

Лабораторная работа № 5 по курсу «Численные методы» «Методы решения задач Коши»¹

Решение задачи Коши ОДУ первого порядка

Рассматривается задача Коши:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in [a, b], \\ y(a) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь:

$$y_i = y(x_i), \quad x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad x_0 = a, \quad x_n = b, \quad h = \frac{b-a}{n} = \text{const.}$$

Необходимо найти приближённые решения y^* задачи Коши (3) на отрезке $[a, b]$.

Методы решения задачи Коши:

Явный метод Эйлера

$$y_{i+1}^* \approx y_i^* + h \cdot f(x_i, y_i^*), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Неявный метод Эйлера

$$\begin{cases} \tilde{y} \approx y_i^* + h \cdot f(x_i, y_i^*), & i = 0, 1, \dots, n-1, \\ y_{i+1}^* \approx y_i^* + h \cdot f(x_{i+1}, \tilde{y}). \end{cases}$$

Метод Хойна

$$\begin{cases} \tilde{y} \approx y_i^* + h \cdot f(x_i, y_i^*), & i = 0, 1, \dots, n-1, \\ y_{i+1}^* \approx y_i^* + \frac{h}{2} \cdot (f(x_i, y_i^*) + f(x_{i+1}, \tilde{y})). \end{cases}$$

Метод Рунге-Кутты

$$\begin{cases} y_{i+1}^* \approx y_i^* + p_1 K_1(x_i, y_i^*, h) + p_2 K_2(x_i, y_i^*, h) + p_3 K_3(x_i, y_i^*, h), & i = 0, 1, \dots, n-1, \\ K_1(x_i, y_i^*, h) = h \cdot f(x_i, y_i^*), \\ K_2(x_i, y_i^*, h) = h \cdot f(x_i + \alpha_2 h, y_i^* + \beta_{21} K_1(x_i, y_i^*, h)), \\ K_3(x_i, y_i^*, h) = h \cdot f(x_i + \alpha_3 h, y_i^* + \beta_{31} K_1(x_i, y_i^*, h) + \beta_{32} K_2(x_i, y_i^*, h)). \end{cases}$$

¹Разработано А. М. Филимоновой, каф. ВМиМФ ИММиКН ЮФУ

Параметры $p_1, p_2, p_3, \alpha_2, \alpha_3, \beta_{21}, \beta_{31}, \beta_{32}$ определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} p_3 \alpha_3 + p_2 \alpha_2 = \frac{1}{2}, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1, \\ \alpha_2 = \beta_{21}, \\ \alpha_3 = \beta_{31} + \beta_{32}, \\ \alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2) - \beta_{32} \alpha_2(2 - 3\alpha_2) = 0, \\ p_3 \beta_{32} \alpha_2 = \frac{1}{6}. \end{cases} \quad (2)$$

Решение задачи Коши ОДУ p -порядка

Рассматривается задача Коши:

$$\begin{cases} y^{(p)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(p-1)}), & x \in [a, b], \\ y(a) = z_0, y'(a) = z_1, \dots, y^{(p-1)}(a) = z_p. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь: $y_i = y(x_i), \quad x_i = x_0 + ih \ (i = 0, 1, \dots, n), \quad x_0 = a, \quad x_n = b, \quad h = \frac{b-a}{n}.$

Необходимо найти приближённые решения y^* задачи Коши (3) для ОДУ p -порядка на отрезке $[a, b]$ методом Рунге-Кутты третьего порядка.

Для этого перейдем от одного дифференциального уравнения p -порядка к системе из p уравнений первого порядка. К каждому из уравнений полученной системы применяется метод Рунге-Кутты. Искомые значения y_0^*, \dots, y_n^* соответствуют решению первого уравнения системы.

Порядок выполнения лабораторной работы

Лабораторная работа 5 состоит из двух заданий. Все задания выполняются на компьютере.

Задание 1. Решение ОДУ первого порядка

1. Реализовать все предложенные методы решения ОДУ (явный метод Эйлера, неявный метод Эйлера, метод Хойна, метод Рунге-Кутты). Каждый из методов оформить в виде функции, возвращающей значения y_0^*, \dots, y_n^* в виде списка (массива). Для метода Рунге-Кутты найти все параметры метода, решив систему (2).
2. Найти точное решение y_T , используя встроенные функции (Maple или Python), сравнить полученные результаты с точным решением (вычислить норму разности δ).

$$\delta = \|y_T - y^*\| = \sqrt{\sum_{i=0}^n (y_T(x_i) - y^*(x_i))^2}.$$

Вычисление нормы разности δ оформить в виде функции, принимающей на вход два массива (списка) и возвращающую одно число.

3. Провести вычисления для нескольких значений n и представить полученные результаты в виде таблицы в следующем формате:

i	x[i]	точное	явный м. Эйлера	н./я. м. Эйлера	м. Хойна	м. Рунге-Кутта
0
1
2
...
n

Погрешность явного метода Эйлера: ...

Погрешность неявного метода Эйлера: ...

Погрешность метода Хойна: ...

Погрешность метода Рунге-Кутта: ...

Печать таблицы оформить в виде функции, принимающей на вход массивы (списки): значения узлов $x[i]$, массив точных значений, массивы значений, посчитанных каждый из методов. Продемонстрировать решение задачи для нескольких значений n в рамках одного запуска программы.

Задание 2. Решение ОДУ p -порядка

1. Перейти от одного ОДУ p -порядка к системе ОДУ p -порядка
2. Реализовать метод Рунге-Кутта для решения системы ОДУ p -порядка, основываясь на методе Рунге-Кутта из **Задания 1**. Оформить в виде функции, возвращающей только массив (список) искомых значений y_0^*, \dots, y_n^* .
3. Найти точное решение y_T , используя встроенные функции (Maple или Python), и вычислить норму разности δ по следующей формуле:

$$\delta = \|y_T - y^*\| = \sqrt{\sum_{i=0}^n (y_T(x_i) - y^*(x_i))^2}.$$

Вычисление нормы разности δ оформить в виде функции, принимающей на вход два массива (списка) и возвращающую одно число.

4. Провести вычисления для нескольких значений n и представить полученные результаты в виде таблицы в следующем формате:

i	x[i]	точное	м. Рунге-Кутта
0
1
2
...
n

Погрешность метода Рунге-Кутта: ...

Печать таблицы оформить в виде функции, принимающей на вход массивы (списки): значения узлов $x[i]$, массив точных значений, массивы значений, посчитанных каждый из методов. Продемонстрировать решение задачи для нескольких значений n в рамках одного запуска программы.