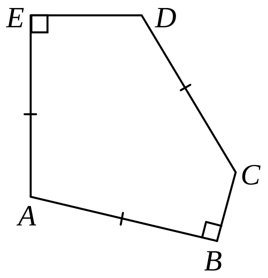
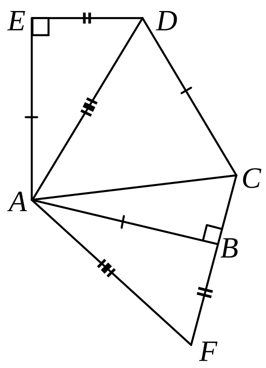
SOLUSI
PART 7
Creative Problem Solving in School Mathematics

1. Hitunglah luas segi lima *ABCDE*, jika $AB = AE = CD = 1$, $BC + DE = 1$, dan $\angle ABC = \angle AED = 90°$.



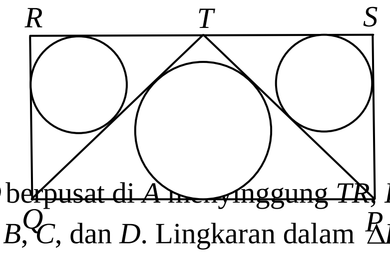
Solusi:



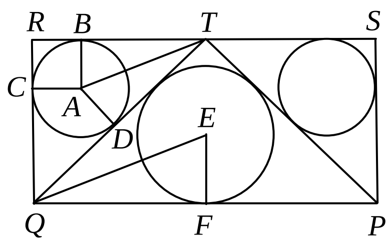
Hubungkan titik *A* dengan titik *D* dan *C*. Perpanjang *BC*, sehingga *FB* = *DE*. Jelaslah bahwa $\Delta ADE \cong \Delta AFB$, sehingga luas segi lima *ABCDE* = luas segi empat *AFCD*. Perhatikan $\Delta AFC \cong \Delta ACD$ ini mengikuti kenyataan bahwa $CD = FB + BC = FC = 1$ dan $AF = AD$ (ingat kembali $\Delta ADE \cong \Delta AFB$)

$$\therefore \left[ABCDE\right] = 2\times\left[AFC\right] = 2\times\frac{1}{2}\times1\times1 = 1$$

2. Pada diagram $PQRS$ adalah persegi panjang dan *T* adalah titik tengah *RS*. Lingkaran dalam ΔPTS dan ΔRTQ masing-masing mempunyai jari-jari 3 cm. Lingkaran dalam ΔPQT mempunyai jari-jari 4 cm. Hitunglah luas persegi panjang $PQRS$.



Solusi:



Lingkaran dalam ΔRTQ berpusat di *A* menyinggung *TR*, *RQ*, dan *TQ* berturut-turut di *B*, *C*, dan *D*. Lingkaran dalam ΔPQT berpusat di E dan menyinggung *PQ* di *F*.

Jelaslah bahwa $\angle RTQ = \angle TQP$. Di sini, $\angle ATB = \frac{1}{2}\angle RTQ$ dan

$\angle EQF = \frac{1}{2}\angle TQF$. $\Delta ATB \sim \Delta EQF$, sehingga

$$\frac{QF}{FE} = \frac{TB}{AB}$$

$EF = 4$, $AB = 3$, $TB = QF - 3$

Sehingga

$\frac{QF}{4} = \frac{QF - 3}{3}$

$3QF = 4QF - 12$

$QF = 12$

$\therefore QP = 2 \times QF = 2 \times 12 = 24$

$TD = TB = 12 - 3 = 9$

$QC = QD = QR - 3$

$QT = QD + TD = QC + TB = QR - 3 + 9 = QR + 6$

Menurut Pythagoras:

$QR^2 + TR^2 = QT^2$

$QR^2 + 12^2 = (QR + 6)^2$

$QR^2 + 144 = QR^2 + 12QR + 36$

$144 = 12QR + 36$

$12QR = 108$

$QR = 9$

$\therefore$ Luas perasegi panjang ABCD $= QP \times QR = 24 \times 12 = 216$

3. Jika a adalah bilangan bulat positif, maka a! adalah hasil perkalian $1 \times 2 \times 3 \times ... \times (a-1) \times a$. Sebagai contoh $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$. Jika n adalah bilangan bulat positif, maka jumlah $1 + 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \ldots + n \times n!$ adalah ....

