

Лабораторная работа 2.4

Определение вязкости воздуха по скорости течения через тонкие трубки

Жарков Андрей 495

14 октября 2016 г.

Цель работы: экспериментально выявить участки ламинарного и турбулентного течения; определить число Рейнольдса; определить вязкость воздуха; экспериментально определить зависимость расхода воздуха в трубках от радиуса

В работе используются: металлические трубки, укрепленные на горизонтальной подставке; газовый счетчик; микроманометр типа ММН; стеклянная U-образная трубка; секундомер.

Теоретическое введение. Если два соприкасающихся слоя жидкости или газа текут с разной скоростью, то между ними возникает сила вязкого трения. Та же сила может действовать на твёрдые тела (по касательной к поверхности), помещённые в поток жидкости или газа.

Причина возникновения этой силы заключается в следующем. Скорость частиц в текучей среде складывается из средней скорости потока и хаотической — тепловой — составляющей. Следовательно, частицы могут перескакивать случайным образом из слоя в слой, перенося вместе с собой часть импульса потока из того слоя, откуда совершен скачок. Перенос же импульса от слоя к слою, согласно 2-му закону Ньютона, эквивалентен силовому взаимодействию между ними. Эта сила направлена по касательной к слоям, поскольку переносится компонента импульса, направленная вдоль среднего потока.

Для количественного описания вязкого трения рассмотрим взаимодействие слоёв газа, текущего вдоль оси x , скорость потока которого изменяется в поперечном направлении $v_x = v_x(y)$ (см. рис. 1).

Пусть концентрация всюду одинакова и равна n , а средняя тепловая скорость хаотичного движения молекул равна v_T . Также для дальнейшего рассмотрения нам понадобится понятие длины свободного пробега λ — среднего расстояния, которое пролетает молекула между столкновениями с другими молекулами.

Рассмотрим плоскость $y = 0$. Предположим, что через неё сверху вниз пролетают только молекулы, вылетевшие из слоя

$0 < y < +\lambda$ (слой 2) и снизу вверх — вылетевшие из слоя $-\lambda < y < 0$ (слой 1). Данное предположение вполне разумно для качественной оценки явления, поскольку молекулы из более дальних слоёв имеют значительно меньшую вероятность добраться до $y = 0$, поскольку по пути они скорее всего столкнутся с другими молекулами.¹

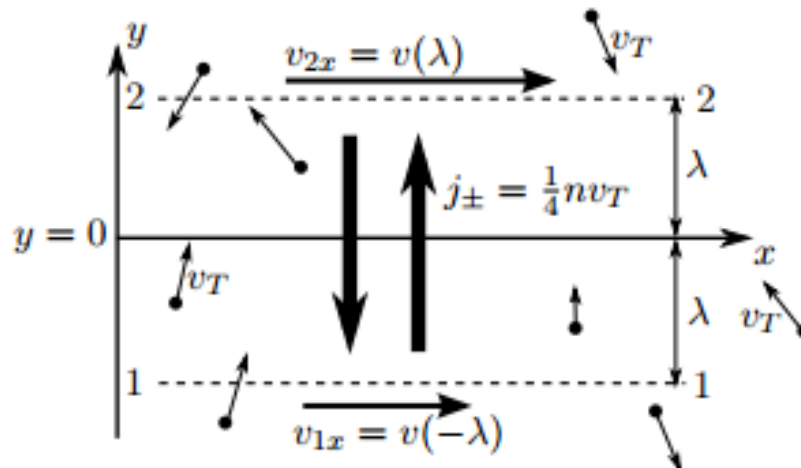


Рис. 1. К выводу оценки коэффициента вязкости

Количество молекул, перелетающих из слоя 1 в слой 2 за единицу времени через единичную площадку (плотность потока), равно²

$$j = \frac{dN}{S \cdot dt} = \frac{1}{4} n v_T. \quad (1)$$

Каждая из этих молекул массой m_0 обладает, помимо хаотично распределённой тепловой составляющей (в среднем v_T), дополнительной горизонтальной скоростью, связанной с движением в потоке $v_{1x} = v_x(-\lambda)$, и горизонтальным импульсом $p_{1x} = m_0 v_{1x}$. И наоборот, из слоя 2 в слой 1 поступает такое же количество молекул, но их средний горизонтальный импульс равен $p_{2x} = m_0 v_{2x}$, где $v_{2x} = v_x(+\lambda)$. Горизонтальный импульс, который они переносят в сумме в единицу времени, и есть касательная сила вязкого

¹Более строгий вывод должен учитывать вероятность для одной молекулы пролететь некоторое расстояние l .

