SOLUSI
PART 2
Creative Problem Solving in School Matematics

1. Bilangan asli disusun seperti bagan di bawah ini.

1						
2	3	4				
5	6	7	8	9		
10	11	12	13	14	15	16

…

Besar bilangan ketiga dalam baris ke-50 adalah ….

Solusi:

Alternatif 1:

1 2 5 10 17 …

1 3 5 7 …

2 2 2 …

Ambillah suku ke-*n* adalah $u_n = an^2 + bn + c$.

$u_1 = a + b + c = 1$ …. (1)

$u_2 = 4a + 2b + c = 2$ …. (2)

$u_3 = 9a + 3b + c = 5$ …. (3)

Persamaan (2) – persamaan (1): $3a + b = 1$ …. (4)

Persamaan (3) – persamaan (2): $5a + b = 3$ …. (5)

Persamaan (5) – persamaan (4): $2a = 2$

$a = 1$

$a = 1 \to 3a + b = 1$

$3 \cdot 1 + b = 1$

$b = -2$

$a = 1 \text{ dan } b = -2 \to a + b + c = 1$

$1 - 2 + c = 1$

$c = 2$

$\therefore u_n = n^2 - 2n + 2$

Bilangan pertama pada baris ke-50 adalah $u_{50} = 50^2 - 2 \cdot 50 + 2 = 2.402$.

Barisan bilangan pada baris ke-50 adalah 2.402, 2.403, 2.404, …

Jadi, bilangan ke-3 pada baris ke-50 adalah 2.404.

Alternatif 2: (Buku SeribuPena Matematika SMA Kelas 10 Bab Fungsi Kuadrat)

Pasangan titik $(1,1)$, $(2,2)$, dan $(3,5)$ terletak pada grafik fungsi kuadrat (parabola) $u_n = an^2 + bn + c$.

Persamaan parabola tersebut dapat ditentukan sebagai berikut.

$$y = f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

$$y = f(x) = a(x-1)(x-2) + \frac{2-1}{2-1}(x-1) + 1$$
$$y = f(x) = a(x^2 - 3x + 2) + x$$
$$(3,5) \to \ y = f(x) = a(x^2 - 3x + 2) + x$$
$$5 = a(3^2 - 3 \cdot 3 + 2) + 3$$
$$5 = 2a + 3$$
$$a = 1$$
$$a = 1 \to \ y = f(x) = 1(x^2 - 3x + 2) + x \ \ y = f(x) = x^2 - 2x + 2$$
$$\therefore u_n = n^2 - 2n + 2$$

Bilangan pertama pada baris ke-50 adalah $u_{50} = 50^2 - 2 \cdot 50 + 2 = 2.402$.

Barisan bilangan pada baris ke-50 adalah 2.402, 2.403, 2.404, …

Jadi, bilangan ke-3 pada baris ke-50 adalah 2.404.

2. Nilai dari $\sin 15°$, $\cos 15°$, $\tan 15°$, $\sin 75°$, $\cos 75°$, dan $\tan 75°$ adalah ….

Solusi:

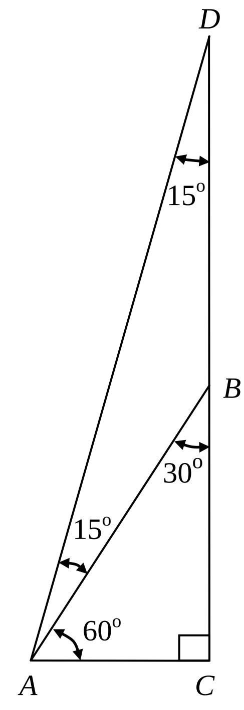
Alternatif 1:

1. Buatlah segitiga *ABC* siku-siku di *C*, dengan $\angle A = 60°$ dan $\angle B = 30°$.
2. Perpanjang garis *CB*, sehingga *AB* = *BD*. Jadi, segitiga *ABD* sama kaki.
   Akibatnya $\angle BAD = \angle BDA = 15°$.
3. Ambillah *AC* = 1, maka *AB* = *BD* = 2, dan *BC* = $\sqrt{3}$. Sehingga $CD = 2 + \sqrt{3}$.
   Menurut Pythagoras:

