IMO 2014

Cape Town - South Africa

Language: **Indonesian**

Day: **1**

Selasa, 8 Juli 2014

Soal 1. Diberikan $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ suatu barisan tak hingga dari bilangan bulat positif. Buktikan bahwa terdapat suatu bilangan bulat $n \geq 1$ yang unik sehingga

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Soal 2. Diberikan $n \geq 2$ suatu bilangan bulat. Pandang suatu papan catur berukuran $n \times n$ yang terdiri atas persegi satuan sebanyak n^2. Suatu konfigurasi n benteng pada papan ini dikatakan *damai* jika setiap baris dan setiap kolom hanya memuat tepat satu benteng. Tentukan bilangan bulat positif terbesar k sehingga untuk setiap konfigurasi damai dari n benteng, terdapat suatu persegi berukuran $k \times k$ yang tidak memuat benteng pada semua k^2 buah persegi satuan di dalamnya.

Soal 3. Diberikan segiempat konveks $ABCD$ dengan $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Titik H terletak pada BD sehingga AH tegak lurus BD. Titik S dan T berturut-turut terletak pada sisi AB dan AD sehingga H terletak di dalam segitiga SCT dan

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°\,.$$

Buktikan bahwa garis BD menyinggung lingkaran luar dari segitiga TSH.

Rabu, 9 Juli 2014

Soal 4. Titik P dan Q terletak pada sisi BC, sisi dari segitiga lancip ABC, sedemikian sehingga $\angle PAB = \angle BCA$ dan $\angle CAQ = \angle ABC$. Titik M dan N berturut-turut terletak pada garis AP dan AQ, sehingga P merupakan titik tengah AM, dan Q merupakan titik tengah AN. Buktikan bahwa titik potong garis BM dan CN berada pada lingkaran luar segitiga ABC.

Soal 5. Untuk setiap bilangan bulat positif n, Bank Cape Town mengeluarkan koin yang bernilai $\frac{1}{n}$. Diberikan suatu kumpulan hingga dari koin-koin tersebut (tidak mesti semua koin bernilai berbeda) dengan nilai total paling besar $99 + \frac{1}{2}$, buktikan bahwa kita dapat membagi kumpulan tersebut kedalam 100 grup atau kurang, sehingga masing-masing grup bernilai total paling besar 1.

Soal 6. Suatu himpunan garis di bidang dikatakan pada *posisi umum* jika tidak ada dua garis yang sejajar dan tidak ada tiga garis yang melalui satu titik yang sama. Suatu himpunan garis yang berada pada posisi umum membagi bidang menjadi daerah-daerah, yang beberapa diantaranya memiliki luas hingga; kita namakan daerah ini *daerah hingga*. Buktikan bahwa untuk semua n yang cukup besar, dalam setiap himpunan n garis yang berada pada posisi umum kita dapat mewarnai paling sedikit $\sqrt{n}$ garis dengan warna biru sehingga tidak terdapat daerah hingga yang semua batasnya berwarna biru.

Catatan: Hasil yang didapat dengan $\sqrt{n}$ digantikan oleh $c\sqrt{n}$ akan tetap mendapat nilai bergantung pada nilai konstanta c.

Waktu: 4 jam dan 30 menit
Setiap soal bernilai 7 poin