

Лабораторная работа 2.2.1

Исследование затухающих колебаний в колебательном контуре.

Жарков Андрей 495

27 ноября 2016 г.

Цель работы: изучение параметров и характеристик колебательного контура.

Приборы и оборудование: генератор звуковых сигналов, осциллограф, модуль с колебательным контуром ФПЭ–10, преобразователь импульсов ФПЭ–08, источник питания, магазин сопротивлений.

Введение

Если зарядить конденсатор C от батареи до некоторого напряжения U_0 , а затем замкнуть его на катушку индуктивности L , то конденсатор начнет разряжаться через катушку и в контуре (рис. 1) возникнут электромагнитные колебания. Рассмотрим, как происходят эти колебания в контуре с нулевым сопротивлением $R = 0$. При замыкании контура, в нем появляется ток I , создающий магнитное поле. Изменение магнитного потока приводит к возникновению в цепи электродвижущей силы самоиндукции, замедляющей скорость разрядки конденсатора. При уменьшении тока возникает электродвижущая сила, направленная в ту же сторону, что и вызвавший ее появление ток. Это приводит к тому, что после разряда конденсатора ток не прекращается сразу, а в течение некоторого времени продолжает течь в том же направлении и перезаряжает обкладки конденсатора. Затем процесс разряда начинается снова, но протекает в обратном направлении, в результате чего система возвращается в исходное состояние. Время

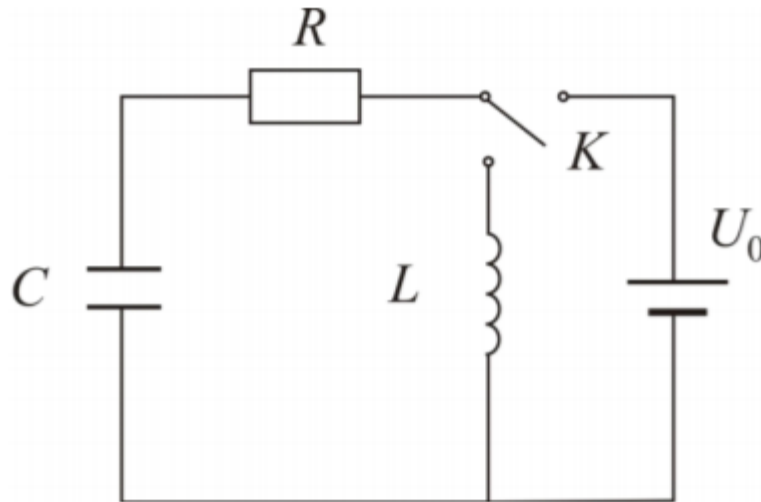


Рис. 1:

T , в течение которого конденсатор заряжается и разряжается, называется **периодом собственных колебаний**. В начальный момент, когда конденсатор полностью заряжен, в нем накоплена электрическая энергия: $W_E = CU_0^2/2$. Во время разряда конденсатора электрическая энергия превращается в энергию магнитного поля катушки и, когда конденсатор полностью разряжен, вся электрическая энергия переходит в магнитную: $W_M = LI_0^2/2$, где I_0 — максимальное значение тока в контуре.

Проводники контура всегда обладают электрическим сопротивлением, поэтому часть энергии в процессе колебаний расходуется на нагрев проводников. Вследствие этого амплитуда электромагнитных колебаний в контуре постепенно уменьшается и в нем происходят затухающие колебания. При достаточно большом сопротивлении или малой индуктивности колебания в нем вообще не возникают, а происходит так называемый **апериодический разряд конденсатора**.

