

Selasa, 23 Juli 2013

**Soal 1.** Buktikan bahwa untuk sebarang pasangan bilangan bulat positif  $k$  dan  $n$ , terdapat  $k$  bilangan bulat positif  $m_1, m_2, \dots, m_k$  (tidak harus berbeda) sehingga

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

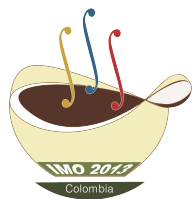
**Soal 2.** Suatu konfigurasi dari 4027 titik pada bidang disebut *Kolombia* jika konfigurasi itu memuat 2013 titik merah dan 2014 titik biru, dan tidak ada tiga titik dari konfigurasi yang segaris. Dengan menggambar beberapa garis, bidang terbagi menjadi beberapa area. Suatu penataan garis-garis adalah *bagus* untuk suatu konfigurasi Kolombia jika kondisi berikut dipenuhi:

- tidak ada garis yang melalui sebarang titik dari konfigurasi itu;
- tidak ada area yang memuat kedua warna sekaligus.

Carilah nilai  $k$  terkecil sehingga untuk sebarang konfigurasi Kolombia dari 4027 titik, terdapat suatu penataan bagus dari  $k$  garis.

**Soal 3.** Misalkan *excircle* segitiga  $ABC$  berseberangan dengan titik  $A$  menyinggung sisi  $BC$  di titik  $A_1$ . Definisikan titik  $B_1$  pada  $CA$  dan titik  $C_1$  pada  $AB$  secara analog, berturut-turut menggunakan *excircles* berseberangan dengan  $B$  dan  $C$ . Misalkan titik pusat lingkaran luar segitiga  $A_1B_1C_1$  berada pada lingkaran luar segitiga  $ABC$ . Buktikan bahwa segitiga  $ABC$  adalah siku-siku.

*Excicle segitiga  $ABC$  berseberangan dengan titik sudut  $A$  adalah lingkaran yang menyinggung ruas garis  $BC$ , menyinggung sinar  $AB$  di setelah  $B$ , menyinggung sinar  $AC$  di setelah  $C$ . Excicle berseberangan dengan  $B$  dan  $C$  didefinisikan serupa.*



Rabu, 24 Juli 2013

**Soal 4.** Misalkan  $ABC$  adalah segitiga lancip dengan titik tinggi  $H$ , dan misalkan  $W$  titik pada sisi  $BC$ , yang secara tegas terletak di antara  $B$  dan  $C$ . Titik-titik  $M$  dan  $N$  berturut-turut adalah titik-titik kaki garis tinggi dari  $B$  dan  $C$ . Lingkaran luar  $BWN$  ditulis  $\omega_1$ , dan misalkan  $X$  adalah titik pada  $\omega_1$  sehingga  $WX$  merupakan diameter  $\omega_1$ . Secara analog,  $\omega_2$  menyatakan lingkaran luar  $CWM$ , dan misalkan  $Y$  adalah titik pada  $\omega_2$  sehingga  $WY$  merupakan diameter  $\omega_2$ . Buktikan bahwa  $X$ ,  $Y$  dan  $H$  segaris.

**Soal 5.** Misalkan  $\mathbb{Q}_{>0}$  adalah himpunan bilangan rasional positif. Misalkan  $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  adalah suatu fungsi yang memenuhi tiga kondisi berikut:

- (i) untuk semua  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ , berlaku  $f(x)f(y) \geq f(xy)$ ;
- (ii) untuk semua  $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ , berlaku  $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ ;
- (iii) terdapat suatu bilangan rasional  $a > 1$  sehingga  $f(a) = a$ .

Buktikan bahwa  $f(x) = x$  untuk semua  $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ .

**Soal 6.** Misalkan  $n \geq 3$  adalah bilangan bulat, dan perhatikan suatu lingkaran yang ditandai dengan  $n + 1$  titik-titik yang berjarak sama antar dua titik bersebelahan. Anggap semua pelabelan titik-titik itu dengan bilangan-bilangan  $0, 1, \dots, n$  sehingga masing-masing label digunakan tepat satu kali; dua pelabelan tersebut dipandang sama jika salah satu bisa diperoleh dari yang lain menggunakan rotasi pada lingkaran itu. Suatu pelabelan disebut *cantik* jika, untuk sebarang empat label  $a < b < c < d$  dengan  $a + d = b + c$ , talibusur yang menghubungkan titik-titik yang dilabeli  $a$  dan  $d$  tidak memotong talibusur yang menghubungkan titik-titik yang dilabeli  $b$  dan  $c$ .

Misalkan  $M$  adalah banyaknya pelabelan cantik, dan misalkan  $N$  adalah banyaknya pasangan terurut bilangan bulat positif  $(x, y)$  sehingga  $x + y \leq n$  dan  $\gcd(x, y) = 1$ . Buktikan bahwa

$$M = N + 1.$$