SOLUSI
PART 8
Creative Problem Solving in School Mathematics

1. Tentukan n bilangan bulat positif sehingga $\dfrac{n^2+20}{n+2}$ juga bilangan bulat positif.

   Solusi:

   $$\frac{n^2+20}{n+2}=\frac{n^2-4+24}{n+2}=\frac{(n-2)(n+2)+24}{n+2}=n-2+\frac{24}{n+2}$$

   $n+2$ adalah faktor dari 24, sehingga $n+2=\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm8,\pm12,\pm24$

   Karena n bilangan bulat positif, maka $n+2=3,4,6,8,12,24$, maka nilai n adalah 1, 2, 4, 6, 10, 22.

2. Jika $a+b=5$ dan $ab=3$, tentukan nilai a^4+b^4.

   Solusi:

   Cara 1:

   $$(a+b)^4=a^4+b^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3$$
   $$(a+b)^4=a^4+b^4+4ab(a^2+b^2)+6(ab)^2$$
   $$(a+b)^4=a^4+b^4+4ab\left[(a+b)^2-2ab\right]+6(ab)^2$$
   $$(5)^4=a^4+b^4+4\cdot3\left[(5)^2-2\cdot3\right]+6(3)^2$$
   $$625=a^4+b^4+12\cdot19+54$$
   $$a^4+b^4=343$$

   Cara 2:

   $$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=\left[(a+b)^2-2ab\right]^2-2(ab)^2=\left[(5)^2-2\cdot3\right]^2-2(3)^2=19^2-18=343$$

3. Persamaan kuadrat $x^2-bx+80=0$, dengan $b>0$ mempunyai solusi bilangan bulat. Berapa jumlah b yang mungkin?

   Solusi:

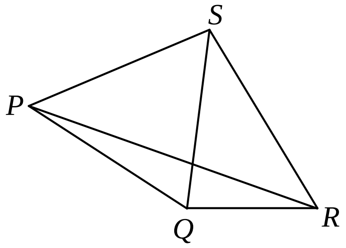
   Persamaan kuadrat yang mungkin adalah $(x-80)(x-1)=0$, $(x-40)(x-2)=0$, $(x-20)(x-4)=0$, $(x-16)(x-5)=0$, $(x-10)(x-8)=0$, $(x-10)(x-8)=0$, sehingga nilai b adalah 81, 42, 24, 21, dan 18.

   Jadi, jumlah nilai b adalah 81 + 42 + 24 + 21 + 18 = 186.

4. Diberikan segi empat $PQRS$, $PQ=RS$, $(\sqrt{3}+1)QR=SP$, dan $\angle RSP-\angle SPQ=30^\circ$. Buktikan bahwa $\angle PQR-\angle QRS=90^\circ$

   Bukti:

   $$[PQRS]=[PQR]+[RSP]=[QRS]+[SPQ]$$

   Ambillah $PQ=p$, $QR=q$, $RS=r$, dan $PS=s$

   $$\frac{1}{2}pq\sin\angle PQR+\frac{1}{2}rs\sin\angle RSP=\frac{1}{2}qr\sin\angle QRS+\frac{1}{2}ps\sin\angle SPQ$$

   $$pq\sin\angle PQR+rs\sin\angle RSP=qr\sin\angle QRS+ps\sin\angle SPQ$$

   $$PQ=RS\Leftrightarrow p=r \text{ dan } (\sqrt{3}+1)QR=SP\Leftrightarrow(\sqrt{3}+1)q=s$$

$$r \times \frac{s}{\sqrt{3}+1} \sin \angle PQR + rs \sin \angle RSP = \frac{s}{\sqrt{3}+1} \times r \sin \angle QRS + rs \sin \angle SPQ$$

$$\sin \angle PQR + \left(\sqrt{3}+1\right) \sin \angle RSP = \sin \angle QRS + \left(\sqrt{3}+1\right) \sin \angle SPQ$$

$$\sin \angle PQR - \sin \angle QRS = \left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sin \angle SPQ - \sin \angle RSP\right)$$

$$2 \cos \frac{\angle PQR + \angle QRS}{2} \sin \frac{\angle PQR - \angle QRS}{2} = 2\left(\sqrt{3}+1\right) \cos \frac{\angle SPQ + \angle RSP}{2} \sin \frac{\angle SPQ - \angle RSP}{2}$$

