Лабораторная работа 1.3
Изучение колебаний на примере физического маятника

Жарков Андрей 496

26 марта 2016 г.

Цель работы: исследовать физический и математический маятники как колебательные системы, измерить зависимость периода колебаний физического маятника от его момента инерции.

В работе используются: физический маятник (однородный стальной стержень), опорная призма, математический маятник, счётчик числа колебаний, линейка, секундомер. Физическим маятником называется любое твёрдое тело, подвешенное на неподвижной горизонтальной оси и совершающее колебательное движение под действием возвращающих сил (рис. 1). В рассматриваемом случае возвращающей силой является сила тяжести.

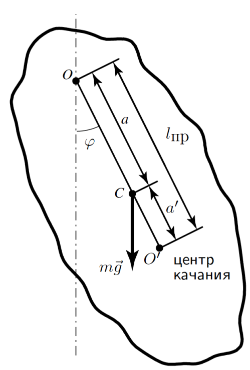


Рис. 1: физический маятник.

Колебания маятника в свою очередь представляют частный случай вращательного движения твёрдого тела вокруг неподвижной оси. При устойчивом равновесии центр масс маятника лежит на одной вертикали с точкой подвеса ниже её. При колебаниях прямая, соединяющая точку подвеса с центром масс, отклоняется от вертикали на угол ϕ. Если зависимость этого угла от времени ϕ(t) будет определена, то мы получим точное математическое описание колебаний физического маятника. Следовательно, для анализа особенностей движения маятника можно использовать основное уравнение вращательного движения относительно оси, проходящей через точку подвеса O перпендикулярно к плоскости рисунка:

$$I\ddot{\phi} = M \tag{1}$$

где I — момент инерции маятника относительно оси вращения, M — суммарный момент всех сил, действующих на маятник. В пренебрежении силами трения M равен моменту силы тяжести, которая приложена к центру масс маятника:

$$M = -mga\sin\phi. \tag{2}$$

Здесь m — масса маятника, g – ускорение свободного падения, a — расстояние от точки подвеса O до положения центра масс C. Если в процессе колебаний угол $\phi(t)$ всегда мал, то $\sin\phi \approx \phi$ и можно приближённо записать

$$M \approx -mga\phi. \tag{3}$$

Тогда уравнение (1) с учётом (3) принимает вид

$$I\ddot{\phi} + mga\phi = 0. \tag{4}$$

Полученное уравнение есть уравнение гармонических колебаний. Пере- пишем его в стандартном виде:

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2\phi = 0, \tag{5}$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I}} \tag{6}$$

— циклическая частота колебаний маятника.
Решением (5) является функция вида

$$\phi(t) = Asin(\omega_0 + \alpha) \tag{7}$$

Амплитуда колебаний A (максимальный угол отклонения) и начальная фаза α определяются начальными условиями задачи. Период колебаний, легко измеряемый на практике, равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{mga}{I}} \tag{8}$$

Если размер тела намного меньше длины (невесомого) подвеса l, то такое тело можно считать точечной массой (материальной точкой), а маятник математическим. В этом случае $I = ml^2$ и $a = l$. Поэтому период колебаний математического маятника равен

$$T_{\text{мат}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{9}$$

Длину математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника, называют приведённой:

$$l_{\text{пр}} = \frac{I}{ma} \tag{10}$$

Точку, находящуюся на расстоянии $l_{\text{пр}}$ от точки подвеса вдоль линии, проходящей через центр масс (точка O' на рис. 1), называют центром качания. Если перевернуть физический маятник, подвесив его за центр качания, то приведённая длина, а значит, и период колебаний не изменятся, при этом старая точка подвеса O станет новым центром качания.

