

SOLUSI

SOAL-SOAL LATIHAN 2

UJIAN SEKOLAH DAN UJIAN NASIONAL

MATEMATIKA SMA IPA TAHUN 2014

Pilihlah jawaban yang paling tepat!

1. Diberikan premis-premis berikut!

1. Jika pengguna kendaraan bermotor bertambah banyak maka kemacetan di ruas jalan semakin padat.

2. Kemacetan di ruas jalan tidak semakin padat atau kegiatan ekonomi masyarakat terhambat.

Negasi dari penarikan kesimpulan yang sah pada premis-premis tersebut adalah

A. Jika pengguna kendaraan bermotor bertambah banyak maka kegiatan ekonomi masyarakat terhambat.

B. Jika pengguna kendaraan bermotor bertambah banyak maka kegiatan ekonomi masyarakat tidak terhambat.

C. Pengguna kendaraan bermotor bertambah banyak dan kegiatan ekonomi masyarakat terhambat

D. Pengguna kendaraan bermotor bertambah banyak dan kegiatan ekonomi masyarakat tidak terhambat

E. Pengguna kendaraan bermotor bertambah banyak atau kegiatan ekonomi masyarakat tidak terhambat

Solusi:

$$\sim q \vee r \equiv q \wedge r$$

$$p \rightarrow q$$

$$p \rightarrow q$$

$$\sim q \vee r$$

$$\Leftrightarrow$$

$$q \rightarrow r$$

$$\dots$$

$$\therefore p \rightarrow r$$

$$\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

Jika pengguna kendaraan bermotor bertambah banyak maka kemacetan di ruas jalan semakin padat

Jika kemacetan di ruas jalan semakin padat maka kegiatan ekonomi masyarakat terhambat

\therefore Jika pengguna kendaraan bermotor bertambah banyak maka kemacetan di ruas jalan semakin padat maka kegiatan ekonomi masyarakat terhambat

Negasi dari pernyataan “Jika pengguna kendaraan bermotor bertambah banyak maka kegiatan ekonomi masyarakat terhambat” adalah “Pengguna kendaraan bermotor bertambah banyak dan kegiatan ekonomi masyarakat tidak terhambat”. $\rightarrow [D]$

2. Jika $x = 2\sqrt[6]{3}$, $y = 0,1\bar{6} = 0,16666\dots$, dan $z = 2011$, maka nilai $\frac{xy^{-\frac{1}{2}}\left(x^6 y^{\frac{5}{3}} z^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{x^3 y^{-5} z^{-3}}} = \dots$

A. $\frac{4}{3}$

D. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{3}{2}$

E. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{3}{4}$

Solusi:

$$y = 0,1\bar{6} = 0,16666\dots$$

$$100y = 16,666\dots$$

$$10y = 1,6666\dots$$

$$\hline 90y = 15$$

$$y = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{xy^{-\frac{1}{2}}\left(x^6 y^{\frac{5}{3}} z^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{x^3 y^{-5} z^{-3}}} = \frac{xy^{-\frac{1}{2}}x^3 y^{\frac{5}{6}} z^{-1}}{xy^{-\frac{5}{3}} z^{-1}} = x^3 y^{-\frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{5}{3}} = x^3 y^{\frac{-3+5+10}{6}} = x^3 y^2$$

$$= (2\sqrt[6]{3})^3 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = (48) \left(\frac{1}{36}\right) = \frac{4}{3} \rightarrow [A]$$

3. Hasil dari penjabaran dari $\frac{8}{3-\sqrt{5}} \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}$ dapat dinyatakan sebagai $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, dengan $a > b$. Nilai

$$a - b = \dots$$

A. 40

D. 20

B. 32

E. 16

C. 24

Solusi:

$$\begin{aligned} \frac{8}{3-\sqrt{5}} \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}} &= \frac{8}{3-\sqrt{5}} \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}} = \frac{8}{3-\sqrt{5}} \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}} = \frac{8}{3-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{4(\sqrt{5}-1)}{3-\sqrt{5}} \times \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \\ &= \frac{4(5-2\sqrt{5}-3)}{9-5} = 2+2\sqrt{5} = \sqrt{20} + \sqrt{4} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \end{aligned}$$

$$a = 20 \text{ dan } b = 4$$

Jadi, nilai $a - b = 20 - 4 = 16$. \rightarrow [E]

4. Diberikan persamaan ${}^2\log^2 x - {}^2\log x - 6 = 0$ yang akar-akarnya a dan b . Jika ${}^2\log 5 = x$ dan ${}^{81}\log 2 = y$, maka nilai ${}^{25}\log 40ab$ adalah

- A. $\frac{8xy + 16y}{4xy + 1}$ D. $\frac{4xy + 8y}{8xy + 1}$
 B. $\frac{4xy + 16y}{8xy + 1}$ E. $\frac{8xy + 16y}{4xy + 1}$
 C. $\frac{xy + 16y}{4xy + 1}$

Solusi:

$${}^2\log^2 x - {}^2\log x - 6 = 0 \text{ (karena)}$$

$$({}^2\log x - 3)({}^2\log x + 2) = 0$$

$${}^2\log x = 3 \text{ atau } {}^2\log x = -2$$

$$x = 8 = a \text{ atau } x = \frac{1}{4} = b$$

$${}^2\log 5 = x \rightarrow {}^5\log 2 = \frac{1}{x} \text{ dan } {}^{81}\log 2 = y \rightarrow {}^3\log 2 = 4y$$

$${}^3\log 2 \times {}^2\log 5 = 4xy \Leftrightarrow {}^3\log 5 = 4xy \Leftrightarrow {}^5\log 3 = \frac{1}{4xy}$$

$${}^{75}\log 40ab = {}^{75}\log 40 \cdot 8 \cdot \frac{1}{4} = {}^{75}\log 80 = \frac{{}^5\log 80}{{}^5\log 75} = \frac{{}^5\log 5 + {}^5\log 16}{{}^5\log 25 + {}^5\log 3} = \frac{1 + 4 \cdot {}^5\log 2}{2 + {}^5\log 3} = \frac{1 + 4 \cdot \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{4xy}} = \frac{4xy + 16y}{8xy + 1} \rightarrow \text{[B]}$$

5. Jika kurva fungsi $y = (2k - 5)x^2 - (k + 1)x + k^2$ tidak memotong sumbu X dan kurva melalui titik (4,9), maka salah satu persamaan garis singgung yang dapat ditarik dari titik (0,-7) adalah

- A. $5x + 3y + 21 = 0$ D. $8x - y - 7 = 0$
 B. $3x + 2y + 14 = 0$ E. $12x - y - 7 = 0$
 C. $12x + y + 7 = 0$

Solusi:

$$(4,9) \rightarrow y = (2k - 5)x^2 - (k + 1)x + k^2$$

$$9 = (2k - 5)4^2 - (k + 1)4 + k^2$$

$$9 = 32k - 80 - 4k - 4 + k^2$$

$$k^2 + 28k - 93 = 0$$

$$(k - 3)(k + 31) = 0$$

$$k = 3 \text{ atau } k = -31$$

$$k = 3 \rightarrow y = (2k - 5)x^2 - (k + 1)x + k^2 = x^2 - 4x + 9$$

Karena $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 < 0$, maka kurva tidak memotong sumbu X.

$$k = -31 \rightarrow y = (2k - 5)x^2 - (k + 1)x + k^2 = -67x^2 + 30x + 961$$

Karena $D = 30^2 - 4 \cdot (-67) \cdot 961 > 0$, maka kurva memotong sumbu X di dua titik yang berbeda.