²Если бы все частицы двигались с одной скоростью v , то плотность потока была бы равна, очевидно, $j = nv$. Коэффициент $1/4$ получается из-за того, что молекулы движутся хаотично — в результате усреднения скорости по всем направлениям.

трения:

$$F_x = \left(\frac{dP_x}{dt} \right)_{2 \rightarrow 1} - \left(\frac{dP_x}{dt} \right)_{1 \rightarrow 2} = jS(p_{2x} - p_{1x}) = \\ = S \cdot \frac{1}{4} m_0 n v_T \cdot (v_{2x} - v_{1x}).$$

Считая λ достаточно малой, раскладываем по Тэйлору $v_{2x} - v_{1x} = v_x(\lambda) - v_x(-\lambda) \approx 2\lambda \frac{dv_x}{dy}$, из чего получим окончательное выражение для силы вязкого трения. В общем виде оно выглядит следующим образом:

$$F_x = S\eta \frac{dv_x}{dy}, \quad (2)$$

где η — коэффициент вязкости (сокращенно вязкость), y — направление, перпендикулярное потоку, S — площадь поверхности, для которой рассчитывается приложенная сила. В общих чертах механизм возникновения вязких сил трения во всех текучих средах (жидкостях и газах) одинаков, и формула (2) представляет собой *определение* коэффициента вязкости.

Для идеального газа, как следует из приведенных выше выкладок, вязкость можно оценить *по порядку величины*:

$$\eta_{\text{г}} \sim \frac{1}{2} m_0 n v_T \lambda = \frac{1}{2} \rho v_T \lambda, \quad (3)$$

где $\rho = m_0 n$ — плотность газа.

Более детальное рассмотрение даёт значение вязкости, отличающееся от полученного на множитель $2/3$. Хотя такое отличие не существенно для оценки по порядку величины, этот ответ является общепринятым для оценки η :

$$\eta_{\text{г}} \sim \frac{1}{3} \rho v_T \lambda. \quad (4)$$

Течение вязкой жидкости. Течение жидкости или газа при наличии вязкости описывается уравнением Навье—Стокса, которое представляет собой 2-й закон Ньютона, записанный для элемента жидкости. Приведём его для справок без вывода:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla P + \eta \cdot \Delta \vec{v}. \quad (5)$$

Слагаемое в левой части есть масса единичного объёма на его ускорение; первое слагаемое в правой части есть градиент давления, дающий нормальную компоненту силы взаимодействия жидких элементов друг с другом; второе же получается именно из силы вязкого трения (Δ — оператор Лапласа).

Имеется два существенно различных класса течений. Ламинарное течение — течение, происходящее без перемешивания и пульсаций, в параллельных слоях жидкости; турбулентное течение, в котором образуются вихри и пульсации, а слои беспорядочно перемешиваются.

Точные решения уравнения Навье—Стокса (5) существуют только для ламинарных течений. В общем же случае, несмотря на кажущуюся простоту (5), динамика жидкости, описываемая им, может быть крайне сложна — проблема аналитического описания (и даже численного расчёта) турбулентности является до сих пор до конца нерешённой и актуальной научной задачей.

То, каким будет данное конкретное течение, зависит от соотношения физических параметров, входящих в уравнение (5), и от геометрических характеристик системы. Если у системы есть характерный размер r (радиус трубки при течении по трубе, радиус шарика при обтекании его внешним потоком и т. п.), то из r , плотности ρ , вязкости η и характерной скорости потока v можно составить *безразмерное* соотношение (докажите самостоятельно):

$$\boxed{\text{Re} = \frac{\rho v r}{\eta}}, \quad (6)$$

называемое числом Рейнольдса.

Безразмерные параметры отражают связь между физическими явлениями, происходящими на разных масштабах, и часто используются при описании сложных физических явлений, для которых нет точных решений. Величины v , ρ , r , η могут меняться в широком диапазоне (например, течение воздуха в аэродинамической трубе диаметром в десятки метров и течение воды в капилляре), но если число Re для этих случаев будет одинаково, то эти течения будут подобны друг другу. Такие зависимости в физике называют законами подобия.

Число Рейнольдса характеризует (по порядку величины) отношение кинетической энергии элемента жидкости к работе сил вязкого трения, совершаемой над ним. Действительно, кинетиче-

ская энергия в кубике со стороной r равна $K \sim \rho r^3 v^2 / 2$, сила трения $F \sim r^2 \eta v / r$ и её работа $A_F \sim Fr \sim \eta v r^2$, откуда

$$\text{Re} \sim \frac{K}{A_F}.$$

Вязкие силы стремятся стабилизировать течение, тогда как избыток кинетической энергии может приводить к переходу её части в вихревое движение. Таким образом, можно заключить, что большие числа Рейнольдса благоприятствуют рождению турбулентных течений, а при малых Re течение будет, скорее всего, ламинарным.

