Лабораторная работа 1.2
Определение моментов инерции твердых тел с помощью трифилярного подвеса

Жарков Андрей 496

16 мая 2016 г.

Цель работы: измерение момента инерции ряда тел и сравнение результатов с расчетами по теоретическим формулам; проверка аддттивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса– Штейнера.

В работе используются: трифилярный подвес, секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить (диск, стержень, полый цилиндр и другие).

Определение. Моментом инерции твердого тела (или системы тел) относительно выбранной оси, называется величина, определяемая соотношением:

$$I = \int r^2 dm \tag{1}$$

Из определения момента инерции и по 2-му закону Ньютона для движения материальной точки под действием силы $\vec{F}$, учитывая $v = \omega r$, уравнение вращательного движения принимает вид:

$$I\frac{d\omega}{dt} = M \quad \text{где } M \text{ - момент силы } \vec{F} \tag{2}$$

Теорема Гюйгенса–Штейнера. Момент инерции I относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_0 относительно оси, параллельной ей и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния между осями a_0:

$$I = I_0 + ma_0^2 \tag{3}$$

Экспериментальная установка. Будем использовать устройство, показанное на рис. 1 и называемое трифилярным подвесом. Оно состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформы P и подвешенной к ней на трех симметрично расположенных нитях AA', BB' и CC' вращающейся платформы P'.

Платформа P укреплена на кронштейне и снабжена рычагом (на рисунке не показан), при помощи которого в системе создадим крутильные колебания путем небольшого поворота верхней платформы.

Для счета числа колебаний используется счетчик, состоящий из осветителя (2), фотоэлемента (3) и пересчетного устройства (1). Легкий лепесток, укрепленный на платформе, при колебаниях пересекает световой луч дважды за период. Соответствующие сигналы от фотоэлемента поступают на пересчетное устройство.

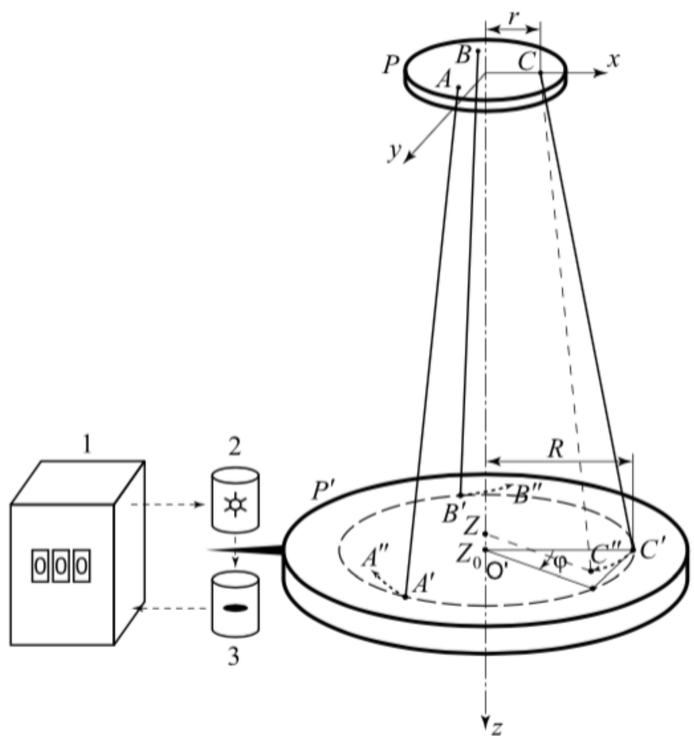


Рис. 1: трифилярный подвес

Уравнение гармонических колебаний. Уравнение малых колебаний трифилярного подвеса выглядит следующим образом:

$$I\ddot{\varphi} + mg\frac{Rr}{z_0}\varphi = 0 \tag{4}$$

где I — момент инерции тела вместе с платформой, m — их суммарная масса, z_0 — расстояние от центра нижней платформы O' до центра верхней O в положении равновесия, а R и r — расстояния от оси вращения до точки крепления нити на нижней и на верхней платформах соответственно (см. рис. 2).