Рассмотрим электрический контур, состоящий из последовательно соединенных конденсатора C , катушки индуктивности L и резистора R . Обозначим разность потенциалов на конденсаторе через U . Мы будем рассматривать колебания при относительно низких частотах, когда выполняется **условие квазистационарности**. Квазистационарность означает, что мгновенные значения

тока I практически одинаковы во всех проводниках, соединяющих элементы цепи, а изменения во времени происходят настолько медленно, что распространение электродинамических взаимодействий можно считать мгновенным. Такие взаимодействия распространяются со скоростью близкой к скорости света в вакууме c . Обозначим через l длину контура нашей цепи (практически эта длина совпадает с длиной провода, из которого изготовлена обмотка катушки самоиндукции). Время распространения электромагнитного возмущения на расстояние l равно $\tau_0 = l/c$. Условие квазистационарности будет выполнено, если это время значительно меньше периода T колебаний тока в контуре: $\tau_0 \ll T$, или частота колебаний $\nu_0 = 1/T \ll 1/\tau_0$. При $l \sim 1$ м условие квазистационарности хорошо выполняется при частотах $\nu_0 \ll 3 \cdot 10^8$ Гц. Выполнение условия квазистационарности позволяет при расчёте цепей переменного тока пользоваться законом Ома для замкнутой цепи и законом сохранения заряда, как и в случае расчёта цепей постоянного тока. Следствием этих законов являются правила Кирхгофа. Первое правило Кирхгофа: в каждой точке разветвления цепи алгебраическая сумма токов равна нулю. Второе правило: для любого замкнутого контура сумма падений напряжений на отдельных участках контура равна алгебраической сумме \mathcal{E} в этом контуре.

Запишем второе правило Кирхгофа для последовательного колебательного контура (рис. 1):

$$U + IR = -L \frac{dI}{dt}.$$

Используя связь заряда на конденсаторе с напряжением и током: $q = CU$ и $I = \frac{dq}{dt}$, получим дифференциальное уравнение, описывающее затухающие колебания:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU}{dt} + \frac{U}{LC} = 0. \quad (1)$$

Несложно показать, что такой же вид имеют дифференциальные уравнения для заряда q и тока I . Студентам предлагается убедиться в этом самостоятельно. Линейными дифференциальными уравнениями второго порядка вида (1) описывается обширный

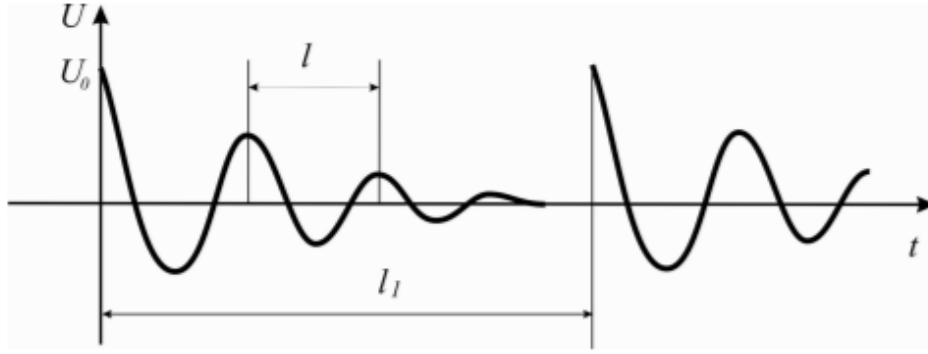


Рис. 2: Затухающие колебания

класс колебательных систем как электрических, так и механических. Вводя коэффициент затухания $\gamma = R/(2L)$ и собственную частоту $\omega_0^2 = 1/(LC)$, перепишем уравнение (1) в виде:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + 2\gamma \frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = 0. \quad (2)$$

Как известно, решение уравнения (2) имеет вид:

$$U = U_0 e^{-\gamma t} \cos \omega t, \quad (3)$$

где $\omega = 2\pi/T$ — циклическая частота свободных колебаний:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad (4)$$

Из формул (3) и (4) следует, что в контуре возможны колебания лишь в случае, когда $\omega_0 > \gamma$. В обратном случае $\omega_0 < \gamma$, когда частота и период — мнимые, колебаний нет и происходит апериодический разряд конденсатора. Режим, соответствующий условию $\omega_0 = \gamma$, называется критическим. Ему соответствует критическое сопротивление:

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

При $R > R_{\text{кр}}$ процесс имеет апериодический, при $R < R_{\text{кр}}$ — колебательный характер.

