Solusi UN Paket 13

MATA PELAJARAN

Mata Pelajaran : Matematika
Jenjang : SMA/MA
Program Studi : IPA

WAKTU PELAKSANAAN

Hari/Tanggal : Rabu, 17 April 2013
Jam : 07.30 – 09.30

PETUNJUK UMUM

1. Periksalah Naskah Sola yang Anda terima sebelum mengerjakan soal yang meliputi:
   a. Kelengkapan jumlah halaman atau urutannya.
   b. Kelengkapan dan urutan nomor soal.
   c. Kesesuaian Nama Mata Uji dan Program Studi yang tertera pada kanan atas Naskah Soal dengan Lembar Jawaban Ujian Nasional (LJUN).
   d. Pastikan LJUN masih menyatu denga naskah soal.
2. Laporkan kepada pengawas ruang ujian apabila terdapat lembar soal, nomor soal yang tidak lengkap atau tidak urut, serta LJUN yang rusak atau robek untuk mendapat gantinya.
3. Tulislah Nama dan Nomor Peserta Ujian Anda pada koklom yang disediakan di halaman pertama butir soal.
4. Isilah pada LJUN Anda dengan:
   a. Nama peserta pada kotak yang disediakan, lalu hitamkan bulatan di bawahnya sesuai dengan huruf di atasnya.
   b. Nomor Peserta dan Tanggal Lahir pada kolom yang disediakan, lalu hitamkan bulatan bulatan di bawahnya sesuai huruf/angka di atasnya.
   c. Nama Sekolah, Tanggal Ujian, dan bubuhkan Tanda Tangan Anda pada kotak yang disediakan.
5. Pisahkan LJUN dari Naskah Ujian secara hati-hati dengan cara menyobek pada tempat yang ditentukan.
6. Tersedia waktu 120 menit untuk mengerjakan Naskah Soal tersebut.
7. Jumlah soal sebanyak 40 butir, pada setiap butir soal terdapat 5 (lima) pilihan jawaban.
8. Tidak diizinkan menggunakan kalkulator, HP, tabel matematika atau alat bantu hitung lainnya.
9. Periksalah pekerjaan Anda sebelum diserahkan kepada pengawas ruang ujian.
10. Lembar soal boleh dicorat-coret, sedangkan LJUN tidak boleh dicorat-coret.

SELAMAT MENGERJAKAN

1. Diketahui premis-premis berikut:
   Premis 1 : Jika kesadaran akan kebersihan meningkat maka sampah yang berserakan berkurang.
   Premis 2 : Jika sampah yang berserakan berkurang maka saluran air lancar.
   Premis 3 : Jika saluran air lancar maka masyarakat bahagia.

Kesimoulan dari premis-premis tersebut adalah....

A. Kesadaran akan kebersihan meningkat tetapi masyarakat tidak bahagia.
B. Masyarakat bahagia dan kesadaran akan kebersihan meningkat.
C. Jika masyarakat bahagia maka kesadaran akan kebersihan meningkat.
D. Jika kesadaran akan kebersihan meningkat maka masyarakat bahagia.
E. Jika sampah yang berserakan berkurang maka masyarakat bahagia.

Solusi:

Kaidah Silogisme:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

Dengan demikian,

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ r \to s \\ \hline \therefore \ldots \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{l} p \to r \\ r \to s \\ \hline \therefore p \to s \end{array}$$

Jadi, kesimpulan yang sah dari ketiga premis di atas adalah "Jika kesadaran akan kebersihan meningkat maka masyarakat bahagia." $\to$ [D]

2. Pernyataan yang setara dengan pernyataan "Jika setiap orang menanam pohon maka udara bersih" adalah....

A. Jika beberapa orang tidak menanam pohon maka udara tidak bersih.
B. Jika udara bersih maka setiap orang menanam pohon.
C. Jika udara tidak bersih maka setiap orang tidak menanam pohon.
D. Jika udara tidak bersih maka beberapa orang tidak menanam pohon.
E. Jika semua orang tidak menanam pohon maka udara tidak bersih.

Solusi:

Konsep: $p \to q \equiv \sim q \to \sim p \equiv \sim p \vee q$

Jadi, pernyataan tersebut setara dengan pernyataan "Jika udara tidak bersih maka beberapa orang tidak menanam pohon."$\to$ [D]

3. Bentuk rasional dari $\frac{2+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$ adalah....

A. $\frac{1}{6}\left(3+5\sqrt{3}\right)$
B. $\frac{1}{6}\left(9+5\sqrt{3}\right)$
C. $\frac{1}{6}\left(9+\sqrt{3}\right)$
D. $\frac{1}{12}\left(9+\sqrt{3}\right)$
E. $\frac{1}{12}\left(3+\sqrt{3}\right)$

Solusi:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \times \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{6+2\sqrt{3}+3\sqrt{3}+3}{9-3} = \frac{1}{6}\left(9+5\sqrt{3}\right) \to \text{[B]}$$