Kita mengetahui bahwa $\cos \frac{\angle PQR + \angle QRS}{2} = -\cos \frac{\angle SPQ + \angle RSP}{2}$

$$\sin \frac{\angle PQR - \angle QRS}{2} = -\left(\sqrt{3}+1\right) \sin \frac{\angle SPQ - \angle RSP}{2}$$

$$\sin \frac{\angle PQR - \angle QRS}{2} = -\left(\sqrt{3}+1\right) \sin \frac{-30^\circ}{2} = \left(\sqrt{3}+1\right) \sin 15^\circ = \left(\sqrt{3}+1\right) \times \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{18}-\sqrt{6}+\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4}\left(3\sqrt{2}-\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\frac{\angle PQR - \angle QRS}{2} = 45^\circ \text{ atau } 135^\circ$$

$\angle PQR - \angle QRS = 90^\circ$ (terbukti) atau $\angle PQR - \angle QRS = 270^\circ$ (ditolak)

5. Selesaikan persamaan $\left(x^2+x-2\right)^3 + \left(2x^2-x-1\right)^3 = 27\left(x^2-1\right)^3$ untuk bilangan real x.

Solusi:

Cara 1:

Ambillah $a = x^2+x-2$ dan $b = 2x^2-x-1$, sehingga

$a^3 + b^3 = \left(a+b\right)^3$

$a^3 + b^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

$3a^2b + 3ab^2 = 0$

$ab\left(a+b\right) = 0$

$a = 0$ atau $b = 0$ atau $a + b = 0$

1) $x^2+x-2=0$

   $\left(x+2\right)\left(x-1\right)=0$

   $x=-2$ atau $x=1$

2) $2x^2-x-1=0$

   $\left(2x+1\right)\left(x-1\right)=0$

   $x=-\frac{1}{2}$ atau $x=1$

3) $x^2+x-2+2x^2-x-1=0$

   $3x^2-3=0$

   $x^2-1=0$

$$(x+1)(x-1)=0$$
$$x=-1 \text{ atau } x=1$$

Jadi, penyelesaiannya adalah -2, -1, $-\frac{1}{2}$, 1.

Cara 2:

$$\left(x^2+x-2\right)^3+\left(2x^2-x-1\right)^3=27\left(x^2-1\right)^3$$

$$(x+2)^3(x-1)^3+(2x+1)^3(x-1)^3=27(x+1)^3(x-1)^3$$

$$(x-1)^3\left[(x+2)^3+(2x+1)^3-27(x+1)^3=0\right]$$

$$x=1 \text{ atau } (x+2)^3+(2x+1)^3-27(x+1)^3=0$$

$$(x+2)^3+(2x+1)^3-27(x+1)^3=0$$

$$x^3+6x^2+12x+8+8x^3+12x^2+6x+1-27x^3-81x^2-81x-27=0$$

$$-18x^3-63x^2-63x-18=0$$

$$2x^3+7x^2+7x+2=0$$

$$(x+1)\left(2x^2+5x+2\right)=0$$

$$(x+1)(2x+1)(x+2)=0$$

$$x=-1 \text{ atau } x=-\frac{1}{2} \text{ atau } x=2$$

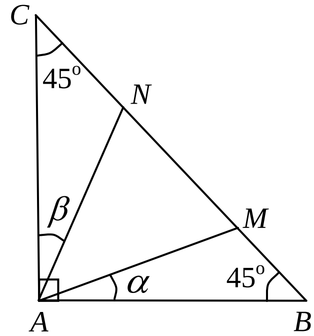
Jadi, penyelesaiannya adalah -2, -1, $-\frac{1}{2}$, 1.