Ambillah persamaan garis singgung: $y = mx + n$.

$$(0, -7) \rightarrow y = mx + n$$

$$-7 = m \cdot 0 + n$$

$$n = -7$$

Sekarang persamaan garis singgung itu menjadi $y = mx - 7$.

$$y = mx - 7 \rightarrow y = x^2 - 4x + 9$$

$$mx - 7 = x^2 - 4x + 9$$

$$x^2 + (-4 - m)x + 16 = 0$$

Syarat garis menyinggung kurva parabola adalah $D = 0$, sehingga:

$$(-4 - m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0$$

$$m^2 + 8m + 16 - 64 = 0$$

$$m^2 + 8m - 48 = 0$$

$$(m + 12)(m - 4) = 0$$

$$m = -12 \text{ atau } m = 4$$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah $y = -12x - 7$ dan $y = 4x - 7$.

Jadi, salah satu persamaan garis singgungnya adalah $12x - y - 7 = 0$. \rightarrow [E]

6. Persamaan kuadrat $x^2 - nx - n - 1 = 0$, dengan $n > 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2 . Jika $x_1^3 + x_2^3 = 26$, maka nilai n adalah

- A. 4 D. -1
B. 3 E. -3
C. 2

Solusi:

$x^2 - nx - n - 1 = 0$, dengan $n > 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2 .

$$x_1 + x_2 = n$$

$$x_1 x_2 = -n - 1$$

$$x_1^3 + x_2^3 = 26$$

$$(x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 26$$

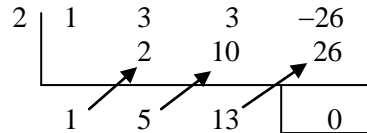
$$(n)^3 - 3(-n-1)(n) = 26$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n - 26 = 0$$

$$(n-2)(n^2 + 5n + 13) = 0$$

$$n = 2 \text{ atau } n^2 + 5n + 13 = 0 \text{ (akar-akarnya tidak real karena } D < 0)$$

Jadi, nilai n adalah 2.



7. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $3^{2x+1} - 28 \cdot 3^x + 9 \geq 0$ adalah

A. $-1 \leq x \leq 2$

D. $x \leq 3$ atau $x \geq 9$

B. $x \leq \frac{1}{3}$ atau $x \geq 9$

E. $\frac{1}{3} \leq x \leq 9$

C. $x \leq -1$ atau $x \geq 2$

Solusi:

$$3^{2x+1} - 28 \cdot 3^x + 9 \geq 0$$

$$3 \cdot 3^{2x} - 28 \cdot 3^x + 9 \geq 0$$

Ambillah $3^x = y$, sehingga

$$3y^2 - 28y + 9 \geq 0$$

$$(3y-1)(y-9) \geq 0$$

$$y \leq \frac{1}{3} \vee y \geq 9$$

$$3^x \leq 3^{-1} \vee 3^x \geq 3^2$$

$$x \leq -1 \vee x \geq 2 \rightarrow [C]$$

8. Salah satu garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 20 = 0$ yang tegak lurus pada garis $x + 2y - 8 = 0$ adalah

A. $2x - y + 3 = 0$

D. $2x - y - 3 = 0$

B. $2x - y - 5 = 0$

E. $x - 2y - 7 = 0$

C. $2x - y + 7 = 0$

Solusi:

Gradien garis $x + 2y - 8 = 0$ adalah $m_1 = -\frac{1}{2}$.

Syarat dua garis tegak lurus adalah $m_1 \times m_2 = -1$, sehingga

$$-\frac{1}{2} \times m_2 = -1$$

$$m_2 = 2$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 20 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$$

Jari-jari lingkaran: $r = \sqrt{5}$ dan pusat lingkaran: $(a,b) = (3,4)$

Persamaan garis singgung adalah

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

$$y - 4 = 2(x - 3) \pm \sqrt{5} \times \sqrt{2^2 + 1}$$

$$y - 4 = 2x - 6 \pm 5$$

$$y - 4 = 2x - 6 + 5 \text{ dan } y - 4 = 2x - 6 - 5$$

$$2x - y + 3 = 0 \text{ dan } 2x - y - 7 = 0$$

Jadi, salah satu persamaan garis singgungnya adalah $2x - y + 3 = 0$. \rightarrow [A]

9. Dua buah fungsi f dan g didefinisikan sebagai $f(x) = \frac{2}{x-3}$, $x \neq 3$ dan $g(x) = ax^2 + b$, dengan a dan b adalah konstanta. Jika $g(-2) = 5$ dan $(g \circ f)(1) = -1$, maka $(f \circ g)(x) = \dots$

A. $\frac{1}{x^2 + 3}$

D. $\frac{1}{x^2 + 3}$

B. $\frac{1}{2x^2 - 6}$, $x \neq \pm\sqrt{3}$

E. $\frac{1}{x^2 - 3}$, $x \neq \pm\sqrt{3}$

C. $\frac{1}{x^2 - 6}$, $x \neq \pm\sqrt{6}$

Solusi:

$$g(-2) = 5$$

$$4a + b = 5 \dots (1)$$

$$(g \circ f)(1) = -1$$

$$g(f(1)) = -1$$

$$g\left(\frac{2}{1-3}\right) = -1$$

$$g(-1) = -1$$

$$a(-1)^2 + b = -1$$

$$a + b = -1 \dots (2)$$

Selisih persamaan (1) dan (2) menghasilkan:

$$3a = 6$$

$$a = 2$$

$$a = 2 \rightarrow a + b = -1$$

$$2 + b = -1$$

$$b = -3$$

$$g(x) = 2x^2 - 3$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x^2 - 3) = \frac{2}{2x^2 - 3 - 3} = \frac{2}{2x^2 - 6} = \frac{1}{x^2 - 3}, x \neq \pm\sqrt{3}$$

10. Diberikan fungsi $f(x) = ax - 3$, $a \neq 0$ dan $g(x) = \frac{x+2}{x-2}$, $x \neq 2$, Jika $f(3) - g^{-1}(2) = 0$, maka nilai

$$(g \circ f^{-1})(3) = \dots$$

A. 2

D. 6

B. 3

E. 7

C. 5

Solusi:

$$f(x) = ax - 3 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{a}$$

$$\text{Rumus: } f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$g(x) = \frac{x+2}{x-2} \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{2x+2}{x-1}$$

$$f(3) - g^{-1}(2) = 0$$

$$3a - 3 - \frac{2 \cdot 2 + 2}{2 - 1} = 0$$

$$3a - 3 = 6$$

$$a = 3 \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{3}$$

$$(g \circ f^{-1})(6) = g(f^{-1}(6)) = g\left(\frac{6+3}{3}\right) = g(3) = \frac{3+2}{3-2} = 5$$