4. Bentuk sederahan dari $\frac{{}^2\log^2 a - {}^2\log^2 b}{{}^2\log ab}$ adalah....

A. ${}^{2}\log\left(\frac{a}{b}\right)$

B. ${}^{2}\log(ab)$

C. ${}^{2}\log(a-b)$

D. ${}^{2}\log(a+b)$

E. ${}^{2}\log(a+b)^2$

Solusi:

$$\frac{{}^{2}\log^2 a - {}^{2}\log^2 b}{{}^{2}\log ab} = \frac{\left({}^{2}\log a - {}^{2}\log b\right)\left({}^{2}\log a + {}^{2}\log b\right)}{{}^{2}\log ab} = \frac{\left({}^{2}\log \frac{a}{b}\right)\left({}^{2}\log ab\right)}{{}^{2}\log ab} = {}^{2}\log\left(\frac{a}{b}\right) \to \text{[A]}$$

5. Akar-akar persamaan $x^2 + (a-1)x + 2 = 0$ adalah α dan β. Jika $\alpha = 2\beta$ dan $a > 0$ maka nilai $a = ...$

A. 2
B. 3
C. 4
D. 6
E. 8

Solusi:

Akar-akar persamaan $x^2 + (a-1)x + 2 = 0$ adalah α dan β

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -a + 1$ .... (1)

$\alpha = 2\beta$ .... (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$2\beta + \beta = -a + 1$

$\beta = \frac{-a+1}{3}$

$\alpha = 2\beta = \frac{2(-a+1)}{3}$

$\alpha\beta = \frac{c}{a} = 2$

$\frac{2(-a+1)}{3} \times \frac{-a+1}{3} = 2$

$(-a+1) = 9$

$-a + 1 = \pm 3$

$a = -2$ atau $a = 4$

Karena $a > 0$, maka $a = 4$. $\to$ [C]

6. Nilai a yang menyebabkan fungsi kuadrat $f(x) = (a-1)x^2 + 2ax + (a+4)$ definit positif adalah....

A. $a < \frac{3}{4}$

B. $a < 1$

C. $a > 1$

D. $a > \frac{4}{3}$

E. $1 < a < \frac{4}{3}$

Solusi:

Kita mengetahui bahwa jika $f(x) = ax^2 + bx + c$ adalah definit positif, maka haruslah $a > 0$ dan $D = b^2 - 4ac < 0$.

$f(x) = (a-1)x^2 + 2ax + (a+4)$

$a - 1 > 0$

$a > 1$ .... (1)

$D = b^2 - 4ac < 0$

$(2a)^2 - 4(a-1)(a+4) < 0$

$4a^2 - 4a^2 - 12a + 16 < 0$

$-12a + 16 < 0$

$a > \frac{4}{3}$ .... (2)

Dari (1) $\cap$ (2) menghasilkan $a > \frac{4}{3}$. $\rightarrow$ [D]

7. Batas-batas nilai *m* yang menyebabkan persamaan kuadrat $mx^2 + (2m-1)x + m - 2 = 0$ mempunyai akar real adalah....
   A. $m \geq -\frac{9}{4}$ dan $m \neq 0$
   B. $m \geq -\frac{7}{4}$ dan $m \neq 0$
   C. $m \geq -\frac{1}{4}$ dan $m \neq 0$
   D. $m > \frac{1}{4}$
   E. $m > \frac{9}{4}$

Solusi:

Syarat persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ mempunyai akar-akar real adalah $a \neq 0$ dan $D \geq 0$.

$mx^2 + (2m-1)x + m - 2 = 0$

$m \neq 0$ .... (1)

$(2m-1)^2 - 4m(m-2) \geq 0$

$4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 + 8m \geq 0$

$4m + 1 \geq 0$

$m \geq -\frac{1}{4}$ .... (2)

Dari (1) $\cap$ (2) diperoleh $m \geq -\frac{1}{4}$ dan $m \neq 0 \rightarrow$ [C]

8. Amir, Budi, dan Citra membeli buku dan pulpen yang sama di sebuah toko. Amir membeli 3 buku dan 4 pulpen seharga 30.500,00. Budi membeli 5 buku dan 2 pulpen seharga Rp27.500,00. Citra membeli 4 buku dan 1 pulpen, untuk itu ia harus membayar seharga....
   A. Rp14.500,00
   B. Rp18.000,00
   C. Rp19.000,00
   D. Rp19.500,00
   E. Rp23.500,00

Solusi:

Ambillah harga sebuah buku dan pulpen masing-masing adalah b dan p rupiah.

$3b + 4p = 30.500$ .... (1)

$5b + 2p = 27.500$ .... (2)

Persamaan (1) – 2 × persamaan (2) menghasilkan:

$-7b = -24.500$

$b = 3.500$

$b = 3.500 \to 3 \times 3.500 + 4p = 30.500$

$4p = 20.000$

$p = 5.000$

Jadi, Citra membeli 4 buku dan 1 pulpen, untuk itu ia harus membayar seharga

$4 \times \text{Rp}3.500{,}00 + \text{Rp}5.000{,}00 = \text{Rp}19.000{,}00 \to$ [C]

9. Sebuah lingkaran memiliki titik pusat $(2,3)$ dan berdiameter 8 cm. Persamaan lingkaran tersebut adalah....

A. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$

B. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

C. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

D. $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 3 = 0$

E. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$

Solusi:

Diameter lingkaran $d = 8$

Jari-jari lingkaran $r = \frac{d}{2} = 4$

Persamaan lingkaran dengan pusat (a,b) dan jari-jari r adalah $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Jadi, persamaan lingkarannya adalah

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4^2$

$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 + 9 = 16$

$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \to$ [A]

10. Diketahui $(x+2)$ adalah suatu faktor suku banyak $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + p$. Salah satu faktor linear lainnhya dari suku banyak tersebut adalah....

