Solusi UN Paket 18

MATA PELAJARAN

Mata Pelajaran : Matematika
Jenjang : SMA/MA
Program Studi : IPA

WAKTU PELAKSANAAN

Hari/Tanggal : Rabu, 17 April 2013
Jam : 07.30 – 09.30

PETUNJUK UMUM

1. Periksalah Naskah Sola yang Anda terima sebelum mengerjakan soal yang meliputi:
   a. Kelengkapan jumlah halaman atau urutannya.
   b. Kelengkapan dan urutan nomor soal.
   c. Kesesuaian Nama Mata Uji dan Program Studi yang tertera pada kanan atas Naskah Soal dengan Lembar Jawaban Ujian Nasional (LJUN).
   d. Pastikan LJUN masih menyatu denga naskah soal.
2. Laporkan kepada pengawas ruang ujian apabila terdapat lembar soal, nomor soal yang tidak lengkap atau tidak urut, serta LJUN yang rusak atau robek untuk mendapat gantinya.
3. Tulislah Nama dan Nomor Peserta Ujian Anda pada koklom yang disediakan di halaman pertama butir soal.
4. Isilah pada LJUN Anda dengan:
   a. Nama peserta pada kotak yang disediakan, lalu hitamkan bulatan di bawahnya sesuai dengan huruf di atasnya.
   b. Nomor Peserta dan Tanggal Lahir pada kolom yang disediakan, lalu hitamkan bulatan bulatan di bawahnya sesuai huruf/angka di atasnya.
   c. Nama Sekolah, Tanggal Ujian, dan bubuhkan Tanda Tangan Anda pada kotak yang disediakan.
5. Pisahkan LJUN dari Naskah Ujian secara hati-hati dengan cara menyobek pada tempat yang ditentukan.
6. Tersedia waktu 120 menit untuk mengerjakan Naskah Soal tersebut.
7. Jumlah soal sebanyak 40 butir, pada setiap butir soal terdapat 5 (lima) pilihan jawaban.
8. Tidak diizinkan menggunakan kalkulator, HP, tabel matematika atau alat bantu hitung lainnya.
9. Periksalah pekerjaan Anda sebelum diserahkan kepada pengawas ruang ujian.
10. Lembar soal boleh dicorat-coret, sedangkan LJUN tidak boleh dicorat-coret.

SELAMAT MENGERJAKAN

1. Agar fungsi $f(x)=mx^2+2mx+(m+2)$ definit positif, maka nilai m yang memenuhi adalah….
A. $-3<m<0$
B. $-1<m<0$
C. $m<-3$
D. $m<-1$
E. $m>0$

Solusi:

Kita mengetahui bahwa jika $f(x)=ax^2+bx+c$ adalah definit positif, maka haruslah $a>0$ dan $D=b^2-4ac<0$.

$f(x)=mx^2+2mx+(m+2)$

$m>0$ .... (1)

$D=b^2-4ac<0$

$(2m)^2-4m(m+2)<0$

$4m^2-4m^2-8m<0$

$-8m<0$

$m>0$ .... (2)

Dari (1) $\cap$ (2) menghasilkan $m>0$. $\rightarrow$ [E]

2. Batas-batas nilai m yang menyebabkan persamaan kuadrat $mx^2+(2m-1)x+m-2=0$ mempunyai akar-akar real adalah….
A. $m\geq-\frac{9}{4}$ dan $m\neq0$
B. $m\geq-\frac{7}{4}$ dan $m\neq0$
C. $m\geq-\frac{1}{4}$ dan $m\neq0$
D. $m>\frac{1}{4}$
E. $m>\frac{9}{4}$

Solusi:

Syarat persamaan kuadrat $ax^2+bx+c=0$ mempunyai akar-akar real adalah $a\neq0$ dan $D\geq0$.

$mx^2+(2m-1)x+m-2=0$

$m\neq0$ .... (1)

$(2m-1)^2-4m(m-2)\geq0$

$4m^2-4m+1-4m^2+8m\geq0$

$4m+1\geq0$

$m\geq-\frac{1}{4}$ .... (2)

Dari (1) $\cap$ (2) diperoleh $m\geq-\frac{1}{4}$ dan $m\neq0\rightarrow$ [C]

3. Sebuah lingkaran memiliki titik pusat $(2,3)$ dan berdiameter 8cm . persamaan lingkaran tersebut adalah…
A. $x^2+y^2-4x-6y-3=0$
B. $x^2+y^2+4x-6y-3=0$
C. $x^2+y^2-4x+6y-3=0$
D. $x^2+y^2+4x+6y+3=0$
E. $x^2+y^2+4x-6y+3=0$

Solusi:

Diameter lingkaran $d = 8$

Jari-jari lingkaran $r = \frac{d}{2} = 4$

Persamaan lingkaran dengan pusat (a, b) dan jari-jari *r* adalah $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Jadi, persamaan lingkarannya adalah

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4^2$

$x^2 + y^2 - 4x - 9y + 4 + 9 = 16$

$x^2 + y^2 - 4x - 9y - 3 = 0 \rightarrow$ [A]

4. Harga 3 buah tas dan 2 buah dompet adalah Rp100.000,00, sedangkan harga 1 buah tas dan 3 buah dompet yang sama adalah Rp62.500,00. Gladis membeli tas dan dompet masing-masing 1 buah, untuk itu ia harus membayar sebesar….
   A. Rp27.500,00
   B. Rp32.500,00
   C. Rp35.000,00
   D. Rp37.500,00
   E. Rp42.500,00

Solusi:

Ambillah harga sebuah tas dan dompet masing-masing adalah *t* dan *d* rupiah.

