Language: **Indonesian**

Day: **1**

Rabu, 7 Juli 2010

Soal 1. Tentukan semua fungsi $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga kesamaan

$$f\big(\lfloor x\rfloor y\big) = f(x)\big\lfloor f(y)\big\rfloor$$

berlaku untuk semua $x, y \in \mathbb{R}$. (Di sini $\lfloor z\rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan z.)

Soal 2. Misalkan I pusat lingkaran dalam segitiga ABC dan misalkan Γ lingkaran luarnya. Misalkan garis AI memotong Γ lagi di D. Misalkan E titik pada busur $\widehat{BDC}$ dan F titik pada sisi BC sehingga

$$\angle BAF = \angle CAE < \tfrac{1}{2}\angle BAC.$$

Terakhir, misalkan G titik tengah ruas garis IF. Buktikan bahwa garis DG dan EI berpotongan pada Γ.

Soal 3. Misalkan $\mathbb{N}$ himpunan bilangan bulat positif. Tentukan semua fungsi $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sehingga

$$\big(g(m)+n\big)\big(m+g(n)\big)$$

suatu kuadrat sempurna untuk semua $m, n \in \mathbb{N}$.

Waktu: 4 jam dan 30 menit
Masing-masing soal bernilai 7 angka

Language: **Indonesian**

Day: **2**

Kamis, 8 Juli 2010

Soal 4. Misalkan P suatu titik di dalam segitiga ABC. Garis-garis AP, BP dan CP memotong lagi lingkaran luar Γ dari segitiga ABC berturut-turut di titik-titik K, L dan M. Garis singgung Γ di C memotong garis AB di S. Misalkan $SC = SP$. Buktikan bahwa $MK = ML$.

Soal 5. Di dalam masing-masing dari enam kotak $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ mula-mula terdapat satu koin. Terdapat dua tipe operasi yang diperbolehkan:

Tipe 1: Pilih suatu kotak tidak kosong B_j dengan $1 \leq j \leq 5$. Hilangkan satu koin dari B_j dan tambahkan dua koin ke B_{j+1}.

Tipe 2: Pilih suatu kotak tidak kosong B_k dengan $1 \leq k \leq 4$. Hilangkan satu koin dari B_k dan tukarkan isi (ada kemungkinan kosong) kotak B_{k+1} dan B_{k+2}.

Tentukan apakah terdapat suatu barisan hingga operasi tersebut sehingga hasil pada kotak-kotak B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 menjadi kosong dan kotak B_6 berisi tepat $2010^{2010^{2010}}$ koin. (Catatan bahwa $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Soal 6. Misalkan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ suatu barisan bilangan real positif. Anggap bahwa untuk suatu bilangan bulat positif s, kita mempunyai

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

untuk semua $n > s$. Buktikan bahwa terdapat bilangan bulat positif ℓ dan N, dengan $\ell \leq s$ dan sehinggga $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ untuk semua $n \geq N$.

Waktu: 4 jam dan 30 menit
Masing-masing soal bernilai 7 angka