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{1^2 + \left(2 + \sqrt{3}\right)^2}$$
$$= \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}, \text{ karena } p = \sqrt{8^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2} = 4 \text{ (harus bilangan rasional)}$$
$$= \sqrt{\frac{8+4}{2}} + \sqrt{\frac{8-4}{2}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

Dengan demikian,

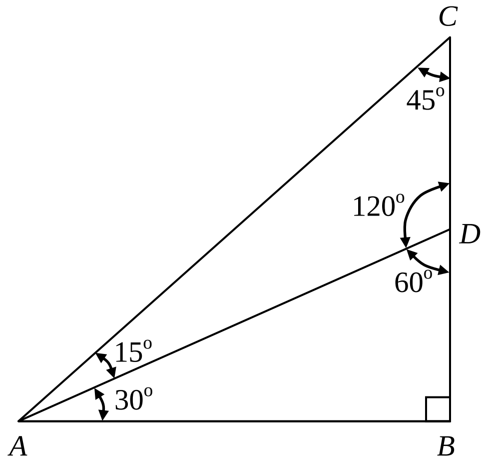
Perhatikan ΔACD siku-siku di *C*.



$$\sin 15° = \frac{AC}{AD} = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$$
$$\cos 15° = \frac{CD}{AD} = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$$
$$\tan 15° = \frac{AC}{CD} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$
$$\sin 75° = \frac{CD}{AD} = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$$
$$\cos 75° = \frac{AC}{AD} = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$$
$$\tan 75° = \frac{CD}{AC} = \frac{2 + \sqrt{3}}{1} = 2 + \sqrt{3}$$

Alternatif 2:

1. Buatlah segitiga *ABC* siku-siku sama kaki, $\angle B = 90°$ dan *AB* = *BC*.
2. Buatlah segitiga *ABD* siku-siku di *B*, $\angle DAB = 30°$ dan $\angle ADB = 60°$. Sehingga $\angle DAC = 15°$ dan $\angle ADC = 120°$.
3. Ambillah $AB = BC = 3$, maka



Perhatikan ΔABC: $AC = 3\sqrt{2}$.

Perhatikan ΔABD: $BD = \sqrt{3}$ dan $AD = 2\sqrt{3}$.

Sehingga $CD = BC - BD = 3 - \sqrt{3}$.

Menurut Aturan Kosinus dalam ΔADC.

$$\cos\angle DAC = \frac{AC^2 + AD^2 - CD^2}{2AC \times AD}$$

$$\cos 15° = \frac{\left(3\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 - \left(3 - \sqrt{3}\right)^2}{2 \times 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$$

Kita juga dapat menggunakan Aturan Sinus sebagai berikut.

Menurut Aturan Sinus dalam ΔADC.

$$\frac{CD}{\sin\angle DAC} = \frac{AD}{\sin\angle ACD}$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{\sin 15°} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 45°}$$

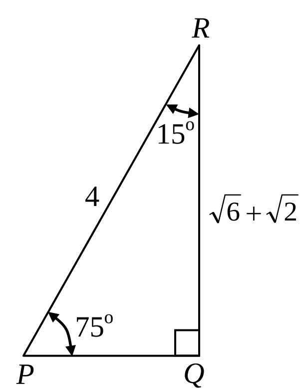
$$\sin 15° = \frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\sin 45° = \frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \times \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$$

Selanjutnya kita dapat menentukan perbandingan fungsi trigonometri lainnya menggunakan perbandingan trigonometri pada segitiga lancip.

$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{4^2 - \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{8 + p}{2}} - \sqrt{\frac{8 - p}{2}}, \text{ karena } p = \sqrt{8^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2} = 4 \text{ (harus bilangan rasional)}$$

$$= \sqrt{\frac{8 + 4}{2}} - \sqrt{\frac{8 - 4}{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$



$$\sin 15° = \frac{PQ}{PR} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$$

$$\tan 15° = \frac{PQ}{QR} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\sin 75° = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$$

$$\cos 75° = \frac{PQ}{PR} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$$

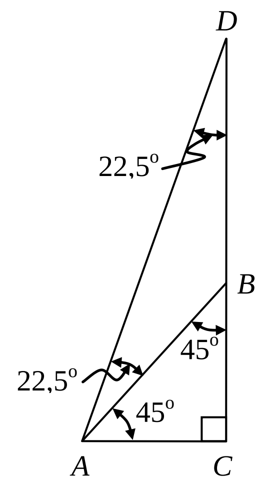
$$\tan 75° = \frac{QR}{PQ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 2 + \sqrt{3}$$

3. Nilai dari $\sin 22{,}5°$, $\cos 22{,}5°$, $\tan 22{,}5°$, $\sin 67{,}5°$, $\cos 67{,}5°$, dan $\tan 67{,}5°$ adalah ….