   Solusi:

   $$\begin{aligned} 1 + 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \ldots + n \times n! &= 1! + 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \ldots + n \times n! \\ &= 1!(1+1) + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + n \times n! \\ &= 2! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \ldots + n \times n! \\ &= 2!(2+1) + 3 \times 3! + ... + n \times n! \\ &= 3! + 3 \times 3! + \ldots + n \times n! \\ &= ... = n! + n \times n! = n!(n+1) = (n+1)! \end{aligned}$$

4. Berapa banyak persegi panjang yang mempunyai sisi bilangan bulat positif yang mempunyai nilai numerik keliling dan luasnya sama?

   Solusi:

   Ambillah ukuran persegi panjang adalah *x* dan *y*.

   Keliling $= 2x + 2y$

   Luas $= xy$

   $2x + 2y = xy$

   $xy - 2x = 2y$

$(y-2)x = 2y$

$x = \frac{2y}{y-2} = \frac{2(y+2-2)}{y-2} = 2 + \frac{4}{y-2}$

$y-2$ adalah faktor positif dari 4, sehingga $y-2 = 1,2,4$

$y-2 = 1 \to y = 3$ dan $x = 6$

$y-2 = 2 \to y = 4$ dan $x = 4$

$y-2 = 4 \to y = 6$ dan $x = 3$

Jadi, banyak persegi adalah 2 buah.

5. Tentukan akar kuadrat dari $\overbrace{111\ldots111}^{2010\text{kali}}\underbrace{222\ldots222}_{2011\text{kali}}5$.

Solusi:

$$\overbrace{111\ldots111}^{2010\text{kali}}\underbrace{222\ldots222}_{2011\text{kali}}5 = \overbrace{111\ldots111}^{2010\text{kali}} \times 10^{2012} + \underbrace{222\ldots222}_{2011\text{kali}} \times 10 + 5$$

$$= \frac{10^{2010}-1}{9} \times 10^{2012} + 2 \times \frac{10^{2011}-1}{9} \times 10 + 5$$

$$= \frac{1}{9}\left(10^{4022} - 10^{2012} + 2 \times 10^{2012} - 20 + 45\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(10^{4022} + 10^{2012} + 25\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(10^{4022} + 2 \times 5 \times 10^{2011} + 25\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left[\left(10^{2011}\right)^2 + 2 \times 5 \times 10^{2011} + 5^2\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[\left(10^{2011} + 5\right)^2\right]$$

$$= \left[\frac{1}{3}\left(10^{2011} + 5\right)\right]^2$$

Jadi, akar kuadrat dari $\overbrace{111\ldots111}^{2010\text{kali}}\underbrace{222\ldots222}_{2011\text{kali}}5$ adalah $\frac{1}{3}\left(10^{2011} + 5\right)$

6. Tentukanlah konstanta *a*, *b*, *p*, dan *q* dari $(2x-1)^{20} - (ax+b)^{20} = \left(x^2 + px + q\right)^{10}$ untuk semua bilangan real *x*.

Solusi:

Substitusikan $x = \frac{1}{2}$ ke $(2x-1)^{20} - (ax+b)^{20} = \left(x^2 + px + q\right)^{10}$, sehingga

$$-\left(\frac{a}{2} + b\right)^{20} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}p + q\right)^{10}$$

Karena ke dua ruas mempunyai pangkat genap, maka $\frac{a}{2}+b=0$ dan $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}p+q=0$.

Akibatnya $a=-2b$, sehingga

$$(2x-1)^{20}-(ax+b)^{20}=\left(x^2+px+q\right)^{10}$$

$$(2x-1)^{20}-(-2bx+b)^{20}=\left(x^2+px+q\right)^{10}$$

$$(2x-1)^{20}-b^{20}(2x-1)^{20}=\left(x^2+px+q\right)^{10}$$

$$\left(1-b^{20}\right)(2x-1)^{20}=\left(x^2+px+q\right)^{10}$$

$$\left(1-b^{20}\right)\left(4x^2-4x+1\right)^{10}=\left(x^2+px+q\right)^{10}$$

$$\left(1-b^{20}\right)2^{20}\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)^{10}=\left(x^2+px+q\right)^{10}$$