Эксперимент подтверждает эти рассуждения: для заданной геометрии течения существует критическое значение числа Рейнольдса $\text{Re}_{\text{кр}}$, так что при $\text{Re} > \text{Re}_{\text{кр}}$ ламинарное течение оказывается неустойчивым и рождается турбулентность. Для течения по трубе эксперимент даёт $\text{Re}_{\text{кр}} \sim 10^3$.

Течение по трубе. Рассмотрим стационарное течение вязкой жидкости или газа по трубке круглого сечения радиуса R .

Получим выражение для скорости потока в зависимости от расстояния до центра трубы r . При малых скоростях течение будет ламинарным и стационарным, поэтому $dv/dt = 0$. Кроме того, в трубе постоянного сечения v не может зависеть от x , поскольку через каждое сечение должно проходить одинаковое количество жидкости, следовательно, скорость можно считать зависящей только от r : $v = v(r)$, давление же при этом зависит только от координаты вдоль трубы x . Тогда, воспользовавшись известным выражением для оператора Лапласа в цилиндрических координатах, получим из уравнения (5) следующее:

$$\frac{dP}{dx} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \right). \quad (7)$$

К этому необходимо добавить граничное условие на $v(r)$: скорость течения на поверхности трубы должна быть нулевой (условие прилипания), $v(R) = 0$. Левая часть уравнения (7) не зависит от r , поэтому дважды проинтегрировав его по r с учётом граничного условия получим

$$v = -\frac{dP}{dx} \frac{1}{4\eta} (R^2 - r^2).$$

С учётом того, что и $dP/dx = \text{const}$ (т. е. $P(x)$ — линейная функция), получим окончательно

$$v = \frac{P_1 - P_2}{L} \frac{1}{4\eta} (R^2 - r^2), \quad (8)$$

где P_2 и P_1 — давления на концах трубы, а L — длина трубы.

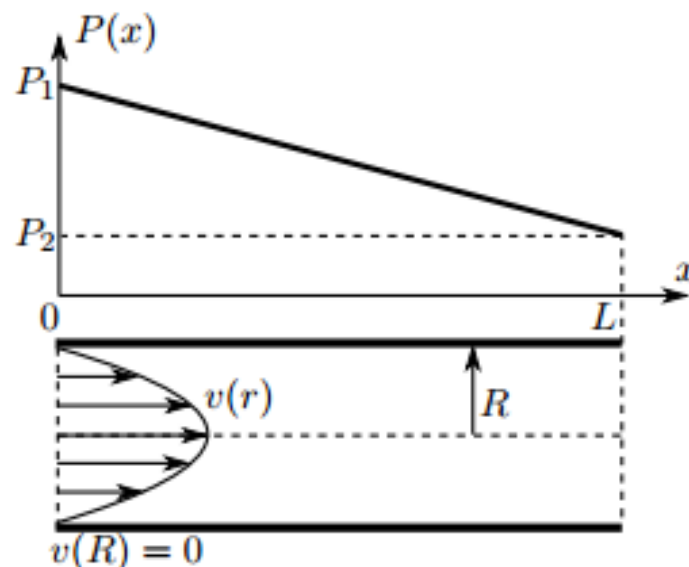


Рис. 2. Структура ламинарного течения по трубе

Полный расход Q жидкости через трубу можно получить, проинтегрировав плотность потока вещества nv (ср. с формулой (1)) по сечению трубы. Для круглого сечения можно интегрировать по кольцам радиуса r толщиной dr , площадь их равна $dS = 2\pi r dr$, и тогда

$$Q = \int nv dS = \int_0^R nv 2\pi r dr. \quad (9)$$

Таким образом, для количества вещества, проходящего в единицу времени через сечение трубы при вязком ламинарном течении, из (9) получаем следующее выражение:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta L} (P_1 - P_2), \quad (10)$$

называемое формулой Пуазейля. Здесь Q измеряется в единицах объёма в секунду ($\text{м}^3/\text{с}$); для вычисления массового расхода Q_m ($\text{кг}/\text{с}$) надо домножить его на плотность:

$$Q_m = \rho Q.$$

На рис. 2 приведены основные характеристики пуазейлевского течения: распределение скоростей потока в зависимости от радиуса (профиль скорости) и распределение давления вдоль трубы.

Формула (10) справедлива только для ламинарного течения, поэтому необходимо, чтобы с забасом выполнялось $\text{Re} < \text{Re}_{\text{кр}}$.