Solusi:

1. Buatlah segitiga *ABC* siku-siku sama kaki, $\angle C = 90°$ dan $AC = BC$.

2. Perpanjang garis *CB*, sehingga *AB* = *BD*. Jadi, ΔABD sama kaki.
   Akibatnya $\angle BAD = \angle BDA = 22{,}5^\circ$.
3. Ambillah *AC* = *BC* = 1, maka *AB* = $\sqrt{2}$ dan $CD = 1+\sqrt{2}$.
   Perhatikan segitiga *ACD* siku-siku di *C*.
   Menurut Pythagoras:
   $$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{1^2 + \left(1+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$$



Dengan demikian,
Perhatikan ΔACD siku-siku di *C*.

$$\sin 22{,}5^\circ = \frac{AC}{AD} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\cos 22{,}5^\circ = \frac{CD}{AD} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

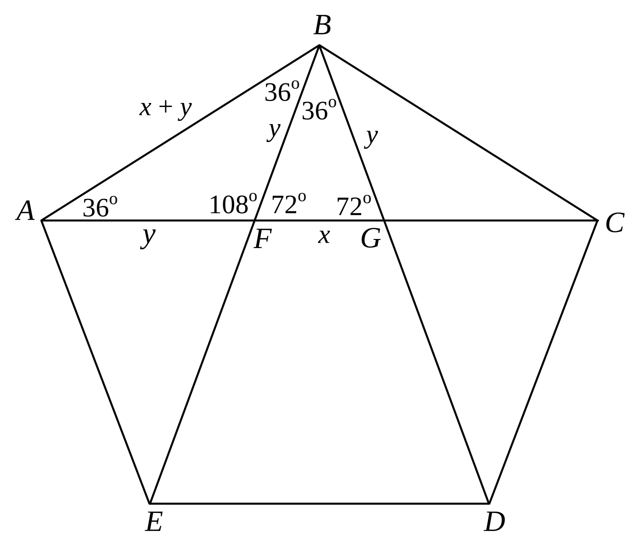
$$\tan 22{,}5^\circ = \frac{AC}{CD} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$$

$$\sin 67{,}5^\circ = \frac{CD}{AD} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\cos 67{,}5^\circ = \frac{AC}{AD} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\tan 67{,}5^\circ = \frac{CD}{AC} = \frac{1+\sqrt{2}}{1} = 1+\sqrt{2}$$

4. Nilai dari sinus, kosinus, dan tangen untuk sudut-sudut 18°, 36°, 54°, dan 72° adalah ….
   Solusi:
   Ambillah segi lima beraturan *ABCDE*. Titik *F* adalah perpotongan *AC* dan *BE*, dan *G* adalah perpotongan *AC* dan *BD*.
   Misalnya $x = FG$ dan $y = BG$. Segitiga *BFG* sama kaki, dengan $BF = FG = y$. Segitiga *ABF* sama kaki, dengan $AF = BF = y$. Maka $AG = x + y$, sehingga segitiga *ABG* sama kaki, dengan $AB = x + y$
   Perhatikan bahwa $\Delta ABG \sim \Delta BFG$



$$\frac{AB}{BG} = \frac{BF}{FG}$$

$$\frac{x+y}{y} = \frac{y}{x}$$

$$y^2 - xy - x^2 = 0$$

$$y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + 4x^2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}x$$