В случае, когда затухание мало, о затухающих колебаниях можно говорить, как о гармонических. В этом случае аргумент косинуса называют фазой, а коэффициент $U_0 e^{-\gamma t}$ — амплитудой колебаний. Величина γ определяет затухание колебаний: $\gamma = 1/\tau$, где τ — время, в течение которого амплитуда уменьшается в e раз. Заметим, что при $\gamma \neq 0$ напряжение не является строго периодической функцией времени, поскольку $U(t) \neq U(t + T)$. Говорить о периоде этой функции можно только в том смысле, что она принимает нулевые значения через равные промежутки времени. Зависимость напряжения от времени в режиме свободных затухающих колебаний представлена на рис. 2.

В колебательном режиме потери в контуре принято характеризовать добротностью и логарифмическим декрементом затухания. Назовем добротностью величину

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W_T},$$

где W — запасенная в контуре энергия, а ΔW_T — потери энергии за период. Из уравнения (3) найдём

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2} e^{-2\gamma t}$$

Потеря энергии за период равна

$$\Delta W_T = \frac{CU_0^2}{2} \left(e^{-2\gamma t} - e^{-2\gamma(t+T)} \right) = W (1 - e^{-2\gamma T})$$

Полагая $2\gamma T \ll 1$ (слабое затухание), найдём среднюю потерю энергии за время изменения фазы на один радиан:

$$\Delta W = \frac{1}{2\pi} \Delta W_T = \frac{\gamma T}{\pi} W.$$

Поэтому добротность

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W_T} = \frac{W}{\Delta W} = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (5)$$

При написании цепочки (5) были использованы выражения для собственной частоты $\omega_0^2 = 1/(LC)$ и коэффициента затухания $\gamma = R/(2L)$.

Средняя потеря энергии ΔW за время изменения фазы на один радиан в 2π раз меньше, чем ΔW_T . Таким образом, добротность контура Q показывает, во сколько раз запасённая в контуре энергия превосходит среднюю потерю энергии за время, в течение которого фаза колебаний изменяется на один радиан.

Введем логарифмический декремент затухания λ — логарифм отношения двух последовательных максимальных отклонений в одну сторону. Из (3) имеем

$$\lambda = \ln \frac{U_n}{U_{n+1}} = \ln e^{\gamma T} = \gamma T. \quad (6)$$

Можно определить физический смысл логарифмического декремента затухания — это величина, обратная числу периодов n_e , за которое амплитуда колебаний падает в e раз.

Сравнивая (5) и (6), найдем:

$$Q = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{\pi}{\lambda}.$$

В ряде случаев удобно изучать колебательный процесс в системе координат I и U , т.е. откладывая по оси абсцисс величину тока в контуре в заданный момент времени, а по оси ординат — напряжение на конденсаторе в тот же момент времени. Плоскость $U-I$ носит название плоскости состояний или фазовой плоскости, а кривая, изображающая зависимость напряжения от тока, называется фазовой кривой.

Найдем фазовую кривую для контура, сопротивление которого $R = 0$. В этом случае $\gamma = 0$ и из (3) следует

$$U = U_0 \cos \omega_0 t, \quad I = C \frac{dU}{dt} = -CU_0 \omega_0 \sin \omega_0 t. \quad (7)$$

Уравнения (7) описывают незатухающие колебания. Исключая из них время t , получим уравнение фазовой кривой:

$$\left(\frac{U}{U_0} \right)^2 + \left(\frac{I}{CU_0 \omega_0} \right)^2 = 1.$$

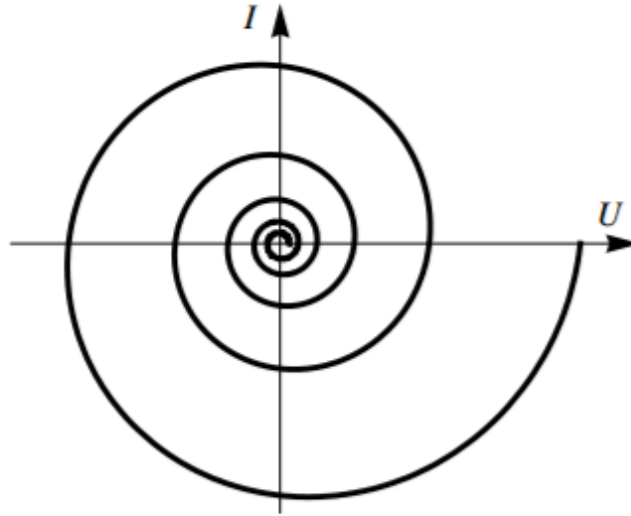


Рис. 3: Фазовая кривая осциллятора с затуханием

Это уравнение эллипса. Эллипс получается в результате сложения двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний (7), сдвинутых на четверть периода. В контуре, сопротивление которого $R > 0$, происходят затухающие колебания напряжения (3) и тока:

$$I = C \frac{dU}{dt} = -CU_0 e^{-\gamma t} (\gamma \cos \omega t + \omega \sin \omega t).$$

В этом случае амплитуды напряжения и тока в контуре непрерывно убывают и фазовая кривая получается незамкнутой (рис. 3).

Экспериментальная установка

Принципиальная схема установки изображена на рис. 4. В работе для получения колебаний в контуре используется модуль ФПЭ-10 с контуром, изображенным на рис. 5. Кроме модулей ФПЭ-10 и преобразователя импульсов ФПЭ-08 на рис. 4 отмечены магазин сопротивлений (МС), источник питания (ИП), звуковой генератор ЗГ-118 и осциллограф GOS-620.

Происходящие в контуре колебания (см. рис. 2) наблюдаются на экране осциллографа. Длительность одного импульса опреде-

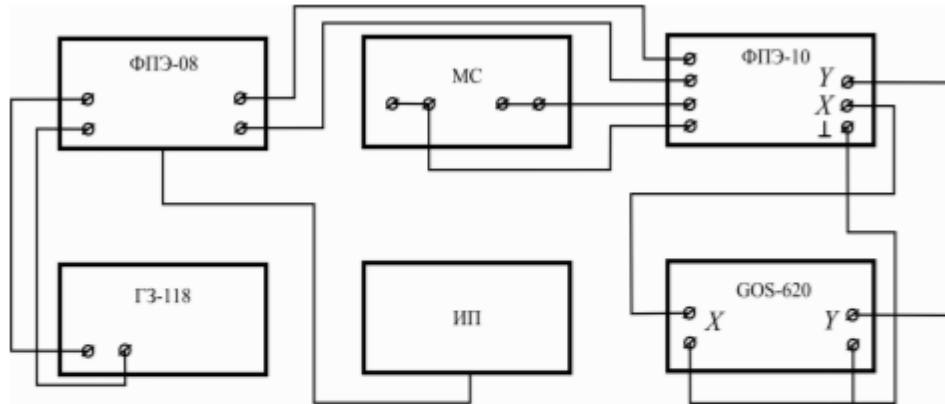


Рис. 4: Принципиальная схема экспериментальной установки

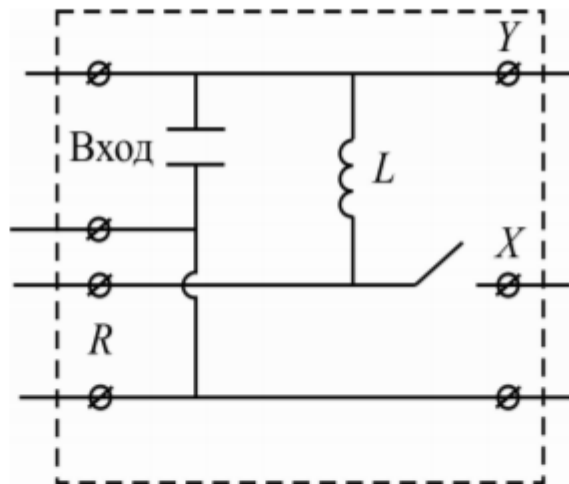


Рис. 5: Схематическое устройство модуля ФПЭ-10, обеспечивающего колебания в контуре

ляется временем $1/\nu$, где ν — частота, задаваемая звуковым генератором. На экране осциллографа ему соответствует отрезок l_1 . Это позволяет определить период T затухающих колебаний, которому на рис. 2 соответствует отрезок l . Очевидно, что $T = l / (l_1 \nu)$.