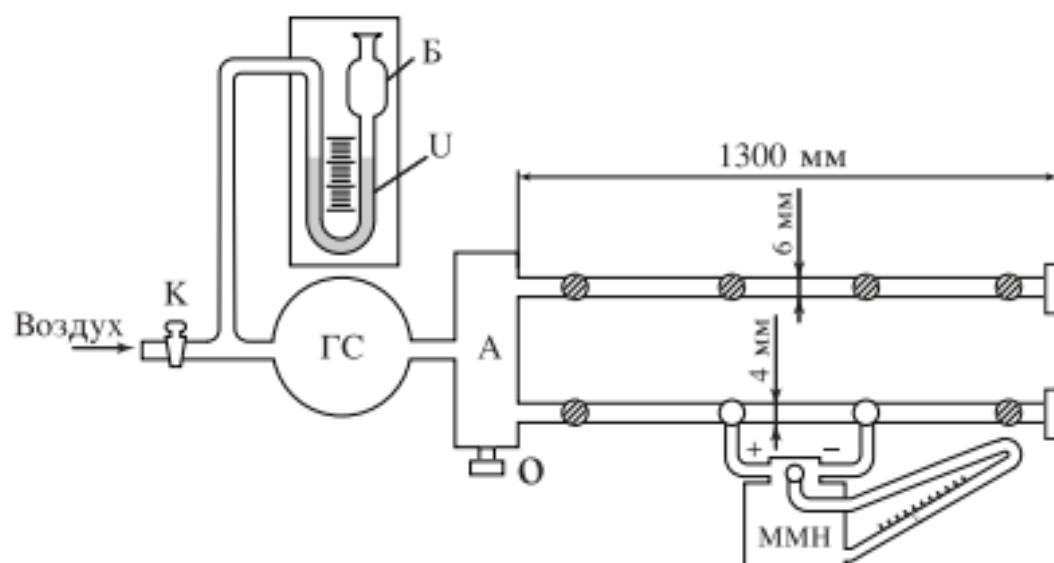


Рис. 3. Схема установки для определения вязкости воздуха

Кроме того, при втекании газа в трубку из резервуара может возникнуть переходная область, в которой будут рождаться вихри или пульсации и течение не будет ламинарным. Если выполняется $Re \ll Re_{кр} \sim 2 \cdot 10^3$ и трубка достаточно длинная, то эти возмущения затухнут на некотором расстоянии от входа в трубку и далее течение будет ламинарным и пуазейлевским. Градиент давления на участке с несформировавшимся потоком будет больше, чем там, где установилось ламинарное течение, что позволяет разделить участки экспериментально.

Экспериментальная установка. Измерения производятся на экспериментальной установке, схема которой изображена на рис. 3. Поток воздуха под давлением, несколько превышающим атмосферное (на 5–7 см вод. ст.), через газовый счетчик ГС поступает в резервуар А, к которому припаяны тонкие металлические трубки. Примерные размеры трубок указаны на рисунке (точные размеры обозначены на установке). Обе трубки на концах снабжены заглушками, не пропускающими воздух. Во время измерений заглушка открывается только на рабочей трубке; конец другой трубки должен быть плотно закрыт.

Перед входом в газосчётчик поставлена U-образная трубка, наполовину заполненная водой. Она выполняет две задачи. Первая — измерение давления газа на входе в газосчётчик. Вторая — предохранение газосчётчика от выхода из строя. Дело в том, что

газосчётчик устойчиво работает, если давление газа на его входе не превышает 600 мм водяного столба. Высота U-образной трубки примерно 600 мм, поэтому, когда давление на входе в счётчик превышает 600 мм водяного столба, вода из U-образной трубки выплёскивается в защитный баллон Б и, создавая шум, привлекает к себе внимание экспериментатора. Такая ситуация часто создаётся в тех случаях, когда газ подают в систему при закрытых выходах измерительных трубок.

Для измерения давлений в трубках просверлен ряд миллиметровых отверстий. На время опыта к двум соседним отверстиям подсоединяется микроманометр, а остальные плотно закрываются завинчивающимися пробками. Подача воздуха в установку регулируется краном К.

В работе применяется микроманометр типа ММН (рис. 4), позволяющий измерять разность давлений до 200 мм вод. ст. Для повышения чувствительности трубка манометра установлена в наклонном положении. Числа 0,2; 0,3; 0,4; 0,6 и 0,8, нанесенные на стойке 4, обозначают коэффициент, на который должны быть умножены показания манометра при данном наклоне, для получения давления в миллиметрах водяного столба. Рабочей жидкостью является этиловый спирт. Установка мениска жидкости на нуль шкалы производится путем изменения уровня спирта в сосуде 1 с помощью цилиндра 6. Глубина погружения цилиндра в спирт регулируется винтом 7.