11. Diberikan persamaan $x^3 - (a-1)x^2 + bx + 2a = 0$ habis dibagi oleh $x+2$; dibagi oleh $x-2$ sisanya -4 .

Himpunan penyelesaiannya adalah

- A. $\{-2, 1, 3\}$ D. $\{-1, -2, 3\}$
 B. $\{1, 2, 3\}$ E. $\{-3, 1, 2\}$
 C. $\{-1, 2, 3\}$

Solusi:

$$\begin{aligned}
 x = -2 &\rightarrow x^3 - (a-1)x^2 + bx + 2a = 0 \\
 (-2)^3 - (a-1)(-2)^2 + b(-2) + 2a &= 0 \\
 -8 - 4a + 4 - 2b + 2a &= 0 \\
 2a + 2b &= -4 \\
 a + b &= -2 \dots (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x = 2 &\rightarrow x^3 - (a-1)x^2 + bx + 2a = 0 \\
 (2)^3 - (a-1)(2)^2 + b(2) + 2a &= -4 \\
 8 - 4a + 4 + 2b + 2a &= -4 \\
 2a - 2b &= 16 \\
 a - b &= 8 \dots (2)
 \end{aligned}$$

Jumlah persamaan (1) dan (2) menghasilkan:

$$\begin{aligned}
 2a &= 6 \\
 a &= 3 \\
 a = 3 &\rightarrow a + b = -2 \\
 3 + b &= -2 \\
 b &= -5
 \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan nilai $a = 3$ dan $b = -5$ ke persamaan semula diperoleh

$$x^3 - (3-1)x^2 + (-5)x + 2(3) = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-1)(x^2 - x - 6) = 0$$

$$(x-1)(x-3)(x+2) = 0$$

$$x = 1 \text{ atau } x = 3 \text{ atau } x = -2$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{-2, 1, 3\}$. $\rightarrow [A]$

12. Jumlah uang Laras dan Dinda adalah Rp 5.000.000,00. Laras membelanjakan $\frac{3}{4}$ dari uangnya kurang Rp 600.000,00 dan Dinda membelanjakan $\frac{2}{3}$ dari uangnya tambah Rp 300.000,00. Jumlah uang sisa mereka adalah 2 kali sebanyak uang yang dibelanjakan Laras. Selisih uang Dinda dan Laras adalah

- A. Rp 3.000.000,00 D. Rp 1.500.000,00
 B. Rp 2.400.000,00 E. Rp 1.000.000,00
 C. Rp 2.000.000,00

Solusi:

Ambillah uang Laras x rupiah dan uang Dinda y rupiah.

$$x + y = 5.000.000 \dots (1)$$

Laras membelanjakan $\frac{3}{4}$ dari uangnya kurang Rp 600.000,00 $= \frac{3}{4}x - 600.000$

$$\text{Sisa uang Laras} = x - \frac{3}{4}x + 600.000 = \frac{1}{4}x + 600.000$$

Dinda membelanjakan $\frac{2}{3}$ dari uangnya tambah Rp 300.000,00 $= \frac{2}{3}y + 300.000$

$$\text{Sisa uang Dinda} = y - \frac{2}{3}y - 300.000 = \frac{1}{3}y - 300.000$$

Jumlah uang sisa mereka adalah 2 kali sebanyak uang yang dibelanjakan Laras

$$\frac{1}{4}x + 600.000 + \frac{1}{3}y - 300.000 = 2\left(\frac{3}{4}x - 600.000\right)$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y + 300.000 = \frac{3}{2}x - 1.200.000$$

$$\frac{5}{4}x - \frac{1}{3}y = 1.500.000 \dots (2)$$

Persamaan (2) $+$ $\frac{1}{3} \times$ Persamaan (1) menghasilkan:

$$\frac{5}{4}x + \frac{1}{3}x = \frac{5.000.000}{3} + 1.500.000$$

$$19x = 38.000.000$$

$$x = 2.000.000$$

$$x = 2.000.000 \rightarrow x + y = 5.000.000$$

$$2.000.000 + y = 5.000.000$$

$$y = 3.000.000$$

Jadi, selisih uang Laras dan Dinda $= \text{Rp } 3.000.000,00 - \text{Rp } 2.000.000,00 = \text{Rp } 1.000.000,00. \rightarrow [E]$

13. Laras dan Yuda membuat mainan A dan B di toko kerajinannya. Setiap mainan A membutuhkan 3 jam kerja Laras dan 1 jam kerja Yuda. Setiap mainan B membutuhkan 4 jam kerja Laras dan 2 jam kerja Yuda. Laras tidak dapat bekerja lebih dari 48 jam per minggu dan Yuda tidak dapat bekerja lebih dari 20 jam per minggu.

Jika setiap mainan A dihargai \$12 dan mainan B dihargai \$20, maka banyak item yang dapat mereka buat untuk memaksimumkan penghasilannya adalah

- A. 6 mainan A dan 8 mainan B D. 8 mainan A dan 6 mainan B
 B. 16 mainan A saja E. 10 mainan A dan 16 mainan B
 C. 10 mainan B saja

Solusi:

Ambillah banyak mainan A = x buah dan mainan B = y buah.

$$\begin{cases} 3x + 4y \leq 48 \\ x + 2y \leq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Fungsi objektif $f(x, y) = 12x + 20y$

$$3x + 4y = 48 \dots (1)$$

$$x + 2y = 20$$

$$2x + 4y = 40 \dots (2)$$

Selisih persamaan (1) dan (2) menghasilkan:

$$x = 8$$

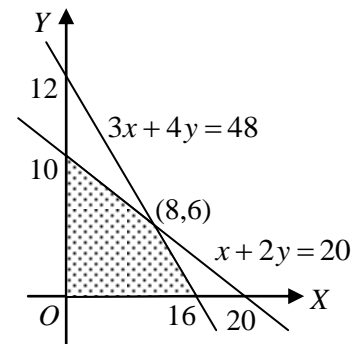
$$x = 8 \rightarrow x + 2y = 20$$

$$8 + 2y = 20$$

$$y = 6$$

Koordinat titik potongnya adalah (8,6).

Titik	$f(x, y) = 12x + 20y$
(0,0)	$12 \times 0 + 20 \times 0 = 0$
(16,0)	$12 \times 16 + 20 \times 0 = 192$
(8,6)	$12 \times 8 + 20 \times 6 = 216$ (maksimum)
(0,10)	$12 \times 0 + 20 \times 10 = 200$



Jadi, banyak item yang dapat mereka buat untuk memaksimumkan penghasilannya adalah 8 buah mainan A dan 6 buah mainan B. \rightarrow [D]

14. Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ dan $A^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ dengan A^{-1} adalah invers

matriks A maka jumlah elemen-elemen matriks B^{-1} adalah

- A. 0 D. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

E. 2

C. 1

Solusi:

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = A \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2 \times 3 - 1 \times 4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Jadi, jumlah elemen-elemen matriks B^{-1} adalah $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 2 + 1 = 0 \rightarrow [A]$

15. Sudut antara vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ 2p+1 \\ p\sqrt{3} \end{pmatrix}$, dengan $p < 0$ dan vektor \vec{b} adalah $\frac{\pi}{3}$. Jika panjang proyeksi vektor

\vec{a} pada vektor \vec{b} adalah $\frac{\sqrt{5}}{2}$, maka nilai p adalah

A. $-\frac{5}{2}$

D. -1

B. -2

E. $-\frac{1}{2}$

C. $-\frac{3}{2}$

Solusi:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \sqrt{p^2 + (2p+1)^2 + (p\sqrt{3})^2} |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{3} = \sqrt{p^2 + 4p^2 + 4p + 1 + 3p^2} |\vec{b}| \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{8p^2 + 4p + 1} |\vec{b}|$$

