LAMPIRAN
Olimpiade Sains Nasional Bidang Matematika SMA/MA
Seleksi Tingkat Kota/Kabupaten
Tahun 2013
Waktu 120 menit

Petunjuk untuk masing-masing soal, tulis jawab akhirnya saja (tanpa penjabaran) dilembar jawaban yang disediakan.

1. Misalkan a dan b bilangan asli dengan $a > b$. Jika $\sqrt{94 + 2\sqrt{2013}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, maka nilai $a - b$ adalah ....
2. Diberikan segitiga *ABC* dengan luas 10. Titik *D*, *E*, dan *F* berturut-turut terletak pada sisi-sisi *AB*, *BC*, dan *CA* dengan $AD = 2$, $DB = 3$. Jika segitiga *AB*E dan segiempat *DBEF* mempunyai luas yang sama, maka luasnya sama dengan ....
3. Misalkan p dan q bilangan prima. Jika diketahui persamaan $x^{2014} - px^{2013} + q = 0$ mempunyai akar-akar bilangan bulat, maka nilai $p + q$ adalah ....
4. Jika fungsi f didefinisikan oleh $f(x) = \frac{kx}{2x+3}$, $x \neq -\frac{2}{3}$, k konstanta , memenuhi $f(f(x)) = x$ untuk setiap bilangan real x kecuali $x \neq -\frac{2}{3}$, maka nilai k adalah ....
5. Koefisien dari x^{2013} pada ekspansi $(1+x)^{4016} + x(1+x)^{4015} + x^2(1+x)^{4014} + \ldots + x^{2013}(1+x)^{2013}$ adalah ....
6. Jika $\frac{2}{x} - \frac{2}{y} = 1$ dan $y - x = 2$, maka $(x+y)^2 = \ldots.$
7. Suatu dadu ditos 6 kali. Banyak cara memperoleh mata yang muncul 28 dengan tepat satu dadu muncul mata 6 adalah ....
8. Misalkan P adalah titik interior dalam derah segitiga *ABC*, sehingga besar $\angle PAB = 10°$, $\angle PBA = 20°$, $\angle PCA = 30°$, dan $\angle PAC = 40°$. Besar $\angle ABC$ adalah ....
9. Sepuluh kartu ditulis angka satu sampai sepuluh (setiap kartu hanya terdapat satu angka dan tidak ada dua kartu yang memiliki angka yang sama). Kartu-kartu tersebut dimasukkan ke dalam kotak dan diambil satu secara acak. Kemudian sebuah dadu dilempar. Probabilitas dari hasil kali angka pada kartu dan angka pada dadu menghasilkan bilangan kuadrat adalah ....
10. Enam orang siswa akan duduk pada tiga meja bundar, dimana tiap meja akan diduduki oleh minimal oleh satu siswa. Banyaknya cara untuk melakukan hal tersebut adalah ....
11. Suatu partikel bergerak pada bidang Cartesius dari titik $(0,0)$. Tiap langkah bergerak satu satuan searah sumbu *X* positif dengan probabilitas 0,6 atau searah sumbu *Y* positif dengan probabilitas 0,4. Setelah sepuluh langkah, probabilitas partikel tersebut sampai pada titik $(6,4)$ dengan melalui $(3,4)$ adalah ....
12. Diberikan segitiga *ABC*, dengan panjang sisi $AB = 30$. Melalui *AB* sebagai diameter, dibuat sebuah lingkaran yang memotong sisi *AC* dan sisi *BC* berturut-turut di *D* dan *E*. Jika $AD = \frac{1}{3}AC$ dan $BE = \frac{1}{4}BC$, maka luas segitiga *ABC* sama dengan ....