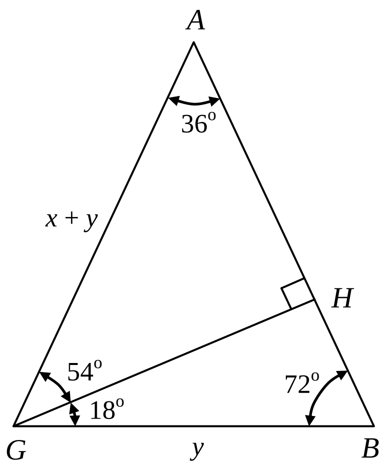
$y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}x$ (ditolak, $y < 0$)

atau $y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x$ (diterima)

Perhatikan bahwa $\Delta ABC \sim \Delta AFG$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AF}$$

$$\frac{x+y}{y}=\frac{y}{x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



Sehingga:

$$y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x$$

$$x+y=x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}x$$

Perhatikan ΔAGB.
Tarik garis tinggi dari titik G ke sisi AB sehingga memotongnya di titik H
Ambillah $HB = a$, maka $HA=x+y-a$

$$=\frac{3+\sqrt{5}}{2}x-a.$$

Perhatikan ΔAGH siku-siku di H.

$GH^2=AG^2-HA^2$ …. (1)

Perhatikan ΔBGH siku-siku di H.

$GH^2=BG^2-HB^2$ …. (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$AG^2-HA^2=BG^2-HB^2$$

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}x\right)^2-\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}x-a\right)^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)^2-a^2$$

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}x\right)^2-\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}x\right)^2+2a\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}x\right)-a^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)^2-a^2$$

$$2a\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}x\right)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)^2$$

$$2a\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}x\right)=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)x^2$$

$$a=\frac{1}{2}x$$

$$\therefore HB=\frac{1}{2}x$$

$$\therefore HA=AB-HB=\frac{3+\sqrt{5}}{2}x-\frac{1}{2}x=\frac{2+\sqrt{5}}{2}x$$

$$GH^2=BG^2-HB^2$$

$$GH^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)^2-\left(\frac{1}{2}x\right)^2=\frac{5+2\sqrt{5}}{4}x^2$$

$GH=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{4}x^2}=\frac{1}{2}x\sqrt{5+2\sqrt{5}}$, karena $p=\sqrt{5^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{5}$ (bukan bilangan rasional). Sehingga bentuk $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ tidak dapat disederhanakan.

Perhatikan ΔBGH siku-siku di H.

$$\sin 18^\circ = \frac{HB}{BG} = \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)$$

$$\cos 18^\circ = \frac{GH}{BG} = \frac{\frac{1}{2}x\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$\tan 18^\circ = \frac{HB}{GH} = \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x\sqrt{5+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{1}{5+2\sqrt{5}}} = \frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$$

$$\sin 72^\circ = \frac{GH}{BG} = \frac{\frac{1}{2}x\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$\cos 72^\circ = \frac{HB}{BG} = \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)$$

$$\tan 72^\circ = \frac{GH}{HB} = \frac{\frac{1}{2}x\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\frac{1}{2}x} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

Perhatikan ΔAGH siku-siku di H.

$$\sin 36^\circ = \frac{GH}{AG} = \frac{\frac{1}{2}x\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}x} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{14+6\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$\cos 36^\circ = \frac{HA}{AG} = \frac{\frac{2+\sqrt{5}}{2}x}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}x} = \frac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)$$

$$\tan 36^\circ = \frac{GH}{HA} = \frac{\frac{1}{2}x\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\frac{2+\sqrt{5}}{2}x} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

$$\sin 54^\circ = \frac{HA}{AG} = \frac{\frac{2+\sqrt{5}}{2}x}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}x} = \frac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)$$

$$\cos 54^\circ = \frac{GH}{AG} = \frac{\frac{1}{2}x\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}x} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{14+6\sqrt{5}}} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$\tan 54^\circ = \frac{HA}{GH} = \frac{\frac{2+\sqrt{5}}{2}x}{\frac{1}{2}x\sqrt{5+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}} = \frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$$

5. Nilai dari
$\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ + \sin^2 90^\circ$ adalah ….

Solusi:

$$\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ + \sin^2 90^\circ$$
$$= \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 10^\circ + \sin^2 90^\circ$$
$$= \left(\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ\right) + \left(\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ\right) + \left(\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ\right) + \left(\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ\right) + \sin^2 90^\circ$$
$$= 1+1+1+1+1$$
$$= 5$$

6. Jika a dan b adalah akar-akar persamaan $x^2 + x\sin\alpha + 1 = 0$ sedangkan c dan d adalah akar-akar persamaan $x^2 + x\cos\alpha - 1 = 0$, maka nilai dari $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}$ adalah ….