A. $(2x+1)$

B. $(2x-3)$

C. $(2x+3)$

D. $(x+3)$

E. $(x-3)$

Solusi:

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + p$

$f(-2) = 2(-2)^3 - 3(-2)^2 - 11(-2) + p = 0$

$-16 - 12 + 22 + p = 0$

$p = 6$

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & -3 & -11 & 6 \\ & & -4 & 14 & -6 \\ \hline & 2 & -7 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore\ f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = (x-2)(2x^2 - 7x + 3) = (x+1)(2x-1)(x-3)$

Jadi, salah satu faktor linear lainnya dari suku banyak tersebut adalah $(x-3)$. $\to$ [E]

11. Diketahui fungsi $f(x)=2x-1$ dan $g(x)=3x^2-x+5$. Fungsi komposisi $(g \circ f)(x)=....$

A. $6x^2-4x-11$

B. $6x^2-4x+9$

C. $12x^2-14x+9$

D. $12x^2-10x+9$

E. $12x^2-14x+3$

Solusi:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(2x-1) \\ &= 3(2x-1)^2-(2x-1)+5 \\ &= 12x^2-12x+3-2x+1+5 \\ &= 12x^2-14x+9 \to [C]\end{aligned}$$

12. Diketahui $g(x)=\frac{x-1}{2x+1}, x \neq -\frac{1}{2}$. Invers fungsi $g(x)$ adalah $g^{-1}(x)=....$

A. $\frac{2x+1}{x-1}, x \neq 1$

B. $\frac{x+1}{1-2x}, x \neq \frac{1}{2}$

C. $\frac{x-2}{1-x}, x \neq 1$

D. $\frac{1-2x}{x+1}, x \neq -1$

E. $\frac{2x-1}{x+1}, x \neq -1$

Solusi:

Cara 1:

$g(x)=\frac{x-1}{2x+1}, x \neq -\frac{1}{2}$

$x=\frac{y-1}{2y+1}$

$2xy+x=y-1$

$(2x-1)y=-x-1$

$y=\frac{-x-1}{2x-1}$

$g^{-1}(x)=\frac{x+1}{1-2x}$, $x \neq \frac{1}{2} \to$ [B]

Cara 2:

Kita mengetahui bahwa jika $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$, maka $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$

$g(x)=\frac{x-1}{2x+1}, x \neq -\frac{1}{2} \to g^{-1}(x)=\frac{-x-1}{2x-1}=\frac{x+1}{1-2x}$, $x \neq \frac{1}{2} \to$ [B]

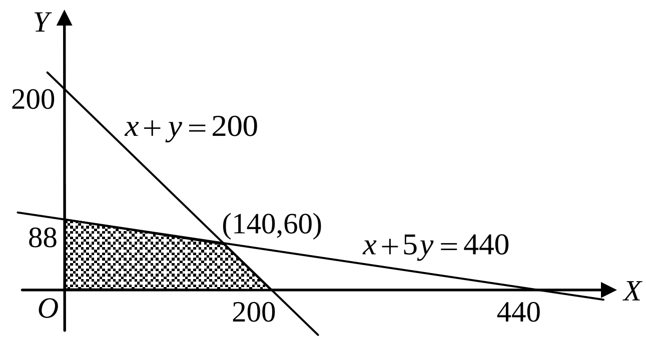
13. Luas daerah parkir 1.760 m^2. Luas rata-rata untuk mobil kecil 4 m^2 dan mobil kecil 20 m^2. Daya tamping maksimum hanya 200 kendaraan. Biaya parkir mobil kecil Rp1.000,00/jam dan mobil besar Rp2.000,00/jam. Jika dalam satu jam terisi penuh dan tidak ada kendaraan yang pergi dan dating, penghasilan maksimum tempat parkir adalah....

A. Rp176.000,00
B. RP200.000,00
C. Rp260.000,00
D. Rp300.000,00
E. Rp340.000,00

Solusi:

Ambillah banyak mobil kecil dan besar adalah *x* dan *y* buah.

$$\begin{cases} 4x+20y \le 1.760 \\ x+y \le 200 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5y \le 440 \\ x+y \le 200 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



$f(x, y) = 1000x + 2000y$

$x + 5y = 440$ .... (1)

$x + y = 200$ .... (2)

