

Лабораторная работа 2.1

Определение C_p/C_v по скорости звука в газе.

Жарков Андрей 495

26 сентября 2016 г.

Теория

Цель работы: 1) измерение частоты колебаний и длины волны при резонансе звуковых колебаний в газе, заполняющем трубу; 2) определение показателя адиабаты по скорости звука с помощью уравнения состояния идеального газа.

В работе используются: звуковой генератор (ЗГ); электронный осциллограф (ЭО); микрофон; телефон; раздвижная труба; теплоизолированная труба, обогреваемая водой из термостата; баллон со сжатым углекислым газом; газгольдер.

Звуковые волны. При распространении звука в газе атомы и молекулы колеблются вдоль направления распространения звуковой волны. Это приводит к локальным изменениям плотности ρ газа и его давления P , поэтому звуковые волны иногда называют волнами плотности или волнами давления. В простых гармонических звуковых волнах, распространяющихся вдоль оси Ox , изменение давления ΔP зависит от координаты x и времени t по закону

$$\Delta P(x, t) = P_0 \cos(\omega t \pm kx)$$

Два знака в аргументе косинуса соответствуют двум направлениям распространения волны. Между круговой частотой ω , волновым числом k , длиной волны λ и скоростью звука $v_{\text{зв}}$ выполняются соотношения

$$v_{\text{зв}} = \frac{\omega}{k} = \lambda f; k = \frac{2\pi}{\lambda}; \omega = 2\pi f \quad (1)$$

здесь f — частота волны.

Важной характеристикой звуковых волн является скорость их распространения. Она определяется инерционными и упругими свойствами среды. Скорость распространения продольных волн в безграничной однородной среде определяется выражением:

$$v_{\text{зв}} = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} \quad (2)$$

Давление P зависит не только от плотности ρ , но и от температуры T . Поэтому нужно уточнить, в каком смысле понимается производная $dP/d\rho$. Колебания плотности и связанные с ними колебания температуры в звуковой волне происходят настолько быстро, а теплопроводности газов настолько малы, что для таких процессов теплообменом можно пренебречь, так что

процесс распространения звука можно считать адиабатическим. Следовательно, производную $dP/d\rho$ необходимо рассчитывать для адиабатического процесса.

Первое начало термодинамики. Из закона сохранения энергии следует, что тепло Q , полученное термодинамической системой, расходуется на изменение её внутренней энергии ΔU и на совершение работы A над внешними телами:

$$Q = \Delta U + A \quad (3)$$

Данная формула является математической формулировкой первого начала термодинамики. Из неё следует термодинамическое определение внутренней энергии и принципиальный способ её измерения: изменение внутренней энергии равно работе, совершённой внешними силами при отсутствии подвода тепла, то есть при адиабатическом процессе. Эта энергия состоит из кинетической энергии теплового движения молекул и потенциальной энергии межмолекулярных и внутримолекулярных взаимодействий.

Для бесконечно малого процесса уравнение (3) принимает вид

$$\delta Q = dU + \delta A \quad (4)$$

Работа газа. Рассмотрим расширение газа в цилиндре, закрытом подвижным поршнем. На поршень действует сила F , равная произведению давления газа P на площадь поршня S . При смещении на малую величину dx газ совершает работу $\delta A = F dx = PS dx = PdV$, где $dV = S dx$ — малое изменение объёма газа.

Таким образом, бесконечно малая работа газа при увеличении объёма системы на dV равна

$$\delta A = PdV \quad (5)$$

Полная работа в некотором процессе:

$$\int P(V)dV$$

Согласно уравнению состояния давление газа зависит не только от его объёма, но и от температуры. Для вычисления работы при интегрировании выражения должно быть известно, как изменяется температура при изменении объёма, то есть нужно знать весь процесс, при котором производится работа, а не только начальное и конечное состояния системы.

Первое начало термодинамики для газов после использования формулы (5) будет иметь вид

$$\delta Q = dU + PdV \quad (6)$$

Теплоёмкость. Отношение количества тепла δQ , поглощённого ν молями газа при некотором процессе, который обозначим индексом « x », к повышению его температуры на dT , делённое на число молей ν , называется молярной теплоёмкостью газа:

$$C = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_x / \nu \quad (7)$$

Важно также отметить, что теплоёмкость существенно зависит от процесса, при котором происходит подвод тепла, так как часть тепла может затрачиваться на совершение работы. Эта работа может оказаться столь велика, что теплоёмкость станет отрицательной, то есть температура тела будет падать, несмотря на то, что тепло подводится.