Solusi:

$x^2 + x\sin\alpha + 1 = 0$, akar-akarnya a dan b.

$a + b = -\sin\alpha$

$ab = 1 \to a^2 = \frac{1}{b^2}$ dan $b^2 = \frac{1}{a^2}$

$x^2 + x\cos\alpha - 1 = 0$, akar-akarnya c dan d.

$c + d = -\cos\alpha$

$cd = -1 \to c^2 = \frac{1}{d^2}$ dan $d^2 = \frac{1}{c^2}$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = b^2 + a^2 + d^2 + c^2$$
$$= (a+b)^2 - 2ab + (c+d)^2 - 2cd$$
$$= (-\sin\alpha)^2 - 2\cdot 1 + (-\cos\alpha)^2 - 2(-1)$$
$$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2 + 2$$
$$= 1$$

7. Jika $0 \le x \le \pi$ dan $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$, maka nilai dari $\tan x$ adalah ….

Solusi:

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$$
$$\sin x + \sqrt{1-\sin^2 x} = \frac{1}{5}$$

Ambillah $k = \sin x$, dengan $k > 0$

$$5k - 1 = -5\sqrt{1-k^2}$$
$$25k^2 - 10k + 1 = 25\left(1-k^2\right)$$

$$50k^2 - 10k - 24 = 0$$
$$25k^2 - 5k - 12 = 0$$
$$(5k+3)(5k-4) = 0$$

$k = -\frac{3}{5}$ (ditolak) atau $k = \frac{4}{5}$ (diterima)

Jadi, $\sin x = \frac{4}{5}$, sehingga $\cos x = -\frac{3}{5}$

Dengan demikian, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$

8. Jika panjang sisi-sisi suatu segitiga *ABC* adalah $BC = \sqrt{13}$ satuan, $AC = \sqrt{74}$ satuan, dan $AB = \sqrt{85}$ satuan, maka luas segitiga *ABC* adalah ….

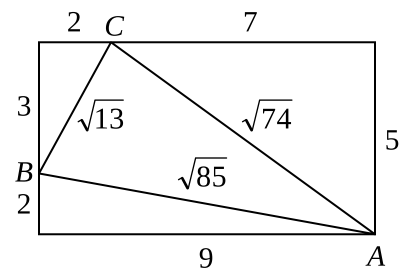
Solusi:

Alternatif 1:

Lambang $[ABC]$ menyatakan luas segitiga *ABC*.

$$[ABC] = 9\times 5 - \frac{1}{2}\times 2\times 9 - \frac{1}{2}\times 5\times 7 - \frac{1}{2}\times 2\times 3 = 45 - 9 - 17\frac{1}{2} - 3 = 15\frac{1}{2} \text{ satuan}$$

Alternatif 2:



$$\cos A = \frac{\left(\sqrt{85}\right)^2 + \left(\sqrt{74}\right)^2 - \left(\sqrt{13}\right)^2}{2\left(\sqrt{85}\right)\left(\sqrt{74}\right)} = \frac{85 + 74 - 13}{2\left(\sqrt{85}\right)\left(\sqrt{74}\right)} = \frac{73}{\sqrt{6290}}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{73}{\sqrt{6290}}\right)^2} = \frac{31}{\sqrt{6290}}$$

$$[ABC] = \frac{1}{2}\times AB\times AC\times \sin A = \frac{1}{2}\times\sqrt{85}\times\sqrt{74}\times\frac{31}{\sqrt{6290}} = 15\frac{1}{2} \text{ satuan}$$

9. Dalam segitiga ABC, $\tan A : \tan B : \tan C = 1:2:3$. Nilai dari $\frac{AC}{AB} = ...$

Solusi:

Notasi $[ABC]$ menyatakan luas segitiga *ABC*.