Persamaan (1) – persamaan (2) menghasilkan

$4y = 240$

$y = 60$

$x + 60 = 200$

$x = 140$

Koordinat titik potong garis $x+5y=440$ dan $x+y=200$ adalah $(140,60)$

Titik (x, y)	$f(x, y) = 1000x + 2000y$	Keterangan
$(0,0)$	$1000\times 0 + 2000\times 0 = 0$	
$(200,0)$	$1000\times 200 + 2000\times 0 = 200.000$	
$(140,60)$	$1000\times 140 + 2000\times 60 = 260.000$	Maksimum
$(0,88)$	$1000\times 0 + 2000\times 88 = 176.000$	

Jadi, penghasilan maksimum tempat parkir adalah Rp260.000,00. $\to$ [C]

14. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 3 \\ -2 & b \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, dan $A \cdot B = C$. Nilai dari $a + b = ...$

A. -6
B. -5
C. -1
D. 1
E. 5

Solusi:

$AB = C$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 3 \\ -2 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a-4 & 3+2b \\ .... & .... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$a - 4 = -2$

$a = 2$
$3 + 2b = -3$
$b = -3$
$\therefore a + b = -2 - 3 = -5 \rightarrow$ [B]

15. Diketahui $\vec{u} = 2i - j$, $\vec{v} = 5i + 4j - 3k$, dan $\vec{w} = 9i - 7k$. Vektor $2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$ adalah....
    A. $\frac{1}{2}(-i + 7j + k)$
    B. $\frac{1}{2}(-i - 7j + k)$
    C. $-\frac{1}{2}(i - 7j + k)$
    D. $-2(i + 7j - k)$
    E. $-2(i - 7j - k)$

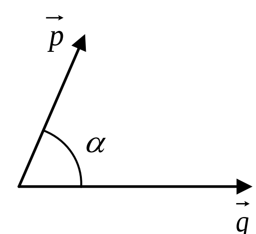
    Solusi:

$$2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 15 + 9 \\ -2 - 12 + 0 \\ 0 + 9 - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -14 \\ 2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = -2(i + 7j - k) \rightarrow \text{[D]}$$

16. Diketahui $\vec{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Apabila α adalah sudut yang dibentuk antara vektor $\vec{p}$ dan $\vec{q}$, maka $\tan \alpha = ...$
    A. $\frac{1}{6}\sqrt{6}$
    B. $\frac{1}{7}\sqrt{7}$
    C. $\frac{6}{7}\sqrt{7}$
    D. $\sqrt{6}$
    E. $\sqrt{7}$

    Solusi:

    Jika diberikan vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$, maka berlaku $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$



$$\cos\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \cos\alpha = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 0^2}\sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \frac{-3 + 9 - 0}{\sqrt{18}\sqrt{14}} = \frac{6}{6\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2} = \sqrt{\frac{7 - 1}{7}} = \sqrt{\frac{6}{7}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}}{\frac{1}{\sqrt{7}}} = \sqrt{6} \quad \to \text{[D]}$$

17. Diketahui vektor $\vec{p} = 11i + 4j + 3k$ dan $\vec{q} = 2i + 5j + 11k$. Proyeksi vektor orthogonal $\vec{p}$ terhadap $\vec{q}$ adalah....
   A. $2i - 5h - 11k$
   B. $-i - \frac{5}{2}j - \frac{11}{2}k$
   C. $i + \frac{5}{2}j + \frac{11}{2}k$
   D. $-i + \frac{5}{2}j + \frac{11}{2}k$
   E. $-i - 5j - 11k$

   Solusi:

   Kita mengetahui bahwa proyeksi vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah $\vec{c} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\vec{b}$

$$\vec{c} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\left|\vec{q}\right|^2}\vec{q} = \frac{\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}}{2^2 + 5^2 + 11^2}\vec{q} = \frac{22 + 20 + 33}{150}\vec{b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix} = i + \frac{5}{2}j + \frac{11}{2}k \to \text{[C]}$$

18. Bayangan titik $S(2,4)$ oleh rotasi yang berpusat di $O(0,0)$ sejauh $90°$ berlawanan arah jarum jam dan dilanjutkan oleh pencerminan terhadap garis $y = x$ adalah....
   A. $S''(2,-4)$
   B. $S''(-2,4)$
   C. $S''(2,4)$
   D. $S''(-4,-2)$
   E. $S''(-4,2)$

   Solusi:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

   Jadi, bayangannya adalah $S''(2,-4)$. $\to$ [A]

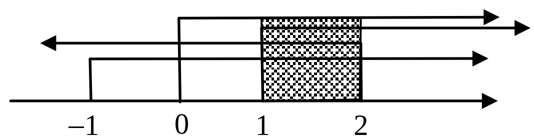
19. Penyelesaian pertidaksamaan ${}^2\log x + {}^2\log(x-1) < 1$ adalah....
   A. $-1 < x < 2$
   B. $0 < x < 1$
   C. $1 < x < 2$
   D. $1 \le x < 2$
   E. $0 < x < 2$

   Solusi:

   ${}^2\log x + {}^2\log(x-1) < 1$

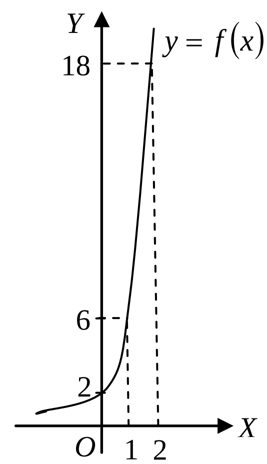
   $x > 0$ .... (1)