13. Banyaknya nilai α dengan $0 < \alpha < 90°$ yang memenuhi persamaan $(1+\cos\alpha)(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha) = \frac{1}{8}$ adalah ....
14. Diberikan segitiga lancip *ABC* dengan *O* sebagai pusat lingkaran luarnya. Misalkan *M* dan *N* berturut-turut pertengahan *OA* dan *BC*. Jika $\angle ABC = 4\angle OMN$ dan $\angle ACB = 6\angle OMN$, maka besarnya $\angle OMN = \ldots$
15. Tentukan semua bilangan tiga digit yang memenuhi syarat bahwa bilangan tersebut sama dengan penjumlahan dari faktorial setiap digitnya.
16. Diberikan himpunan $S = \left\{ x \in Z \,\middle|\, \frac{x^2 - 2x + 7}{2x - 1} \in Z \right\}$. Banyaknya himpunan bagian dari *S* adalah ....
17. Untuk $x > 0$, $y > 0$, didefinisikan $f(x, y)$ adalah nilai terkecil di antara *x*, $\frac{y}{2} + \frac{2}{x}$, dan $\frac{1}{y}$. Nilai terbesar yang mungkin dicapai oleh $f(x, y)$ adalah ....
18. Nilai *k* terkecil, sehingga sembarang *k* bilangan dipilih dari $\{1, 2, ..., 30\}$, selalu dapat ditemukan dua bilangan yang hasil kalinya merupakan bilangan kuadrat sempurna adalah ....
19. Diketahui x_1, x_2 adalah dua bilangan bulat berbeda yang merupakan akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2 + px + q + 1 = 0$. Jika *p* dan $p^2 + q^2$ adalah bilangan-bilangan prima, maka nilai terbesar yang mungkin dari $x_1^{2013} + x_2^{2013}$ adalah ....
20. Misalkan $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan *x* dan $\lceil x \rceil$ menyatakan bilang bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan *x*. Tentukan semua *x* yang memenuhi $\lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil = 5$.

SOLUSI

1. Misalkan a dan b bilangan asli dengan $a > b$. Jika $\sqrt{94+2\sqrt{2013}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$, maka nilai $a-b$ adalah ....

   Solusi:

   $\sqrt{94+2\sqrt{2013}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

   $\sqrt{61}+\sqrt{33} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

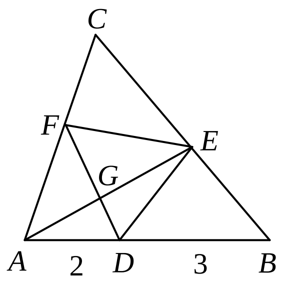
   Sehingga $a = 61$dan $b = 33$

   $\therefore a-b = 61-33 = 28$

2. Diberikan segitiga *ABC* dengan luas 10. Titik *D*, *E*, dan *F* berturut-turut terletak pada sisi-sisi *AB*, *BC*, dan *CA* dengan $AD = 2$, $DB = 3$. Jika segitiga *AB*E dan segiempat *DBEF* mempunyai luas yang sama, maka luasnya sama dengan ....

   Solusi:

   $[ABE] = [DBEF]$

   $[ADG]+[BEGD] = [EFG]+[BEGD]$

   $\therefore [ADG] = [EFG]$

   $[ADG]+[AGF] = [EFG]+[AGF]$

   $\therefore [ADF] = [AEF]$

   Karena ΔADF dan ΔAEF mempunyai luas yang sama dan alasnya *AF* sama pula, maka tinggi dari titik *E* ke *AF* harus sama dengan tinggi dari *D* ke *AF*, sehingga $DE // AC$.

   Karena $DE // AC$, maka $\Delta BDE \sim \Delta ABC$, sehingga

   $\frac{BA}{BC} = \frac{BD}{BE}$

   $\frac{5}{BE+EC} = \frac{3}{BE}$

   $5BE = 3BE + 3EC$

   $2BE = 3EC$

   $BE : EC = 3 : 2$

   $[ABC] = \frac{1}{2} BC \times t$

   $[ABE] = \frac{1}{2} BE \times t = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} BC \times t = \frac{3}{5} \times [ABC] = \frac{3}{5} \times 10 = 6$

3. Misalkan p dan q bilangan prima. Jika diketahui persamaan $x^{2014} - px^{2013} + q = 0$ mempunyai akar-akar bilangan bulat, maka nilai $p+q$ adalah ....