$$[ABC] = \frac{1}{2}bc\sin A \Leftrightarrow \sin A = \frac{2[ABC]}{bc}$$
$$[ABC] = \frac{1}{2}ac\sin B \Leftrightarrow \sin B = \frac{2[ABC]}{ac}$$
$$[ABC] = \frac{1}{2}ab\sin C \Leftrightarrow \sin C = \frac{2[ABC]}{ab}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},\ \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{2[ABC]}{bc}}{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} = \frac{4[ABC]}{b^2 + c^2 - a^2}$$

$$\tan B = \frac{4[ABC]}{a^2 + c^2 - b^2}$$

$$\tan C = \frac{4[ABC]}{a^2 + b^2 - c^2}$$

$$\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{\dfrac{4[ABC]}{b^2 + c^2 - a^2}}{\dfrac{4[ABC]}{a^2 + c^2 - b^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{1}{2}$$

$$2a^2 + 2c^2 - 2b^2 = b^2 + c^2 - a^2$$

$$3b^2 - c^2 = 3a^2 \text{ …. (1)}$$

$$\frac{\tan A}{\tan C} = \frac{\dfrac{4[ABC]}{b^2 + c^2 - a^2}}{\dfrac{4[ABC]}{a^2 + b^2 - c^2}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{1}{3}$$

$$3a^2 + 3b^2 - 3c^2 = b^2 + c^2 - a^2$$

$$2b^2 - 4c^2 = -4a^2$$

$$b^2 - 2c^2 = -2a^2 \text{ …. (2)}$$

Dari (1) dan (2) diperoleh $b = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ dan $c = \frac{3a}{\sqrt{5}}$

Jadi, $\frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} = \frac{\frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{5}}}{\frac{3a}{\sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

10. Segitga XYZ mempunyai sisi-sisi yang panjangnya 3 cm, 4 cm, dan 5 cm. Titik P terletak di dalam segitiga ini sehingga $\angle XPY = \angle YPZ = \angle ZPX$. Jarak dari P ke X, Y, dan Z masing-masing adalah l, m, dan n. Nilai dari $l^2 + m^2 + n^2$ adalah ….

Solusi:

$\angle XPY = \angle YPZ = \angle ZPX = 120°$

Perhatikan ΔXPY:

$3^2 = l^2 + m^2 - 2 \cdot l \cdot m \cdot \cos 120°$

$9 = l^2 + m^2 + lm$ …. (1)

Perhatikan ΔYPZ:

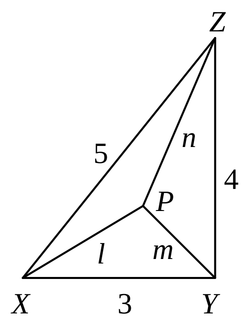
$4^2 = m^2 + n^2 - 2 \cdot m \cdot n \cdot \cos 120°$

$16 = m^2 + n^2 + mn$ …. (2)

Perhatikan ΔZPX:

$5^2 = l^2 + n^2 - 2 \cdot l \cdot n \cdot \cos 120°$

$25 = l^2 + n^2 + ln$ …. (3)



Penjumlahan persamaan (1), (2), dan (3) menghasilkan:

$50 = 2\left(l^2 + m^2 + n^2\right) + (lm + ln + mn)$ …. (4)

$[XYZ] = [XPY] + [YPZ] + [ZPX]$

$$\frac{1}{2}\times 3\times 4=\frac{1}{2}lm\sin 120^\circ+\frac{1}{2}mn\sin 120^\circ+\frac{1}{2}ln\sin 120^\circ$$

$$6=\frac{\sqrt{3}}{4}(lm+mn+ln)$$

$lm+mn+ln=8\sqrt{3}$ …. (5)

Dari persamaan (4) dan (5) diperoleh:

$$50=2\left(l^2+m^2+n^2\right)+8\sqrt{3}$$

$$l^2+m^2+n^2=25-4\sqrt{3}$$

11. Sinus-sinus sudut dari ΔABC berbanding sebagai 3 : 4 : 5. Jika A sudut terkecil dan $\tan A=\frac{x}{16}$, maka nilai x adalah ….

