Selasa, 23 Juli 2013

Soal 1. Buktikan bahwa untuk sebarang pasangan bilangan bulat positif k dan n, terdapat k bilangan bulat positif $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (tidak harus berbeda) sehingga

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Soal 2. Suatu konfigurasi dari 4027 titik pada bidang disebut *Kolombia* jika konfigurasi itu memuat 2013 titik merah dan 2014 titik biru, dan tidak ada tiga titik dari konfigurasi yang segaris. Dengan menggambar beberapa garis, bidang terbagi menjadi beberapa area. Suatu penataan garis-garis adalah *bagus* untuk suatu konfigurasi Kolombia jika kondisi berikut dipenuhi:

- tidak ada garis yang melalui sebarang titik dari konfigurasi itu;
- tidak ada area yang memuat kedua warna sekaligus.

Carilah nilai k terkecil sehingga untuk sebarang konfigurasi Kolombia dari 4027 titik, terdapat suatu penataan bagus dari k garis.

Soal 3. Misalkan *excircle* segitiga ABC berseberangan dengan titik A menyinggung sisi BC di titik A_1. Definisikan titik B_1 pada CA dan titik C_1 pada AB secara analog, berturut-turut menggunakan *excircles* berseberangan dengan B dan C. Misalkan titik pusat lingkaran luar segitiga $A_1B_1C_1$ berada pada lingkaran luar segitiga ABC. Buktikan bahwa segitiga ABC adalah siku-siku.

Excircle *segitiga ABC berseberangan dengan titik sudut A adalah lingkaran yang menyinggung ruas garis BC, menyinggung sinar AB di setelah B, menyinggung sinar AC di setelah C.* Excircle *berseberangan dengan B dan C didefinisikan serupa.*

Waktu: 4 jam dan 30 menit
Masing-masing soal bernilai 7 angka

Rabu, 24 Juli 2013

Soal 4. Misalkan ABC adalah segitiga lancip dengan titik tinggi H, dan misalkan W titik pada sisi BC, yang secara tegas terletak di antara B dan C. Titik-titik M dan N berturut-turut adalah titik-titik kaki garis tinggi dari B dan C. Lingkaran luar BWN ditulis ω_1, dan misalkan X adalah titik pada ω_1 sehingga WX merupakan diameter ω_1. Secara analog, ω_2 menyatakan lingkaran luar CWM, dan misalkan Y adalah titik pada ω_2 sehingga WY merupakan diameter ω_2. Buktikan bahwa X, Y dan H segaris.

Soal 5. Misalkan $\mathbb{Q}_{>0}$ adalah himpunan bilangan rasional positif. Misalkan $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ adalah suatu fungsi yang memenuhi tiga kondisi berikut:

(i) untuk semua $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, berlaku $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) untuk semua $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, berlaku $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) terdapat suatu bilangan rasional $a > 1$ sehingga $f(a) = a$.

Buktikan bahwa $f(x) = x$ untuk semua $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Soal 6. Misalkan $n \geq 3$ adalah bilangan bulat, dan perhatikan suatu lingkaran yang ditandai dengan $n+1$ titik-titik yang berjarak sama antar dua titik bersebelahan. Anggap semua pelabelan titik-titik itu dengan bilangan-bilangan $0, 1, \ldots, n$ sehingga masing-masing label digunakan tepat satu kali; dua pelabelan tersebut dipandang sama jika salah satu bisa diperoleh dari yang lain menggunakan rotasi pada lingkaran itu. Suatu pelabelan disebut *cantik* jika, untuk sebarang empat label $a < b < c < d$ dengan $a + d = b + c$, talibusur yang menghubungkan titik-titik yang dilabeli a dan d tidak memotong talibusur yang menghubungkan titik-titik yang dilabeli b dan c.

Misalkan M adalah banyaknya pelabelan cantik, dan misalkan N adalah banyaknya pasangan terurut bilangan bulat positif (x, y) sehingga $x + y \leq n$ dan $\gcd(x, y) = 1$. Buktikan bahwa

$$M = N + 1.$$

Waktu: 4 jam dan 30 menit
Masing-masing soal bernilai 7 angka