   Solusi:

   Kita mengetahui bahwa bilangan prima adalah bilangan yang tepat mempunyai dua factor, yaitu 1 dan bilangan itu sendiri.

   $x^{2014} - px^{2013} + q = 0$

$q = -x^{2014} + px^{2013}$

$q = x^{2013}(p - x)$

Sehingga $x = \pm 1$

Kasus $x = -1$:

$q = (-1)(p+1)$

$q = -p - 1$

$p + q = -1$, kondisi ini ditolak karena *p* dan *q* bilangan prima.

Kasus $x = 1$:

$q = 1(p-1)$

$p - q = 1$

Dua bilangan prima yang berselisih 1 hanya dipenuhi oleh $p = 3$ dan $q = 2$.

Jadi, $p + q = 3 + 2 = 5$

4. Jika fungsi *f* didefinisikan oleh $f(x) = \dfrac{kx}{2x+3}$, $x \neq -\dfrac{2}{3}$, *k* konstanta , memenuhi $f(f(x)) = x$ untuk setiap bilangan real x kecuali $x \neq -\dfrac{2}{3}$, maka nilai k adalah ....

$f(f(x)) = x$

$f\left(\dfrac{kx}{2x+3}\right) = x$

$$\frac{k\left(\dfrac{kx}{2x+3}\right)}{2\left(\dfrac{kx}{2x+3}\right)+3} = x$$

$k^2 = 2kx + 3(2x+3)$

$k^2 - 2kx - 3(2x+3) = 0$

$(k+3)(k - 2x - 3) = 0$

$k = -3$ atau $k = 2x + 3$

Jadi, nilai *k* adalah 3.

5. Koefisien dari x^{2013} pada ekspansi $(1+x)^{4016}+x(1+x)^{4015}+x^2(1+x)^{4014}+\ldots+x^{2013}(1+x)^{2013}$ adalah ....

Solusi:

$$(1+x)^{4016}+x(1+x)^{4015}+x^2(1+x)^{4014}+\ldots+x^{2013}(1+x)^{2013}$$

Koefisien dari x^{2013} adalah

$$\binom{4016}{2013}+\binom{4015}{2012}+\binom{4014}{2011}+\ldots+\binom{2003}{0}=\binom{4016}{2003}+\binom{4015}{2003}+\binom{4014}{2003}+\ldots+\binom{2003}{2003}$$

Kita mengetahui bahwa $\binom{m}{m}+\binom{m+1}{m}+\binom{m+2}{m}+\ldots+\binom{m+k-1}{m}=\binom{m+n}{m+1}$ dan $\binom{n}{n-r}=\binom{n}{r}$.

$$\binom{4016}{2003}+\binom{4015}{2003}+\binom{4014}{2003}+\ldots+\binom{2003}{2003}=\binom{4017}{2004}=\binom{4017}{2013}$$

Jadi, koefisien x^{2013} yang diminta adalah $\binom{4017}{2004}$.

6. Jika $\frac{2}{x}-\frac{2}{y}=1$ dan $y-x=2$, maka $(x+y)^2=\ldots.$

Solusi:

Cara 1:

$\frac{2}{x}-\frac{2}{y}=1$

$2y-2x=xy$

$2(y-x)=xy$

$2(2)=xy$

$xy=4$

$y-x=2$

$(y-x)^2=2^2$

$y^2-2xy+x^2=4$

$y^2-2\times 4+x^2=4$

$y^2+x^2=12$

$\therefore (x+y)^2=x^2+2xy+y^2=12+2\times 4=20$

Cara 2:

$\frac{2}{x}-\frac{2}{y}=1$

$2y-2x=xy$

$2(y-x)=xy$

$2(2)=xy$

$xy = 4$

$(x+y)^2 - (y-x)^2 = 4xy$

$(x+y)^2 - (2)^2 = 4 \times 4$

$\therefore (x+y)^2 = 16 + 4 = 20$

7. Suatu dadu ditos 6 kali. Banyak cara memperoleh mata yang muncul 28 dengan tepat satu dadu muncul mata 6 adalah ....

Solusi:

Ada 3 kemungkinan susunan jumlah mata dadu = 28 dengan angka 6 muncul tepat sekali, yaitu

Susunan dadu $(6,5,5,5,5,2) \rightarrow$ Banyak susunan $\frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!} = 30$

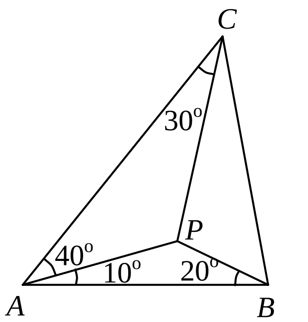
Susunan dadu $(6,5,5,5,4,3) \rightarrow$ Banyak susunan $\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120$

Susunan dadu $(6,5,5,4,4,4) \rightarrow$ Banyak susunan $\frac{6!}{2! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} = 60$

Dengan demikian, banyak cara memperoleh mata yang muncul 28 dengan tepat satu dadu muncul mata 6 adalah 30 + 120 + 60 = 210.

8. Misalkan P adalah titik interior dalam derah segitiga *ABC*, sehingga besar $\angle PAB = 10^\circ$, $\angle PBA = 20^\circ$, $\angle PCA = 30^\circ$, dan $\angle PAC = 40^\circ$. Besar $\angle ABC$ adalah ....

Solusi:



Perhatikan ΔAPB

$\angle APB = 180^\circ - (10^\circ + 20^\circ) = 150^\circ$

Perhatikan ΔAPC

$\angle APC = 180^\circ - (40^\circ + 30^\circ) = 110^\circ$

Sehingga

$\angle BPC = 360^\circ - (150^\circ + 110^\circ) = 100^\circ$

Ambillah $\angle PBC = \alpha$, sehingga

$\angle PCB = 180^\circ - (100^\circ + \alpha) = 80^\circ - \alpha$

$\angle ABC = 20^\circ + \alpha$

$\angle ACB = 30^\circ + (80^\circ - \alpha) = 110^\circ - \alpha$

Perhatikan ΔAPB

Menurut Aturan Sinus:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 150^\circ}$$

$$AP = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 150^\circ} \times AB \quad .... (1)$$

Perhatikan ΔAPC

Menurut Aturan Sinus:

$$\frac{AP}{AC}=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 110^\circ}$$

$$AP=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 110^\circ}\times AC \text{ .... (2)}$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$\frac{\sin 20^\circ}{\sin 150^\circ}\times AB=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 110^\circ}\times AC$$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{\sin 110^\circ \sin 20^\circ}{\sin 30^\circ \sin 150^\circ}=\frac{\sin 70^\circ \sin 20^\circ}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=4\cos 20^\circ \sin 20^\circ=2\sin 40^\circ \text{ .... (3)}$$

Menurut Aturan Sinus dalam ΔABC

$$\frac{AC}{AB}=\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\sin(20^\circ+\alpha)}{\sin(110^\circ-\alpha)} \text{ .... (4)}$$

Dari persamaan (3) dan (4) diperoleh:

$$2\sin 40^\circ=\frac{\sin(20^\circ+\alpha)}{\sin(110^\circ-\alpha)}$$

$$2\sin 40^\circ \sin(110^\circ-\alpha)=\sin(20^\circ+\alpha)$$

$$\cos(150^\circ-\alpha)-\cos(-70^\circ+\alpha)=\sin(20^\circ+\alpha)$$

$$\cos(150^\circ-\alpha)+\cos(70^\circ-\alpha)=\sin(20^\circ+\alpha)$$

$$\cos(150^\circ-\alpha)+\cos[90^\circ-(20^\circ+\alpha)]=\sin(20^\circ+\alpha)$$