$3t + 2d = 100.000$ .... (1)

$t + 3d = 62.500$

$t = 62.500 - 3d$ .... (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$3(62.500 - 3d) + 2d = 100.000$

$187500 - 9d + 2d = 100.000$

$7d = 87500$

$d = 12500$

$d = 12500 \rightarrow t = 62.500 - 3d = 62.500 - 3(12500) = 25.000$

Jadi, Gladis membeli tas dan dompet masing-masing 1 buah, untuk itu ia harus membayar sebesar Rp25.000,00 + Rp12.500,00 = Rp37.500,00 $\rightarrow$ [D]

5. Akar-akar persamaan $x^2 + (a-1)x + 2 = 0$ adalah α dan β. Jika $\alpha = 2\beta$ dan $a > 0$ maka nilai $a = ...$
   A. 2
   B. 3
   C. 4
   D. 6
   E. 8

Solusi:

Akar-akar persamaan $x^2 + (a-1)x + 2 = 0$ adalah α dan β

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -a + 1$ .... (1)

$\alpha = 2\beta$ .... (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$2\beta + \beta = -a + 1$

$\beta = \frac{-a+1}{3}$

$\alpha = 2\beta = \frac{2(-a+1)}{3}$

$\alpha\beta = \frac{c}{a} = 2$

$\frac{2(-a+1)}{3} \times \frac{-a+1}{3} = 2$

$\left(-a+1\right)=9$
$-a+1=\pm 3$
$a=-2$ atau $a=4$
Karena $a>0$, maka $a=4$. $\to$ [C]

6. Bentuk rasional dari $\dfrac{2+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$ adalah….

A. $\dfrac{1}{6}\left(3+5\sqrt{3}\right)$

B. $\dfrac{1}{6}\left(9+5\sqrt{3}\right)$

C. $\dfrac{1}{6}\left(9+\sqrt{3}\right)$

D. $\dfrac{1}{12}\left(9+\sqrt{3}\right)$

E. $\dfrac{1}{12}\left(3+\sqrt{3}\right)$

Solusi:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\times\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{6+2\sqrt{3}+3\sqrt{3}+3}{9-3}=\frac{1}{6}\left(9+5\sqrt{3}\right)\to \text{[B]}$$

7. Bentuk sederhana dari $\dfrac{\log^2 a-\log^2 b}{\log a+\log b}$ adalah….

A. -1
B. 1
C. $\log\dfrac{a}{b}$
D. $\log a-b$
E. $\log\left(a-b\right)$

Solusi:

$$\frac{\log^2 a-\log^2 b}{\log a+\log b}=\frac{\left(\log a-\log b\right)\left(\log a+\log b\right)}{\log a+\log b}=\log\frac{a}{b}\to \text{[C]}$$

8. Diketahui premis-premis berikut:
Premis 1: Jika hujan turun maka jalan menjadi licin.
Premis 2: Jika jalan menjadi licin maka pengendara sepeda motor menepi.
Premis 3: Hujan turun.
Kesimpulan yang sah dari ketiga premis tersebut adalah….
A. Hujan turun.
B. Jalan menjadi licin.
C. Hujan tidak turun.
D. Pengendara sepeda motor tidak menepi.
E. Pengendara sepeda motor menepi.

Solusi:

Kaidah Silogisme:

$$\begin{array}{l} p\to q \\ q\to r \\ \hline \therefore p\to r \end{array}$$

Kaidah Modus Tollens:

$$\begin{array}{l} p\to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Dengan demikian,

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \underline{p \quad \therefore} \\ .... \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{l} p \to r \\ \underline{p \qquad} \\ \therefore\ r \end{array}$$

Jadi, kesimpulan yang sah dari ketiga premis tersebut adalah “Pengendara sepeda motor menepi.” $\to$ [E]

9. Pernyataan yang setara dengan pernyataan “Jika setiap orang menanam pohon maka udara bersih” adalah….
   A. Jika beberapa orang tidak menanam pohon maka udara tidak bersih.
   B. Jika udara bersih maka setiap orang menanam pohon.
   C. Jika udara tidak bersih maka setiap orang tidak menanam pohon.
   D. Jika udara tidak bersih maka beberapa orang tidak menanam pohon.
   E. Jika semua orang tidak menanam pohon maka udara tidak bersih.