Считая внутреннюю энергию функцией температуры и объёма $U = U(T, V)$, подставим выражение для её дифференциала:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV$$

в первое начало термодинамики:

$$\delta Q = dU + PdV = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV + PdV = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left[P + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right] dV$$

Разделив это соотношение на dT , найдём теплоёмкость C_x в процессе « x »:

$$C_x = C_v + \left[P + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_x \quad (8)$$

Здесь производная $(\partial V / \partial T)_x$ вычисляется с учётом процесса « x », при котором происходит подвод тепла, например, при постоянном объёме ($x = V$), при постоянном давлении ($x = P$) или другом условии. Величина $C_v = (\partial U / \partial T)_V$ в формуле (8) является теплоёмкостью при постоянном объёме.

Для решения конкретных задач и определения теплоёмкости по формуле (8) должно быть известно уравнение состояния конкретной термодинамической системы, то есть зависимость $P = P(T, V)$, а также зависимость внутренней энергии от температуры и объёма $U = U(T, V)$.

Теплоёмкость идеального газа. В модели идеального газа внутренняя энергия определяется только кинетической энергией движения молекул и не зависит от расстояния между ними (потенциальная энергия взаимодействия не учитывается), следовательно, внутренняя энергия идеального газа не зависит от объёма:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = 0.$$

Для такого газа формула (8) становится более простой:

$$C_x = C_v + P \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_x. \quad (9)$$

Отсюда можно получить, что для газа, подчиняющегося уравнению Менделеева—Клапейрона ($PV = \nu RT$), связь молярных теплоёмкостей при постоянном объёме C_v и постоянном давлении C_p имеет вид (формула Майера):

$$C_p - C_v = R. \quad (10)$$

Отметим, что отношение этих теплоёмкостей часто используется в различных приложениях и называется показателем адиабаты:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}. \quad (11)$$

В общем случае величина C_v зависит от температуры, однако в не слишком широком диапазоне температур её можно считать постоянной, что соответствует пропорциональности внутренней энергии газа его температуре:

$$U = \nu \int C_v dT = \nu C_v T. \quad (12)$$

Энергия, переданная молекуле, распределяется между различными формами её движения: поступательным, вращательным и колебательным. В статистической физике доказывается теорема о равномерном распределении энергии между степенями свободы молекулы¹, согласно которой на каждую степень свободы приходится в среднем энергия, равная $kT/2$, где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана. Этот закон справедлив при использовании классической (не квантовой) механики.

При i степенях свободы энергия одной частицы равна $ikT/2$, а внутренняя энергия U одного моля такого газа и величина C_v равны соответственно

$$U = \frac{i}{2} k N_A T = \frac{i}{2} RT; \quad C_v = \frac{i}{2} R,$$

¹Число степеней свободы — количество независимых координат, определяющих положение тела в пространстве.

где $R = 8,31$ Дж/(моль \cdot К) — универсальная газовая постоянная, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$ — количество молекул в моле вещества (число Авогадро).

В рассматриваемом приближении для показателя адиабаты в соответствии с (10) и (11) получим

$$\gamma = \frac{i + 2}{i}.$$

Для одноатомных газов, имеющих три поступательные степени свободы (соответствующие трём координатам частицы x , y , z), $i = 3$, и величина $\gamma = 5/3 = 1,666$. Экспериментальные значения для гелия $\gamma = 1,66$ и для неона $\gamma = 1,64$ близки к теоретическим.

Для двухатомных газов, у которых к трём поступательным степеням свободы обычно при комнатной температуре добавляются ещё две вращательные степени (соответствующие двум углам поворота линейной молекулы), величина $i = 5$ и соответственно $\gamma = 1,40$. Опытные данные для водорода $\gamma = 1,41$, для азота $\gamma = 1,404$, для кислорода $\gamma = 1,401$ также близки к теоретической величине $\gamma = 7/5 = 1,40$.

Хорошее соответствие получается и для многоатомных газов, у которых имеется три поступательные и три вращательные степени свободы вокруг трёх осей, поэтому $i = 6$ (колебательные степени свободы при комнатной температуре обычно ещё не возбуждены). При комнатной температуре у паров воды H_2O $\gamma = 1,330$, у метана CH_4 $\gamma = 1,320$. В этих случаях теоретическое значение $\gamma = 4/3 = 1,333$.