$$\cos(150^\circ-\alpha)+\sin(20^\circ+\alpha)=\sin(20^\circ+\alpha)$$

$$\cos(150^\circ-\alpha)=0$$

$$150^\circ-\alpha=90^\circ$$

$$\alpha=60^\circ$$

$$\therefore \angle ABC=20^\circ+\alpha=20^\circ+60^\circ=80^\circ$$

9. Sepuluh kartu ditulis angka satu sampai sepuluh (setiap kartu hanya terdapat satu angka dan tidak ada dua kartu yang memiliki angka yang sama). Kartu-kartu tersebut dimasukkan ke dalam kotak dan diambil satu secara acak. Kemudian sebuah dadu dilempar. Probabilitas dari hasil kali angka pada kartu dan angka pada dadu menghasilkan bilangan kuadrat adalah ....
Solusi:

Kartu\Dadu	1	2	3	4	5	5
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)
7	(7,1)	(7,2)	(7,3)	(7,4)	(7,5)	(7,6)
8	(8,1)	(8,2)	(8,3)	(8,4)	(8,5)	(8,6)
9	(9,1)	(9,2)	(9,3)	(9,4)	(9,5)	(9,6)
10	(10,1)	(10,2)	(10,3)	(10,4)	(10,5)	(10,6)

$S = \{(1,1),(1,2),\ldots,(10,6)\} \to n(S) = 60$

A = hasil kali angka pada kartu dan angka pada dadu menghasilkan bilangan kuadrat

$= \{(1,1),(1,4),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4),(5,5),(6,6),(8,2),(9,1),(9,4)\} \to n(A) = 11$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{11}{60}$$

10. Enam orang siswa akan duduk pada tiga meja bundar, dimana tiap meja akan diduduki oleh minimal oleh satu siswa. Banyaknya cara untuk melakukan hal tersebut adalah ....

Solusi:

Kita mengetahui banyak cara duduk n orang di meja bundar adalah $(n-1)!$

Ada 3 kemungkinan susunan duduk 6 siswa.

Susunan (4,1,1) → Banyaknya susunan $\frac{{}_6C_4 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times (4-1)!}{2!} = 90$

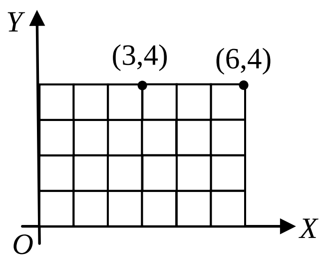
Susunan (3,2,1) → Banyaknya susunan ${}_6C_3 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times (1-1)!(2-1)! = 120$

Susunan (2,2,2) → Banyaknya susunan $\frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2}{3!} = 15$

Dengan demikian, banyaknya cara untuk melakukan hal tersebut adalah 90 + 120 + 15 = 225.

11. Suatu partikel bergerak pada bidang Cartesius dari titik $(0,0)$. Tiap langkah bergerak sasu satuan searah sumbu X positif dengan probabilitas 0,6 atau searah sumbu Y positif dengan probabilitas 0,4. Setelah sepuluh langkah, probabilitas partikel tersebut sampai pada titik $(6,4)$ dengan melalui $(3,4)$ adalah ....

Solusi:



Banyak cara melanhkah dari titik $(0,0)$ ke $(3,4)$adalah ${}_7C_3$.

Banyak cara melanhkah dari titik $(3,4)$ ke $(6,4)$adalah ${}_3C_0$.

Banyak langkah ke kanan dari titik $(0,0)$ ke $(6,4)$ ada 6 dan langkah ke atas ada 4.

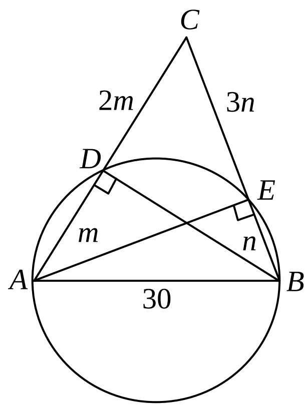
$\therefore$ peluangnya adalah ${}_7C_3 \times {}_7C_3 \times (0,6)^6 \times (0,4)^4 = 35 \times 1 \times \frac{3^6}{5^6} \times \frac{2^4}{5^4}$

$= \frac{81648}{5^9}$

12. Diberikan segitiga *ABC*, dengan panjang sisi $AB = 30$. Melalui *AB* sebagai diameter, dibuat sebuah lingkaran yang memotong sisi *AC* dan sisi *BC* berturut-turut di *D* dan *E*. Jika $AD = \frac{1}{3}AC$ dan $BE = \frac{1}{4}BC$, maka luas segitiga *ABC* sama dengan ....