Rumus: Panjang proyeksi vektor \vec{a} pada \vec{b} adalah $|\vec{c}| = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{b}|}$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{8p^2 + 4p + 1} |\vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{8p^2 + 4p + 1}$$

$$5 = 8p^2 + 4p + 1$$

$$8p^2 + 4p - 4 = 0$$

$$2p^2 + p - 1 = 0$$

$$(2p-1)(p+1) = 0$$

$$p = \frac{1}{2} \text{ atau } p = -1$$

Jadi, nilai p yang diminta adalah -1 . \rightarrow [D]

16. Diberikan vektor-vektor $\vec{a} = (2, -1, 2)$, $\vec{b} = (4, 10, -8)$, dan $\vec{c} = \vec{a} - \frac{1}{10} \vec{b}$. Proyeksi vektor dari vektor \vec{c} pada vektor \vec{a} adalah

A. $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

B. $\frac{3}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

E. $\frac{6}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

C. $\frac{4}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Solusi:

$$\vec{c} = \vec{a} - \frac{1}{10} \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{5}{5} \\ \frac{-2}{5} \end{pmatrix}$$

Rumus: $\bar{z} = \frac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \bar{b}$

$$\bar{z} = \frac{\bar{c} \bullet \bar{a}}{|\bar{a}|^2} \bar{a} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ -2 \\ \frac{14}{5} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{\frac{16}{5} + 2 + \frac{28}{5}}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{6}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jadi, proyeksi vektor dari vektor \bar{c} pada vektor \bar{a} adalah $\frac{6}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow [E]$

17. Bayangan kurva $5x - 2y + 10 = 0$ jika dicerminkan terhadap garis $y = x$ dilanjutkan dengan rotasi terhadap pusat O sebesar $\frac{\pi}{2}$ adalah

- A. $5x - 2y + 10 = 0$ D. $2x + 5y - 10 = 0$
 B. $5x - 2y - 10 = 0$ E. $2x - 5y - 10 = 0$
 C. $5x + 2y - 10 = 0$

Solusi:

Alternatif 1:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{-1 \times 1 - 0 \times 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x' \\ -y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$x = -x' \text{ dan } y = y'$$

Alternatif 2:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x' = -x \Leftrightarrow x = -x' \text{ dan } y' = y$$

$$5(-x') - 2(y') + 10 = 0$$

$$-5x - 2y + 10 = 0$$

$$5x + 2y - 10 = 0$$

Jadi, bayangannya adalah $5x + 2y - 10 = 0 \rightarrow [C]$

18. Diberikan fungsi eksponen $f(x) = a \times 2^{-x} + b$ yang ditunjukkan pada gambar berikut ini. Jika $f^{-1}(x)$ adalah invers dari fungsi eksponen f , maka $f^{-1}(x) = \dots$

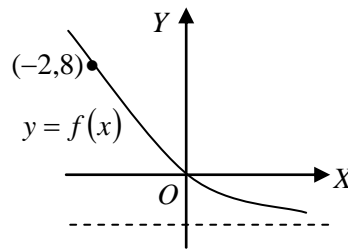
A. ${}^2\log(3x+8) - 3$

B. ${}^2\log \frac{9}{3x+8}$

C. $9^2\log(3x+8)$

D. $3 + {}^2\log(3x+8)$

E. $3^2\log(3x+8)$



Solusi:

$$(-2, 8) \rightarrow f(x) = a \times 2^{-x} + b$$

$$8 = a \times 2^2 + b$$

$$4a + b = 8 \dots (1)$$

$$(0, 0) \rightarrow f(x) = a \times 2^x + b$$

$$0 = a \times 2^0 + b$$

$$a + b = 0 \dots (2)$$

Selisih persamaan (1) dan (2) menghasilkan:

$$3a = 8$$

$$a = \frac{8}{3}$$

$$a = \frac{8}{3} \rightarrow a + b = 0$$

$$\frac{8}{3} + b = 8$$

$$b = -\frac{8}{3}$$

$$\text{Persamaan fungsi eksponen adalah } f(x) = a \times 2^{-x} + b = \frac{8}{3} 2^{-x} - \frac{8}{3} = \frac{2^{3-x}}{3} - \frac{8}{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{3} 2^{3-x} - \frac{8}{3}$$

$$x = \frac{2^{3-y}}{3} - \frac{8}{3}$$

$$3x = 2^{3-y} - 8$$

$$2^{3-y} = 3x + 8$$

$$\log 2^{3-y} = \log(3x+8)$$

$$(3-y)\log 2 = \log(3x+8)$$

$$3-y = {}^2\log(3x+8)$$

$$y = 3 - {}^2\log(3x+8)$$

$$y = {}^2\log \frac{9}{3x+8}$$

Jadi, fungsi inversnya adalah $f^{-1}(x) = {}^2\log \frac{9}{3x+8} \rightarrow [B]$

19. Persamaan kuadrat $x^2 = kx - 28$, dengan $k > 0$ mempunyai akar-akar α dan β . Jika α , β , dan $(\alpha + \beta - 1)$ adalah tiga suku pertama deret aritmetika, maka jumlah 25 suku pertamanya adalah

- A. 2.000 D. 1.200
B. 1.800 E. 1.000
C. 1.600

Solusi:

$$x^2 = kx - 28$$

$$x^2 - kx + 28 = 0 \text{ akar-akarnya } \alpha \text{ dan } \beta.$$

$$\alpha + \beta = k \dots (1)$$

$$\alpha\beta = 28 \dots (2)$$

Deret aritmetika: $\alpha + \beta + (\alpha + \beta - 1)$

$$\beta - \alpha = (\alpha + \beta - 1) - \alpha$$

$$2\alpha - \beta = 1 \dots (3)$$

Jumlah persamaan (1) dan (3) menghasilkan:

$$3\alpha = k + 1$$

$$\alpha = \frac{k+1}{3}$$

$$\alpha = \frac{k+1}{3} \rightarrow \alpha + \beta = k$$

$$\frac{k+1}{3} + \beta = k$$

$$\beta = k - \frac{k+1}{3} = \frac{2k-1}{3}$$

$$\alpha\beta = 28$$

$$\frac{k+1}{3} \times \frac{2k-1}{3} = 28$$

$$2k^2 + k - 1 = 252$$

$$2k^2 + k - 253 = 0$$

$$(2k + 23)(k - 11) = 0$$

$$k = -\frac{23}{2} \text{ (ditolak) atau } k = 11 \text{ (diterima)}$$

$$k = 11 \rightarrow \alpha = \frac{k+1}{3} = \frac{11+1}{3} = 4$$

$$k = 11 \rightarrow \beta = \frac{2k-1}{3} = \frac{2 \cdot 11 - 1}{3} = 7$$

Deret aritmetika yang dimaksud adalah $4 + 7 + 10 + \dots$, dengan $a = 4$, $b = 7 - 4 = 3$, dan $n = 25$

$$S_n = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)b\}$$

$$S_{25} = \frac{25}{2} \{2 \cdot 4 + (25-1)3\} = 1.000$$

Jadi, jumlah 25 suku pertamanya adalah 1.000. \rightarrow [E]

20. Tiga buah bilangan yang bulat merupakan deret geometri. Jika bilangan yang kedua ditambah 8, maka ketiga bilangan itu menjadi deret aritmetika. Tetapi jika bilangan ketiga dari deret yang terakhir ini ditambah 64, maka bilangan-bilangan itu merupakan deret geometri kembali. Jumlah ketiga bilangan semula adalah

