SOLUSI
PART 3
Creative Problem Solving in School Matematics

1. Bentuk sederhana dari $\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}$, dengan *x* bilangan real adalah ….

   Solusi:

   $x=\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}$

   $x^3=5-2\sqrt{13}+5+2\sqrt{13}+3\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}\times\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}\left(\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}\right)$

   $x^3=10+3\sqrt[3]{25-52}(x)$

   $x^3=10-9x$

   $x^3+9x-10=0$

   $(x-1)(x^2+x+10)=0$

   $x=1$ (diterima) atau $x^2+x+10=0$ (ditolak, akar-akarnya tidak real)

2. Jika $x=\frac{1+\sqrt{2010}}{2}$, maka $4x^3-2013x-2011$ adalah ….

   Alternatif 1:

   Substitusikan $x=\frac{1+\sqrt{2010}}{2}$ ke $4x^3-2013x-2011$, sehingga diperoleh

   $=4\left(\frac{1+\sqrt{2010}}{2}\right)^3-2013\left(\frac{1+\sqrt{2010}}{2}\right)-2011$

   $=\left(\frac{1+\sqrt{2010}}{2}\right)\left\{4\left(\frac{1+\sqrt{2010}}{2}\right)^2-2013\right\}-2011$

   $=\left(\frac{1+\sqrt{2010}}{2}\right)\left\{4\left(\frac{1+2\sqrt{2010}+2010}{4}\right)^3-2013\right\}-2011$

   $=\left(\frac{1+\sqrt{2010}}{2}\right)\left(2\sqrt{2010}+2011-2013\right)-2011$

   $=\left(\frac{1+\sqrt{2010}}{2}\right)\left(2\sqrt{2010}-2\right)-2011$

   $=\left(1+\sqrt{2010}\right)\left(\sqrt{2010}-1\right)-2011$

$= 2010 - 1 - 2011$

$= -2$

Alternatif 2:

$x = \frac{1 + \sqrt{2010}}{2}$

$2x = 1 + \sqrt{2010}$

$2x - 1 = \sqrt{2010}$

$(2x - 1)^2 = 2010$

$(2x - 1)^2 - 2010 = 0$

$4x^2 - 4x + 1 - 2010 = 0$

$4x^2 - 4x - 2009 = 0$

$4x^3 - 2013x - 2011 = (x + 1)(4x^2 - 4x - 2009) - 2$

$4x^3 - 2013x - 2011 = (x + 1)(0) - 2$

$4x^3 - 2013x - 2011 = -2$

3. Diberikan $a + b + c = 2$
   $ab + bc + ca = -5$
   $abc = -6$

   Nilai dari $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ dan $a^2 + b^2 + c^2$.

   Solusi:

   Alternatif 1:

   Gunakan rumus Vieta:

   $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, akar-akarnya x_1, x_2, dan x_3.

   $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a}$

   $x_1x_2 + x_1x_2 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$

   $x_1x_2x_3 = \frac{-d}{a}$

   Ambillah *a*, *b*, dan *c* adalah akar-akar persamaan pangkat 3, maka persamaan pangkat 3 itu adalah

   $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x-1)(x^2-x-6)=0$

$(x-1)(x+2)(x-3)=0$

$x=1$ atau $x=-2$ atau $x=3$

$a=1$ atau $b=-2$ atau $c=3$

Dengan demikian,

Nilai dari $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{1}+\frac{1}{-2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

$a^2+b^2+c^2=1^2+(-2)^2+3^2=14$

Alternatif 2:

Nilai dari $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{-5}{-6}=\frac{5}{6}$

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)=(2)^2-2(-5)=14$

4. Penyelesaian dari sitem persamaan $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ x^3+y^3+z^3=20 \end{cases}$ adalah ….

