SOLUSI
PART 1
Creative Problem Solving in School Matematics

1. Jika *a*, *b*, *c*, dan *d* adalah bilangan real, sehingga $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$, $\frac{c}{d}=\frac{4}{5}$, dan $\frac{d}{b}=\frac{6}{7}$, maka nilai $\frac{a}{c}=....$

   Solusi:
   Alternatif 1:
   Ambillah $a=2k$, $b=3k$, maka
   $\frac{d}{b}=\frac{6}{7}$
   $d=\frac{6}{7}b=\frac{6}{7}\times 3k=\frac{18}{7}k$
   $\frac{c}{d}=\frac{4}{5}$
   $c=\frac{4}{5}d=\frac{4}{5}\times\frac{18}{7}k=\frac{72}{35}k$
   Jadi, $\frac{a}{c}=\frac{2k}{\frac{72}{35}k}=\frac{35}{36}$
   Alternatif 2:
   $\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a}{c}\times\frac{d}{b}$
   $\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}=\frac{a}{c}\times\frac{6}{7}$
   $\frac{a}{c}=\frac{35}{36}$

2. Anggaplah bahwa $60^a=3$ dan $60^b=5$. Nilai dari $12^{\frac{1-a-b}{2-2b}}=....$
   Solusi:
   $12=\frac{60}{5}$ dan $60^b=5$
   Sehingga
   $12=\frac{60}{60^b}=60^{1-b}$
   $12^{\frac{1-a-b}{2-2b}}=\left(60^{1-b}\right)^{\frac{1-a-b}{2-2b}}=60^{\frac{1-a-b}{2}}=\sqrt{60^{1-a-b}}=\sqrt{\frac{60}{60^a60^b}}=\sqrt{\frac{60}{3\cdot 5}}=\sqrt{4}=2$

3. Diberikan $x=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$. Nilai dari $\left(1+\frac{1}{x}\right)^3$ adalah….

   Solusi:
   Alternatif 1:
   Ambillah $y=\sqrt[3]{2}$, maka $y^3=2$
   $x=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1=y^2+y+1$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^3=\left(1+\frac{1}{y^2+y+1}\right)^3=\left(1+\frac{y-1}{(y-1)(y^2+y+1)}\right)^3=\left(1+\frac{y-1}{y^3-1}\right)^3=\left(1+\frac{y-1}{2-1}\right)^3=(1+y-1)^3$$
$$=y^3=2$$

Alternatif 2:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^3=\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}\right)^3=\left(1+\frac{\sqrt[3]{2}-1}{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)}\right)^3=\left(1+\frac{\sqrt[3]{2}-1}{(\sqrt[3]{2})^3-1^3}\right)^3=\left(1+\frac{\sqrt[3]{2}-1}{2-1}\right)^3$$
$$=\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=2$$

4. Bentuk sederhana dari $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ adalah ….

Solusi:

$$x=\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$
$$x^2=8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}+8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}+2\sqrt{64-4\left(10+2\sqrt{5}\right)}$$
$$x^2=16+2\sqrt{24-8\sqrt{5}}$$
$$x^2=16+4\left(\sqrt{5}-1\right)$$
$$x^2=12+4\sqrt{5}$$
$$x=\sqrt{12+4\sqrt{5}}$$
$$x=\sqrt{10}+\sqrt{2}$$

Jadi, bentuk sederhana dari $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ adalah $\sqrt{10}+\sqrt{2}$.

5. Solusi dari persamaan $\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}=3$ adalah ….

Solusi:

$$\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}=3$$
$$x+\sqrt{1+x^2}+x-\sqrt{1+x^2}+3\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}\times\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}\times$$
$$\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}\right)=27$$
$$2x+3\sqrt[3]{x^2-\left(1+x^2\right)}(3)=27$$
$$2x-9=27$$
$$x=18$$

6. Nilai dari $\sqrt{1+2010^2+\frac{2010^2}{2011^2}}+\frac{2010}{2011}$ adalah ….

Solusi:

Ambillah $2010=n$ dan $2011=n+1$.

$$\sqrt{1+2010^2+\frac{2010^2}{2011^2}}+\frac{2010}{2011}=\sqrt{1+n^2+\frac{n^2}{(n+1)^2}}+\frac{n}{n+1}$$
$$=\sqrt{\frac{(n+1)^2+n^2(n+1)^2+n^2}{(n+1)^2}}+\frac{n}{n+1}$$

$$= \sqrt{\frac{n^2 + 2n + 1 + n^2(n+1)^2 + n^2}{(n+1)^2}} + \frac{n}{n+1}$$
$$= \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2 + 2n^2 + 2n + 1}{(n+1)^2}} + \frac{n}{n+1}$$
$$= \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2 + 2n(n+1) + 1}{(n+1)^2}} + \frac{n}{n+1}$$
$$= \frac{n(n+1)+1}{n+1} + \frac{n}{n+1}$$
$$= n+1$$
$$= 2011$$

