

Olimpiade Sains Nasional Bidang Matematika SMA/MA
Seleksi Tingkat Kota/Kabupaten Tahun 2013
Waktu 120 menit

Petunjuk untuk masing-masing soal, tulis jawab akhirnya saja (tanpa penjabaran) dilembar jawaban yang disediakan.

1. Misalkan a dan b bilangan asli dengan $a > b$. Jika $\sqrt{94 + 2\sqrt{2013}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, maka nilai $a - b$ adalah
2. Diberikan segitiga ABC dengan luas 10. Titik D , E , dan F berturut-turut terletak pada sisi-sisi AB , BC , dan CA dengan $AD = 2$, $DB = 3$. Jika segitiga ABE dan segiempat $DBEF$ mempunyai luas yang sama, maka luasnya sama dengan
3. Misalkan p dan q bilangan prima. Jika diketahui persamaan $x^{2014} - px^{2013} + q = 0$ mempunyai akar-akar bilangan bulat, maka nilai $p + q$ adalah
4. Jika fungsi f didefinisikan oleh $f(x) = \frac{kx}{2x+3}$, $x \neq -\frac{2}{3}$, k konstanta, memenuhi $f(f(x)) = x$ untuk setiap bilangan real x kecuali $x \neq -\frac{2}{3}$, maka nilai k adalah
5. Koefisien dari x^{2013} pada ekspansi $(1+x)^{4016} + x(1+x)^{4015} + x^2(1+x)^{4014} + \dots + x^{2013}(1+x)^{2013}$ adalah
6. Jika $\frac{2}{x} - \frac{2}{y} = 1$ dan $y - x = 2$, maka $(x+y)^2 = \dots$
7. Suatu dadu ditos 6 kali. Banyak cara memperoleh mata yang muncul 28 dengan tepat satu dadu muncul mata 6 adalah
8. Misalkan P adalah titik interior dalam daerah segitiga ABC , sehingga besar $\angle PAB = 10^\circ$, $\angle PBA = 20^\circ$, $\angle PCA = 30^\circ$, dan $\angle PAC = 40^\circ$. Besar $\angle ABC$ adalah
9. Sepuluh kartu ditulis angka satu sampai sepuluh (setiap kartu hanya terdapat satu angka dan tidak ada dua kartu yang memiliki angka yang sama). Kartu-kartu tersebut dimasukkan ke dalam kotak dan diambil satu secara acak. Kemudian sebuah dadu dilempar. Probabilitas dari hasil kali angka pada kartu dan angka pada dadu menghasilkan bilangan kuadrat adalah
10. Enam orang siswa akan duduk pada tiga meja bundar, dimana tiap meja akan diduduki oleh minimal oleh satu siswa. Banyaknya cara untuk melakukan hal tersebut adalah
11. Suatu partikel bergerak pada bidang Cartesius dari titik $(0,0)$. Tiap langkah bergerak satu satuan searah sumbu X positif dengan probabilitas 0,6 atau searah sumbu Y positif dengan probabilitas 0,4. Setelah sepuluh langkah, probabilitas partikel tersebut sampai pada titik $(6,4)$ dengan melalui $(3,4)$ adalah
12. Diberikan segitiga ABC , dengan panjang sisi $AB = 30$. Melalui AB sebagai diameter, dibuat sebuah lingkaran yang memotong sisi AC dan sisi BC berturut-turut di D dan E . Jika $AD = \frac{1}{3}AC$ dan $BE = \frac{1}{4}BC$, maka luas segitiga ABC sama dengan
13. Banyaknya nilai α dengan $0 < \alpha < 90^\circ$ yang memenuhi persamaan $(1 + \cos \alpha)(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha) = \frac{1}{8}$ adalah
14. Diberikan segitiga lancip ABC dengan O sebagai pusat lingkaran luarnya. Misalkan M dan N berturut-turut pertengahan OA dan BC . Jika $\angle ABC = 4\angle OMN$ dan $\angle ACB = 6\angle OMN$, maka besarnya $\angle OMN = \dots$

15. Tentukan semua bilangan tiga digit yang memenuhi syarat bahwa bilangan tersebut sama dengan penjumlahan dari faktorial setiap digitnya.
16. Diberikan himpunan $S = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^2 - 2x + 7}{2x - 1} \in \mathbb{Z} \right\}$. Banyaknya himpunan bagian dari S adalah
17. Untuk $x > 0$, $y > 0$, didefinisikan $f(x, y)$ adalah nilai terkecil di antara x , $\frac{y}{2} + \frac{2}{x}$, dan $\frac{1}{y}$. Nilai terbesar yang mungkin dicapai oleh $f(x, y)$ adalah
18. Nilai k terkecil, sehingga sembarang k bilangan dipilih dari $\{1, 2, \dots, 30\}$, selalu dapat ditemukan dua bilangan yang hasil kalinya merupakan bilangan kuadrat sempurna adalah
19. Diketahui x_1, x_2 adalah dua bilangan bulat berbeda yang merupakan akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2 + px + q + 1 = 0$. Jika p dan $p^2 + q^2$ adalah bilangan-bilangan prima, maka nilai terbesar yang mungkin dari $x_1^{2013} + x_2^{2013}$ adalah
20. Misalkan $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x dan $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x . Tentukan semua x yang memenuhi $\lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil = 5$.