Solusi:

Kita mengetahui bahwa sudut keliling adalah setengah sudut pusatnya.



$\therefore\ \angle ADB = \angle BEA = 90°$

Karena $AD = \frac{1}{3}AC$, sehingga dapat diambil $AD = m$ dan $CD = 2m$.

Karena $BE = \frac{1}{4}BC$, sehingga dapat diambil $BE = n$ dan $CE = 3m$.

Perhatikan segitiga ΔABD siku-siku di *D*.

$BD^2 = AB^2 - AD^2$

$BD^2 = 30^2 - m^2$

$BD^2 = 900 - m^2$ .... (1)

Perhatikan segitiga ΔCBD siku-siku di *D*.

$BD^2 = BC^2 - CD^2$

$BD^2 = (4n)^2 - (2m)^2$

$BD^2 = 16n^2 - 4m^2$ .... (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$16n^2 - 4m^2 = 900 - m^2$

$16n^2 - 3m^2 = 900$

$3m^2 = 16n^2 - 900$ .... (3)

Perhatikan segitiga ΔABE siku-siku di *E*.

$AE^2 = AB^2 - BE^2$

$AE^2 = 30^2 - n^2$

$AE^2 = 900 - n^2$ .... (4)

Perhatikan segitiga ΔCAE siku-siku di *E*.

$AE^2 = AC^2 - CE^2$

$AE^2 = (3m)^2 - (3n)^2$

$AE^2 = 9m^2 - 9n^2$ .... (5)

Dari persamaan (4) dan (5) diperoleh:

$9m^2 - 9n^2 = 900 - n^2$

$9m^2 - 8n^2 = 900$ .... (6)

Dari persamaan (3) dan (6) diperoleh:

$9m^2 - 8n^2 = 900$

$3(16n^2 - 900) - 8n^2 = 900$

$48n^2 - 2700 - 8n^2 = 900$

$40n^2 = 3600$

$n^2 = 90$

$n = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

$\therefore BC = 4n = 12\sqrt{10}$

$\therefore AE^2 = 900 - n^2 = 900 - 90 = 810$

$AE = \sqrt{810} = 9\sqrt{10}$

$\therefore [ABC] = \frac{1}{2} BC \times AE = \frac{1}{2} \times 12\sqrt{10} \times 9\sqrt{10} = 540$

13. Banyaknya nilai α dengan $0 < \alpha < 90°$ yang memenuhi persamaan $(1+\cos\alpha)(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha) = \frac{1}{8}$ adalah ....

Solusi:

$(1+\cos\alpha)(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha) = \frac{1}{8}$ (Kedua rus dikalikan dengan $(1-\cos\alpha)$)

$(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha) = \frac{1}{8}(1-\cos\alpha)$

$(1-\cos^2\alpha)(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha) = \frac{1}{8}(1-\cos\alpha)$

$(\sin^2\alpha)(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha) = \frac{1}{8}(1-\cos\alpha)$

$\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha) = \frac{1}{8}(1-\cos\alpha)$

$(1-\cos^2 2\alpha)(1+\cos 4\alpha) = \frac{1}{4}(1-\cos\alpha)$

$(\sin^2 2\alpha)(1+\cos 4\alpha) = \frac{1}{4}(1-\cos\alpha)$

$\left(\frac{1-\cos 4\alpha}{2}\right)(1+\cos 4\alpha) = \frac{1}{4}(1-\cos\alpha)$