$x - 1 > 0$
$x > 1$ .... (2)
${}^2\log x + {}^2\log(x-1) < 1$
${}^2\log x(x-1) < {}^2\log 2$
$x(x-1) < 2$
$x^2 - x - 2 < 0$
$(x-2)(x+1) < 0$
$-1 < x < 2$ .... (3)



Dari (1) $\cap$ (2) $\cap$ (3) diperoleh
Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $1 < x < 2$. $\to$ [C]

20. Persamaan grafik fungsi pada gambar adalah....



A. $y = 2 \cdot 2^x$
B. $y = (-2) \cdot 3^x$
C. $y = 2 \cdot 3^x$
D. $y = 3 \cdot 2^x$
E. $y = (-3) \cdot 2^x$

Solusi:
Ambillah fungsi eksponennya adalah $y = ka^x$

$(0,2) \to y = ka^x$
$2 = ka^0$
$k = 2$
$\therefore y = 2a^x$
$(1,6) \to y = 2a^x$
$6 = 2a$
$a = 3$
$\therefore y = 2 \cdot 3^x \to$ [C]

21. Suku ke-4 dan suku ke-12 dari barisan aritmetika berturut-turut 36 dan 100. Jumlah 20 suku pertama deret aritmetika tersebut adalah....
A. 164
B. 172
C. 1640
D. 1760
E. 1840

Solusi:
Kita mengetahui bahwa suku ke-*n* dari barisan aritmetika dirumuskan sebagai $u_n = a + (n-1)b$.

$u_{12} - u_4 = 100 - 36$
$a + 11b - (a + 3b) = 64$
$8b = 64$
$b = 8$
$b = 8 \to u_4 = 36$
$a + 3b = 36$
$a + 3 \times 8 = 36$
$a = 36 - 24 = 12$

Jumlah n suku pertama dari barisan aritmetika adalah $S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)b\right]$

$$S_{20} = \frac{20}{2}\left[2\times 12 + (20-1)8\right] = 1760$$

Jadi, jumlah 20 suku pertama deret aritmetika tersebut adalah 1760. $\to$ [D]

22. Seutas tali dipotong menjadi 8 bagian. Panjang masing-masing potongan tersebut mengikuti barisan geometri. Potongan tali yang paling pendek 4 cm dan potongan tali yang paling panjang 512 cm. Panjang tali semula adalah....
    A. 512 cm
    B. 1.020 cm
    C. 1.024 cm
    D. 2.032 cm
    E. 2.048 cm

    Solusi:

    Barisan geometri: $u_1, u_2, u_3, ..., u_8$

    $u_1 = a = 4$ dan $u_8 = 512$

    $$\frac{u_8}{u_1} = \frac{512}{4}$$

    $$\frac{u_1 r^7}{u_1} = 128$$

    $$r^7 = 128$$

    $$r = \sqrt[7]{128} = 2$$

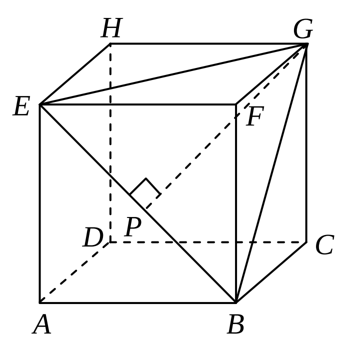
    Jumlah n suku pertama dari barisan geometri adalah $S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r-1}$

    $$S_8 = \frac{4\left(2^8 - 1\right)}{2-1} = 1.020$$

    Jadi, panjang tali semula adalah 1.020 cm. $\to$ [B]

23. Diketahui kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk 6 cm. Jarak titik *G* ke diagonal *BE* adalah....
    A. $3\sqrt{6}$ cm
    B. $6\sqrt{6}$ cm
    C. $9\sqrt{6}$ cm
    D. $3\sqrt{10}$ cm
    E. $9\sqrt{10}$ cm

    Solusi:

    Perhatikan ΔBEG adalah segitiga sama sisi.

    $$BE = EG = BG = 6\sqrt{2}$$

    $$\sin\angle GEB = \frac{GP}{EG}$$

    $$GP = EG\sin\angle GEB = 6\sqrt{2}\sin 60^\circ = 6\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{6} \text{ cm}$$

    Jadi, jarak titik *G* ke diagonal *BE* adalah $3\sqrt{6}$ cm $\to$ [A]

24. Diketahui kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk *a* cm. Nilai kosinus sudut antara bidang *ABCD* dengan bidang *DBG* adalah....
    A. $\sqrt{2}$

B. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

C. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

D. $\frac{1}{3}\sqrt{6}$

E. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$

Solusi:

Perhatikan ΔBDG adalah segitiga sama sisi.