   Solusi:

   Konsep: $p \to q \equiv\ \sim q \to \sim p\ \equiv\ \sim p \vee q$

   Jadi, pernyataan tersebut setara dengan pernyataan “Jika udara tidak bersih maka beberapa orang tidak menanam pohon .” $\to$ [D]

10. Diketahui vektor $\vec{a} = 3i - 2j + k$, $\vec{b} = 2i - 3k$, dan $\vec{c} = j - 2k$. Vektor yang mewakili $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ adalah….
    A. $12i - 5j + 12k$
    B. $-3i + 9k$
    C. $-7i - 9k$
    D. $-3i - 3j + 9k$
    E. $3i - j + 9k$

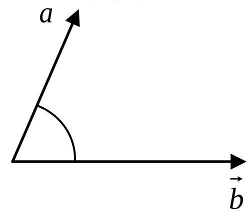
    Solusi:

$$2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-6+0 \\ -4-0+1 \\ 2+9-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = -3i + 9k \to \text{[B]}$$

11. Diketahui $\vec{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Apabila α adalah sudut yang dibentuk antara vektor $\vec{p}$ dan $\vec{q}$, maka $\tan\alpha = ...$
    A. $\frac{1}{6}\sqrt{6}$
    B. $\frac{1}{7}\sqrt{7}$
    C. $\frac{6}{7}\sqrt{7}$
    D. $\sqrt{6}$
    E. $\sqrt{7}$

    Solusi:

    Kita mengetahui bahwa jika diberikan vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$, maka berlaku $\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$



$$\cos\angle\left(\vec{p},\vec{q}\right) = \cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 0^2}\sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2}}$$

$$= \frac{-3+9-0}{\sqrt{18}\sqrt{14}} = \frac{6}{6\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2} = \sqrt{\frac{7-1}{7}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}}{\frac{1}{\sqrt{7}}} = \sqrt{6} \to \text{[D]}$$

12. Diketahui $\vec{a} = 2i + 2j + 9k$ dan $\vec{b} = 2i - 2j + k$. Proyeksi vektor orthogonal $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah….
    A. $3i - 3j + k$
    B. $3i - 5j - 2k$
    C. $4i - 4j + 2k$
    D. $2i - 2j + k$
    E. $5i + 5j + 5k$

    Solusi:

    Kita mengetahui bahwa proyeksi vektor orthogonal $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah $\vec{c} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\vec{b}$

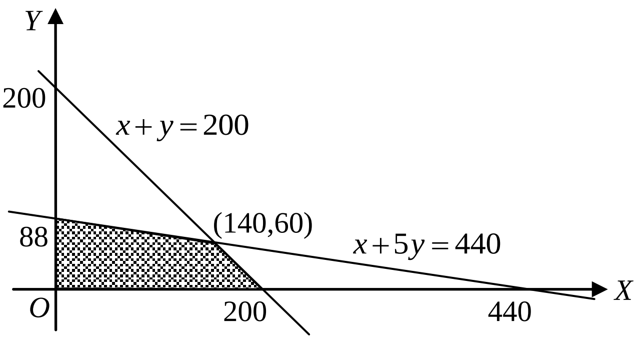
$$\vec{c} = \frac{\begin{pmatrix}2\\2\\9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}}{2^2+(-2)^2+1^2}\vec{b} = \frac{4-4+9}{9}\vec{b} = \vec{b} = 2i-2j+k \to \text{[D]}$$

13. Luas daerah parkir 1.760 m^2. Luas rata-rata untuk mobil kecil 4 m^2 dan mobil besar 20 m^2. Daya tamping maksimum hanya 200 kendaraan. Biaya parkir mobil kecil Rp1.000,00/jam dan mobil besar Rp2.000,00/jam. Jika dalam satu jam terisi penuh dan tidak ada kendaraan yang pergi dan dating, penghasilan maksimum tempat parkir adalah ....
    A. Rp176.000,00
    B. Rp200.000,00
    C. Rp260.000,00
    D. Rp300.000,00
    E. Rp340.000,00

    Solusi:

    Ambillah banyak mobil kecil dan besar adalah x dan y buah.

$$\begin{cases} 4x+20y \le 1.760 \\ x+y \le 200 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5y \le 440 \\ x+y \le 200 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



$f(x,y) = 1000x + 2000y$

$x + 5y = 440$ .... (1)

$x + y = 200$ .... (2)

Persamaan (1) – persamaan (2) menghasilkan

$4y = 240$

$y = 60$

$x + 60 = 200$

$x = 140$

Koordinat titik potong garis $x+5y=440$ dan $x+y=200$ adalah $(140,60)$

Titik (x, y)	$f(x, y) = 1000x + 2000y$	Keterangan
$(0,0)$	$1000 \times 0 + 2000 \times 0 = 0$	
$(200,0)$	$1000 \times 200 + 2000 \times 0 = 200.000$	
$(140,60)$	$1000 \times 140 + 2000 \times 60 = 260.000$	Maksimum
$(0,88)$	$1000 \times 0 + 2000 \times 88 = 176.000$	

Jadi, penghasilan maksimum tempat parkir adalah Rp260.000,00. $\rightarrow$ [C]

14. Suku banyak $f(x) = 2x^3 + px^2 + 10x + 3$ habis dibagi $(x+1)$. Salah satu faktor linear lainnya adalah….
 A. $x - 3$
 B. $x + 1$
 C. $2x + 1$
 D. $2x + 3$
 E. $3x + 2$