Solusi:

$\sin A:\sin B:\sin C=3:4:5$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

$a:b:c=3:4:5$

Ambillah $\sin A=3k$, $\sin B=4k$, dan $\sin C=5k$.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$(3k)^2=(4k)^2+(5k)^2-2\cdot 4k\cdot 5k\cdot\cos A$$

$$9k^2=16k^2+25k^2-40k^2\cos A$$

$$40\cos A=32$$

$$\cos A=\frac{4}{5}$$

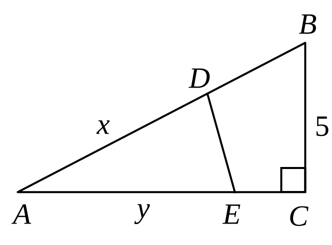
$$\sin A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$$

$$\tan A=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}=\frac{x}{16}$$

$x=12$

12. Diberikan segitiga ABC siku-siku di C, dengan $AB=13$ cm, $BC=5$ cm, dan $AC=12$ cm. Titik D pada AB dan titik E pada AC, sehingga DE membagi segitiga ABC menjadi dua bagian dengan luas yang sama. Nilai minimum DE adalah ….

Solusi:



Notasi $[ABC]$ menyatakan luas segitiga ABC.

$[ADE]=[BCED]=15$

Ambillah $AE=x$ dan $AD=y$

$$[ADE]=\frac{1}{2}xy\sin A=15$$

$$\frac{1}{2}xy\left(\frac{5}{13}\right)=15$$

$xy=78$

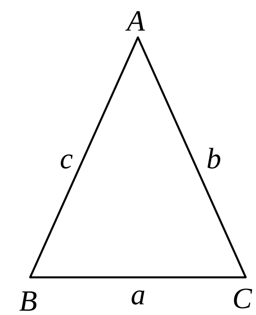
$$DE^2=x^2+y^2-2xy\cos A$$

$$= (x-y)^2 + 2xy - 2xy\cos A$$
$$= (x-y)^2 + 2xy(1-\cos A)$$
$$= (x-y)^2 + 2\cdot 78\left(1-\frac{12}{13}\right)$$
$$= (x-y)^2 + 12$$

Jika $x - y = 0$, maka $DE_{\min} = \sqrt{12}$.

13. Dalam segitiga *ABC*, *AB* = *AC* dan $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{7}{15}$. Nilai dari $\frac{\sin A}{\sin B}$ adalah ….

Solusi:



Karena $AB = AC$ atau $b = c$, maka $\cos A = \frac{b^2+b^2-a^2}{2b^2} = 1 - \frac{a^2}{2b^2}$

Karena $AB = AC$ atau $b = c$, maka $\cos B = \frac{a^2+b^2-b^2}{2ab} = \frac{a}{2b}$

$$\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{7}{15}$$
$$15\cos A - 7\cos B = 0$$
$$15\left(1-\frac{a^2}{2b^2}\right) - 7\left(\frac{a}{2b}\right) = 0$$
$$15 - 15\left(\frac{a^2}{2b^2}\right) - 7\left(\frac{a}{2b}\right) = 0$$
$$15\left(\frac{a^2}{b^2}\right) + 7\left(\frac{a}{2b}\right) - 30 = 0$$
$$\left(5\frac{a}{b} - 6\right)\left(3\frac{a}{b} + 5\right) = 0$$

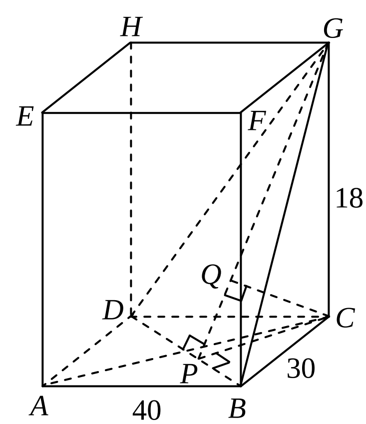
$\frac{a}{b} = \frac{6}{5}$ (diterima) atau $\frac{a}{b} = -\frac{5}{3}$ (ditolak)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Jadi, $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b} = \frac{6}{5}$.

14. Diberikan balok *ABCD.EFGH*, dengan *AB* = 40 cm, *BC* = 30 cm, dan *CG* = 18 cm. Jarak dari titik *C* ke bidang *BDG* adalah ….