6. Diberikan ΔABC dengan $AB=AC$ dan $\angle CAB=90°$. Jika titik M terletak pada sisi miring BC, sehingga $BM^2+CN^2=MN^2$. Buktikan bahwa $\angle MAN=45°$.

Bukti:

Ambillah $AB=AC=x$, sehingga $BC=x\sqrt{2}$, $\angle MAB=\alpha$, dan $\angle CAN=\beta$

Perhatikan ΔABM:



$$\frac{BM}{\sin\alpha}=\frac{AB}{\sin[180°-(45°+\alpha)]}$$

$$BM=\frac{AB\sin\alpha}{\sin(45°+\alpha)}=\frac{x\sin\alpha}{\sin 45°\cos\alpha+\cos 45°\sin\alpha}$$

$$=\frac{x\sqrt{2}\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{x\sqrt{2}\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$$

Perhatikan ΔCAN:

$$\frac{CN}{\sin\beta}=\frac{AC}{\sin[180^\circ-(45^\circ+\beta)]}$$

$$CN=\frac{AC\sin\beta}{\sin(45^\circ+\beta)}=\frac{x\sin\beta}{\sin 45^\circ\cos\beta+\cos 45^\circ\sin\beta}=\frac{x\sqrt{2}\sin\beta}{\cos\beta+\sin\beta}=\frac{x\sqrt{2}\tan\beta}{1+\tan\beta}$$

$$BM^2+CN^2=MN^2$$

$$BM^2+CN^2=(BC-BM-CN)^2$$

$$BM^2+CN^2=BC^2+BM^2+CN^2-2BC\cdot BM-2BC\cdot CN+2BM\cdot CN$$

$$BC^2-2BC\cdot BM-2BC\cdot CN+2BM\cdot CN=0$$

$$\left(x\sqrt{2}\right)^2-2x\sqrt{2}\cdot\frac{x\sqrt{2}\tan\alpha}{1+\tan\alpha}-2x\sqrt{2}\cdot\frac{x\sqrt{2}\tan\beta}{1+\tan\beta}+2\cdot\frac{x\sqrt{2}\tan\alpha}{1+\tan\alpha}\cdot\frac{x\sqrt{2}\tan\beta}{1+\tan\beta}=0$$

$$1-\frac{2\tan\alpha}{1+\tan\alpha}-\frac{2\tan\beta}{1+\tan\beta}+\frac{2\tan\alpha\tan\beta}{(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)}=0$$

$$(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)-2\tan\alpha(1+\tan\beta)-2\tan\beta(1+\tan\alpha)+2\tan\alpha\tan\beta=0$$

$$1+\tan\beta+\tan\alpha+\tan\alpha\tan\beta-2\tan\alpha-2\tan\alpha\tan\beta-2\tan\beta-2\tan\alpha\tan\beta+2\tan\alpha\tan\beta=0$$

$$1-\tan\alpha-\tan\beta-\tan\alpha\tan\beta=0$$

$$\tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{1-\tan\alpha\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$$

$\alpha+\beta=45^\circ$ (terbukti)

7. Dinda memindahkan satu bilangan dari jumlah 10 bilangan asli. Jumlah sisanya adalah 2012. Tentukan bilangan yang dipindahkan Dinda.

Solusi:

Ambillah bilangan asli tersebut adalah $x, x+1, x+2, ..., x+9$.

$x+x+1+x+2+\ldots+x+9=10x+45$

Bilangan yang diambil Dinda adalah $x+a$, sehingga

$10x+45-x-a=2012$

$9x=1967+a$

$x=218\frac{5}{9}+\frac{a}{9}$

Karena x adalah bilangan bulat positif maka haruslah $a=4$.

$x=218\frac{5}{9}+\frac{4}{9}=219$

Jadi, bilangan yang dipindahkan Dinda adalah 219 + 4 = 223.

8. Berapa banyak himpunan bagian $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ yang ada yang mana jumlah elemen yang kecil dan besar adalah 11?

Solusi:

Banyak himpunan bagian dengan elemen terkecil 1 dan terbesar 10 adalah 2^8.