Отметим, что классическая теория теплоёмкости не всегда подтверждается экспериментом. Теплоёмкость зависит от температуры при рассмотрении большого диапазона её изменения, к этому приводят квантовые закономерности. Энергия, согласно квантовой механике, может передаваться только некоторыми порциями (квантами). Следовательно, при значительном снижении температуры энергии теплового движения может не хватать для возбуждения некоторых видов движения. Например, у водорода при температуре ниже примерно 100 К теплоёмкость соответствует всего трём степеням свободы, поскольку не возбуждаются вращательные степени свободы.

Кроме поступательных и вращательных степеней свободы, у молекул существуют ещё и колебательные, но в газах они обычно возбуждаются при температурах значительно выше комнатной. Начинаясь при высоких температурах распад молекул на атомы (диссоциация) приводит к тому, что у многих газов колебательные степени свободы не успевают возбудиться настолько, чтобы к ним можно было бы применить закон равнораспределения энергии по степеням свободы.¹

Типичным исключением из этого правила является углекислый газ CO_2 . CO_2 — линейная молекула и согласно изложенной теории должна вести себя как двухатомная. Однако у этой молекулы легко возбуждаются изгибные колебания, и при комнатной температуре экспериментальное значение $\gamma \approx 1,30$, а при 100°C — $\gamma \approx 1,28$.

Адиабатический процесс. *Квазистатический* процесс, происходящий без теплообмена с окружающей средой, называется **адиабатическим**. Получим уравнение такого процесса для идеального газа, внутренняя энергия которого U не зависит от объёма.

Из первого начала термодинамики (6) при $\delta Q = 0$ для ν молей идеального газа, у которого $dU = \nu C_v dT$, получим

$$\nu C_v dT + P dV = 0.$$

Исключим отсюда давление P с помощью уравнения состояния $PV = \nu RT$:

$$C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} = 0.$$

При постоянной величине C_v , что соответствует классической теории теплоёмкости, уравнение легко интегрируется:

$$TV^{R/C_v} = TV^{\gamma-1} = \text{const.} \quad (13)$$

Это уравнение адиабатического процесса в переменных T, V . Преобразуем его к переменным P, V . Снова используя $PV = \nu RT$, а

¹ Полностью возбуждённая колебательная степень свободы давала бы вклад в энергию kT , то есть в два раза больше, чем обычная степень свободы, поскольку при гармонических колебаниях помимо кинетической энергии имеется также потенциальная, равная в среднем кинетической.

также соотношение Майера (10), получим уравнение, которое называется также адиабатой Пуассона:

$$PV^\gamma = \text{const.} \quad (14)$$

Здесь $\gamma = C_p/C_v$ — показатель адиабаты (11), играющий важную роль при описании адиабатических процессов. Примером такого процесса может служить распространение звука. Показатель адиабаты входит в уравнение Бернулли для сжимаемого газа и влияет, в частности, на то, каким (дозвуковым или сверхзвуковым) будет движение газа.

Скорость звука. Распространение звуковой волны в газе происходит адиабатически. Сжатия и разрежения в газе сменяют друг друга настолько быстро, что теплообмен между слоями газа, имеющими разные температуры, не успевает произойти. Используя полученное уравнение адиабаты идеального газа, найдём скорость звука по общей формуле (2).

Заменим в уравнении Пуассона $PV^\gamma = \text{const}$ объём на плотность $\rho = m/V$, после чего получим $P = \text{const} \cdot \rho^\gamma$. Тогда после логарифмирования и дифференцирования этого выражения имеем

$$\frac{dP}{P} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}, \quad \text{или} \quad \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_{\text{адиаб}} = \gamma \frac{P}{\rho},$$

откуда для скорости звука получаем

$$v_{\text{зв}}^2 = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_{\text{адиаб}} = \gamma \frac{P}{\rho} = \gamma \frac{RT}{\mu},$$

или

$$v_{\text{зв}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}, \quad (15)$$

где μ — молярная масса газа. Преобразуя эту формулу, найдём

$$\gamma = \frac{\mu}{RT} v_{\text{зв}}^2. \quad (16)$$

Таким образом, для определения показателя адиабаты достаточно измерить температуру газа и скорость распространения звука (молярная масса газа предполагается известной).

Идея эксперимента. Звуковая волна, распространяющаяся вдоль трубы, испытывает многократные отражения от торцов. Звуковые колебания в трубе являются наложением всех отражённых волн и, вообще говоря, очень сложны. Картина упрощается, если длина трубы L равна целому числу полуволн, то есть когда выполняется условие

$$L = n \frac{\lambda}{2}, \quad (17)$$

где λ — длина волны звука в трубе, а n — любое целое число. Если условие выполнено, то волна, отражённая от торца трубы, вернувшись к её началу и вновь отражённая, совпадает по фазе с падающей. Совпадающие по фазе волны, бегущие в противоположных направлениях, складываясь, усиливают друг друга, и образуется стоячая звуковая волна:

$$\Delta P(x, t) = 2P_0 \cos(\omega t) \sin(kx).$$

Амплитуда звуковых колебаний при этом резко возрастает — наступает резонанс.