Решение уравнения (4) представляет собой гармонические колебания:

$$\varphi(t) = \varphi_m \sin(2\pi t/T + \theta) \tag{5}$$

где амплитуда φ_m и фаза θ определяются начальными условиями, а

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}} \tag{6}$$

положим $k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0}$, эта величина постоянна для данной установки. Тогда момент инерции можно выразить следующим образом:

$$I = kmT^2 \tag{7}$$

Таким образом, полученные формулы позволяют определить момент инерции платформы с телом и отдельно платформы по соответствующим периодам крутильных колебаний.

Аддитивность моментов инерции. Момент инерции самого тела можно вычислить, воспользовавшись аддитивностью I_{A+B} — момент инерции составного тела (A+B) равен сумме моментов инерции его частей A и B :

$$I_{A+B} = I_A + I_B \tag{8}$$

Выполнение работы

1. **Параметры установки**

   $R = 114.6 \pm 0.5$ мм.
   $r = 30.5 \pm 0.3$ мм.
   $m = 353.4 \pm 0.3$ г.
   $z_0 = 215 \pm 1$ см.

   $\sigma_k = k\sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_r^2 + \varepsilon_{z_0}^2}$
   $k = (4.04 \pm 0.05) * 10^{-4}\text{м}^2/c^2$

   $I_0^{\text{теор}} = \frac{mR^2}{2} = (2.32 \pm 0.01) * 10^{-3}\text{м}^2 * \text{кг}$

2. **Погрешность измерения периода**

Таблица 1: измерения вермени 10 периодов пустой платформы

i	1	2	3	4	5	6
t_i,c	40.855	40.980	42.113	40.600	42.004	42.348

$\sigma_{\text{отд}} = \sqrt{\frac{\Sigma(t_i - t_{cp})^2}{n-1}} \approx 0.3957$
$T_{\text{ср}} = 4.14 \pm 0.02$ с
Подберём количество периодов, при котором $\varepsilon < 0.005$
$N = \frac{\sigma}{\varepsilon T_{\text{ср}}} = 10$

3. **Проверка аддитивности моментов инерции**

(a) **Кольцо**

T = 4.12 ± 0.02 с
m = 731.3 г
d = 16,7 см
$I_{\text{кольца}} = k(m + m_0)T^2 - I_0 = 5.31 \pm$ 0.07 м^2*г
$I_{\text{теор}} = \frac{md^2}{4} = 5.23 \pm 0.5$ м^2*г

(b) **Диск**

T = 3.44 ± 0.02 с
m = 583.8 г
d = 17.2 см
$I_{\text{диска}} = k(m + m_0)T^2 - I_0 = 2.25 \pm 0.04$ м^2*г
$I_{\text{теор}} = \frac{md^2}{8} = 2.16 \pm 0.02$ м^2*г

(c) **Кольцо+Диск**

T = 3.86 ± 0.02 с
$I_{\text{сумм}} = k(m_{\text{к}} + m_{\text{д}} + m_0)T^2 - I_0 = 7.6 \pm 0.1$ м^2*г
В пределах погрешности аддитивность моментов инерции выполняется.

(d) **Брусок**

T = 3.43 ± 0.02 с
m = 1191.9 г
2.6 * 2.6 * 21.1 см
$I_{\text{бруска}} = k(m + m_0)T^2 - I_0 = 4.63 \pm 0.07$ м^2*г
$I_{\text{теор}} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2) = 4.49 \pm 0.09$ м^2*г

В пределах погрешности эксперементальный и теоретический моменты инерции у тел совпали.

4. **Проверка теоремы Гюйгенса-Штейнера**

$m = 764.0$г
$d = 9.1$см
Расположив диск так, как показано на рис. 2 будем увеличивать h.

