VIII. MATRIKS

Konsep yang di pakai:

1. Kesamaan Matriks:

Misalkan A dan B dua buah matriks yang berordo sama,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{dan } B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

A = B, jika dan hanya jika a=p, b=q, c=r, dan d=s

2. Transpose Matriks:

Jika A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ maka transpose matriks A adalah :

 $A^T = A^t = A^1 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ (elemen baris jadi elemen kolom dan

sebaliknya)

- Penjumlahan dan Pengurangan Matriks
 Penjumlahan dan pengurangan matriks dapat dilakukan jika :
 - Ordo matirks matriksnya sama
 - Cara menjumlah atau mengurangkan adalah " dengan menjumlah atau mengurangkan elemen-elemen yang seletak "
- 4. Determinan Matriks ordo 2 x 2 :

Misalkan diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, determinan

matrik A ditulis dengan:

$$\det (A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c$$

- Apabila sebuah matriks nilai determinannya = 0, maka disebut matriks singular dan akibatnya matriks tersebut tidak memiliki invers matriks.
- Dan jika determinanya ≠ 0, maka disebut matriks nonsingular, dan matirks tersebut memiliki invers matriks.
- Jika C = A . B, maka det (C) = det (A) . det (B)
- Jika C = kA, maka det (C) = k². det (A), dg k konstanta
- 5. Misalkan matriks A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dan det (A) \neq 0, invers

matriks A dirumuskan dengan:

$$A^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Elemen a dan d di tukar, elemen b dan c berubah tanda 6. Perkalian Matirks (dot product):

Misalkan A dan B dua buah matriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{dan } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

Perkalian matriks A dan B dirumuskan dengan:

$$A \bullet B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix}$$

Apabila matriks A berordo m x n dan matriks B berordo n x p, maka hasil perkalian matriks A.B berordo m x p $A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$

- 7. Persamaan Matriks:
 - (i). AX = B, maka $X = A^{-1}$. B (jika A di kirinya X, maka munculnya A^{-1} dikirinya B)
 - (ii). XA = B, maka X = B. A^{-1} (jika A dikananya X, maka munculnya A^{-1} dikanannya B

Contoh Soal:

1. Diketahui perkaliann matriks $\begin{pmatrix} 2 & x \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 8 & x \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$
.

Nilai $x - y = \dots$

- a. -4
- d. 6
- b. 0
- e. 8
- c. 4

Penyelesaian:

$$\begin{pmatrix} 2 & x \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & x \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2y + 2x & 0 + x \\ -y + 4 & 0 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & x \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

dan
$$2y + 2x = 6$$

 $\Leftrightarrow -y = 6 - 4$
 $\Leftrightarrow -y = 2$
dan $2y + 2x = 6$
 $\Leftrightarrow y + x = 4$
 $\Leftrightarrow -2 + x = 4$

Maka nilai x - y = 6 - (-2) = 8 (jawaban E)

matriks C = AB, maka determinan C =

- a. -12
- b. -11
- c. -2
- d. 2
- e. 12

Penyelesaian:

Jelas C = A. B =
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Maka det (C) = 1.0 - (-4).(-3) = 0 - 12 = -12 (jawaban A)

Cara lain : C = A.B, maka det(C) = det(A).det(B)

$$\iff$$
 det (C) = (2.3 – 1.0) . (0 - (-2).(-1))

$$\Leftrightarrow$$
 det (C) = 6.(-2)

3. Invers matriks
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$
 adalah $A^{-1} = \dots$

a.
$$\begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b.
$$\begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c. \quad \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

d.
$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e.
$$\begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian:

Jelas det A = -8 - (-6) = -8 + 6 = -2

Maka
$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
 jadi jawabannya A.

Paket Soal 15:

attp://matematrick.blogspot.com

Kelompok Kesamaan Matriks: 1 - 9

2. Untuk persamaan

$$2\begin{pmatrix} x & 3y \\ 3 & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & x-6 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \text{ harga x + y}$$

adalah

- a. -2
- d. 6
- b. 2
- e. 7
- c. 4

3. Nilai 2a – b dari persamaan matriks

$$\begin{pmatrix} a-b & -4 \\ 3 & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2b & 2 \\ -13 & 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-a & -6 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

adalah

- a.1
- d. 4
- b.2
- e. 5
- **c.** 3
- 4. Nilai a yang memenuhi persamaan $\begin{pmatrix} a+2b \\ -3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}$

adalah

- a. 5
- b. 3
- c. -2
- d. -3
- e. -5
- 5. Diketahui

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2p & 1 \\ -1 & q+1 \end{pmatrix},$$

maka nilai p + q =

- a. -3
- d. 2
- b. -1
- e. 3
- c. 1
- 6. Diketahui kesamaan matriks $\begin{pmatrix} 7 & 5a-b \\ 2a-1 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -4 & 14 \end{pmatrix}$.