Solusi:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 9 & 10 & 3 \\ & & -2 & 7 & -3 \\ \hline & 2 & 7 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x) = 2x^3 + px^2 + 10x + 3$
$f(-1) = 2(-1)^3 + p(-1)^2 + 10(-1) + 3 = 0$
$-2 + p - 10 + 3 = 0$
$p = 9$
$f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 10x + 3$
$\therefore\ f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 10x + 3 = (x+1)(2x^2 + 7x + 3) = (x+1)(2x+1)(x+3)$
$\therefore$ salah satu faktor linear lainnya adalah $2x + 1$. $\rightarrow$ [C]

15. Diketahui fungsi $f(x) = x^2 - x + 3$ dan $g(x) = 3x - 2$. Fungsi komposisi $(f \circ g)(x)$ adalah….
 A. $3x^2 - 4x + 3$
 B. $3x^2 - 3x + 7$
 C. $3x^2 + 5x + 3$
 D. $6x^2 - 12x + 9$
 E. $9x^2 - 15x + 9$

Solusi:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(3x-2) \\ &= (3x-2)^2 - (3x-2) + 3 \\ &= 9x^2 - 12x + 4 - 3x + 2 + 3 \\ &= 9x^2 - 15x + 9 \end{aligned}$$ $\rightarrow$ [E]

16. Diketahui $g(x) = \dfrac{x-1}{2x+1}$; $x \neq -\dfrac{1}{2}$. Invers fungsi g adalah $g^{-1}(x) = \ldots.$
 A. $\dfrac{2x+1}{x-1}; x \neq 1$
 B. $\dfrac{x+1}{1-2x}; x \neq \dfrac{1}{2}$
 C. $\dfrac{x-2}{1-x}; x \neq 1$

D. $\frac{1-2x}{x+1}; x \neq -1$

E. $\frac{2x-1}{x+1}; x \neq -1$

Solusi:

Cara 1:

$g(x) = \frac{x-1}{2x+1}\ ;\ x \neq -\frac{1}{2}$

$x = \frac{y-1}{2y+1}$

$2xy + x = y - 1$

$(2x-1)y = -x-1$

$y = \frac{-x-1}{2x-1}$

$g^{-1}(x) = \frac{x+1}{1-2x},\ x \neq \frac{1}{2} \to$ [B]

Cara 2:

Kita mengetahui bahwa jika $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ **, maka** $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$

$g(x) = \frac{x-1}{2x+1}\ ;\ x \neq -\frac{1}{2} \to\ g^{-1}(x) = \frac{-x-1}{2x-1} = \frac{x+1}{1-2x},\ x \neq \frac{1}{2} \to$ [B]

17. Suku ke-4 dan suku ke-12 barisan aritmetika berturut turut 36 dan 100. Jumlah 20 suku pertama deret aritmetika tersebut adalah ….
    A. 164
    B. 172
    C. 1640
    D. 1760
    E. 1840

    Solusi:

    Kita mengetahui bahwa suku ke-*n* dari barisan aritmetika dirumuskan sebagai $u_n = a + (n-1)b$.

$u_{12} - u_4 = 100 - 36$

$a + 11b - (a + 3b) = 64$

$8b = 64$

$b = 8$

$b = 8 \to\ u_4 = 36$

$a + 3b = 36$

$a + 3 \times 8 = 36$

$a = 36 - 24 = 12$

Jumlah *n* suku pertama dari barisan aritmetika adalah $S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)b\right]$

$S_{20} = \frac{20}{2}\left[2 \times 12 + (20-1)8\right] = 1760$

Jadi, jumlah 20 suku pertama deret aritmetika tersebut adalah 1760. $\to$ [D]

18. Sebuah bola dijatuhkan ke lantai dari ketinggian 5 m dan memantul kembali dengan tinggi $\frac{3}{4}$ dari ketinggian semula. Panjang lintasan bola tersebut sampai bola berhenti adalah ….
    A. 25m
    B. 30m
    C. 35m
    D. 45m

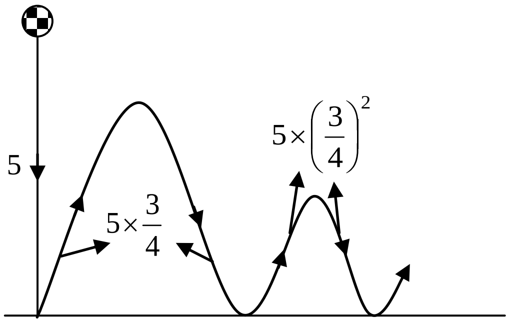
E. 65m

Solusi:

Cara 1:

$$S_{\text{turun}} = 5 + 5\times\frac{3}{4} + 5\times\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots = \frac{5}{1-\frac{3}{4}} = 20$$

$$S_{\text{naik}} = 5\times\frac{3}{4} + 5\times\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots = \frac{5\times\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 15$$



$\therefore$ panjang lintasan bola tersebut sampai bola berhenti adalah $(20+15)\text{m} = 35\text{m} \to$ [C]

Cara 2:

$S = \frac{y+x}{y-x}\times h$, dengan h = 5 m = tinggi bola dan $r = \frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ adalah rasio

$$S = \frac{4+3}{4-3}\times 5 = 35\text{m}$$

$\therefore$ panjang lintasan bola tersebut sampai bola berhenti adalah $35\text{m} \to$ [C]

19. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 3 \\ -2 & b \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, dan $A\cdot B = C$. Nilai dari $a+b = \ldots.$

A. -6
B. -5
C. -1
D. 1
E. 5

Solusi:

$A\cdot B = C$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 3 \\ -2 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a-4 & 3+2b \\ \ldots. & \ldots. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

$a - 4 = -2$

$a = 2$

$3 + 2b = -3$

$2b = -6$

$b = -3$

Jadi, nilai dari $a + b = 2 - 3 = -1 \to$ [C]

20. Bayangan titik $S(2,4)$ oleh rotasi yang berpusat di $O(0,0)$ sejauh $90°$ berlawanan arah jarum jam dan dilanjutkan oleh pencerminan terhadap $y = x$ adalah ….

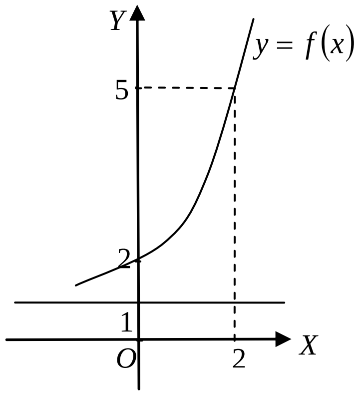
A. $S''(2,-4)$
B. $S''(-2,4)$
C. $S''(2,4)$
D. $S''(-4,-2)$
E. $S''(-4,2)$

Solusi:

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Jadi, bayangannya adalah $S''(2,-4)$. $\to$ [A]

21. Persamaan grafik fungsi pada gambar berikut adalah ....



A. $f(x) = 2^{x+1}$

B. $f(x) = 2^x + 1$

C. $f(x) = 2^{x+1} + 1$

D. $f(x) = {}^2\log(x+1)$

E. $f(x) = 1 + {}^2\log x$

Solusi:

Ambillah persamaan fungsi eksponen adalah $y = a^x + k$

$(0,2) \to y = a^x + k$

$2 = a^0 + k$

$2 = 1 + k$

$k = 1$

$\therefore\ y = a^x + 1$

$(2,5) \to y = a^x + 1$

$5 = a^2 + 1$

$a^2 = 4$

$a = 2$

$\therefore\ y = 2^x + 1 \to$ [B]

22. Penyelesaian pertidaksamaan ${}^2\log x + {}^2\log(x-1) < 1$ adalah ....

A. $-1 < x < 2$

B. $0 < x < 1$

C. $1 < x < 2$

D. $1 \le x < 2$

E. $0 < x < 2$

Solusi:

${}^2\log x + {}^2\log(x-1) < 1$

$x > 0$ .... (1)

$x - 1 > 0$

$x > 1$ .... (2)

${}^2\log x + {}^2\log(x-1) < 1$

${}^2\log x(x-1) < {}^2\log 2$

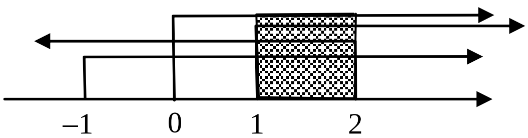
$x(x-1) < 2$

$x^2 - x - 2 < 0$

$(x-2)(x+1) < 0$

$-1 < x < 2$ .... (3)

Dari (1) $\cap$ (2) $\cap$ (3) diperoleh



Jadi, penyelesaiannya adalah $1 < x < 2$. $\to$ [C]

23. Dalam sebuah lingkaran yang berjari-jari 6 cm dibuat segi-12 beraturan. Panjang sisi segi-12 beraturan tersebut adalah ....

A. $6\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm

B. $6\sqrt{2-\sqrt{2}}$ cm

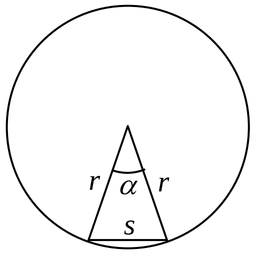
C. $6\sqrt{3-\sqrt{2}}$ cm

D. $6\sqrt{3+\sqrt{3}}$ cm

E. $6\sqrt{3+\sqrt{2}}$ cm

Solusi:

Ambillah sudut pusat $\alpha = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ dan s adalah panjang sisi segi-12.