Banyak himpunan bagian dengan elemen terkecil 2 dan terbesar 9 adalah 2^6.

Banyak himpunan bagian dengan elemen terkecil 3 dan terbesar 8 adalah 2^4.

Banyak himpunan bagian dengan elemen terkecil 4 dan terbesar 7 adalah 2^2.

Banyak himpunan bagian dengan elemen terkecil 5 dan terbesar 6 adalah 1.

Jadi, banyak himpunan bagian dengan elemen terkecil dan terbesar berjumlah 11 adalah $2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 1 = 341$.

9. Jika $4^x = 9$ dan $9^y = 1024$, tentukan nilai xy.

Solusi:

$\left(4^x\right)^y = 9^y = 1024$

$4^{xy} = 4^5$

$\therefore\ xy = 5$

10. Bilangan bulat *m* mempunyai Sembilan puluh sembilan digit , semuanya sembilan. Berapa jumlah digit-digit dari m^2?

Solusi:

$m = 10^{99} - 1$

$m^2 = \left(10^{99} - 1\right)^2 = 10^{198} - 2 \cdot 10^{99} + 1 = 999\ldots9998000\ldots001$, dengan 99 digit Sembilan dan 98 digit nol.

Jadi, jumlah digit dari m^2 adalah $99 \times 9 + 98 \times 0 + 8 + 1 = 891$

11. Diberikan suku banyak $f(x)$ sedemikian sehingga $f\left(x^2+1\right) = x^4 + 2x^2$ dan $f\left(x^2-1\right) = ax^4 + 4bx^2 + c$. Berapakah nilai $a^2 + b^2 + c^2$?

Solusi:

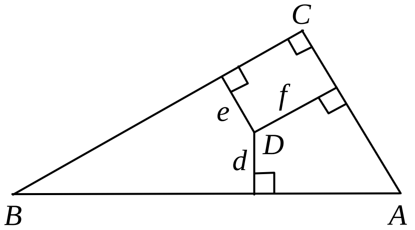
$f\left(x^2+1\right) = x^4 + 2x^2 = \left(x^2+1\right)^2 + 2\left(x^2+1\right) - 3$, sehingga $f(w) = w^2 + 2w - 3$

$f\left(x^2-1\right) = \left(x^2-1\right)^2 + 2\left(x^2-1\right) - 3 = x^4 - 2x^2 + 1 + 2x^2 - 2 - 3 = x^4 - 4 = ax^4 + 4bx^2 + c$

Sehingga $a = 1$, $b = 0$, dan $c = -4$

$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 = 1^2 + 0^2 + (-4)^2 = 17$

12. Diberikan ΔABC, dengan $AB = 13$, $BC = 12$, dan $AC = 5$. Titik *D* terletak di dalam ΔABC. Kemudian dari titik *D* dibuat garis tegak lurus pada ketiga sisi segitiga tersebut. Hitunglah nilai $13d + 12f + 5e$.



Solusi:

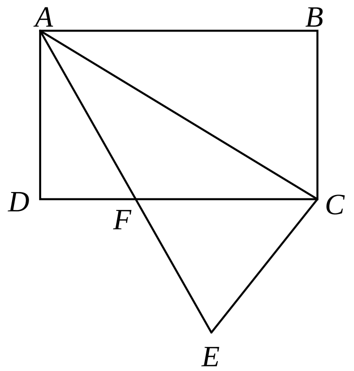
Perhatikan ΔABC adalah segitiga siku-siku.