7. Nilai dari $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2010}+\sqrt{2011}}$ adalah ….

Solusi:

Konsep: $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \times \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)} = -\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2010}+\sqrt{2011}}$$
$$= -\sqrt{1} + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{4} - \ldots - \sqrt{2010} + \sqrt{2011} = \sqrt{2011} - 1$$

8. Jika x dan y adalah bilangan real bukan nol yang memenuhi $x^2 + xy + y^2 = 0$, maka nilai dari $\left(\frac{x}{x+y}\right)^{2010} + \left(\frac{y}{x+y}\right)^{2010}$ adalah ….

Solusi:

Ambillah $t = \frac{x}{x+y}$.

Sehingga $\frac{x}{x+y} \times \frac{y}{x+y} = \frac{xy}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{xy}{x^2 + xy + y^2 + xy} = \frac{xy}{0 + xy} = \frac{xy}{xy} = 1$

$$\frac{y}{x+y} = \frac{1}{\frac{x}{x+y}} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} = \frac{x+y}{x+y} = 1$$

$$t + \frac{1}{t} = 1$$
$$t^2 - t + 1 = 0$$
$$(t+1)(t^2 - t + 1) = 0(t+1))$$
$$t^3 + 1 = 0$$
$$t^3 = -1$$
$$\left(\frac{x}{x+y}\right)^{2010} + \left(\frac{y}{x+y}\right)^{2010} = (t)^{2010} + \left(\frac{1}{t}\right)^{2010} = (t^3)^{670} + \left(\frac{1}{t^3}\right)^{670} = (-1)^{670} + \left(\frac{1}{-1}\right)^{670} = 2$$

9. Diberikan α adalah salah satu akar dari persamaan $x^2 - x + 2 = 0$, maka nilai $\alpha^4 + 3\alpha$ adalah ….

Solusi:

α adalah salah satu akar dari persamaan $x^2 - x + 2 = 0$, maka $\alpha^2 - \alpha + 2 = 0$.

$\alpha^2 - \alpha + 2 = 0$

$\alpha^2 = \alpha - 2$

$\alpha^4 = \alpha^2 - 4\alpha + 4$

$\alpha^4 = \alpha - 2 - 4\alpha + 4$

$\alpha^4 = -3\alpha + 2$

$\alpha^4 + 3\alpha = 2$

10. Jika α adalah salah satu akar dari persamaan $x^2 + 2x + 3 = 0$, maka nilai $\frac{\alpha^5 + 3\alpha^4 + 3\alpha^3 - \alpha^2}{\alpha^2 + 3}$ adalah ….

Solusi:

α adalah salah satu akar dari persamaan $x^2 + 2x + 3 = 0$, maka $\alpha^2 + 2\alpha + 3 = 0$.

$\alpha^2 + 2\alpha + 3 = 0$

$\alpha^2 + 3 = -2\alpha$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^5 + 3\alpha^4 + 3\alpha^3 - \alpha^2}{\alpha^2 + 3} &= \frac{\alpha^5 + 3\alpha^4 + 3\alpha^3 - \alpha^2}{-2\alpha} \\ &= \frac{\alpha^4 + 3\alpha^3 + 3\alpha^2 - \alpha}{-2} \\ &= \frac{\alpha^4 + 2\alpha^3 + 3\alpha^2 + \alpha^3 - \alpha}{-2} \\ &= \frac{\alpha^2\left(\alpha^2 + 2\alpha + 3\right) + \alpha^3 - \alpha}{-2} \\ &= \frac{\alpha^2(0) + \alpha\left(\alpha^2 - 1\right)}{-2} \\ &= \frac{\alpha(-2\alpha - 3 - 1)}{-2} \\ &= \frac{\alpha(-2\alpha - 4)}{-2} \\ &= \alpha^2 + 2\alpha \\ &= -3\end{aligned}$$

11. Jika α dan β adalah akar-akar dari persamaan $x^2 - 3x - 3 = 0$, maka nilai dari $\alpha^3 + 12\beta$ adalah ….

Solusi:

Persamaan $x^2 - 3x - 3 = 0$ akar-akarnya adalah α dan β.