- A. 52
B. 48
C. 42
D. 40
E. 36

Solusi:

$$\text{Deret geometri: } \frac{a}{r} + a + ar$$

$$\text{Deret aritmetika: } \frac{a}{r} + (a + 8) + ar$$

$$a + 8 - \frac{a}{r} = ar - a - 8$$

$$2a + 16 - \frac{a}{r} - ar = 0$$

$$2ar + 16r - a - ar^2 = 0$$

$$\text{Deret geometri: } \frac{a}{r} + (a + 8) + (ar + 64)$$

$$\frac{a+8}{\frac{a}{r}} = \frac{ar+64}{a+8}$$

$$a^2 + 16a + 64 = a^2 + \frac{64a}{r}$$

$$16a + 64 = \frac{64a}{r}$$

$$a + 4 = \frac{4a}{r}$$

$$r = \frac{4a}{a+4}$$

$$r = \frac{4a}{a+4} \rightarrow 2ar + 16r - a - ar^2 = 0$$

$$2a\left(\frac{4a}{a+4}\right) + 16\left(\frac{4a}{a+4}\right) - a - a\left(\frac{4a}{a+4}\right)^2 = 0$$

$$8a^2(a+4) + 64a(a+4) - a(a+4)^3 - 16a^3 = 0$$

$$8a^3 + 32a^2 + 64a^2 + 256a - a^3 - 8a^2 - 16a - 16a^3 = 0$$

$$9a^3 - 88a^2 - 240a = 0$$

$$a(9a^2 - 88a - 240) = 0$$

$$9a^2 - 88a - 240 = 0 \text{ atau } a = 0 \text{ (ditolak)}$$

$$a = \frac{-(-88) \pm \sqrt{(-88)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-240)}}{2 \cdot 9} = \frac{88 \pm 8\sqrt{121+135}}{18} = \frac{88 \pm 8\sqrt{256}}{18} = \frac{88 \pm 8 \cdot 16}{18}$$

$$a = \frac{88+128}{18} = \frac{216}{18} = 12 \text{ (diterima)} \quad a = \frac{88-128}{18} = \frac{-40}{18} = \frac{-20}{9} = -2\frac{2}{9} \text{ (ditolak)}$$

$$a = \frac{88+128}{18} = \frac{216}{18} = 12 \rightarrow r = \frac{4a}{a+4} = \frac{4 \cdot 12}{12+4} = 3$$

Jadi, jumlah deret geometri semula adalah $\frac{12}{3} + 12 + 12 \cdot 3 = 4 + 12 + 36 = 52$. \rightarrow [A]

21. Diberikan balok $EFGH.ABCD$, $\angle DHG = 45^\circ$, $\angle FHB = 65^\circ$, dan panjang $GH = 6$ cm. Jarak garis titik H ke garis BD adalah

A. $3\sqrt{2}$ cm D. $3\sqrt{6}$ cm

B. $3\sqrt{3}$ cm E. $4\sqrt{5}$ cm

C. $3\sqrt{5}$ cm

Solusi:

$$GH = DG = CD = CH = BF = 6 \text{ cm}$$

$$DH = \sqrt{GH^2 + DG^2} \quad DH = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

Perhatikan $\triangle FHB$ siku-siku di F , $\angle FHB = 60^\circ$ dan $\angle FBH = 30^\circ$

$$FB = 6$$

$$HF = \frac{FB}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$BC = HF = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$HB = 2HF = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$BD = HB = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

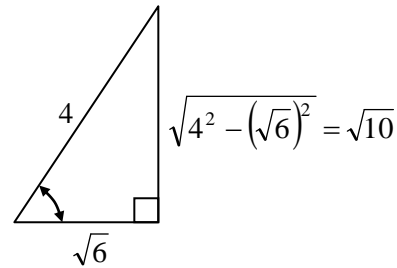
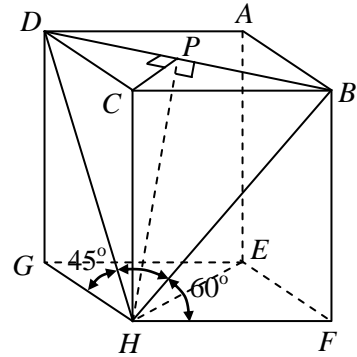
Perhatikan $\triangle BHD$:

$$\cos \angle BHD = \frac{DH^2 + HB^2 - BD^2}{2 \cdot DH \cdot HB} = \frac{(6\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{3})^2 - (4\sqrt{3})^2}{2 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{72}{48\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin \angle BHD = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$\text{Luas } \triangle BHD = \frac{1}{2} HB \times HD \sin \angle BHD = \frac{1}{2} HP \times BD$$

$$HP = \frac{HB \times HD \sin \angle BHD}{BD} = \frac{4\sqrt{3} \times 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{10}}{4}}{4\sqrt{3}} = 3\sqrt{5} \text{ cm}$$



Jadi, jarak garis titik H ke garis BD adalah $3\sqrt{5}$ cm. $\rightarrow [C]$

22. Diberikan limas $T.ABC$ beraturan dengan $AB = 8$ cm dan $TA = 12$ cm. Sudut antara bidang TAC dan bidang ABC adalah β . Nilai $\sin 2\beta$ adalah

A. $\frac{1}{4}\sqrt{46}$ D. $\frac{1}{12}\sqrt{6}$

B. $\frac{1}{2}\sqrt{46}$ E. $\frac{1}{12}\sqrt{138}$

C. $\frac{1}{4}\sqrt{23}$

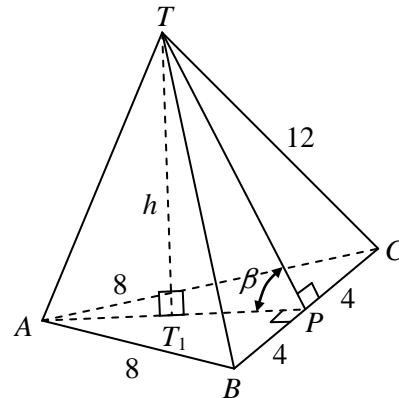
Solusi:

Lihat $\triangle APB$ siku-siku di P :

$$AP = AB \sin B = 8 \sin 60^\circ = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

Lihat $\triangle TPC$ siku-siku di P :

$$TP^2 = TC^2 - PC^2 = 12^2 - 4^2 = 144 - 16 = 128$$

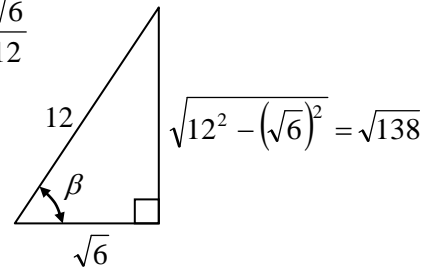


Lihat $\triangle TAP$:

$$\cos \beta = \frac{AP^2 + TP^2 - TA^2}{2 \cdot AP \cdot TP} = \frac{(4\sqrt{3})^2 + 128 - 12^2}{2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{128}} = \frac{48 + 128 - 144}{8\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{138}}{12}$$

$$\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta = 2 \times \frac{\sqrt{138}}{12} \times \frac{\sqrt{6}}{12} = \frac{1}{4} \sqrt{46} \rightarrow [A]$$