Menurut **Aturan Kosinus:**

$s^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 30^\circ = 72 - 36\sqrt{3}$

$s = \sqrt{72-36\sqrt{3}} = 6\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm

$\therefore$ panjang sisi segi-12 beraturan tersebut adalah $6\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm. $\rightarrow$ [A]

24. Himpunan penyelesaian persamaan $4\sin x = 1 + 2\cos 2x$ untuk $0^\circ \le x \le 360^\circ$ adalah ....

A. $\{30^\circ, 150^\circ\}$

B. $\{30^\circ, 210^\circ\}$

C. $\{150^\circ, 210^\circ\}$

D. $\{210^\circ, 330^\circ\}$

E. $\{240^\circ, 300^\circ\}$

Solusi:

$4\sin x = 1 + 2\cos 2x$

$4\sin x = 1 + 2(1 - 2\sin^2 x)$

$4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$

$(2\sin x - 1)(2\sin x + 3) = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$ (diterima) atau $\sin x = -\frac{3}{2}$ (ditolak)

$x = 30^\circ$ atau 150°

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{30^\circ, 150^\circ\}$. $\rightarrow$ [A]

25. Nilai dari $\frac{\sin 105^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ - \cos 15^\circ}$ adalah….

A. $-\sqrt{3}$

B. -1

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

E. $\sqrt{3}$

Solusi:

$$\frac{\sin 105^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ - \cos 15^\circ} = \frac{2\cos 60^\circ \sin 45^\circ}{-2\sin 45^\circ \sin 30^\circ} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1 \rightarrow \text{[B]}$$

26. Diketahui kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk 6 cm. Jarak titik *G* ke diagonal *BE* adalah ….

A. $3\sqrt{6}$ cm

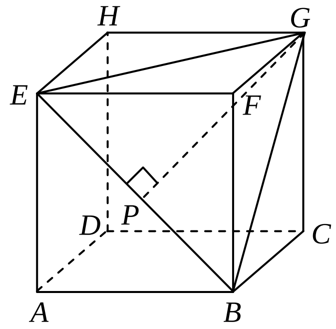
B. $6\sqrt{6}$ cm

C. $9\sqrt{6}$ cm

D. $3\sqrt{10}$ cm

E. $9\sqrt{10}$ cm

Solusi:



Perhatikan ΔBEG adalah segitiga sama sisi.

$BE = EG = BG = 6\sqrt{2}$

$\sin \angle GEB = \dfrac{GP}{EG}$

$GP = EG \sin \angle GEB = 6\sqrt{2} \sin 60^\circ = 6\sqrt{2} \times \dfrac{1}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{6}$ cm

Jadi, jarak titik G ke diagonal BE adalah $3\sqrt{6}\,\text{cm} \to$ [A]

27. Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ dengan rusuk a cm. Sudut α adalah sudut antara bidang BEG dan bidang $EFGH$. Nilai dari $\tan \alpha = ...$

A. $\dfrac{1}{3}\sqrt{6}$

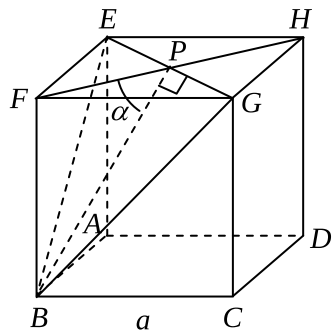
B. $\sqrt{3}$

C. $\dfrac{1}{3}\sqrt{3}$

D. $\sqrt{2}$

E. $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

Solusi:



Menurut **Teorema Pythagoras**:

$FH = \sqrt{FG^2 + GH^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}\,\text{cm}$

$FP = \dfrac{1}{2} FH = \dfrac{a}{2}\sqrt{2}\,\text{cm}$

$\angle(BEG, EFGH) = \alpha$

$\tan \alpha = \dfrac{FB}{FP} = \dfrac{a}{\frac{a}{2}\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \to$ [D]

28. Diketahui dua bilangan bulat p dan q yang memenuhi hubungan $q - 2p = 50$. Nilai minimum dari $p^2 + q^2$ adalah….

A. 100
B. 250
C. 500
D. 1250
E. 5000

Solusi:

$q - 2p = 50$

$q = 2p + 50$

Ambillah $y = p^2 + q^2$, sehingga

$y = p^2 + (2p + 50)^2 = p^2 + 4p^2 + 200p + 2500 = 5p^2 + 200p + 2500$

$y' = 10p + 200$

Nilai stasioner y dicapai jika $y' = 0$, sehingga

$10m + 200 = 0$

$m = -20$

$y_{\min}(-20) = 5(-20)^2 + 200(-20) + 2500 = 500 \to$ [C]

29. Nilai dari $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{4x^2 - 8x + 3} - 2x - 4 \right) = ...$

A. -8
B. -6

C. 2
D. 6
E. 8
Solusi:
Cara 1:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-8x+3}-2x-4\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{(2x-2)^2}-2x-4\right]=\lim_{x\to\infty}\left[(2x-2)-2x-4\right]=-6\to \text{[B]}$$

Cara 2:

Kita mengetahui bahwa jika $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{ax^2+px+q}\right)=\frac{b-p}{2\sqrt{a}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-8x+3}-2x-4\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-8x+3}-\sqrt{4x^2+16x+16}\right)$$

$$=\frac{-8-16}{2\sqrt{4}}=\frac{-24}{4}=-6\to \text{[B]}$$

30. Nilai $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 2x}{x\sin 2x}=....$
A. 4
B. 2
C. 0
D. -2
E. -4
Solusi:
Cara 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 2x}{x\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\times 1=2\to \text{[B]}$$

Cara 2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 2x}{x\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x\sin 2x}=\frac{(2x)^2}{x\cdot 2x}=2\to \text{[B]}$$

