Указания:

1. Выделить особенность в подынтегральной функции, определить вид функций $g(x)$ и $\varphi(x)$. При разложении в ряд взять по 4 ненулевых слагаемых для каждой из функций.

2. Используя квадратурную формулу Симпсона или трапеций (в зависимости от индивидуального варианта в Задании 2), вычислить численно интегралы от полученных функций $g(x)$ и $\varphi(x)$. Результатом является сумма этих интегралов.

3. Вычислить точное значение интеграла, используя встроенные функции. Найти абсолютную погрешность для каждого из предложенных методов численного интегрирования.