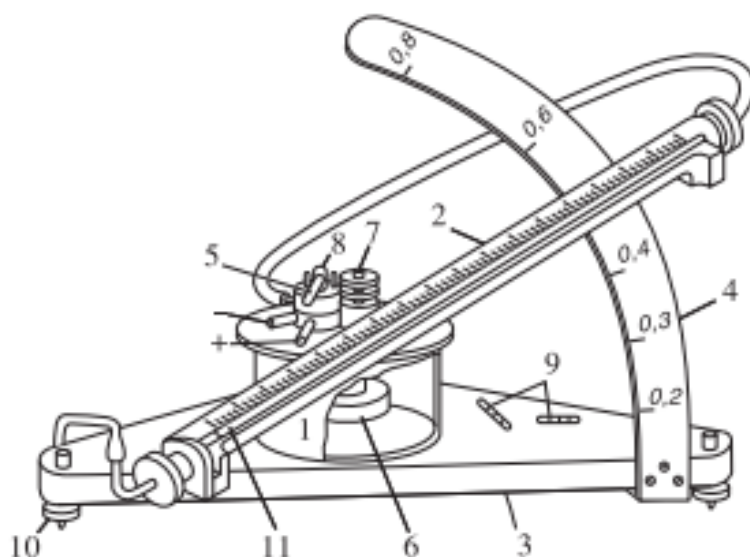


Рис. 4. Микрометрический манометр типа ММН

Микроманометр снабжен двумя уровнями 9, расположенными на плите 3 перпендикулярно один другому. Установка прибора по уровням производится двумя регулировочными ножками 10.

На крышке прибора установлен трехходовой кран 8, который имеет два рабочих положения — «0» и «+» (рис. 4). В положении «0» мениск жидкости устанавливается на ноль. В положении «+» производятся рабочие измерения. Перевод из положения «0» в положение «+» и наоборот осуществляется с помощью рычажка 5 (рис. 4). При этом учитывается, что в резервуаре уровень жидкости практически не меняется.

Газовый счетчик служит для измерения небольших количеств газа. Корпус газового счетчика представляет собой цилиндрический баллон, на передней торцевой стенке которого находятся счетно-суммирующий механизм и шкала со стрелкой. Один оборот стрелки соответствует 5 л газа, прошедшего через счетчик.

Выполнение работы

Будем измерять вязкость воздуха, снимая зависимость разности давлений ΔP на некотором участке трубы от расхода воздуха $Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$, при этом ΔV измеряется газовым счетчиком, а Δt — секундомером. Измерения будем проводить на участках различной длины (50, 40 и 30 см) двух труб различных диаметров. Множитель на стойке микроманометра возьмём равным 0,2. Постепенно увеличим расход, начиная с маленьких перепадов давления.

Будем вычислять η из формулы Пуазейля(10). $\eta = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8QL}$

Оценку Re получим из следующих соотношений: $Re = \frac{\rho v r}{\eta} = \frac{\rho l r S}{\eta t S} = \frac{\rho Q}{\eta \pi r}$

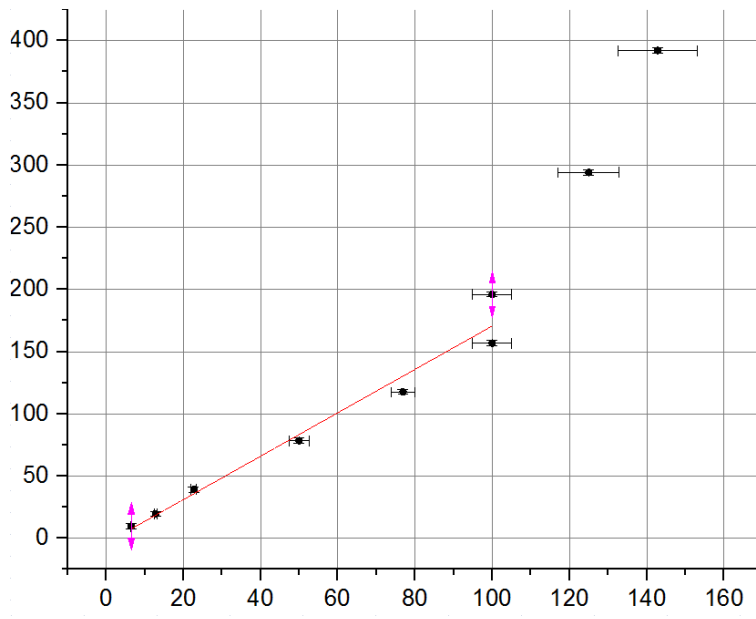
При измерениях: $\sigma_P = 1$ деление (или $0.2 * 9.8$ Па), $\sigma_{\Delta t} = 0.5c$

К сожалению, в некоторых сериях испытаний течение слишком быстро становится турбулентным, и коэффициент наклона приходится вычислять всего по двум-трём точкам из-за чего и погрешность выходит значительной.