31. Hasil dari $\int_0^2 3(x+1)(x-6)dx=....$
A. -58
B. -56
C. -28
D. -16
E. -14
Solusi:

$$\int_0^2 3(x+1)(x-6)dx=\int_0^2\left(3x^2-15x-18\right)dx=\left[x^3-\frac{15}{2}x^2-18x\right]_0^2=2^3-\frac{15}{2}\times 2^2-18\times 2-0$$

$$=8-30-36=-58\to \text{[A]}$$

32. Hasil dari $\int\frac{(x-1)}{\sqrt{x^2-2x}}dx=....$
A. $\frac{1}{2}\sqrt{x^2-2x}+C$
B. $\sqrt{x^2-2x}+C$
C. $2\sqrt{x^2-2x}+C$
D. $2x\sqrt{x^2-2x}+C$
E. $4x\sqrt{x^2-2x}+C$
Solusi:

$$\int \frac{(x-1)}{\sqrt{x^2-2x}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}d\left(x^2-2x\right) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\left(x^2-2x\right)^{-\frac{1}{2}+1} + C = \sqrt{x^2-2x} + C \rightarrow \text{[B]}$$

33. Nilai dari $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 5x + \sin x)dx = ...$

A. $-\frac{3}{5}$

B. $-\frac{1}{5}$

C. 0

D. $\frac{1}{5}$

E. $\frac{3}{5}$

Solusi:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 5x + \sin x)dx = \left[-\frac{1}{5}\cos 5x - \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{1}{5}\cos 0 - \cos 0\right) = \frac{1}{10} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 1$$

$$= \frac{1-5+2+10}{10} = \frac{8}{10} = \frac{3}{5} \rightarrow \text{[E]}$$

34. Daerah dibatasi kurva $y = x^2$ dan garis $x + y - 2 = 0$ diputar mengelilingi sumbu X. Volume benda putar yang terjadi adalah….

A. $15\frac{2}{3}\pi$ satuan volume

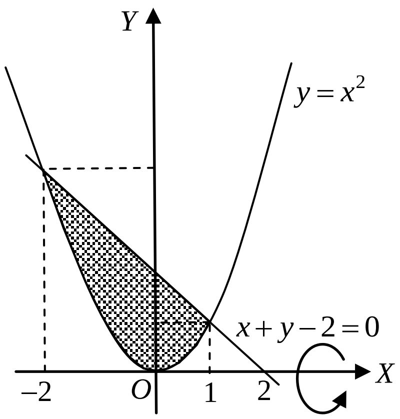
B. $15\frac{2}{5}\pi$ satuan volume

C. $14\frac{2}{5}\pi$ satuan volume

D. $14\frac{2}{3}\pi$ satuan volume

E. $10\frac{3}{5}\pi$ satuan volume

Solusi:



Fungsi-fungsi integral adalah $y = x^2$ dan $x + y - 2 = 0$

Batas-batas integral:

$x + x^2 - 2 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x-1)(x+2) = 0$

$x = 1$ atau $x = -2$

$$V = \pi\int_{-2}^{1}\left[(2-x)^2 - \left(x^2\right)^2\right]dx = \pi\int_{-2}^{1}\left(4 - 4x + x^2 - x^4\right)dx$$

$$= \pi\left[4x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_{-2}^{1} = \pi\left[4 - 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \left(-8 - 8 - \frac{8}{3} + \frac{32}{5}\right)\right]$$

$$= \pi\left(18 + 3 - \frac{33}{5}\right) = \frac{72}{5}\pi \quad 14\frac{2}{5}\pi \text{ satuan volume} \rightarrow \text{[C]}$$

35. Luas daerah yang diarsir seperti tampak pada gambar dapat dinyatakan dengan rumus….

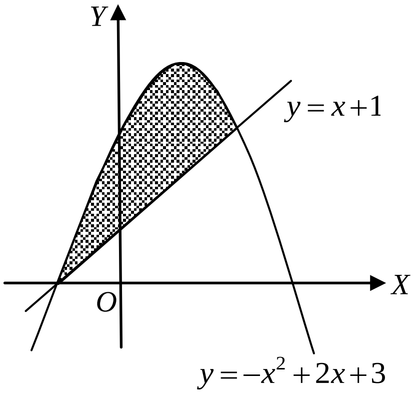
A. $L=\int_{-1}^{2}\left[\left(-x^2+2x+3\right)-\left(x+1\right)\right]dx$

B. $L=\int_{-1}^{2}\left[\left(x+1\right)-\left(-x^2+2x+3\right)\right]dx$

C. $L=\int_{-2}^{1}\left[\left(-x^2+2x+3\right)-\left(x+1\right)\right]dx$

D. $L=\int_{-2}^{1}\left[\left(x+1\right)-\left(-x^2+2x+3\right)\right]dx$

E. $L=\int_{-1}^{2}\left[\left(-x^2+2x+3\right)+\left(x+1\right)\right]dx$



Solusi:

Batas-batas integral dengan kurva $y=-x^2+2x+3$ dan $y=x+1$

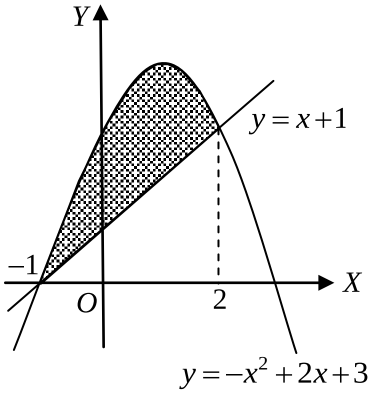
$-x^2+2x+3=x+1$

$x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$

$x=-1$ atau $x=2$

$L=\int_{-1}^{2}\left[\left(-x^2+2x+3\right)-\left(x+1\right)\right]dx\rightarrow$ [C]



36. Banyak bilangan terdiri dari 3 angka berbeda dan lebih dari 200 yang dapat dibentuk dari angka-angka 1, 2, 3, 4, 5 adalah….

A. 24
B. 36
C. 48
D. 60
E. 75

Solusi:

4	4	3

Banyak bilangan tersebut adalah $4\times4\times3=48\rightarrow$ [C]

37. Terdapat 2 siswa laki-laki dan 5 siswa perempuan duduk berdampingan pada kursi berjajar. Jika siswa laki-laki duduk di ujung, banyak cara mereka duduk berdampingan adalah….

A. 240
B. 120
C. 42
D. 21
E. 10

Solusi:

Banyak cara mereka duduk berdampingan adalah $2\times5!=2\times120=240\rightarrow$ [A]

38. Kuartil bawah data pada tabel berikut ini adalah….

A. 31,5
B. 36,5
C. 37,5
D. 42,5
E. 45,9

Berat Badan (kg)	Frekuensi
30 – 34	4
35 – 39	10
40 – 44	14
45 – 49	7
50 – 54	5

Solusi:

Kelas kuartil bawah terletak pada data ke $\frac{n}{4}=\frac{40}{4}=10$, yaitu $35-39$.

Rumus kuartil atas adalah $Q_1=L_1+\frac{\frac{n}{4}-fk_1}{f_1}\times p$

$$Q_1=34{,}5+\frac{\frac{40}{4}-4}{10}\times 5=34{,}5+3=37{,}5\to \text{[C]}$$

39. Erik suka sekali main skateboard. Dia mengunjungi sebuah toko bersama SKATERS untuk mengetahui beberapa model.
Di toko ini dia dapat membeli skateboard yang lengkap. Atau, ia juga dapat membeli sebuah papan, satu set roda yang terdiri dari 4 roda, satu set sumbu yang terdiri dari dua sumbu, dan satu set perlengkapan kecil untuk dapat merakit skateboard sendiri.
Daftar barang dan model/jenis skateboard di toko ini sebagai berikut:

Barang	Model/Jenis
Skateboard Lengkap	 
Papan	  
Dua set roda yang terdiri dari 4 roda	 
Satu set sumbu yang terdiri dari dua sumbu	 
Dua set perlengkapan kecil (seperti baut, mur, dan karet)	 

Toko itu menawarkan tiga macam papan, dua macam set roda, dan dua macam set perlengkapan kecil. Hanya ada satu macam set sumbu.
Berapa banyak skateboard berbeda yang dapat dibuat oleh Erik?
A. 6
B. 8
C. 10
D. 12
E. 24
Solusi:

Banyak skateboard berbeda yang dapat dibuat oleh Erik adalah $2! \times 3! \times 2! \times 1! \times 2! = 24 \to$ [E]

40. Sebuah film dokumenter menayangkan perihal gempa bumi dan seberapa sering gempa bumi terjadi. Film itu mencangkup diskusi tentang keterkiraan gempa bumi. Seorang ahli geologi menyatakan "Dalam dua puluh tahun ke depan, peluang bahwa sebuah gempa bumi akan terjadi di kota Zadia adalah dua per tiga."

Manakah di bawah ini yang paling mencerminkan maksud pernyataan ahli geologi tersebut?

A. $\frac{2}{3} \times 20 = 13{,}3$, sehingga antara 13 dan 14 tahun dari sekarang akan terjadi sebuah gempa bumi di kota Zadia.

B. $\frac{2}{3}$ lebih besar dari pada $\frac{1}{2}$, sehingga kita dapat meyakini bahwa akan terjadi sebuah gempa bumi di kota Zadia pada suatu saat dalam 20 tahun ke depan.

C. Peluang terjadinya sebuah gempa bumi di kota Zadia pada suatu saat dalam 20 tahun ke depan lebih tinggi dari pada peluang tidak terjadinya gempa bumi.

D. Kita tak dapat mengatakan apa yang akan terjadi, karena tidak seorang pun dapat meyakinkan kappan sebuah gempa bumi akan terjadi.

E. Pasti akan terjadi gempa bumi 20 tahun yang akan datang, karena sudah diperkiarakan oleh ahli geologi.

Solusi:

Peluang terjadinya sebuah gempa bumi di kota Zadia pada suatu saat dalam 20 tahun ke depan lebih tinggi dari pada peluang tidak terjadinya gempa bumi. $\to$ [C]