Solusi:

Ambillah *x*, *y*, dan *z* adalah akar-akar persamaan berderajat 3 dalam *h*, yaitu $h^3+ah^2+bh+c=0$

Karena jumlah akar-akarnya $x+y+z=2$, maka persamaan $h^3+ah^2+bh+c=0$ menjadi

$h^3-2h^2+bh+c=0$

$x^2+y^2+z^2=14$

$(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)=14$

$(2)^2-2(xy+xz+yz)=14$

$xy+xz+yz=-5$

Karena $xy+xz+yz=-5$, maka persamaan $h^3-2h^2+bh+c=0$ menjadi

$h^3-2h^2-5h+c=0$

Bilangan-bilangan *x*, *y*, dan *z* adalah akar-akar dari persamaan $h^3-2h^2-5h+c=0$, maka

$x^3-2x^2-5x+c=0$ …. (1)

$y^3-2y^2-5y+c=0$ …. (2)

$z^3-2z^2-5z+c=0$ …. (3)

Jumlah ketiga persamaan tersebut menghasilkan:

$$\left(x^3+y^3+z^3\right)-2\left(x^2+y^2+z^2\right)-5(x+y+z)+3c=0$$

$$20-2(14)-5(2)+3c=0$$

$$3c=18$$

$$c=6$$

Sehingga persamaan berderajat 3 tersebut adalah $h^3-2h^2-5h+6=0$.

$$h^3-2h^2-5h+6=0$$

$$(h-1)\left(h^2-h-6\right)=0$$

$$(h-1)(h-2)(h+3)=0$$

$h=1$ atau $h=2$ atau $h=-3$

Akar-akar tersebut merupakan penyelesaian dari system persamaan di atas.

Jadi, penyelesaian system persamaan itu adalah permutasi dari $(-3,1,2)$.

5. Himpunan penyelesaian dari persamaan $(x-1)^3+(x-2)^2=1$ adalah ….

Solusi:

Alternatif 1:

Ambillah $x-1=a$.

$$(x-1)^3+(x-2)^2=1$$

$$a^3+(a-1)^2=1$$

$$a^3+a^2-2a+1=1$$

$$a^3+a^2-2a=0$$

$$a\left(a^2+a-2\right)=0$$

$$a(a+2)(a-1)=0$$

$a=0$ atau $a=-2$ atau $a=1$

$x-1=0$ atau $x-1=-2$ atau $x-1=1$

$x=1$ atau $x=-1$ atau $x=2$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{-1,1,2\}$.

Alternatif 2:

$$(x-1)^3+(x-2)^2=1$$

$$x^3-3x^2+3x-1+x^2-4x+4=1$$

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

$(x-1)(x^2 - x - 2) = 0$

$(x-1)(x-2)(x+1) = 0$

$x = 1$ atau $x = -1$ atau $x = 2$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{-1,1,2\}$.

6. Jika akar-akar persamaan $(11-x)^3 + (13-x)^3 = (24-2x)^3$ adalah x_1, x_2, dan x_3, maka nilai $x_1 + x_2 + x_3 = ...$
   Solusi:

   Ambillah $a = 11 - x$ dan $b = 13 - x$, maka

   $(11-x)^3 + (13-x)^3 = (11 - x + 13 - x)^3$

   $a^3 + b^3 = (a+b)^3$

   $a^3 + b^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

   $3a^2b + 3ab^2 = 0$

   $ab(a+b) = 0$

   $a = 0$ atau $b = 0$ atau $a + b = 0$

   $11 - x = 0$ atau $13 - x = 0$ atau $11 - x + 13 - x = 0$

   $x = 11$ atau $x = 13$ atau $x = 12$

   Jadi, $x_1 + x_2 + x_3 = 11 + 13 + 12 = 36$

7. Faktorisasi dari $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ adalah ….
   Solusi:

   Ambillah persamaan pangkat 3 yang akar-akarnya *a*, *b*, dan *c*.

   $(x-a)(x-b)(x-c) = 0$

   $\{x^2 - (a+b)x + ab\}(x-c) = 0$

   $x^3 - cx^2 - (a+b)x^2 + (ac+bc)x + abx - abc = 0$

   $x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc = 0$

   Karena a, b, dan c adalah akar-akar persamaan pangkat 3 tersebut maka

   $a^3 - (a+b+c)a^2 + (ab+ac+bc)a - abc = 0$ …. (1)

   $b^3 - (a+b+c)b^2 + (ab+ac+bc)b - abc = 0$ …. (2)

   $c^3 - (a+b+c)c^2 + (ab+ac+bc)c - abc = 0$ …. (3)

Penjumlahan persamaan (1), (2), dan (3) menghasilkan:

$$a^3+b^3+c^3-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+(ab+ac+bc)(a+b+c)-3abc=0$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2)$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left\{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\right\}$$

Catatan:

Dalam kasus jika $a+b+c=0$, maka $a^3+b^3+c^3=3abc$.