23. Diameter (garis tengah) lingkaran luar dari segi-8 beraturan yang mempunyai $648\sqrt{2} \text{ cm}^2$ adalah

- A. 12 cm D. 36 cm
B. 18 cm E. 48 cm
C. 24 cm

Solusi:

$$\text{Luas segi-}n \text{ berturan} = n \times \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$$

$$\text{Luas segi-8 berturan} = 8 \times \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{8}$$

$$648\sqrt{2} = 8 \times \frac{1}{2} R^2 \sin 45^\circ$$

$$648\sqrt{2} = 8 \times \frac{1}{2} R^2 \times \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$R^2 = 324$$

$$R = \sqrt{324} = 18 \text{ cm}$$

$$D = 2 \times R = 2 \times 18 = 36 \text{ cm}$$

Jadi, diameter lingkaran luar segi-8 bertaturan itu 36 cm. $\rightarrow [D]$

24. Diberikan prisma segitiga tegak $ABC.DEF$, dengan $AB = 5 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$, $AC = \sqrt{61 - 30\sqrt{3}} \text{ cm}$, dan luas $\triangle BCD$ adalah 18 cm^2 . Volume prisma tersebut adalah

- A. $\frac{1}{4} \sqrt{119} \text{ cm}^3$ D. $5\sqrt{119} \text{ cm}^3$
B. $\frac{15}{4} \sqrt{119} \text{ cm}^3$ E. $15\sqrt{119} \text{ cm}^3$
C. $4\sqrt{119} \text{ cm}^3$

Solusi:

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{5^2 + 6^2 - (\sqrt{61 - 30\sqrt{3}})^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{25 + 36 - 61 + 30\sqrt{3}}{60} = \frac{30\sqrt{3}}{60} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$\sin B = \frac{1}{2}$$

$$\text{Luas } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AB \times \sin B = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 \times \frac{1}{2} = \frac{15}{2} \text{ cm}^2$$

$$\text{Luas } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times AP \times BC = \frac{15}{2}$$

$$\frac{1}{2} \times AP \times 6 = \frac{15}{2}$$

$$AP = \frac{5}{2} \text{ cm}$$

$$\text{Luas } \triangle BCD = \frac{1}{2} \times DP \times BC = 18$$

$$\frac{1}{2} \times DP \times 6 = 18$$

$$DP = 6 \text{ cm}$$

$$AD = \sqrt{DP^2 - AP^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{36 - \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{119}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{119} \text{ cm}$$

Alternatif lain untuk menentukan panjang AD adalah

$$\text{Luas } \triangle ABC = \text{Luas } \triangle BCD \times \cos \theta$$

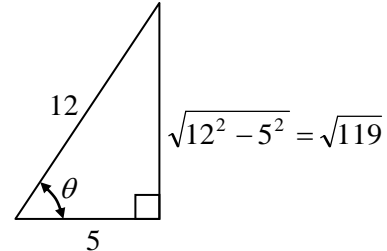
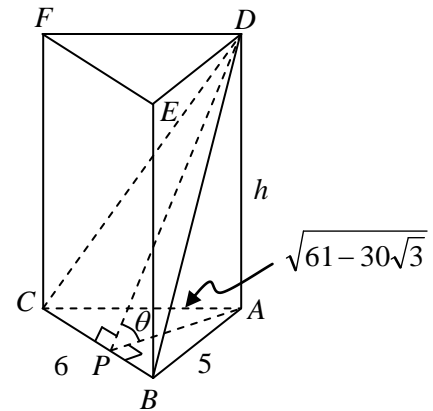
$$\cos \theta = \frac{\text{Luas } \triangle ABC}{\text{Luas } \triangle BCD} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AB \times \sin B}{\text{Luas } \triangle BCD} = \frac{\frac{1}{2} \times 6 \times 5 \times \frac{1}{2}}{18} = \frac{5}{12}$$

$$\sin \theta = \frac{AD}{DP}$$

$$AD = DP \times \sin \theta = 6 \times \frac{\sqrt{119}}{12} = \frac{1}{2} \sqrt{119} \text{ cm}$$

$$\text{Jadi, volume prisma tersebut} = \text{Luas } \triangle ABC \times AD = \frac{1}{2} \times BC \times AB \times \sin B \times AD = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{119}$$

$$= \frac{15}{4} \sqrt{119} \text{ cm}^3 \rightarrow [\text{B}]$$



25. Himpunan penyelesaian persamaan $\cos^2 x + \tan^2 x - \sin^2 x = 2\frac{1}{2}$, dengan $0 \leq x \leq 360^\circ$ adalah

A. $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

D. $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

B. $\left\{\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

E. $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

$$C. \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\}$$

Solusi:

$$\cos^2 x + \tan^2 x - \sin^2 x = 2\frac{1}{2}$$

$$\cos^2 x + 1 + \tan^2 x - \sin^2 x = 3\frac{1}{2}$$

$$\cos^2 x + \sec^2 x - \sin^2 x = 3\frac{1}{2}$$

$$\cos^2 x + \sec^2 x - 1 + \cos^2 x = 3\frac{1}{2}$$

$$2\cos^2 x + \sec^2 x - 4\frac{1}{2} = 0$$

$$4\cos^4 x - 9\cos^2 x + 2 = 0$$

$$(4\cos^2 x - 1)(\cos^2 x - 2) = 0$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{4} \text{ (diterima) atau } \cos^2 x = 2 \text{ (ditolak)}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ atau } \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ atau } x = \frac{2\pi}{3} \text{ atau } x = \frac{4\pi}{3} \text{ atau } x = \frac{5\pi}{3}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\} \rightarrow [E]$

26. Jika $\tan x^\circ = \frac{\cos 72^\circ - \sin 72^\circ}{\cos 72^\circ + \sin 72^\circ}$, maka nilai x adalah

A. 27

D. 72

B. 53

E. 153

C. 54

Solusi:

$$\begin{aligned} \tan x^\circ &= \frac{\cos 72^\circ - \sin 72^\circ}{\cos 72^\circ + \sin 72^\circ} = \frac{\sin 18^\circ - \sin 72^\circ}{\sin 18^\circ + \sin 72^\circ} = \frac{2\cos 45^\circ \sin(-27^\circ)}{2\sin 45^\circ \cos(-27^\circ)} = \frac{-\sin 27^\circ}{\cos 27^\circ} \\ &= -\tan 27^\circ = \tan(180^\circ - 27^\circ) = \tan 153^\circ \end{aligned}$$

Jadi, nilai $x = 153$. $\rightarrow [E]$

27. Dalam $\triangle ABC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 8$ cm, dan $BC = 6$ cm. Jika garis bagi $\angle ACB$ memotong AB di R dan $CR = 3\sqrt{a}$, maka nilai a adalah

- A. 5
B. 4
C. 3
- D. 2
E. 1

Solusi:

Ambillah $\angle ACB = 2x$

$$\tan \angle ACB = \tan 2x = \frac{8}{6}$$

$$\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{4}{3}$$

$$6 \tan x = 4 - 4 \tan^2 x$$

$$2 \tan^2 x + 3 \tan x - 2 = 0$$

$$(2 \tan x - 1)(\tan x + 2) = 0$$

$$\tan x = \frac{1}{2} \text{ (diterima) atau } \tan x = -2 \text{ (ditolak)}$$

$$\tan \angle BCR = \tan x = \frac{BR}{BC}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{BR}{6}$$

$$BR = 3 \text{ cm}$$

Menurut Pythagoras dalam $\triangle CBR$:

$$CR^2 = BC^2 + BR^2$$

$$(3\sqrt{a})^2 = 6^2 + 3^2$$

$$9a = 36 + 9$$

$$a = 5$$

$$\therefore \text{Nilai } a = 5 \rightarrow [A]$$

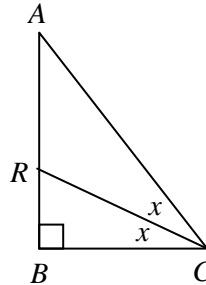
28. Jika $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax^3 - 27b}{x^2 - 9} = 9$, maka nilai $a + b = \dots$

- A. 8
B. 6
C. 5
- D. 4
E. 3

Solusi:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (ax^3 - 27b) = 0$$

$$a(3)^3 - 27b = 0$$



$$27a - 27b = 0$$

$$a = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{ax^3 - 27a}{x^2 - 9} = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{a(x^3 - 27)}{x^2 - 9} = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{a(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)} = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{a(x^2+3x+9)}{(x+3)} = 9$$

$$\frac{a(3^2+3 \cdot 3+9)}{(3+3)} = 9$$

$$27a = 54$$

$$a = 2$$

$$b = a = 2$$

Jadi, nilai $a + b = 2 + 2 = 4$. \rightarrow [D]

29. Nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^6 x}{x \sin x} = \dots$

- A. 8
B. 6
C. 5
- D. 4
E. 3

Solusi:

Alternatif 1:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^6 x}{x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^3 x)(1 + \cos^3 x)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)(1 + \cos^3 x)}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} x (1 + \cos x + \cos^2 x)(1 + \cos^3 x)}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\sin \frac{1}{2} x}{\frac{1}{2} x} \right) \left(\frac{\sin \frac{1}{2} x}{\frac{1}{2} x} \right) \left(\frac{x}{\sin x} \right) \frac{(1 + \cos x + \cos^2 x)(1 + \cos^3 x)}{4} \\ &= 2(1)(1)(1) \frac{(1+1+1)(1+1)}{4} = 3 \rightarrow \text{[E]} \end{aligned}$$

Alternatif 2:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^6 x}{x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^3 x)(1 + \cos^3 x)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)(1 + \cos^3 x)}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^2 (1 + \cos x + \cos^2 x)(1 + \cos^3 x)}{x \cdot x} = \frac{1}{2} (1 + 1 + 1)(1 + 1) = 3 \rightarrow [\text{E}]\end{aligned}$$

30. Garis singgung pada kurva $y = ax^3 + bx$ pada titik dengan absis $x = -2$ adalah $16x - y + 32 = 0$. Nilai

$$a + b = \dots$$

- A. -8 D. 6

- B. -6 E. 8

- C. 4

Solusi:

$$x = -2 \rightarrow 16x - y + 32 = 0$$

$$16(-2) - y + 32 = 0$$

$$y=0$$

Koordinat titik singgungnya adalah $(-2,0)$.

$$(-2,0) \rightarrow y = ax^3 + bx$$

$$0 = a(-2)^3 + b(-2)$$

$$4a + b = 0 \dots (1)$$

Gradien garis singgung $16x - y + 32 = 0$ adalah $m = 16$.

$$y = ax^3 + bx$$

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2 + b$$

$$m = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=-2}$$

$$16 = 3a(-2)^2 + b$$

$$16=12a+b \dots (2)$$

Selisih persamaan (2) dan (1) adalah

$$8a = 16$$

$a=2$

$$a=2 \rightarrow 4a+b=0$$

$$4(2) + b = 0$$

$$b = -8$$

Jadi, nilai $a + b = 2 - 8 = -6$. \rightarrow [B]

31. Suatu proyek dapat dikerjakan selama x hari, dengan biaya setiap harinya $\left(6x + \frac{4500}{x} - 180\right)$ juta rupiah>

Jika biaya minimum proyek tersebut C juta rupiah, maka $C = \dots$

- A. 4.500 D. 2.150
B. 3.150 E. 2.250
C. 3.100

Solusi:

$$\text{Biaya } C = x \left(6x + \frac{4500}{x} - 180 \right) = 6x^2 - 180x + 4500$$

$$C' = 12x - 180$$

$$C'' = 12$$

Nilai stasioner (titik kritis) dicapai jika $C' = 0$, sehingga

$$12x - 180 = 0$$

$$x = 15$$

Karena $C'' = 12 > 0$, maka fungsi biaya C minimum untuk $x = 15$.

$$C_{\min} = 6(15)^2 - 180(15) + 4500 = 3150$$

Jadi, biaya minimum C adalah 3.150. \rightarrow [B]

32. Jika hasil dari $\int_0^3 (x+2)\sqrt{x+1} dx = \frac{a}{b}$, maka nilai $a - b = \dots$

- A. 142 D. 256
B. 241 E. 421
C. 244

Solusi:

Metode Substitusi:

Ambilah $x+1 = u \Leftrightarrow dx = du$

$$x+1 = u \Leftrightarrow x = u - 1$$

$$x=0 \rightarrow u = x+1 = 0+1 = 1$$

$$x=3 \rightarrow u = x+1 = 3+1 = 4$$

$$\begin{aligned} \int_0^3 (x+2)\sqrt{x+1} dx &= \int_1^4 (u+1)\sqrt{u} du = \int_1^4 \left(u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}} \right) du = \left[\frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 \\ &= \frac{62}{5} + \frac{14}{3} = \frac{256}{15} = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

$$a = 256 \text{ dan } b = 15$$

Jadi, nilai $a - b = 256 - 15 = 241$

33. Jika hasil dari $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x \cos x dx = \frac{m}{n}$, maka nilai $\sqrt{m+n} = \dots$

- A. 13 D. 5
B. 10 E. 4
C. 6

Solusi:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x \cos x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} (\sin 4x + \sin 2x) dx = \left[-\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= -\frac{1}{8} \cos \frac{4\pi}{3} - \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{8} \cos 0 + \frac{1}{4} \cos 0 = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{9}{16} = \frac{m}{n} \end{aligned}$$

$m=9$ dan $n=16$

Jadi, nilai $\sqrt{m+n} = \sqrt{9+16} = 5 \rightarrow [D]$

34. Jika $\int_0^{\pi} x \cos x dx + \int_0^a \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = 0$, maka nilai a^2 adalah

- A. 4 D. 36
B. 8 E. 64
C. 9

Solusi:

Alternatif 1:

Menentukan hasil dari $\int x \cos x dx$

Ambillah $u = x \Leftrightarrow du = dx$

$dv = \cos x dx \Leftrightarrow v = \sin x$

$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$

Alternatif 2:

Diferensial	Integral
x	$\cos x$
1	$\sin x$
0	$-\cos x$

$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C$

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx + \int_0^a \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = 0$$

$$[x \sin x + \cos x]_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} d(x^2+1) = 0$$

$$-2 + \left[\sqrt{x^2+1} \right]_0^a = 0$$

$$-2 + \sqrt{a^2+1} - \sqrt{0^2+1} = 0$$

$$-2 + \sqrt{a^2+1} - 1 = 0$$

$$\sqrt{a^2+1} = 3$$

$$a^2 + 1 = 9$$

$$a^2 = 8$$

Jadi, nilai $a^2 = 8$. \rightarrow [B]