$(1-\cos^2 4\alpha) = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$

$\sin^2 4\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$

$\frac{1-\cos 8\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$

$1-\cos 8\alpha = 1-\cos\alpha$

$\cos 8\alpha = \cos\alpha$

$8\alpha = \pm\alpha + k \times 360$

$\alpha = \frac{k}{7} \times 360$ atau $\alpha = 40k$

Untuk $k = 0$, maka $\alpha = 0$ (ditolak)

Untuk $k = 1$, maka $\alpha = \frac{1}{7} \times 360 = 51\frac{3}{7}$ (diterima) atau $\alpha = 40 \times 1 = 40$ (diterima)

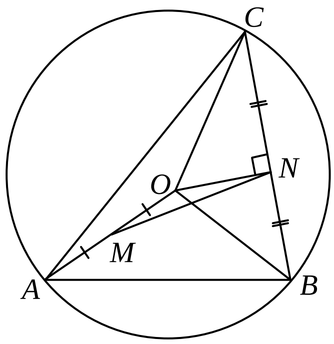
Untuk $k=2$, maka $\alpha=\frac{2}{7}\times 360=102\frac{6}{7}$ (ditolak) atau $\alpha=40\times 2=80$ (diterima)

Jadi, banyak nilai α tersebut yang memenuhi adalah 3 buah.

14. Diberikan segitiga lancip *ABC* dengan *O* sebagai pusat lingkaran luarnya. Misalkan *M* dan *N* berturut-turut pertengahan *OA* dan *BC*. Jika $\angle ABC=4\angle OMN$ dan $\angle ACB=6\angle OMN$, maka besarnya $\angle OMN=\ldots$.

Solusi:

Ambillah $\angle OMN=x$, sehingga $\angle ABC=4\angle OMN=4x$ dan $\angle ACB=6\angle OMN=6x$.



$OA=OB=OC=R$ (jari-jari lingkaran luar segitiga *ABC*)

Kita mengetahui bahwa besar sudut pusat adalah dua kali sudut kelilingnya.

$\angle AOB=2\angle ACB=2\times 6x=12x$

Karena segitiga *AOB* adalah segitiga sama kaki dengan $OA=OB$, maka

$\angle OAB=\angle OBA=\frac{180^\circ-12x}{2}=90^\circ-6x$

$\angle AOC=2\angle ABC=2\times 4x=8x$

Karena segitiga *BOC* adalah segitiga sama kaki dengan $OB=OC$, maka

$\angle OBC=\angle OCB=\angle ABC-\angle OBA=4x-(90^\circ-6x)=10x-90^\circ$

$\therefore \angle NOC=90^\circ-(10x-90^\circ)=180^\circ-10x$

$\therefore \angle MON=\angle AOC+\angle NOC=8x+180^\circ-10x=180^\circ-2x$

Perhatikan segitiga *MON*:

$\angle MON=180^\circ-2x$ dan $\angle OMN=x$

$\therefore \angle ONM=180^\circ-(\angle MON+\angle OMN)=180^\circ-180^\circ+2x-x=x$

Sehingga segitiga *MON* adalah sama kaki, dengan $OM=ON=\frac{1}{2}R$

Perhatikan segitiga *CON* siku-siku di *N*, dengan $OC=R$ dan $ON=\frac{1}{2}R$, sehingga $\angle CON=60^\circ$ dan $\angle OCN=\angle OCB=30^\circ$.

$\angle OBC=\angle OCB=30^\circ$

$10x-90^\circ=30^\circ$

$x=12^\circ$

Jadi, $\angle OMN=12^\circ$

15. Tentukan semua bilangan tiga digit yang memenuhi syarat bahwa bilangan tersebut sama dengan penjumlahan dari faktorial setiap digitnya.

Solusi:

Ambillah bilangan tiga digit adalah abc, sehingga $100a + 10b + c = a! + b! + c!$

Kasus Pertama:

Kita mengetahui bahwa 0! = 1, 1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, 6! = 720, dan 7! = 5040.

Mengingt bilangan tersebut hanya tiga digit abc, maka $a, b, c \le 6$.