При звуковых колебаниях слои газа, прилегающие к торцам трубы, не испытывают смещения (*узел смещения*). Узлы смещения повторяются по всей длине трубы через $\lambda/2$. Между узлами находятся максимумы смещения (*пучности*). Скорость звука $v_{\text{зв}}$ связана с его частотой f и длиной волны λ соотношением (1).

Подбор условий, при которых возникает резонанс, можно производить двояко:

1. При неизменной частоте f звукового генератора (а следовательно, и неизменной длине звуковой волны λ) можно изменять длину трубы L . Для этого применяется раздвижная труба. Длина раздвижной трубы постепенно увеличивается, и наблюдается ряд последовательных резонансов. Возникновение резонанса легко наблюдать на осциллографе по резкому увеличению амплитуды колебаний. Для последовательных резонансов имеем

$$L_n = n \frac{\lambda}{2}, \quad L_{n+1} = (n+1) \frac{\lambda}{2}, \quad \dots, \quad L_{n+k} = n \frac{\lambda}{2} + k \frac{\lambda}{2},$$

т. е. $\lambda/2$ равно угловому коэффициенту графика, изображающего зависимость длины трубы L от номера резонанса k . Скорость звука находится по формуле (1).

2. При постоянной длине трубы можно изменять частоту звуковых колебаний. В этом случае следует плавно изменять частоту f звукового генератора, а следовательно, и длину звуковой волны λ . Для последовательных резонансов получим

$$L = \frac{\lambda_1}{2}n = \frac{\lambda_2}{2}(n+1) = \dots = \frac{\lambda_{k+1}}{2}(n+k). \quad (18)$$

Из (1) и (18) имеем

$$f_1 = \frac{v_{зв}}{\lambda_1} = \frac{v_{зв}}{2L}n, \quad f_2 = \frac{v_{зв}}{\lambda_2} = \frac{v_{зв}}{2L}(n+1) = f_1 + \frac{v_{зв}}{2L}, \dots, \\ f_{k+1} = \frac{v_{зв}}{\lambda_{k+1}} = \frac{v_{зв}}{2L}(n+k) = f_1 + \frac{v_{зв}}{2L}k. \quad (19)$$

Скорость звука, деленная на $2L$, определяется, таким образом, по угловому коэффициенту графика зависимости частоты от номера резонанса.

Соответственно двум методам измерения скорости звука в работе имеются две установки. В обеих установках звуковые колебания в трубе возбуждаются телефоном Т и улавливаются микрофоном М. Мембрана телефона приводится в движение переменным током звуковой частоты; в качестве источника переменной ЭДС используется звуковой генератор ЗГ (генератор электрических колебаний звуковой и ультразвуковой частоты). Возникающий в микрофоне сигнал наблюдается на осциллографе ЭО.

Микрофон и телефон присоединены к установке через тонкие резиновые трубки. Такая связь достаточна для возбуждения и обнаружения звуковых колебаний в трубе и в то же время мало возмущает эти колебания: при расчётах оба торца трубы можно считать неподвижными, а влиянием соединительных отверстий пренебречь.

Первая установка (рис. 1) содержит раздвижную трубу с миллиметровой шкалой. Через патрубок (на рисунке не показан) труба может наполняться воздухом или углекислым газом из газгольдера. На этой установке производятся измерения γ для воздуха и