Sehingga

$$\left(1-b^{20}\right)2^{20}=1,\ p=-1,\ q=\frac{1}{4}$$

$$1-b^{20}=2^{-20}$$

$$b^{20}=1-2^{-20}$$

$$b=\sqrt[20]{1-2^{-20}}=\sqrt[20]{\frac{2^{20}-1}{2^{20}}}=\frac{1}{2}\sqrt[20]{2^{20}-1}\text{ dan }a=-\sqrt[20]{2^{20}-1}\text{ atau }b=-\frac{1}{2}\sqrt[20]{2^{20}-1}\text{ dan }a=\sqrt[20]{2^{20}-1}$$

7. Jika a dan b adalah akar-akar dari $x^2+px+1=0$ sedangkan c dan d adalah akar-akar dari $x^2+qx+1=0$. Nyatakan ekspresi $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)$ dalam p dan q.

Solusi:

$x^2+px+1=0$ akar-akarnya a dan b, sehingga $a+b=-p$ dan $ab=1$

$x^2+qx+1=0$ akar-akarnya c dan d, sehingga $c+d=-q$ dan $cd=1$

$$\begin{aligned}(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)&=\left[ab-c(a+b)+c^2\right]\left[ab+d(a+b)+d^2\right]\\&=\left[1-c(-p)+c^2\right]\left[1+d(-p)+d^2\right]\\&=\left(1+cp+c^2\right)\left(1-dp+d^2\right)\\&=1-dp+d^2+cp-cdp^2+cd^2p+c^2-c^2dp+c^2d^2\\&=1+c^2d^2+d^2+c^2-\left(d-c+c^2d-cd^2\right)p-cdp^2\\&=c^2+2+d^2-[-(c-d)+cd(c-d)]p-p^2\\&=c^2+2+d^2-[(c-d)(cd-1)]p-p^2\\&=c^2+2cd+d^2-[(c-d)(1-1)]p-p^2\\&=(c+d)^2-p^2\\&=(-q)^2-p^2\end{aligned}$$

$$= q^2 - p^2$$

8. Didefinisikan fungsi f dengan $f(x) = \frac{4x + \sqrt{4x^2 - 1}}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}}$ untuk $x \geq 1$. Hitung jumlah $f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(40)$

Solusi:

Ambillah $x = \sqrt{2n+1}$ dan $y = \sqrt{2n-1}$, sehingga

$$x^2 + y^2 = \left(\sqrt{2n+1}\right) + \left(\sqrt{2n-1}\right)^2 = 2n + 1 + 2n - 1 = 4n$$

$$xy = \sqrt{2n+1} \times \sqrt{2n-1} = \sqrt{4n^2 - 1}$$

$$x^2 - y^2 = \left(\sqrt{2n+1}\right) - \left(\sqrt{2n-1}\right)^2 = 2n + 1 - 2n + 1 = 2$$

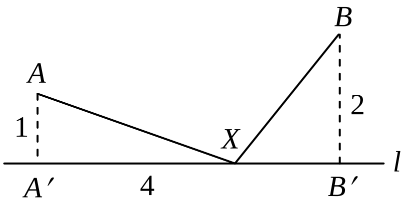
$$f(n) = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} = \frac{x^2 + y^2 + xy}{x + y} = \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2} = \frac{\left(\sqrt{2n+1}\right)^3 - \left(\sqrt{2n-1}\right)^3}{\left(\sqrt{2n+1}\right)^2 - \left(\sqrt{2n-1}\right)^2} = \frac{(2n+1)^{\frac{3}{2}} - (2n-1)^{\frac{3}{2}}}{2n + 1 - 2n + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(2n+1)^{\frac{3}{2}} - (2n-1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

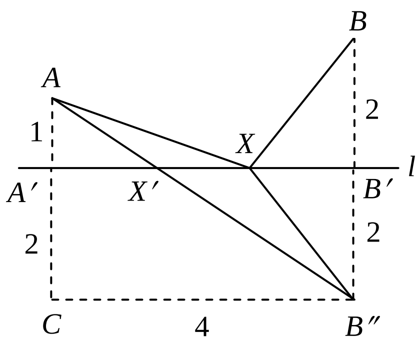
$$f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(40) = \frac{1}{2}\left(3^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} + 5^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}} + 7^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}} + \ldots + 81^{\frac{3}{2}} - 79^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(81^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(9^3 - 1\right) = \frac{1}{2}(729 - 1) = \frac{1}{2}(728) = 364$$

9. Dua titik A dan B terletak di luar garis l. $f(X)$ untuk titik X sembarang pada l yang menyatakan jumlah jarak dari A ke titik X dan dari B ke titik X. Tentukan jarak terpendek yang mungkin dari $f(X)$, jika jarak dari A ke l adalah 1, dari B ke l adalah 2 dan dari A' ke B' adalah 4.