Первая труба, $d = 3,85 \pm 0.05$ мм

1. $L = 50$ см

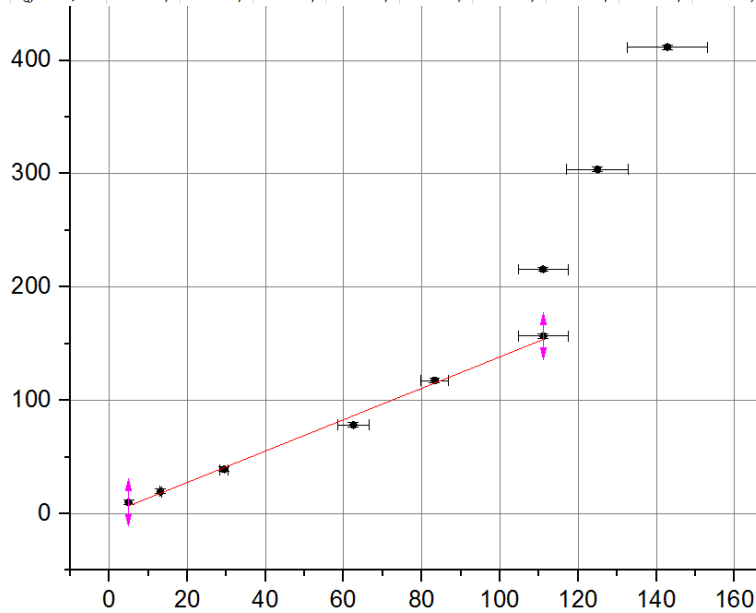
ΔP , делений	5	10	20	40	60	80	100	150	200
ΔP , Па	9,8	19,6	39,2	78,4	117,6	156,8	196,0	294,0	392,0
ΔV , дм ³	0,5	0,5	0,5	0,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
Δt , с	77	39	22	10	13	10	10	8	7
Q , см ³ /с	6,5	12,8	22,7	50,0	76,9	100,0	100,0	125,0	142,9
σ_Q , см ³ /с	0,1	0,3	0,7	2,7	3,1	5,1	5,1	7,9	10,3



Найденный тангенс угла наклона $k = (1,74 \pm 0,15) \text{Па} * \text{с}/\text{см}^3$. Теперь можно найти $\eta = (1,87 \pm 0,17) * 10^{-5} \text{Па} * \text{с}$ и $Re \approx 1223$

2. $L = 40 \text{cm}$

ΔP , делений	5	10	20	40	60	80	110	155	210
ΔP , Па	9,8	19,6	39,2	78,4	117,6	156,8	215,6	303,8	411,6
ΔV , дм ³	0,5	0,5	0,5	0,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
Δt , с	101	38	17	8	12	9	9	8	7
Q , см ³ /с	5,0	13,2	29,4	62,5	83,3	111,1	111,1	125,0	142,9
σ_Q , см ³ /с	0,1	0,3	1,0	4,1	3,6	6,3	6,3	7,9	10,3