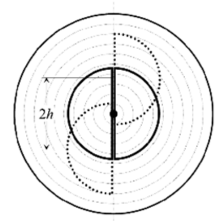
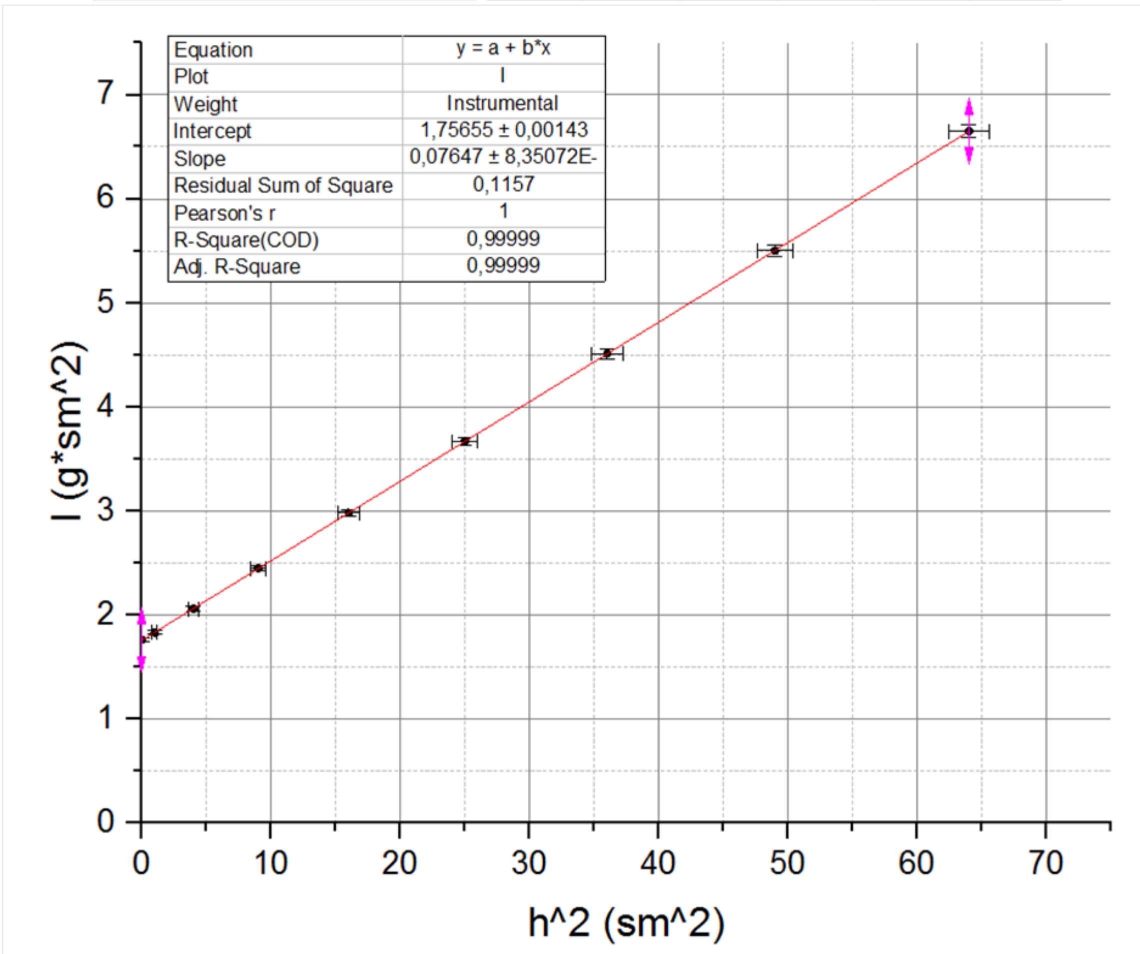


Рис. 2: расположение дисков на платформе.

h, см	T, сек	h^2, см^2	I, г*м^2	σ h^2,sm	σI, г*м^2
0	2,39	0	1,76	0	0,022949
1	2,39	1	1,83	0,2	0,0183
2	2,41	4	2,06	0,4	0,0206
3	2,48	9	2,45	0,6	0,0245
4	2,49	16	2,98	0,8	0,0298
5	2,51	25	3,67	1	0,0367
6	2,74	36	4,51	1,2	0,0451
7	2,86	49	5,5	1,4	0,055
8	3,01	64	6,65	1,6	0,06



Найденные на графике $I_0 = 1.7565 \pm 0.0014$ г*м^2 и коэффициент наклона $m = 0.7647 \pm 0.0008$кг.
$I_{\text{теор}} = \frac{md^2}{8} = 1.75 \pm 0.01$ г*м^2
Как видим, с учётом погрешности, m и I_0 совпадают с теоретическими значениями.