8. Diketahui a, b, dan c adalah bilangan real positif dan ${}^a\log b+{}^b\log c+{}^c\log a=0$. Nilai dari $\left({}^a\log b\right)^3+\left({}^b\log c\right)^3+\left({}^c\log a\right)^3$ adalah ….

Solusi:

Alternatif 1:

Ambillah $x={}^a\log b$, $y={}^b\log c$, maka ${}^c\log a=-\left({}^a\log b+{}^b\log c\right)=-(x+y)$.

$$\left({}^a\log b\right)^3+\left({}^b\log c\right)^3+\left({}^c\log a\right)^3=x^3+y^3-(x+y)^3$$

$$=x^3+y^3-x^3-y^3-3x^2y-3xy^2$$

$$=-3x^2y-3xy^2$$

$$=-3xy(x+y)$$

$$=3\,{}^a\log b\times{}^b\log c\times{}^c\log a$$

$$=3$$

Alternatif 2:

Gunakan identitas: Jika $a+b+c=0$, maka $a^3+b^3+c^3=3abc$.

$$\left({}^a\log b\right)^3+\left({}^b\log c\right)^3+\left({}^c\log a\right)^3=3\,{}^a\log b\times{}^b\log c\times{}^c\log a=3$$

9. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan $x^2+x+2=0$, maka nilai $x_1^9+x_2^9$ adalah ….

Solusi:

Alternatif 1:

$x^2+x+2=0$, akar-akarnya x_1 dan x_2.

$x_1+x_2=-1$

$x_1x_2=2$

$(x_1 + x_2)^3 = (-1)^3$

$x_1^3 + 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 + x_2^3 = -1$

$x_1^3 + 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) + x_2^3 = -1$

$x_1^3 + 3 \cdot 2(-1) + x_2^3 = -1$

$x_1^3 + x_2^3 = 5$

$(x_1^3 + x_2^3)^3 = 5^3$

$x_1^9 + 3x_1^6 x_2^3 + 3x_1^3 x_2^6 + x_2^9 = 125$

$x_1^9 + 3(x_1 x_2)^3 (x_1^3 + x_2^3) + x_2^9 = 125$

$x_1^9 + 3(2)^3 (5) + x_2^9 = 125$

$x_1^9 + x_2^9 = 5$

Alternatif 2:

Gunakan identitas: Jika $a + b + c = 0$, maka $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

$x_1 + x_2 = -1$

$x_1 + x_2 + 1 = 0$

$x_1^3 + x_2^3 + 1^3 = 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot 1$

$x_1^3 + x_2^3 + 1 = 3 \cdot 2 \cdot 1$

$x_1^3 + x_2^3 - 5 = 0$

$(x_1^3)^3 + (x_2^3)^3 + (-5)^3 = 3 \cdot x_1^3 \cdot x_2^3 (-5)$

$x_1^9 + x_2^9 - 125 = -15(x_1 x_2)^3$

$x_1^9 + x_2^9 - 125 = -15(2)^3$

$x_1^9 + x_2^9 - 125 = -120$

$x_1^9 + x_2^9 = 5$

10. Diberikan r adalah bilangan real sedemikian sehingga $\sqrt[3]{r} - \frac{1}{\sqrt[3]{r}} = 2$. Nilai dari $r^3 - \frac{1}{r^3} = \ldots.$

Solusi:

Gunakan identitas: Jika $a + b + c = 0$, maka $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

$$\sqrt[3]{r}-\frac{1}{\sqrt[3]{r}}=2$$

$$\sqrt[3]{r}+\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{r}}\right)+(-2)=0$$

$$\left(\sqrt[3]{r}\right)^3+\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{r}}\right)^3+(-2)^3=3\cdot\sqrt[3]{r}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{r}}\right)\cdot(-2)$$

$$r+\left(-\frac{1}{r}\right)-8=6$$

$$r+\left(-\frac{1}{r}\right)+(-14)=0$$

$$r^3+\left(-\frac{1}{r}\right)^3+(-14)^3=3\cdot r\cdot\left(-\frac{1}{r}\right)\cdot(14)$$

$$r^3-\frac{1}{r^3}=42+2744$$

$$r^3-\frac{1}{r^3}=2786$$

11. Tentukan banyak pasangan bilangan bulat (m,n) untuk $mn>0$ dan $m^3+n^3+99mm=33^3$.

Solusi:

Gunakan identitas: $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left\{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\right\}$

$$m^3+n^3+99mm=33^3$$

$$m^3+n^3+99mn-33^3=0$$

$$m^3+n^3+(-33)^3+3mn(-33)=0$$

$$\frac{1}{2}(m+n-33)\left\{(m-n)^2+(m+33)^2+(n+33)^2\right\}$$

$m=n=-33$ atau $m+n=33$

Dari $m=n=-33$ diperoleh pasangan $(-3,-3)$, dengan banyak pasangannya 1 buah.