Выполнение работы.

Установим частоту звукового генератора $\nu = 250$ Гц.

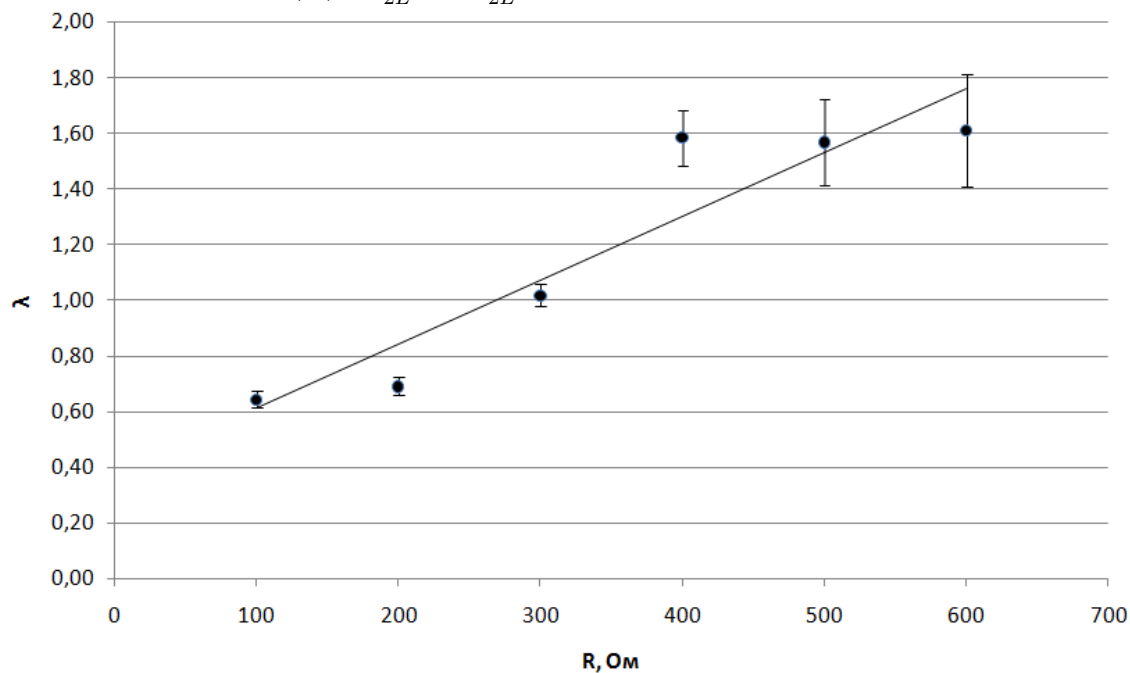
При различных сопротивлениях будем измерять расстояние l (соответствующее периоду затухающих колебаний) и расстояние между пиками l_1 (соответствующее частоте, задаваемой звуковым генератором). Также измерим амплитуду двух последовательно идущих колебаний и вычислим логарифмический декремент затухания $\lambda = \ln \frac{U_n}{U_{n+1}}$. После первых нескольких измерений, подтвердилось $\frac{U_n}{U_{n+1}} = \frac{U_k}{U_{k+1}}$, поэтому в таблице с измерениями указаны результаты только для двух последовательных измерений.