$[ADB] + [BDC] + [ADC] = [ABC]$

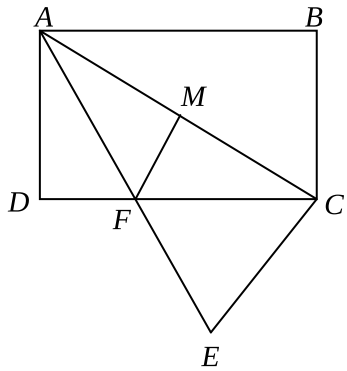
$\frac{1}{2} \times 13 \times d + \frac{1}{2} \times 12 \times e + \frac{1}{2} \times 5 \times f = \frac{1}{2} \times 12 \times 5$

$13d + 12e + 5f = 60$

13. ABCD adalah persegi panjang, dengan $AB = 16$ dan $BC = 12$.Sudut ACE siku-siku $CE = 15$. Garis *AE* dan *CD* berpotongan di *F*. Berapakah luas ΔACF ?



Solusi:



Menurut Pythagoras:

$AC = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$

$CE = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$

Perhatikan $\Delta ABC \sim \Delta ABC$

$\angle BAC = \angle CAE$

$\angle BAC = \angle ACF$

Sehingga $\angle CAF = \angle ACF$

Dengan demikian ΔAFC sama kaki.

Ambillah titik *M* pada pertengahan *AC*, sehingga diperoleh dua segitiga siku-siku, yaitu ΔAMF dan ΔCMF yang masing-masing sebangun dengan ΔABC, sehingga diperoleh

$$\frac{MF}{MA} = \frac{BC}{BA}$$

$$MF = \frac{BC}{BA} \times MA = \frac{12}{16} \times 10 = \frac{15}{2}$$

Jadi, luas $\Delta ACF == \frac{1}{2} \times 20 \times \frac{15}{2} = 75$

14. Ada tiga bilangan prima *a*, *b*, dan *c* sehingga $a > b > c$, $a + b + c = 52$, dan $a - b - c = 22$. Tentukan nilai abc.

Solusi:

$a + b + c = 52$ .... (1)

$a - b - c = 22$ .... (2)

Jumlah persamaan (1) dan (2) menghasilkan:

$2a = 74$

$a = 37$

Substitusikan $a = 37$ ke persamaan (1) sehingga diperoleh $b + c = 15$ adalah bilangan ganjil, sehingga $b = 2$ dan $c = 13$.

$\therefore$ nilai $abc = 37 \cdot 2 \cdot 13 = 962$

15. Jumlah siswa di suatu sekolah selama empat tahun dari 2007 sampai 2010 adalah 325. Jumlah siswa di sekolah yang sama selama tahun dari 2007 sampai 2011 naik 4%. Berapa banyak siswa di sekolah ini pada tahun 2011?

Solusi:

Banyak siswa selama 4 tahun dari 2007 sampai 2011 adalah $4 \times 325 = 1300$
Banyak siswa selama 5 tahun dari 2007 sampai 2011 naik 4% adalah $325 + 4\% \times 325 = 338$,
sehingga banyak siswa seluruhnya adalah $5 \times 338 = 1690$
Jadi, banyak siswa di sekolah ini pada tahun 2011 adalah 1690 – 1300 = 390.

16. Jika $\left(a + a^{-1}\right)^2 = 6$ dan $\left(a^3 + a^{-3}\right) = n\sqrt{6}$, dengan $a > 0$. Berapakah nilai n?

Solusi:

$$\left(a + a^{-1}\right)^2 = 6$$
$$a + a^{-1} = \sqrt{6}$$
$$\left(a + a^{-1}\right)^3 = a^3 + a^{-3} + 3a^2a^{-1} + 3aa^{-2}$$
$$\left(\sqrt{6}\right)^3 = a^3 + a^{-3} + 3a + 3a^{-1}$$
$$6\sqrt{6} = a^3 + a^{-3} + 3\left(a + a^{-1}\right)$$
$$6\sqrt{6} = a^3 + a^{-3} + 3\left(\sqrt{6}\right)$$
$$a^3 + a^{-3} = 3\sqrt{6} = n\sqrt{6}$$
$$\therefore n = 3$$

17. Tentukan nilai minimum dari $x^2 + y^2 + x - 4y + 5$.

Solusi:

$$x^2 + y^2 + x - 4y + 5 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 + \frac{3}{4}$$

$\therefore$ nilai minimumnya adalah $\frac{3}{4}$.