Selasa, 10 Juli 2012

Soal 1. Diberikan segitiga ABC, titik J adalah pusat *excircle* berseberangan dengan titik sudut A. *Excircle* ini menyinggung sisi BC di M, dan menyinggung garis AB dan AC berturut-turut di K dan L. Garis LM dan BJ bertemu di F, dan garis KM dan CJ bertemu di G. Misalkan S adalah titik perpotongan garis AF dan BC, dan misalkan T adalah titik perpotongan garis AG dan BC.

Buktikan bahwa M adalah titik tengah ST.

(*Excircle* ABC berseberangan dengan titik sudut A adalah lingkaran yang menyinggung ruas garis BC, menyinggung sinar AB di setelah B, menyinggung sinar AC di setelah C.)

Soal 2. Misalkan $n \geq 3$ suatu bilangan bulat, dan misalkan $a_2, a_3, \ldots, a_n$ adalah bilangan real positif sehingga $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Buktikan bahwa

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n \;>\; n^n.$$

Soal 3. *Permainan tebakan pembohong* adalah permainan yang dimainkan oleh dua pemain A dan B. Aturan permainan tergantung pada dua bilangan bulat positif k dan n yang diketahui kedua pemain.

Pada awal permainan A memilih bilangan bulat x dan N dengan $1 \leq x \leq N$. Pemain A menjaga kerahasiaan x, dan dengan jujur mengatakan N ke pemain B. Pemain B sekarang mencoba untuk mendapatkan informasi tentang x dengan menanyakan kepada pemain A pertanyaan-pertanyaan sebagai berikut: masing-masing pertanyaan berisikan B mengspesifikasikan sebarang himpunan S dari bilangan bulat positif (dimungkinkan himpunan itu telah dispesifikasikan di beberapa pertanyaan sebelumnya), dan menanyakan kepada A apakah x di dalam S. Pemain B boleh bertanya sebanyak mungkin pertanyaan sesuai keinginannya. Setelah masing-masing pertanyaan, pemain A harus segera menjawab pertanyaan itu dengan *ya* atau *tidak*, tetapi diperbolehkan untuk berbohong sebanyak yang dia inginkan; satu-satunya batasan adalah bahwa, diantara sebarang $k+1$ jawaban berturutan, setidaknya satu jawaban harus benar.

Setelah B mengajukan sebanyak mungkin pertanyaan-pertanyaan yang dia inginkan, dia harus mengspesifikasikan himpunan X beranggotakan paling banyak n bilangan bulat positif. Jika x di dalam X maka B menang; jika tidak, ia kalah. Buktikan bahwa:

1. Jika $n \geq 2^k$, maka B dapat menjamin suatu kemenangan.
2. Untuk semua k cukup besar, terdapat suatu bilangan bulat $n \geq (1,99)^k$ sehingga B tidak dapat menjamin suatu kemenangan.

53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: **Indonesian**

Day: **2**

Rabu, 11 Juli 2012

Soal 4. Cari semua fungsi $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sehingga, untuk semua bilangan bulat a, b, c yang memenuhi $a+b+c=0$, persamaan berikut ini berlaku:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(Di sini $\mathbb{Z}$ menotasikan himpunan bilangan bulat.)

Soal 5. Misalkan ABC suatu segitiga dengan $\angle BCA = 90°$, dan misalkan D adalah kaki garis tinggi dari C. Misalkan X adalah titik di bagian dalam ruas garis CD. Misalkan K adalah titik pada ruas garis AX sehingga $BK = BC$. Serupa, misalkan L adalah titik pada ruas garis BX sehingga $AL = AC$. Misalkan M adalah titik perpotongan AL dan BK.

Buktikan bahwa $MK = ML$.

Soal 6. Cari semua bilangan bulat positif n yang mana terdapat bilangan bulat non-negatif $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sehingga

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1.$$

Waktu: 4 jam dan 30 menit
Masing-masing soal bernilai 7 angka