R, Ом	100	200	300	400	500	600
l, дел	6	6	6	6	6	6
l ₁ , дел	35	35	35	35	35	35
U _n , дел	10,5	10	18	19,5	12	10
U _{n+1} , дел	5,5	5	6,5	4	2,5	2
λ	0,65	0,69	1,02	1,58	1,57	1,61
ε _λ	0,05	0,05	0,04	0,06	0,10	0,13
γ, 10 ³	0,94	1,01	1,49	2,31	2,29	2,35

При измерениях, погрешность $\sigma = 0,25$ дел.

В таблице, коэффициент затухания γ рассчитывался как $\frac{\lambda}{T}$. Как видно из таблицы, при всех сопротивлениях период T получился один и тот же. $T = l/(l_1\nu) = 0,69 \pm 0,03$ мс

Построим график $\lambda(R) = \frac{T}{2L}R + \frac{R_k T}{2L}$:



Найденные $k = (2,8 \pm 0,4) * 10^{-3} \text{ Ом}^{-1}$, $b = 0,38 \pm 0,03$.

Откуда находим $L = \frac{T}{2k} = 123 \pm 18 \text{ мГн}$, $R_k = \frac{2Lb}{T} = 138 \pm 27 \text{ Ом}$.

Далее из $\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \gamma^2}$ получаем $C = \frac{T^2}{(\gamma^2 T^2 + 4\pi^2)L} \approx \frac{T^2}{4\pi^2 L} = 0,10 \pm 0,01 \text{ мкФ}$

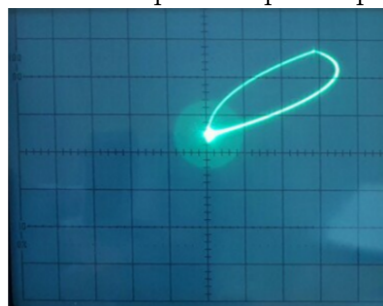
Найденные значения в пределах погрешности совпадают с реальными параметрами установки $L = 100 \pm 5 \text{ мГн}$, $C = 0,1 \text{ мкФ} (\pm 10\%)$.

Подберём сопротивление, при котором происходит аperiодический разряд конденсатора. $R_{\text{маг}} = 1990 \text{ Ом}$. Тогда $R = R_{\text{маг}} + R_k \approx 2120 \text{ Ом}$. Теоретическая оценка $R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = (2,2 \pm 3) * 10^3 \text{ Ом}$. В пределах погрешности совпадают.

Измерим амплитуду напряжений и токов, разделённых периодом времени (т. е. расстояния от центра фазовой кривой до точки пересечения витков спирали оси соответственно напряжения или тока).

R, Ом	100	200	300	400	500	600
U ₁ , дел	25	23	31	38	42	46
U ₂ , дел	6	5	6	6	5	4,5
U ₃ , дел	3,5	2	2	2	1,5	1
I ₁ , дел	30	18	34	46	21	23
I ₂ , дел	7	4	7	7	3	2
I ₃ , дел	4,0	1,5	2,0	2,5	1,0	0,5
λ _{U12}	1,43	1,53	1,64	1,85	2,13	2,32
ε _λ	0,04	0,05	0,04	0,04	0,05	0,06
λ _{U23}	0,54	0,92	1,10	1,10	1,20	1,50
ε _λ	0,07	0,13	0,13	0,13	0,17	0,25
λ _{I12}	1,43	1,53	1,64	1,85	2,13	2,32
ε _λ	0,03	0,06	0,04	0,03	0,10	0,11
λ _{I23}	0,76	1,01	1,05	1,10	1,20	1,50
ε _λ	0,06	0,17	0,13	0,10	0,25	0,50

Фазовая кривая при апериодическом разряде конденсатора:



Теперь рассчитаем добротность контура Q для максимального и минимального значения λ:

$$Q_{min} = \frac{\pi}{\lambda_{min}} = 5,8 \pm 0,3$$

$$Q_{min} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 5,5 \pm 0,6$$

$$Q_{max} = \frac{\pi}{\lambda_{max}} = 1,35 \pm 0,07$$

$$Q_{max} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 1,6 \pm 0,3$$

В пределах погрешности совпадают с теоретическими.