Экспериментальная установка. В данной работе в качестве физического маятника используется однородный стальной стержень длиной l На стержне закрепляется опорная призма, острое ребро которой является осью качания маятника. Призму можно перемещать вдоль стержня, меняя расстояние a от точки опоры (точки подвеса) маятника до его центра масс. Используя теорему Гюйгенса–Штейнера и считая стержень тонким (его радиус много меньше длины), вычислим его момент инерции:

$$I = \frac{ml^2}{12} + ma^2$$

Тогда, подставляя это выражение в формулы (8) и (10), получим основные характеристики используемого маятника — период его колебаний и приведённую длину:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + \frac{l^2}{12}}{ag}} \tag{11}$$

$$l_{\text{пр}} = a + \frac{l^2}{12a} \tag{12}$$

Величину a, входящую в (11), и положение точки подвеса можно изменять с помощью передвижной опорной призмы. Также можно сравнить приведённую длину маятника, вычисленную по формуле (12), с длиной математического маятника. В данной работе в качестве математического маятника используется свинцовый шарик, подвешенный на двух расходящихся нитях. Длину нитей можно изменять, наматывая их на ось (рис. 3).

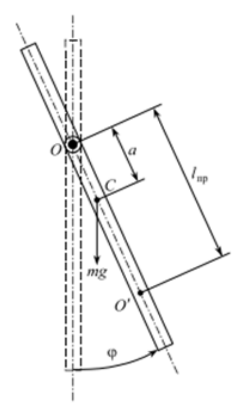


Рис. 2. Лабораторный вариант физического маятника

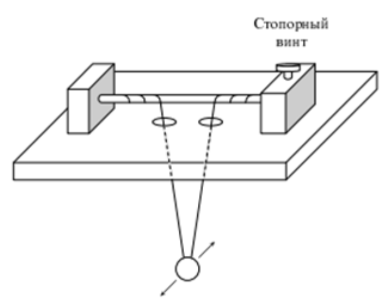


Рис. 3. Математический маятник.

Выполнение работы

Вычисление погрешностей

Таблица 1: измерения вермени 25 периодов физического маятника

i	1	2	3	4	5
t_i,с	38.48	39.04	38.85	38.89	38.80

$\sigma_{\text{отд}} = \sqrt{\frac{\Sigma(t_i - t_{cp})^2}{n-1}} \approx 0.2c$
$T_{\text{ср}} = 1.552 \pm 0.008$с

Таблица 2: измерения вермени 25 периодов математического маятника

i	1	2	3	4	5
t_i,с	29.90	30.36	30.13	30.00	30.27

$\sigma_{\text{отд}} = \sqrt{\frac{\Sigma(t_i - t_{cp})^2}{n-1}} \approx 0.19c$
$T_{\text{ср}} = 1.205 \pm 0.007$с

Проверка допустимости предположений

Для физического маятника время уменьшения амплитуды в 2 раза τ_2 = 247 с, откуда
$\tau_e = \frac{-1}{ln\frac{1}{2}}\tau_2 = 355c >> T$
$Q_{\text{физ}} = \pi\frac{\tau_e}{T}$ = 720
Проверим незначительность зависимости периода от амплитуды
$\alpha = 30°$ T = 1.600 ± 0.008 с
$\alpha = 15°$ T = 1.589 ± 0.008 с
$\alpha = 5°$ T = 1.596 ± 0.008 с

Для математического маятника время уменьшения амплитуды в 2 раза τ_2 = 291 с, откуда
$\tau_e = \frac{-1}{ln\frac{1}{2}}\tau_2 = 419c >> T$
$Q_{\text{мат}} = \pi\frac{\tau_e}{T}$ = 1094