Nilai a dan b berturut – turut adalah

- a. $\frac{3}{2} dan_{17} \frac{1}{2}$
- b. $-\frac{3}{2} dan_{17} \frac{1}{2}$
- c. $\frac{3}{2}$ dan $-17\frac{1}{2}$
- d. $-\frac{3}{2}$ dan $-17\frac{1}{2}$
- e. $-17\frac{1}{2}$ dan $-\frac{3}{2}$
- 7. Diketahui $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+b & 6 \\ a+1 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$.

Nilai a+b+c =

- a. 11
- d. 14
- b. 12
- e. 16
- c. 13

8. Diketahui	(2x-1)	4	2^{3}	-1	_(1	2)
	9	$(x+y)^{+}$	-2	x	_ 5	3).

Nilai y - x = (UN 2010)

- a. -5
- b. -1
- c. 7
- d. 9
- e. 11
- 9. Diketahui matriks A = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ x & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -x & -1 \\ 3 & y \end{pmatrix}$, dan

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$$
. Jika 3A – B = C, maka nilai $x + y = ...$

(UN 2011)

- a. -3
- d. 1
- b. -2
- e. 3
- c. -1

Kelompok Determinan: 10 - 16

10. Diketahui A = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Nilai determinan

dari(AB) adalah

- a. 5
- b. 4
- c. 3
- d. 2
- e. 1

11. Jika A =
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$
 maka determinan dari A^T adalah

- a. -22
- b. -7
- c. -2
- d. 2
- e. 12

(petunjuk: pakai saja konsep det A = det A^T)

12. Diketahui matriks A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ dan matriks B = $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Jika matriks C = 2A^t – B maka determinan dari matriks C adalah

- a. –57
- d. 48
- b. -38

nttp://matematrick.blogspot.com

- e. 57
- c. 38
- 13. Diketahui A= $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ dan B= $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Determinan AB^t adalah

- a 48
- d. 34
- b. 24
- e. 52
- c. -8
- 14. Determinan $\begin{vmatrix} 5x & 2x \\ x & -2 \end{vmatrix}$ = 12. Nilai x yang memenuhi

adalah

- a. -2 dan 3
- b. -2 dan -3
- c. 2 dan 3
- d. -1 dan 6
- e. 1 dan 6
- 15. Diketahui matriks $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} dan Q = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Jika R = 3P - 2Q, maka determinan R = (UN 2010)

- a. -4
- d. 7
- b. 1
- e. 14
- c. 4
- 16. Diketahui matriks A = $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, dan

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$
. Nilai determinan dari matriks (AB – C)

adalah (UN 2011)

- a. -7
- d. 3
- b. -5
- e. 12
- c. 2

Kelompok Invers Matriks dan Bentuk AX = B, XA = B:

(17-27)

17. Diketahui empat matriks:

$$(i) \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} (ii) \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} (iii) \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

(iv)
$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriks yang tidak memiliki invers adalah

- a. (i) dan (iv)
- b. (ii) dan (iv)
- c. (ii) dan (iii)
- d. (iii)
- e. (iv)
- 18. Diketahui empat matriks:

$$(i) \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} (ii) \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} (iii) \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

iv)
$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriks yang memiliki invers adalah

- a. (i) dan (iv)
- (ii) dan (iv)
- (ii) dan (iii)
- (iii)
- e. (iv)
- 19. Diberikan matriks A = $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} 15 & 22 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$. Matriks X

berordo 2 x 2 yang memenuhi persamaan AX = B adalah

- a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
- c. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- d. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- e. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
- 20. Diberikan matriks A = $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$. Matriks X

berordo 2 x 2 yang memenuhi persamaan XA = B adalah

- a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
- d. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
- e. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
- c. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- 21. Jika A = $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, maka (BA)⁻¹ adalah

 - a. $\begin{pmatrix} 7 & -13 \\ -8 & 15 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 7 & -13 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$
 - b. $\begin{pmatrix} 7 & -13 \\ -8 & -15 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} -7 & 13 \\ 8 & -15 \end{pmatrix}$
- - c. $\begin{pmatrix} -7 & -13 \\ -8 & 15 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ (22.Jika A = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, maka (AB)⁻¹ adalah

- b. $\begin{pmatrix} 7 & -13 \\ -8 & -15 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} -7 & 13 \\ 8 & -15 \end{pmatrix}$
- c. $\begin{pmatrix} -7 & -13 \\ -8 & 15 \end{pmatrix}$

23. Jika $X\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, maka matriks X =

- a. $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
- d. $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- b. $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- c. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$
- 24. Diketahui matriks A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ dan B = $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Jika

matriks C = A - 3B, maka invers matriks C adalah (UN 2010)

- a. $\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$
- d. $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
- b. $\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$
- e. $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$
- c. $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

25. Diketahui matriks A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, dan B = $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Matriks X

- a. $\begin{pmatrix} 12 & 10 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$
- d. $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
- b. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$
- c. $\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$