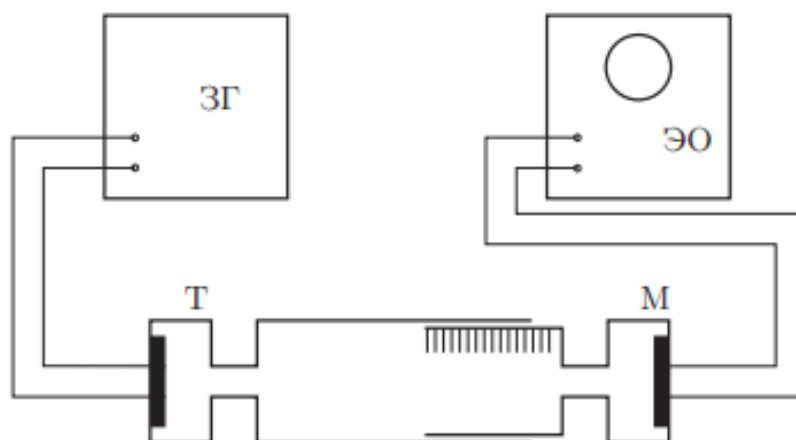


Рис. 1. Установка для измерения скорости звука при помощи раздвижной трубы

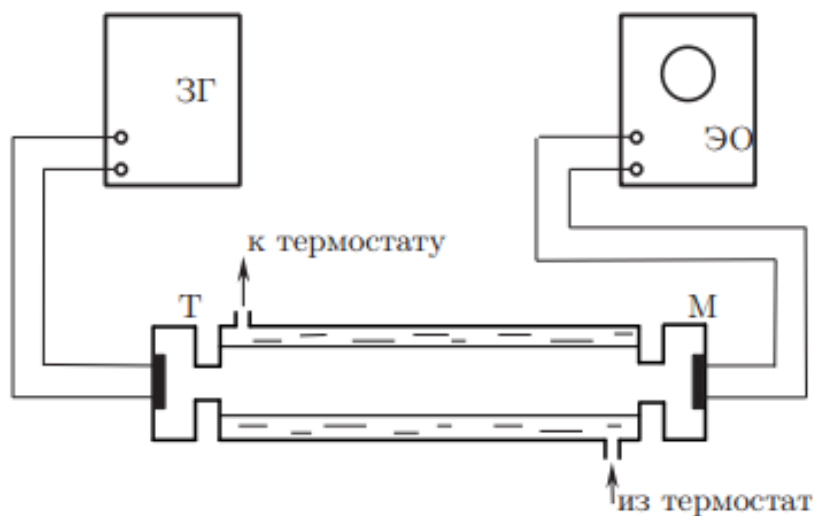


Рис. 2. Установка для изучения зависимости скорости звука от температуры

для CO_2 . Вторая установка (рис. 2) содержит теплоизолированную трубу постоянной длины. Воздух в трубе нагревается водой из термостата. Температура газа принимается равной температуре воды, омывающей трубу. На этой установке измеряется зависимость скорости звука от температуры.

Выполнение работы

Измерения при постоянной частоте

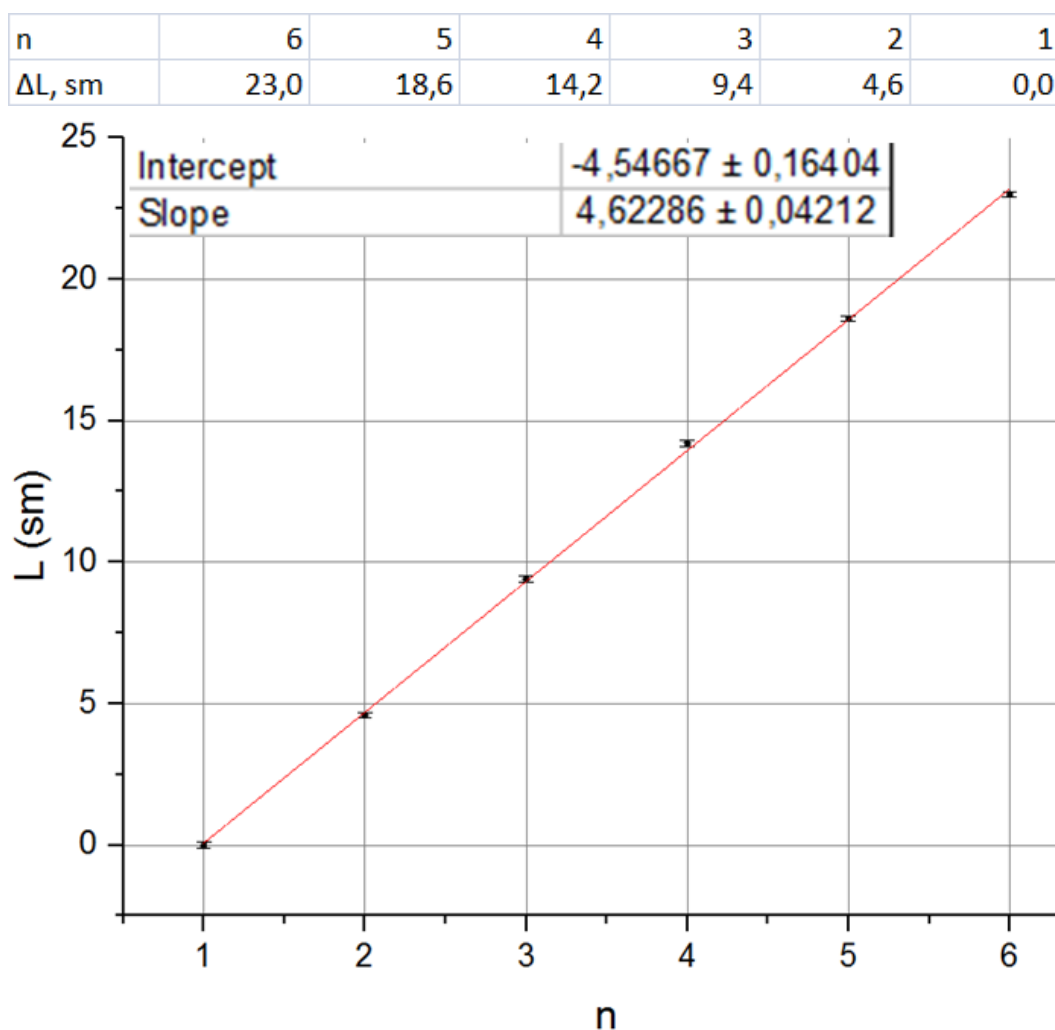
Параметры установки: $L_0 = 70,0 \pm 0,5 \text{ см}$, $\Delta L_{\max} = 23,0 \text{ см}$