Dari $m+n=33$ diperoleh pasangan $(0,33)$, $(1,32)$, $(2,31)$, … , $(33,0)$, dengan banyak pasangannya 34 buah.

Jadi, banyaknya pasangan adalah 35 buah.

12. Nilai $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+2010}-\sqrt{4x^2-12x+2011}\right)=\ldots.$

Solusi:

Alternatif 1:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+2010}-\sqrt{4x^2-12x+2011}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+2010}-\sqrt{4x^2-12x+2011}\right)\times\frac{\sqrt{4x^2+4x+2010}+\sqrt{4x^2-12x+2011}}{\sqrt{4x^2+4x+2010}+\sqrt{4x^2-12x+2011}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+4x+2010-4x^2+12x-2011}{\sqrt{4x^2+4x+2010}+\sqrt{4x^2-12x+2011}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{16x+4021}{\sqrt{4x^2+4x+2010}+\sqrt{4x^2-12x+2011}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{16+\frac{4021}{x}}{\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{2010}{x^2}}+\sqrt{4-\frac{12}{x}+\frac{2011}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{16+\frac{4021}{\infty}}{\sqrt{4+\frac{4}{\infty}+\frac{2010}{\infty^2}}+\sqrt{4-\frac{12}{\infty}+\frac{2011}{\infty^2}}}$$

$$=\frac{16+0}{\sqrt{4+0+0}+\sqrt{4-0+0}}$$

$$=\frac{16}{2+2}$$

$$=4$$

Alternatif 2:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{a^2x^2+bx+c}-\sqrt{a^2x^2+px+q}\right)=\frac{b-p}{2\sqrt{a}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+2010}-\sqrt{4x^2-12x+2011}\right)=\frac{4-(-12)}{2\sqrt{4}}=4$$

Alternatif 3:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{a^2x^2+bx+c}-\sqrt{a^2x^2+px+q}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\left(ax+\frac{b}{2a}\right)^2}-\sqrt{\left(ax+\frac{p}{2a}\right)^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(ax+\frac{b}{2\sqrt{a}}-ax-\frac{p}{2\sqrt{a}}\right)$$

$$=\frac{b-p}{2\sqrt{a}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+2010}-\sqrt{4x^2-12x+2011}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(2x+1)^2}-\sqrt{(2x-3)^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}(2x+1-2x+3)$$

$$=4$$

13. Nilai $\lim_{x\to\infty}(2\sqrt{x}+1)-\sqrt{4x-3\sqrt{x}+2}=....$

Solusi:

$$\lim_{x\to\infty}(2\sqrt{x}+1)-\sqrt{4x-3\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to\infty}(2\sqrt{x}+1)-\sqrt{\left(2\sqrt{x}-\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} 2\sqrt{x}+1-2\sqrt{x}+\frac{3}{4}$$

$$=1\frac{3}{4}$$

14. Nilai $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+8x}-\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x}\right)=....$

Solusi:

Alternatif 1:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+8x}-\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(2\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}\right)$$

$$=\frac{2-0}{2\sqrt{1}}+\frac{2-1}{2\sqrt{1}}$$

$$=1\frac{1}{2}$$

Alternatif 2:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+8x}-\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(2x+2)^2}-\sqrt{x^2}-\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(2x+2-x-x-\frac{1}{2}\right)$$

$$=1\frac{1}{2}$$

15. Nilai $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{16x^2+32x+2008}-\sqrt{9x^2-6x}-\sqrt{4x^2+12x+2011}+\sqrt{x^2+4}\right)=....$

Solusi:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{16x^2+32x+2008}-\sqrt{9x^2-6x}-\sqrt{4x^2+12x+2011}+\sqrt{x^2+4}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(4x+4)^2} - \sqrt{(3x-1)^2} - \sqrt{(2x+3)^2} + \sqrt{(x)^2} \right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}(4x+4-3x+1-2x-3+x)$$

$$= 2$$