Solusi:



B'' adalah refleksi B pada garis l. $f(X)$ adalah jumlah jarak dari A ke titik X dan dari B'' ke titik X. Jelaslah bahwa $f(X)$ adalah jarak terpendek pada perpotongan AB'' dan l, jika AX' dan $B''X'$ bersama-sama dibentuk oleh garis dari A ke B''.

Perhatikan $\Delta ACB''$ siku-siku di C.

Menurut Pythagoras:

$$f(X') = AB'' = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

10. Jika a adalah bilangan dua digit dan $\overline{a}$ adalah bilangan dua digit tetapi susunannya dibalik dari bilangan a. Sebagai contoh $\overline{35}=53$. Berapa banyak bilangan dua digit yang memenuhi bahwa $a+\overline{a}$ adalah bilangan kuadrat sempurna.

Solusi:

Ambillah bilangan $a=10x+y$ dan $\overline{a}=10y+x$.

$a+\overline{a}=10x+y+10y+x=11x+11y=11(x+y)$

Agar bentuk $11(x+y)$ adalah bilangan kuadrat sempurna, maka haruslah $x+y=11$.

Jadi, bilangan yang dimaksud adalah 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

11. Jika a dan b adalah bilangan real, hitunglah jumlah koefisien suku banyak $P(x)=\left(1-ax+ax^2\right)^{237}\left(1+bx-bx^2\right)^{739}$.

Solusi:

Jumlah koefisien suku banyak $P(x)$ adalah $P(1)=\left(1-a\cdot 1+a\cdot 1^2\right)^{237}\left(1+b\cdot 1-b\cdot 1^2\right)^{739}=1$.

12. Tentukan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{10000}}$.

(Petunjuk: Gunakan ketidaksamaan $\sqrt{10001}-\sqrt{2}>98{,}5$).

Solusi:

Observasi $\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$

Untuk setiap bilangan bulat positif n berlaku

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{10000}}<2\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{10000}-\sqrt{9999}\right)$$

$$=2\left(\sqrt{10000}-\sqrt{1}\right)=2(100-1)=198$$

Sejalan dengan uraian tersebut di atas.

Observasi $\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}>\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

Untuk setiap bilangan bulat positif n berlaku

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{10000}}>2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{10001}-\sqrt{10000}\right)$$

$$=2\left(\sqrt{10001}-\sqrt{2}\right)=197$$

Akhirnya $197<a<198$ dan jawabannya adalah 197.

13. Suatu fungsi didefinisikan untuk semua bilangan bulat positif dan $f(1)=2014$ dan $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)=n^2f(n)$ untuk semua $n\ge 1$. Hitunglah $f(2008)$.

Solusi:

$f(1)+f(2)=2^2f(2)$

$$3f(2)=f(1)$$

$$f(2)=\frac{1}{3}f(1)=\frac{2}{2\cdot 3}f(1)$$

$$f(3)=\frac{2}{3\cdot 4}f(1)$$

$$f(4)=\frac{2}{4\cdot 5}f(1)$$

$$f(5)=\frac{2}{5\cdot 6}f(1)$$

dan seterusnya

Secara umum $f(n)=\dfrac{2}{n(n+1)}f(1)$

$$f(2014)=\frac{2}{2014\cdot 2015}\cdot 2014=\frac{2}{2015}$$

14. Jika $x+y=5$ dan $xy=6$, hitunglah $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.

Solusi:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{5}{6}$$

15. Jika x dan y adalah bilangan real yang memenuhi sistem persamaan $\begin{cases} 2^x-2^y=1 \\ 4^x-4^y=\dfrac{5}{3} \end{cases}$

Solusi:

$$4^x-4^y=\frac{5}{3}$$

$$\left(2^x-2^y\right)\left(2^x+2^y\right)=\frac{5}{3}$$

$$(1)\left(2^x+2^y\right)=\frac{5}{3}$$

$$2^x+2^y=\frac{5}{3}$$

$$2^x=\frac{2^x+2^y+2^x-2^y}{2}=\frac{\frac{5}{3}+1}{2}=\frac{4}{3}$$

$$2^y=\frac{2^x+2^y-\left(2^x-2^y\right)}{2}=\frac{\frac{5}{3}-1}{2}=\frac{1}{3}$$