Чтобы получить 6 точек на графике рассчитаем частоту через $\Delta L_{\max} = k \frac{\lambda}{2}$

Откуда находим рабочую частоту $f \approx \frac{kv_{\text{зв}}}{2\Delta L_{\max}} \approx 3700 \text{ Гц}$

Установленная рабочая частота $f = 3698 \text{ Гц}$

Далее из выдвигаем на полную нашу трубу и медленно сдвигаем, ловя резонансы. Вот что получилось:



Найденный коэффициент наклона графика $k = \frac{\lambda}{2} = (4,62 \pm 0,04) * 10^{-2}$

Теперь можно найти $v_{\text{зв}} = \lambda f = 2kf = 342 \pm 3 \text{ м/с}$

Что в пределах погрешности совпадает с теоретическим значением (при 293 К) $v_{\text{зв}} = 343,1 \text{ м/с}$

Измерения при постоянной длине трубы

Параметры установки: $L = 80,0$ см - длина трубы

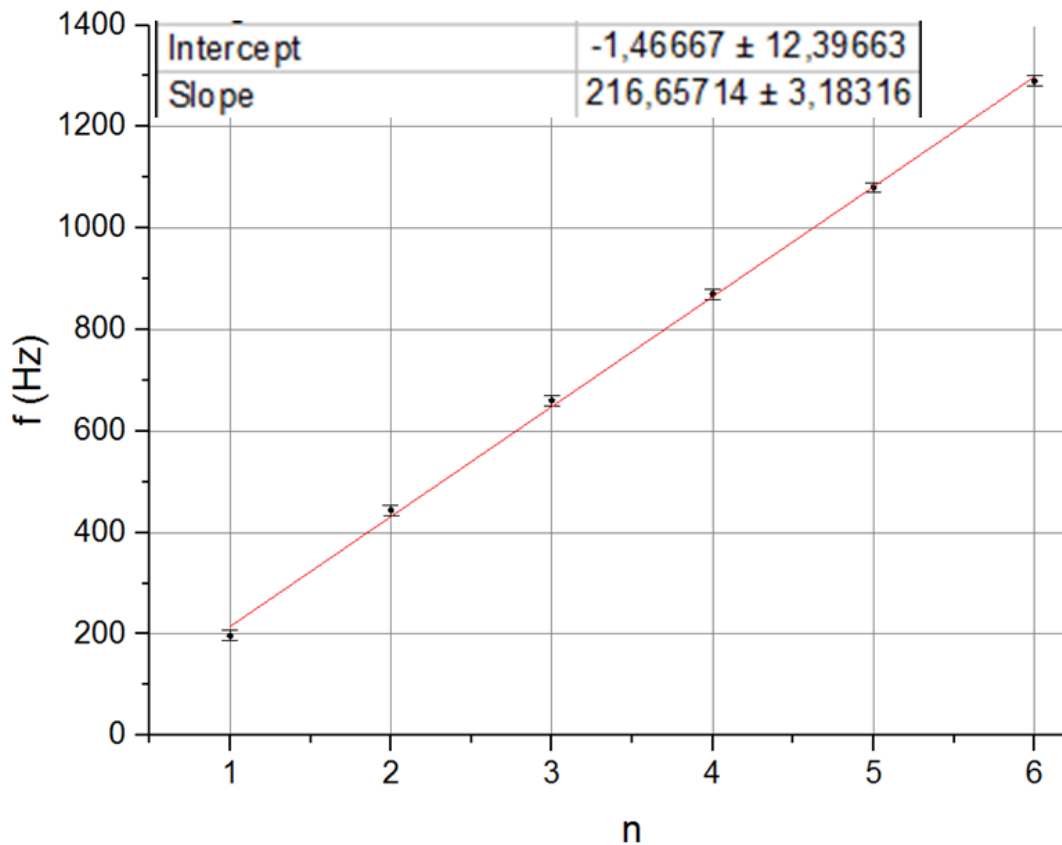
Оценим первую резонансную частоту: $f_1 = \frac{v_{зв}}{2L} \approx 206$ Гц Где-то в этом диапазоне и будем её искать, следующие резонансные частоты будем искать примерно кратно первой найденной.