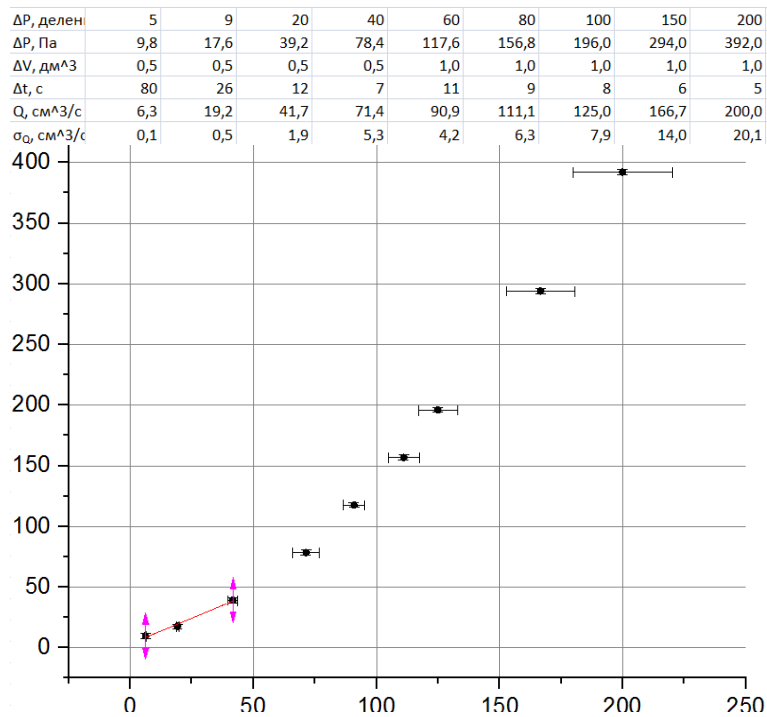


Найденный тангенс угла наклона $k = (1,38 \pm 0,12) \text{Па} * \text{с}/\text{см}^3$

$\eta = (1,86 \pm 0,17) * 10^{-5} \text{Па} * \text{с}$

$Re \approx 1160$

3. $L = 30 \text{cm}$



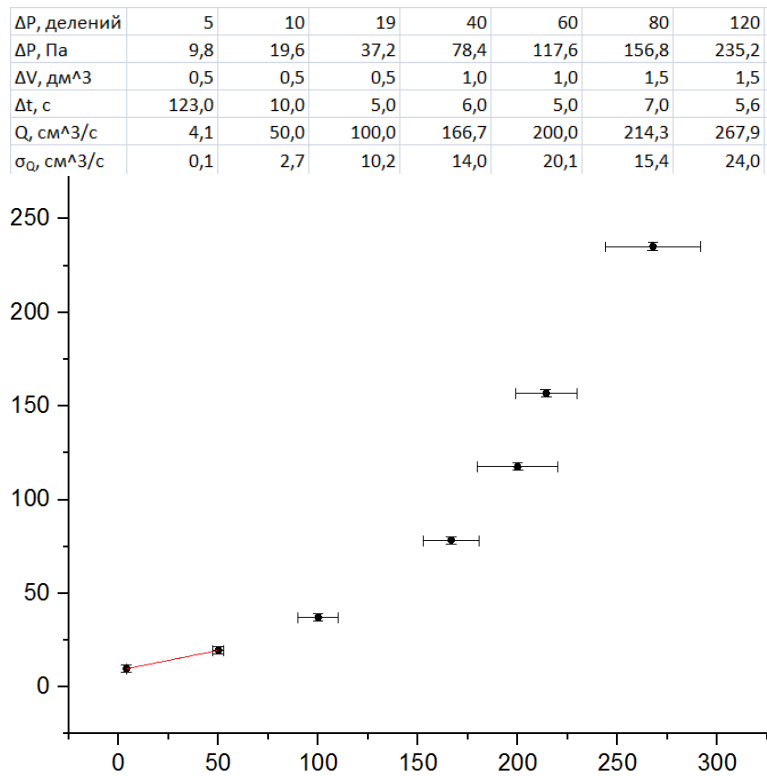
Найденный тангенс угла наклона $k = (0,9 \pm 0,1) \text{ Па} \cdot \text{с} / \text{см}^3$

$\eta = (1,61 \pm 0,15) \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$

$Re \approx 963$

Вторая труба, $d = 5,85 \pm 0,05 \text{ мм}$

4. $L = 50 \text{ см}$



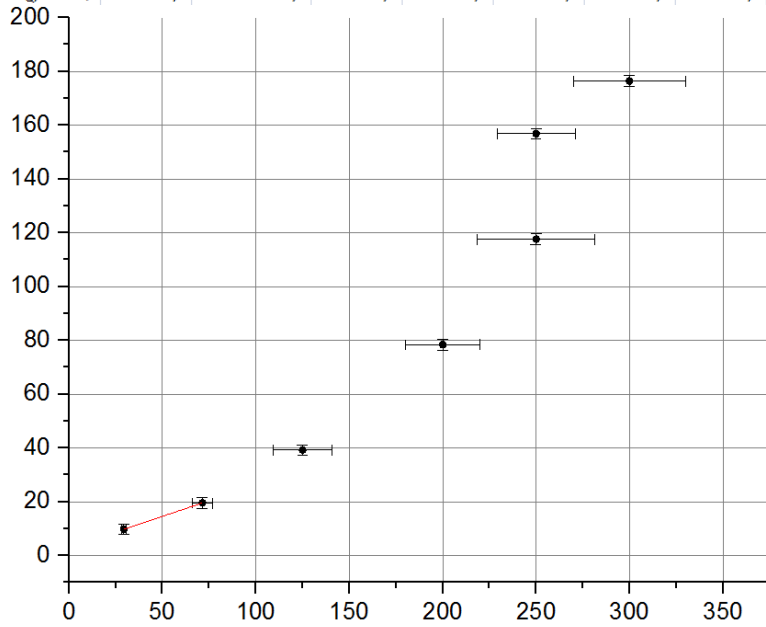
Найденный тангенс угла наклона $k = (0,21 \pm 0,04) \text{ Па} \cdot \text{с} / \text{см}^3$