$BD = BD = DG = a\sqrt{2}$

$\sin\angle GBP = \frac{GP}{BG}$

$GP = BG\sin\angle GBP = a\sqrt{2}\sin 60^\circ = a\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{2}\sqrt{6}$ cm

Menurut **Teorema Pythagoras:**

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

$CP = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\times a\sqrt{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

$\cos\angle(ABCD, DBG) = \frac{CP}{GP} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \to$ [B]

25. Dalam sebuah lingkaran berjari-jari 6 cm dibuat segi-12 beraturan. Panjang sisi segi-12 beraturan tersebut adalah....

A. $6\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm

B. $6\sqrt{2-\sqrt{2}}$ cm

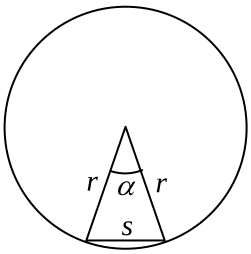
C. $6\sqrt{3-\sqrt{3}}$ cm

D. $6\sqrt{3+\sqrt{3}}$ cm

E. $6\sqrt{3+\sqrt{2}}$ cm

Solusi:

Ambillah sudut pusat $\alpha = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ dan s adalah panjang sisi segi-12.



Menurut **Aturan Kosinus:**

$s^2 = 6^2 + 6^2 - 2\cdot 6\cdot 6\cdot\cos 30^\circ = 72 - 72\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = 72 - 36\sqrt{3}$

$s = \sqrt{72 - 36\sqrt{3}} = 6\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Jadi, Panjang sisi segi-12 beraturan tersebut adalah $6\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm. $\to$ [A]

26. Himpunan penyelesaian persamaan $\cos 2x + 3\cos x + 2 = 0$ untuk $0^\circ \le x \le 360^\circ$....

A. $\{60^\circ, 120^\circ, 270^\circ\}$

B. $\{120^\circ, 240^\circ, 270^\circ\}$

C. $\{90°, 240°, 270°\}$
D. $\{120°, 180°, 240°\}$
E. $\{120°, 150°, 270°\}$

Solusi:

$\cos 2x + 3\cos x + 2 = 0$

$2\cos^2 x - 1 + 3\cos x + 2 = 0$

$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

$(2\cos x + 1)(\cos x + 1) = 0$

$\cos x = -\frac{1}{2}$ atau $\cos x = -1$

$x = 120°$ atau $240°$ atau $x = 180°$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{120°, 180°, 240°\}$. $\to$ [D]

27. Nilai dari $\frac{\sin 78° - \sin 12°}{\cos 168° - \cos 102°} = ...$

A. -1
B. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
C. 0
D. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
E. 1

Solusi:

$$\frac{\sin 78° - \sin 12°}{\cos 168° - \cos 102°} = \frac{2\cos 45° \sin 66°}{-2\sin 135° \sin 66°} = \frac{\cos 45°}{-\sin 45°} = -1 \to \text{[A]}$$

28. Nilai dari $\lim_{x\to\sim}\left(\sqrt{4x^2 - 8x + 3} - 2x - 4\right) = ...$

A. -8
B. -6
C. 2
D. 6
E. 8

Solusi:

Cara 1:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2 - 8x + 3} - 2x - 4\right) = \lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{(2x-2)^2} - 2x - 4\right] = \lim_{x\to\infty}\left[(2x-2) - 2x - 4\right] = -6 \to \text{[B]}$$

Cara 2:

Kita mengetahui bahwa jika $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{ax^2 + px + q}\right) = \frac{b-p}{2\sqrt{a}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2 - 8x + 3} - 2x - 4\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2 - 8x + 3} - \sqrt{4x^2 + 16x + 16}\right) = \frac{-8-16}{2\sqrt{4}} = -6 \to \text{[B]}$$

29. Nilai $\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(x-1)}{x^2 - 2x + 1} = ...$

A. 0
B. 1
C. 2
D. 4

E. ∞

Solusi:

Cara 1:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(x-1)}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(x-1)}{(x-1)^2}=\left[\lim_{x-1\to 0}\frac{\sin(x-1)}{(x-1)}\right]^2=[1]^2=1\to \text{[B]}$$

Cara 2:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(x-1)}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2}=1\to \text{[B]}$$

30. Diketahui bilangan bulat p dan q yang memenuhi hubungan $q-2p=50$. Nilai minimum dari p^2+q^2 adalah....
A. 100
B. 250
C. 500
D. 1250
E. 5000

Solusi:

$q-2p=50$

$q=2p+50$

Ambillah $y=p^2+q^2$, sehingga

$y=p^2+(2p+50)^2=p^2+4p^2+200p+2500=5p^2+200p+2500$

$y'=10p+200$

Nilai stasioner y dicapai jika $y'=0$, sehingga

$10m+200=0$

$m=-20$

$y_{\min}(-20)=5(-20)^2+200(-20)+2500=500\to$ [C]

31. Hasil dari $\int_0^2 3(x+1)(x-6)dx=....$
A. -58
B. -56
C. -28
D. -16
E. -14

Solusi:

$$\int_0^2 3(x+1)(x-6)dx=\int_0^2 (3x^2-15x-18)dx=\left[x^3-\frac{15}{2}x^2-18x\right]_0^2=2^3-\frac{15}{2}\times 2^2-18\times 2-0=-58\to \text{[A]}$$