Погрешность измерения каждой отдельной частоты считаем $\sigma_{f_i} = 10$ Гц

При разных значениях температуры измерены следующие данные:

T, K	n	1	2	3	4	5	6
293,3	f_n	197	444	660	870	1080	1290
303,5	f_n	202	450	670	880	1104	1312
313,6	f_n	204	462	676	892	1116	1337

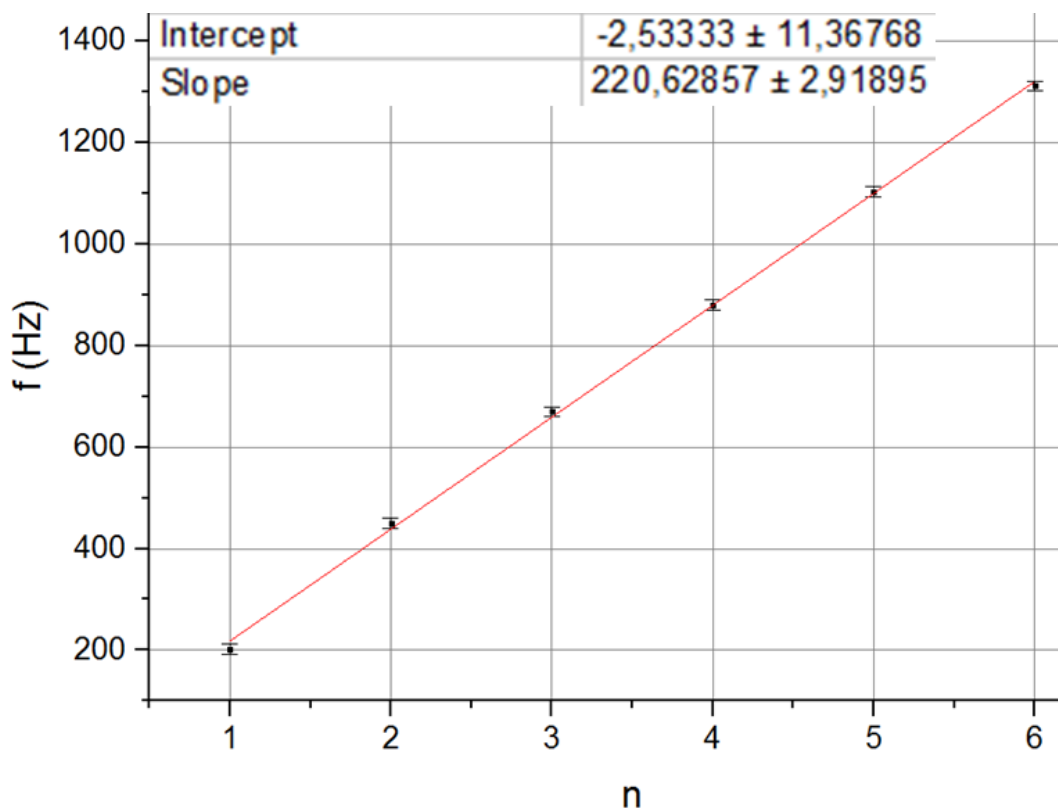
1. T=293,3K



Найденный коэффициент наклона $k = v_{зв}/2L = 216 \pm 3$ Находим $v_{зв} = 2kL = 345 \pm 5$ м/с
Теоретическое значение при данной температуре $v_{теор} = 343,1$