35. Perhatikan gambar berikut ini!

Rasio luas daerah A dan B adalah

A. 5:11

D. 1:2

B. 7:11

E. 5:7

C. 3:11

Solusi:

Persamaan garis yang melalui titik (4,0) dan (1,2) adalah

$$y - 0 = \frac{0-2}{4-1}(x-4)$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

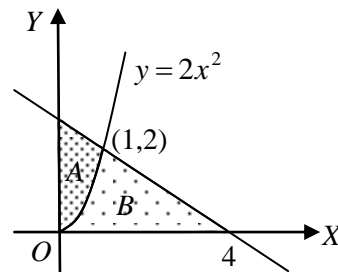
Garis $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ memotong sumbu Y di titik $\left(0, \frac{8}{3}\right)$.

$$\text{Luas daerah A dan B} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\text{Luas daerah B} = \int_0^1 2x^2 dx + \int_1^4 \left(-\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}\right) dx = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x\right]_1^4 = \frac{2}{3} - \frac{16}{3} + \frac{32}{3} + \frac{1}{3} - \frac{8}{3} = \frac{11}{3}$$

$$\text{Luas daerah A} = \text{Luas daerah A dan B} - \text{Luas daerah B} = \frac{16}{3} - \frac{11}{3} = \frac{5}{3}$$

Jadi, rasio luas daerah A dan B adalah $\frac{5}{3} : \frac{11}{3} = 5:11 \rightarrow$ [A]



36. Volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, garis $y = 2 - x$, dan sumbu Y yang diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360° adalah

- A. $\frac{32}{15}\pi$ D. $\frac{21}{15}\pi$
 B. $\frac{31}{15}\pi$ E. $\frac{12}{15}\pi$
 C. $\frac{22}{15}\pi$

Solusi:

Alternatif 1:

Batas-batas integral:

Kurva $y = x^2$ dan garis $y = 2 - x$

$$x^2 = 2 - x$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$$x = 1 \text{ atau } x = -2$$

$$V = \pi \int_a^b \{f^2(x) - g^2(x)\} dx, f(x) > g(x)$$

$$V = \pi \int_0^1 \{(2 - x)^2 - (x^2)^2\} dx = \pi \int_0^1 (4 - 4x + x^2 - x^4) dx$$

$$= \pi \left[4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left(4 - 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{32}{15}\pi$$

Alternatif 2:

Batas-batas integral:

Kurva $y = x^2$ dan garis $y = 2 - x$

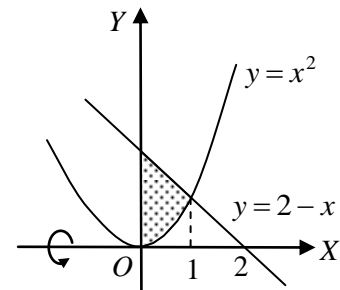
$$x^2 = 2 - x$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$$x = 1 \text{ atau } x = -2$$

$$V = \pi \int_a^b \{f^2(x) - g^2(x)\} dx, f(x) > g(x)$$



$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^2 (2-x)^2 dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx - \pi \int_1^2 (2-x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4-4x+x^2) dx - \pi \int_0^1 x^4 dx - \pi \int_1^2 (4-4x+x^2) dx \\
 &= \pi \left[4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^2 - \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 - \pi \left[4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \pi \left(8 - 8 + \frac{8}{3} \right) - \pi \left(\frac{1}{5} \right) - \pi \left(8 - 8 + \frac{8}{3} - 4 + 2 - \frac{1}{3} \right) \\
 &= \frac{8}{3} \pi - \frac{1}{5} \pi - \frac{1}{3} \pi = \frac{32}{15} \pi
 \end{aligned}$$

37. Data yang disajikan pada berikut adalah nilai ulangan matematika dari 80 siswa siswa .

Nilai	Frekuensi
71 – 75	5
76 – 80	10
81 – 85	17
86 – 90	a
91 – 95	16
96 – 100	b

Jika **median** pada tabel tersebut adalah $87\frac{1}{6}$, maka nilai b adalah

- A. 6 D. 9
 B. 7 E. 10
 C. 8

Solusi:

$$Me = L_2 + \left(\frac{\frac{1}{2}n - fk_2}{f_2} \right) p$$

dengan: Me = median

L_2 = tepi bawah kelas yang memuat median (kuartil tengah Q_2)

p = panjang kelas atau interval kelas

fk_2 = jumlah frekuensi sebelum kelas yang memuat median (kuartil tengah Q_2)

f_2 = frekuensi kelas yang memuat median (kuartil tengah Q_2)

$$5 + 10 + 17 + a + 16 + b = 80$$

$$a + b = 32$$

Nilai **median** pada tabel tersebut adalah $87\frac{1}{6}$ menunjukkan bahwa kelas median terletak pada interval kelas

86 – 90 dengan frekuensi a .

$$Me = 87\frac{1}{6}, L_2 = 85,5; p = 5; fk_2 = 32; f_2 = a, \text{ dan } n = 80$$

$$87\frac{1}{6} = 85,5 + \left(\frac{40-32}{a}\right)5$$

$$\frac{10}{6} = \left(\frac{8}{a}\right)5$$

$$a = 24$$

$$a = 24 \rightarrow a + b = 32$$

$$24 + b = 32$$

$$b = 8$$

Jadi, nilai b adalah 8. \rightarrow [C]

38. Cara menyusun huruf-huruf “STATIS” dengan kedua S tidak berdekatan ada sebanyak

- A. 180
- B. 120
- C. 80
- D. 60
- E. 20

Solusi:

Banyak cara menyusun huruf “STATIS” ada sebanyak $\frac{6!}{2!2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2 \times 1 \times 2!} = 180$.

Banyak cara menyusun huruf-huruf “STATIS” dengan syarat kedua huruf S berdekatan sama artinya dengan menyusun huruf-huruf “TATIS” atau “STATI” (huruf S dihitung sekali) ada sebanyak

$$\frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60.$$

Jadi, banyak cara menyusun huruf-huruf “STATIS” dengan kedua S tidak berdekatan ada sebanyak $180 - 60 = 120$.

39. Banyaknya cara dapat memilih sekurang-kurangnya 1 buku dari 5 buku yang tersedia adalah

- A. 31
- B. 30
- C. 24
- D. 20
- E. 15

Solusi:

Buku dapat dipilih satu persatu, dua-dua, dan seterusnya.

Jadi, banyak cara dapat memilih sekurang-kurangnya 1 buku dari 5 buku yang tersedia adalah

$${}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31 \rightarrow [A]$$

40. Dari suatu kotak terdapat 8 bola putih dan 4 bola biru. Jika dua bola diambil satu persatu tanpa pengembalian, maka peluang bola yang terambil berwarna sama adalah

A. $\frac{11}{17}$

D. $\frac{14}{33}$

B. $\frac{7}{11}$

E. $\frac{11}{33}$

C. $\frac{17}{33}$

Solusi:

Kemungkinannya bola yang terambil adalah (1Putih, 1Putih atau 1Biru, 1Biru)

Peluang bola yang terambil berwarna sama adalah $\frac{8}{12} \times \frac{7}{11} + \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} = \frac{14}{33} + \frac{1}{11} = \frac{17}{33} \rightarrow [C]$