32. Nilai dari $\int_6^{\frac{\pi}{5}}(\sin 5x+\sin x)dx=....$

A. $-\frac{3}{5}$

B. $-\frac{1}{5}$

C. 0

D. $\frac{1}{5}$

E. $\frac{3}{5}$

Solusi:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 5x+\sin x)dx=\left[-\frac{1}{5}\cos 5x-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{1}{5}\cos 0-\cos 0\right)=\frac{1}{10}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+1$$

$$=\frac{1-5+2+10}{10}=\frac{8}{10}=\frac{3}{5}\rightarrow[\text{E}]$$

33. Hasil dari $\int\frac{(2x-3)dx}{\sqrt{2x^2-6x+5}}=\ldots.$

A. $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2-6x+5}+C$

B. $\sqrt{2x^2-6x+5}+C$

C. $\frac{2}{3}\sqrt{2x^2-6x+5}+C$

D. $2\sqrt{2x^2-6x+5}+C$

E. $\frac{1}{\sqrt{2x^2-6x+5}}+C$

Solusi:

$$\int\frac{(2x-3)dx}{\sqrt{2x^2-6x+5}}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(2x^2-6x+5\right)}{\sqrt{2x^2-6x+5}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\left(2x^2-6x+5\right)^{-\frac{1}{2}+1}+C=\sqrt{2x^2-6x+5}+C\rightarrow[\text{B}]$$

34. Luas daerah yang diarsir seperti tampak pada gambar dapat dinyatakan dengan rumus….

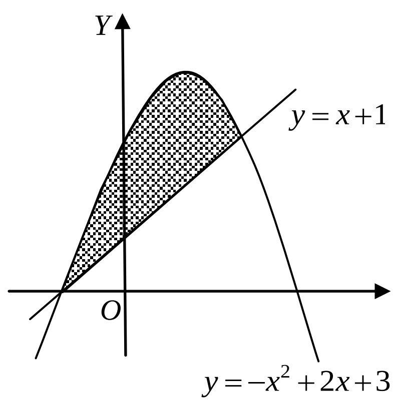
A. $L=\int_{-1}^{2}\left[\left(-x^2+2x+3\right)-(x+1)\right]dx$

B. $L=\int_{-1}^{2}\left[(x+1)-\left(-x^2+2x+3\right)\right]dx$

C. $L=\int_{-2}^{1}\left[\left(-x^2+2x+3\right)-(x+1)\right]dx$

D. $L=\int_{-2}^{1}\left[(x+1)-\left(-x^2+2x+3\right)\right]dx$

E. $L=\int_{-1}^{2}\left[\left(-x^2+2x+3\right)+(x+1)\right]dx$



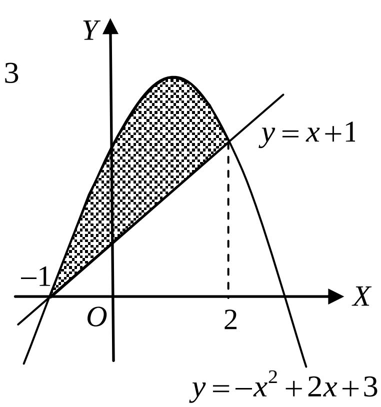
Solusi:

Batas-batas integral dengan kurva $y=-x^2+2x+3$ dan $y=x+1$

$-x^2+2x+3=x+1$

$x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$



$x = -1$ atau $x = 2$

$$L = \int_{-1}^{2} \left[\left(-x^2 + 2x + 3\right) - \left(x + 1\right)\right] dx \to \text{[C]}$$

35. Daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$ dan garis $x + y - 2 = 0$ diputar mengelilingi sumbu X. Volume benda putar yang terjadi adalah....

A. $15\frac{2}{3}\pi$ satuan volume

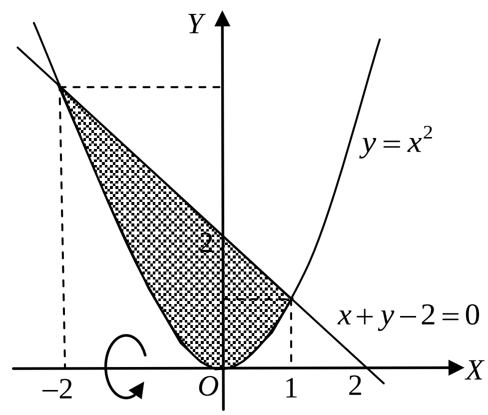
B. $15\frac{2}{5}\pi$ satuan volume

C. $14\frac{2}{5}\pi$ satuan volume

D. $14\frac{2}{3}\pi$ satuan volume

E. $10\frac{3}{5}\pi$ satuan volume

Solusi:



Batas-batas integral dengan kurva $y = x^2$ dan $x + y - 2 = 0$

$x^2 = 2 - x$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x - 1)(x + 2) = 0$