$\alpha + \beta = \frac{-(-3)}{1} = 3$

Karena α adalah akar dari persamaan $x^2 - 3x - 3 = 0$, maka

$\alpha^2 - 3\alpha - 3 = 0$

$\alpha^2 = 3\alpha + 3$

$$\begin{aligned}\alpha^3 + 12\beta &= \alpha \times \alpha^2 + 12\beta \\ &= \alpha(3\alpha + 3) + 12\beta \\ &= 3\alpha^2 + 3\alpha + 12\beta\end{aligned}$$

$$=3(3\alpha+3)+3\alpha+12\beta$$
$$=9\alpha+9+3\alpha+12\beta$$
$$=12\alpha+12\beta+9$$
$$=12(\alpha+\beta)+9$$
$$=12(3)+9$$
$$=45$$

12. Jumlah kuadrat akar-akar real dari persamaan $x^4+4+11x^2=8(x^3+2x)$ adalah ….

Solusi:

$$x^4+4+11x^2=8(x^3+2x)$$
$$x^2+\frac{4}{x^2}+11=8\left(x+\frac{2}{x}\right)$$
$$x^2+\frac{4}{x^2}+4+7=8\left(x+\frac{2}{x}\right)$$
$$\left(x+\frac{2}{x}\right)^2+7=8\left(x+\frac{2}{x}\right)$$

Ambillah $p=x+\frac{2}{x}$, maka persamaan $\left(x+\frac{2}{x}\right)^2+7=8\left(x+\frac{2}{x}\right)$ menjadi

$$p^2+7=8p$$
$$p^2-8p+7=0$$
$$(p-7)(p-1)=0$$

$p=7$ atau $p=1$

$x+\frac{2}{x}=7$ atau $x+\frac{2}{x}=1$

$x^2-7x+2=0$ atau $x^2-x+2=0$ (ditolak, akar-akarnya tidak real)

Ambillah akar-akar persamaan $x^2-7x+2=0$ adalah *a* dan *b*.

$$a+b=7$$
$$ab=2$$
$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$
$$a^2+b^2=(7)^2-2\times 2=45$$

Jadi, jumlah kuadrat akar-akar realnya adalah 45.

13. Diberikan *a*, *b*, dan *c* adalah bilangan real yang bukan nol sedemikian, sehingga $\frac{a+b+c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$. Jika $x=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ dan $x>0$, maka nilai *x* adalah ….

Solusi:

$$\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$$
$$\frac{a-b+c}{b}+2=\frac{-a+b+c}{a}+2$$
$$\frac{a-b+c+2b}{b}=\frac{-a+b+c+2a}{a}$$
$$\frac{a+b+c}{b}=\frac{a+b+c}{a}$$

$a=b$

$a=b\to \dfrac{a+b+c}{c}=\dfrac{a-b+c}{a}$

$\dfrac{2b+c}{c}=\dfrac{c}{b}$

$2b^2+bc=c^2$

$2b^2+bc-c^2=0$

$(2b-c)(b+c)=0$

$c=2b$ atau $c=-b$

Jika $a=b$ dan $c=-b$ atau $b+c=0$, maka

$x=\dfrac{(2b)(0)(-b+b)}{b\cdot b(-b)}=0$ (ditolak, $x>0$)

Jika $a=b$ dan $c=2b$, maka

$x=\dfrac{(b+b)(b+2b)(2b+b)}{b\cdot b\cdot 2b}=9$ (diterima)

14. Jika $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=1$, maka nilai dari $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}$ adalah ….

Solusi:

$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=1$

$(a+b+c)\left(\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\right)=(a+b+c)$

$\dfrac{a^2+a(b+c)}{b+c}+\dfrac{b^2+b(a+c)}{c+a}+\dfrac{c^2+c(a+b)}{a+b}=a+b+c$

$\dfrac{a^2}{b+c}+a+\dfrac{b^2}{c+a}+b+\dfrac{c^2}{a+b}+c=a+b+c$

$\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}=0$

15. Himpunan penyelesaian dari system persamaan $\begin{cases}373a+627b=2492\\627a+373b=3508\end{cases}$ adalah ….

Solusi:

$373a+627b=2492\ldots(1)$

$627a+373b=3508\ldots(2)$

Jumlah persamaan (1) dan (2) menghasilkan:

$1000a+1000b=6000$

$a+b=6$

$b=6-a\to 373a+627b=2492$

$373a+627(6-a)=2492$

$373a+3762-627a=2492$

$254a=1270$

$a=5$

$a=5\to a+b=6$

$5+b=6$

$b=1$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah {5,1}