Solusi:



$$BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\text{ cm}$$

Luas $\Delta BCD = \frac{1}{2} \times BC \times CD = \frac{1}{2} \times BD \times CP$

$$CP = \frac{BC \times CD}{BD} = \frac{30 \times 40}{50} = 24\text{ cm}$$

$$PG = \sqrt{CG^2 + CP^2} = \sqrt{18^2 + 24^2} = 30\text{ cm}$$

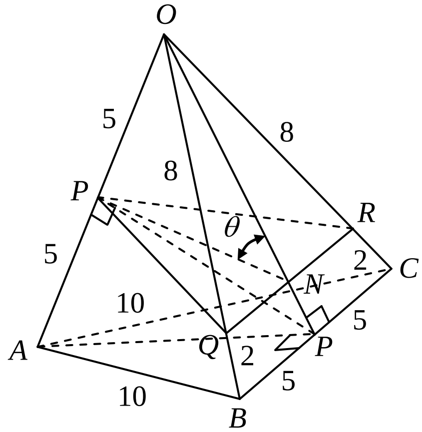
Luas $\Delta GCP = \frac{1}{2} \times CG \times CP = \frac{1}{2} \times PG \times CQ$

$$CQ=\frac{CG\times CP}{PG}=\frac{18\times 24}{30}=14\frac{2}{5}\text{ cm}$$

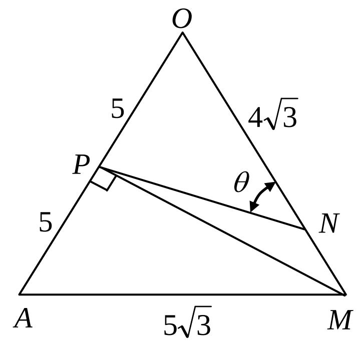
Jadi, jarak dari titik C ke bidang BDG adalah $14\frac{2}{5}$ cm.

15. Diberikan limas segitiga beraturan (tetrahedron beraturan atau bidang empat beraturan) $OABC$ yang panjang semua rusuknya masing-masing adalah 10 cm. Tetrahedron ini dipotong oleh bidang PQR sedemikian sehingga OP = 5 cm pada sisi OA; OQ = 8 cm pada sisi OB; dan OR = 8 cm. Besar sudut antara bidang PQR dan bidang OBC adalah θ. Jika $\sin\theta=\frac{a}{b}\sqrt{c}$, dengan a, b, c adalah bilangan asli dan bilangan c dalam bentuk sederhana (tidak dapat ditarik akarnya lagi), maka nilai $a+b+c=\ldots.$

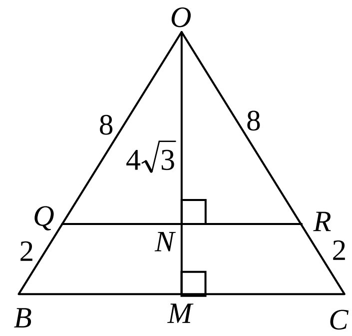
Solusi:



(1)



(2)



(3)

Dari gambar (3): $\frac{ON}{OM}=\frac{OQ}{OB}=\frac{8}{10}$

$OM=10\sin 60^\circ=10\times\frac{1}{2}\sqrt{3}=5\sqrt{3}$ cm

Sehingga $ON=\frac{8}{10}\times 5\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ cm

Karena tetrahedron beraturan, maka $AM=OM=5\sqrt{3}$ cm

ΔOAM adalah sama kaki dan P adalah titik tengah OA.

Sehingga $\angle OPM=90^\circ$ dan $\cos\angle POM=\frac{OP}{OM}=\frac{5}{5\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Menurut aturan Kosinus dalam ΔPON:

$$PN^2=OP^2+ON^2-2\times OP\times ON\times\cos\angle PON$$

$$PN^2=5^2+\left(4\sqrt{3}\right)^2-2\times 5\times 4\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=25+48-40=33$$

$$\sin\angle PON=\sqrt{1-\cos^2\angle POM}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Menurut aturan Sinus dalam ΔPON:

$$\frac{OP}{\sin\angle PNO}=\frac{PN}{\sin\angle PON}$$

$$\sin\theta = \frac{OP \times \sin\angle PON}{PN} = \frac{5 \times \sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{33}} = \frac{5}{33}\sqrt{22}$$

Sehingga $a = 5$, $b = 33$, dan $c = 22$

Jadi, nilai $a + b + c = 5 + 33 + 22 = 60$.