$x = 1$ atau $x = 2$

$$V = \pi \int_{-2}^{1} \left[(2 - x)^2 - \left(x^2\right)^2\right] dx = \pi \int_{-2}^{0} \left(4 - 4x + x^2 - x^4\right) dx$$

$$= \pi \left[4x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_{-2}^{1}$$

$$= \pi \left[4 - 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \left(-8 - 8 - \frac{8}{3} + \frac{32}{5}\right)\right] = \pi\left(18 + \frac{9}{3} - \frac{33}{5}\right) \quad = \pi\left(21 - \frac{33}{5}\right) = 14\frac{2}{5}\pi \to \text{[C]}$$

36. Kuartil bawah pada data tabel berikut ini adalah....

A. 59,5
B. 60,7
C. 62,5
D. 63,0
E. 64,5

Upah harian (Rp)	Banyak karyawan
50 – 54	3
55 – 59	5
60 – 64	10
65 – 69	16
70 – 74	14
75 – 79	8
80 – 84	4

Solusi:

Kelas kuartil bawah terletak pada data ke $\frac{n}{4} = \frac{60}{4} = 15$, yaitu 60 – 64 .

Rumus kuartil atas adalah $Q_1 = L_1 + \frac{\frac{n}{4} - fk_1}{f_1} \times p$

$$Q_1 = 59{,}5 + \frac{\frac{60}{4} - 8}{10} \times 5 = 59{,}5 + \frac{15 - 8}{10} \times 5 = 59{,}5 + 3{,}5 = 63{,}0 \rightarrow \text{[D]}$$

37. Banyak bilangan terdiri dari 3 angka berbeda dan lebih dari 200 yang dapat dibentuk dari angka-angka 1, 2, 3, 4, dan 5 adalah....
    A. 24
    B. 36
    C. 48
    D. 60
    E. 75

    Solusi:

4	4	3

Jadi, banyak bilangan tersebut adalah $4 \times 4 \times 3 = 48 \rightarrow$ [C]

38. Dua keluarga yang masing-masing terdiri dari 2 orang dan 3 orang ingin foto bersama. Banyak posisi foto yang berbeda dengan anggota keluarga yang sama selalu berdampingan adalah....
    A. 24
    B. 36
    C. 48
    D. 72
    E. 96

    Solusi:

    Jadi, banyak posisi foto yang berbeda dengan anggota keluarga yang sama selalu berdampingan adalah $2 \times 2! \times 3! = 24 \rightarrow$ [A]

39. Erik suka sekali main skateboard. Dia mengunjungi sebuah toko bersama SKATERS untuk mengetahui beberapa model.
    Di toko ini dia dapat membeli skateboard yang lengkap. Atau, ia juga dapat membeli sebuah papan, satu set roda yang terdiri dari 4 roda, satu set sumbu yang terdiri dari dua sumbu, dan satu set perlengkapan kecil untuk dapat merakit skateboard sendiri.
    Daftar barang dan model/jenis skateboard di toko ini sebagai berikut:

Barang	Model/Jenis		
Skateboard Lengkap			
Papan			
Dua set roda yang terdiri dari 4 roda			

Satu set sumbu yang terdiri dari dua sumbu		
Dua set perlengkapan kecil (seperti baut, mur, dan karet)		

Toko itu menawarkan tiga macam papan, dua macam set roda, dan dua macam set perlengkapan kecil. Hanya ada satu macam set sumbu.
Berapa banyak skateboard berbeda yang dapat dibuat oleh Erik?
A. 6
B. 8
C. 10
D. 12
E. 24
Solusi:
Banyak skateboard berbeda yang dapat dibuat oleh Erik adalah $2!\times 3!\times 2!\times 1!\times 2! = 24 \to$ [E]

40. Sebuah film dokumenter menayangkan perihal gempa bumi dan seberapa sering gempa bumi terjadi. Film itu mencangkup diskusi tentang keterkiraan gempa bumi. Seorang ahli geologi menyatakan “Dalam dua puluh tahun ke depan, peluang bahwa sebuah gempa bumi akan terjadi di kota Zadia adalah dua per tiga.”
Manakah di bawah ini yang paling mencerminkan maksud pernyataan ahli geologi tersebut?
A. $\frac{2}{3}\times 20 = 13{,}3$, sehingga antara 13 dan 14 tahun dari sekarang akan terjadi sebuah gempa bumi di kota Zadia.
B. $\frac{2}{3}$ lebih besar dari pada $\frac{1}{2}$, sehingga kita dapat meyakini bahwa akan terjadi sebuah gempa bumi di kota Zadia pada suatu saat dalam 20 tahun ke depan.
C. Peluang terjadinya sebuah gempa bumi di kota Zadia pada suatu saat dalam 20 tahun ke depan lebih tinggi dari pada peluang tidak terjadinya gempa bumi.
D. Kita tak dapat mengatakan apa yang akan terjadi, karena tidak seorang pun dapat meyakinkan kappan sebuah gempa bumi akan terjadi.
E. Pasti akan terjadi gempa bumi 20 tahun yang akan datang, karena sudah diperkiarakan oleh ahli geologi.

Solusi:
Peluang terjadinya sebuah gempa bumi di kota Zadia pada suatu saat dalam 20 tahun ke depan lebih tinggi dari pada peluang tidak terjadinya gempa bumi. $\to$ [C]