$$\eta = (1,2 \pm 0,3) * 10^{-5} \text{Па} * \text{с}$$

$$Re \approx 1042$$

$$5. L = 40 \text{см}$$

ΔP , делен	5	10	20	40	60	80	90
ΔP , Па	9,8	19,6	39,2	78,4	117,6	156,8	176,4
ΔV , дм ³	0,5	0,5	0,5	1,0	1,0	1,5	1,5
Δt , с	17,0	7,0	4,0	5,0	4,0	6,0	5,0
Q , см ³ /с	29,4	71,4	125,0	200,0	250,0	250,0	300,0
σ_Q , см ³ /с	1,0	5,3	15,8	20,1	31,3	20,9	30,1



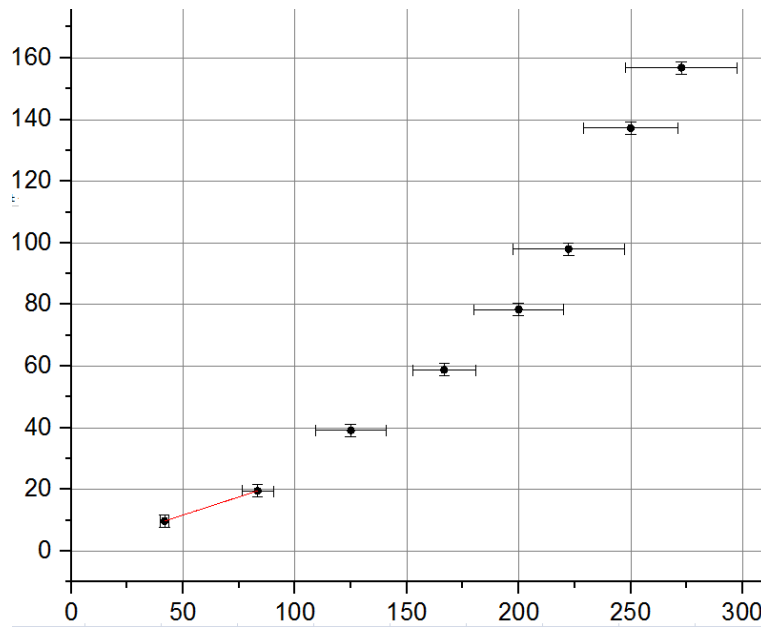
$$\text{Найденный тангенс угла наклона } k = (0,23 \pm 0,4) \text{Па} * \text{с}/\text{см}^3$$

$$\eta = (1,6 \pm 0,3) * 10^{-5} \text{Па} * \text{с}$$

$$Re \approx 916$$

$$6. L = 30 \text{см}$$

ΔP , делен	5	10	20	30	40	50	70	80
ΔP , Па	9,8	19,6	39,2	58,8	78,4	98,0	137,2	156,8
ΔV , дм ³	0,5	0,5	0,5	1,0	1,0	1,0	1,5	1,5
Δt , с	12,0	6,0	4,0	6,0	5,0	4,5	6,0	5,5
Q , см ³ /с	41,7	83,3	125,0	166,7	200,0	222,2	250,0	272,7
σ_Q , см ³ /с	1,9	7,1	15,8	14,0	20,1	24,8	20,9	24,9



Найденный тангенс угла наклона $k = (0,24 \pm 0,06) \text{Па} \cdot \text{с}/\text{см}^3$

$\eta = (2,3 \pm 0,5) \cdot 10^{-5} \text{Па} \cdot \text{с}$

$Re \approx 751$

Сравним с теоретическими вычислениями.

Табличное значение вязкости при $T = 300K$ $\eta = 18,5 \cdot 10^{-6} \text{Па} \cdot \text{с}$

При $\lambda = 10^{-5} \text{см}$, $T = 293K$

$$\eta_{th} = \frac{1}{3} \rho v_T \lambda = \frac{1}{3} \rho \lambda \sqrt{\frac{3RT}{m_{mol}}} \approx 2,01 \cdot 10^{-5} \text{Па} \cdot \text{с}$$

Как видим, в большинстве случаев, наши результаты в пределах погрешности подтверждают теоретические расчёты.