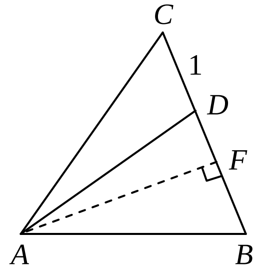
$$2^{x-y}=\frac{2^x}{2^y}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}}=4=2^2$$

$\therefore x - y = 2$

16. Diberikan ΔABC , dengan BC = 3. Pilihlah titik D pada BC sedemikian, sehingga BD = 2. Tentukan nilai $AB^2 + 2AC^2 - 3AD^2$.

Solusi:

Buatlah AF tegak lurus pada BC. Ambillah $BF = x$ dan $AF = y$.



$AB^2 = BF^2 + AF^2 = x^2 + y^2$

$AC^2 = CF^2 + AF^2 = (3 - x)^2 + y^2$

$AD^2 = DF^2 + AF^2 = (2 - x)^2 + y^2$

$AB^2 + 2AC^2 - 3AD^2 = x^2 + y^2 + 2\left[(3-x)^2 + y^2\right] - 3\left[(2-x)^2 + y^2\right]$

$= x^2 + y^2 + 2\left(9 - 6x + x^2 + y^2\right) - 3\left(4 - 4x + x^2 + y^2\right)$

$= x^2 + y^2 + 18 - 12x + 2x^2 + 2y^2 - 12 + 12x - 3x^2 - 3y^2$

$= 6$

17. Jika x dan y adalah bilangan bulat positif $19x + 97y = 1997$, maka nilai terkecil $x + y$ adalah ....

Solusi:

$19x + 97y = 1997$

$97y - 97 = 1900 - 19x$

$97(y - 1) = 19(100 - x)$

Perhatikan 97 dan 19 masing-masing adalah bilangan prima.

Jika diambil x =100 , maka y = 1, sehingga $x + y = 100 + 1 = 101$.

Jika diambil x = 3, maka y – 1 = 19 atau y = 20, sehingga $x + y = 3 + 20 = 23$.

Jadi, nilai terkecil $x + y$ adalah 23.

18. Jika f adalah fungsi yang memenuhi $f(xy) = \frac{f(x)}{y}$ untuk setiap bilangan real positif x dan y. Jika $f(30) = 20$, maka nilai $f(40)$ adalah ....

Solusi:

$f(xy) = \frac{f(x)}{y}$

$f(y) = \frac{f(1)}{y}$ untuk semua nilai y

$f(30) = \frac{f(1)}{30} = 20$

$f(1) = 600$

$f(40) = \frac{f(1)}{40} = \frac{600}{40} = 15$

19. Jika $x+y+z=6$, $xy+xz+yz=11$, dan $xyz=6$, maka $\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}$ sama dengan ....

Solusi:

$$\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}=\frac{x^2}{xyz}+\frac{y^2}{xyz}+\frac{z^2}{xyz}=\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}=\frac{(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)}{xyz}$$

$$=\frac{(6)^2-2(11)}{6}=\frac{36-22}{6}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$$

20. Berapa banyak pasangan bilangan bulat positif (a,b), dengan $a \le b$ dan $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{6}$?

Solusi:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{6}$$

$$6(a+b)=ab$$

$$ab-6(a+b)=0$$

$$ab-6(a+b)+36=36$$

$$(a-6)(b-6)=36$$

$$(a-6)(b-6)=1\times 36=2\times 18=3\times 12=4\times 9=6\times 6$$

$a-6=1 \Leftrightarrow a=7$ dan $b-6=36 \Leftrightarrow b=42$

$a-6=2 \Leftrightarrow a=8$ dan $b-6=18 \Leftrightarrow b=24$

$a-6=3 \Leftrightarrow a=9$ dan $b-6=12 \Leftrightarrow b=18$

$a-6=4 \Leftrightarrow a=10$ dan $b-6=9 \Leftrightarrow b=15$

$a-6=6 \Leftrightarrow a=12$ dan $b-6=6 \Leftrightarrow b=12$

Jadi, pasangan (a,b), dengan $a \le b$ adalah $(7,42)$; $(8,24)$; $(9,18)$; $(10,15)$; $(12,12)$