Проверка обратимости

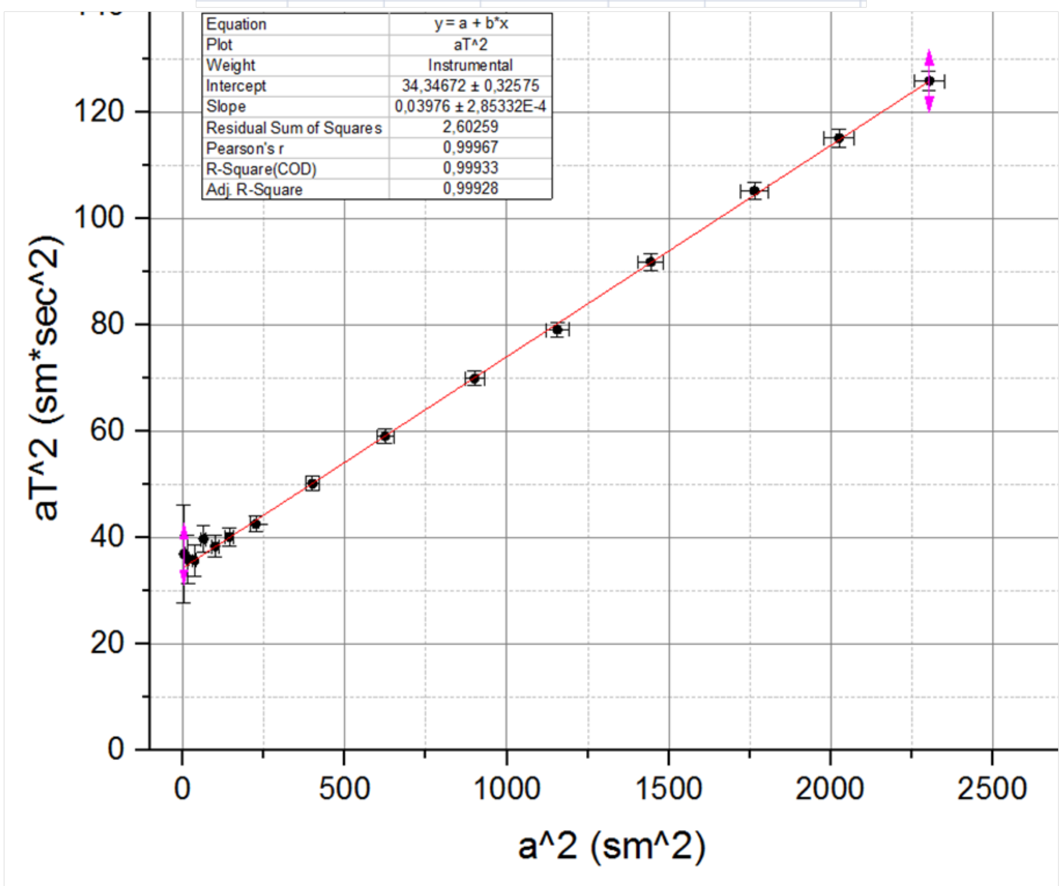
При положении, когда стержень подвешен на расстоянии 47 см (длинна маятника 1 м) от центра тяжести T = 1,612 ± 0.008 с, соответствующе подобранная длинна математического маятника $l_{\text{мат}}$ = 64,5 см. $T_{\text{мат}}$ = 1.614 ± 0.007 с. Получилось так, что найденная $l_{\text{мат}}$ точно совпала с теоретически рассчитанной по формуле (12) - $l_{\text{мат}}^{\text{теор}}$ = 64.5 см

$l_{обр} = l_{пр} - a = 17.5$см
$T_{обр} = 1.612 \pm 0.008$с
Как видим, в пределах погрешности обратимость подтверждена.

Зависимость периода колебаний T от расстояния a между точкой опоры и центром масс.
При измерении $\sigma_a = 0.5sm$, $\sigma_T = 0.008sec$.

результаты измерений

a, sm	T, c	a^2, sm^2	T^2a, sm*c^2	σ a^2,sm	σ(T^2a), sm*c^2
2	4,298	4	36,945608	2	9,24
4	3	16	36	4	4,50
6	2,442	36	35,780184	6	2,99
8	2,23	64	39,7832	8	2,50
10	1,96	100	38,416	10	1,95
12	1,83	144	40,1868	12	1,71
15	1,685	225	42,588375	15	1,48
20	1,584	400	50,18112	20	1,35
25	1,538	625	59,1361	25	1,33
30	1,527	900	69,95187	30	1,38
34	1,526	1156	79,174984	34	1,43
38	1,555	1444	91,88495	38	1,53
42	1,583	1764	105,247338	42	1,64
45	1,6	2025	115,2	45	1,72
48	1,62	2304	125,9712	48	1,81



Отсюда $T^2a = ka^2 + b$, где k = 3.97 ± 0.03 c^2/м, b = 34.3 ± 0.3см*c^2

Уравнение (11) перепишем в виде

$$T^2a = \frac{4\pi^2}{g}a^2 + \frac{4\pi^2}{g}\frac{l^2}{12}$$

Тогда g=$\frac{4\pi^2}{k}$=9.94 ± 0.08 м*с^2
l = $\sqrt{\frac{12b}{k}}$ = 1.01 ± 0.01 м
Как видим, с хорошей точностью, это совпадает с табличными значениями.