По формуле (16) найдём γ ($\mu = 29$ г/моль, $R = 8,31$): $\gamma = \frac{\mu}{RT} v_{зв}^2 = 1.41 \pm 0.02$, $\gamma_{теор} = \frac{i+2}{i} = 1.4$

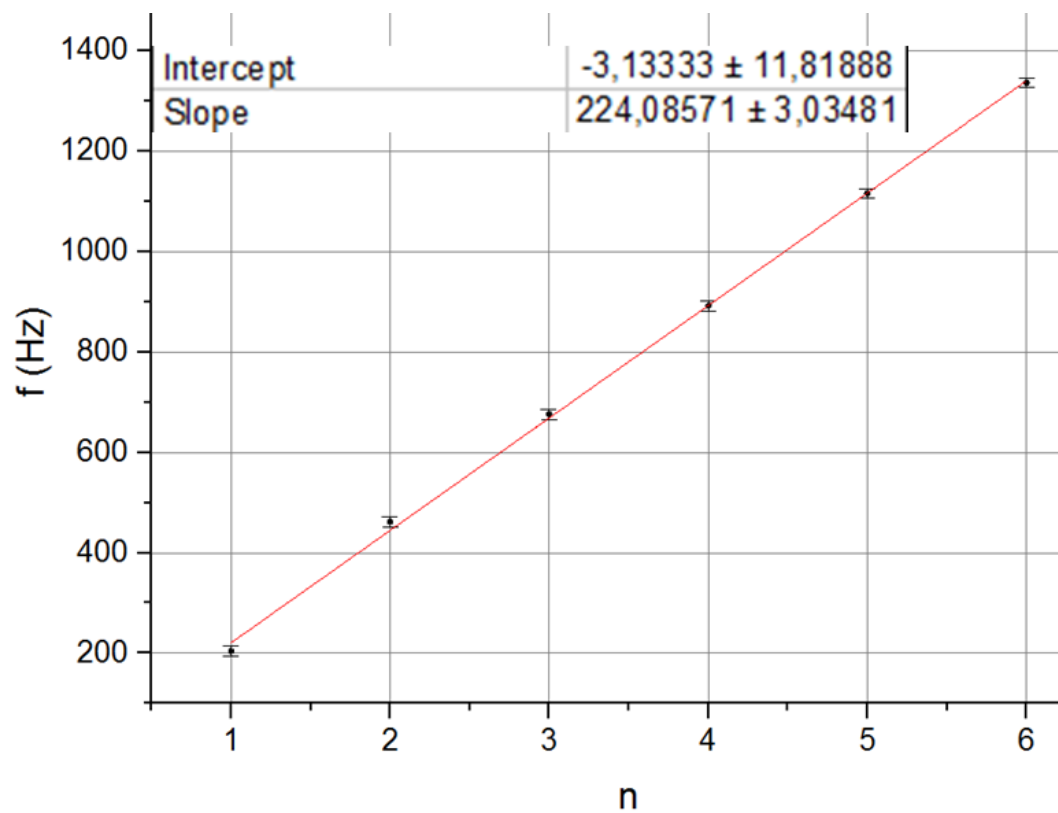
2. T=303,5K



Найденный коэффициент наклона $k = v_{\text{зв}}/2L = 221 \pm 3$ Находим $v_{\text{зв}} = 2kL = 354 \pm 5 \text{ м/с}$
 Теоретическое значение при данной температуре $v_{\text{теор}} = 348,9$

По формуле (16) найдём γ ($\mu = 29 \text{ г/моль}$, $R = 8,31$): $\gamma = \frac{\mu}{RT} v_{\text{зв}}^2 = 1.43 \pm 0.02$, $\gamma_{\text{теор}} = \frac{i+2}{i} = 1.4$

3. $T=316,6\text{K}$



Найденный коэффициент наклона $k = v_{\text{зв}}/2L = 224 \pm 3$ Находим $v_{\text{зв}} = 2kL = 358 \pm 5 \text{ м/с}$ Теоретическое значение при данной температуре $v_{\text{теор}} = 354,2$
 По формуле (16) найдём γ ($\mu = 29 \text{ г/моль}$, $R = 8,31$): $\gamma = \frac{\mu}{RT} v_{\text{зв}}^2 = 1.41 \pm 0.02$, $\gamma_{\text{теор}} = \frac{i+2}{i} = 1.41$

Как видим, во всех 3х сериях в пределах погрешности можно принять что найденные значения скоростей звука совпадают с теоретическими.

То же можно сказать и про найденные значения γ