Andaikan nilai salah satu dari a, b, dan c adalah 6, maka $a! + b! + c! > 720$, sedangkan $100a + 10b + c \le 666$ sehingga tidak ada nilai *a*, *b*, dan *c* yang memenuhi.

Kasus Kedua:

Ambillah $a, b, c \le 5$

$100a + 10b + c = a! + b! + c!$

$100a - a! = b! + c! - (10b + c)$

Mudah dipahami bahwa nilai maksimum dari $b! + c! - (10b + c) = 5! + 5! = 240$

Jika $a = 5$ maka $100a - a! = 100 \cdot 5 - 5! = 380 > 240$ (ditolak)

Jika $a = 4$ maka $100a - a! = 100 \cdot 4 - 4! = 376 > 240$ (ditolak)

Jika $a = 3$ maka $100a - a! = 100 \cdot 3 - 3! = 294 > 240$ (ditolak)

Jika $a = 2$ maka $100a - a! = 100 \cdot 2 - 2! = 198 < 240$

Sehingga $b! + c! - (10b + c) = 198$

Karena $4! + 4! < 198$, maka sedikitnya salah satu dari *b* atau *c* adalah 5.

Ambillah $b = 5$, sehingga

$5! + c! - (10 \times 5 + c) = 198$

$c! - c = 128$

Sehingga tidak ada nilai *c* yang memenuhi

Ambillah $c = 5$, sehingga

$b! + 5! - (10b + 5) = 198$

$b! - 10 = 83$

Sehingga tidak ada nilai *b* yang memenuhi

Jika $a = 1$ maka $100a - a! = 100 \cdot 1 - 1! = 99$, sehingga

$b! + c! - (10b + c) = 99$

$c! - c = 99 - b! + 10b$

Jika $b = 0$, maka $c! - c = 99 - 0! + 10 \times 0 = 98$ (tidak ada nilai c yang memenuhi)

Jika $b = 1$, maka $c! - c = 99 - 1! + 10 \times 1 = 108$ (tidak ada nilai c yang memenuhi)

Jika $b = 2$, maka $c! - c = 99 - 2! + 10 \times 2 = 117$ (tidak ada nilai c yang memenuhi)

Jika $b = 3$, maka $c! - c = 99 - 0! + 10 \times 0 = 123$ (tidak ada nilai c yang memenuhi)

Jika $b = 4$, maka $c! - c = 99 - 4! + 10 \times 4 = 115$ (Terpenuhi untuk nilai c =5)

Jika $b = 5$, maka $c! - c = 99 - 5! + 10 \times 5 = 29$ (tidak ada nilai c yang memenuhi)

Sehingga nilai $a = 1, b = 4$, dan $c = 5$

Jadi, bilangan yang diminta adalah 145.

16. Diberikan himpunan $S = \left\{ x \in Z \,\middle|\, \frac{x^2 - 2x + 7}{2x - 1} \in Z \right\}$. Banyaknya himpunan bagian dari S adalah ....

Solusi:

$2x - 1 \mid x^2 - 2x + 7$, sehingga

$2x - 1 \mid 2x^2 - 4x + 14 = x(2x - 1) - 3x + 14$, sehingga

$2x - 1 \mid -3x + 14$, sehingga

$2x - 1 \mid -6x + 28 = -3(2x - 1) + 25$, sehingga

$2x - 1 \mid 25$

Sehingga $2x - 1$ adalah faktor dari 25, yaitu $\pm 1, \pm 5, \pm 25$

Jika $2x - 1 = -1$, maka $x = 0$ yang memenuhi $2x - 1 \mid x^2 - 2x + 7$

Jika $2x - 1 = 1$, maka $x = 1$ yang memenuhi $2x - 1 \mid x^2 - 2x + 7$

Jika $2x - 1 = -1$, maka $x = 0$ yang memenuhi $2x - 1 \mid x^2 - 2x + 7$

Jika $2x - 1 = -5$, maka $x = -2$ yang memenuhi $2x - 1 \mid x^2 - 2x + 7$

Jika $2x - 1 = 5$, maka $x = 3$ yang memenuhi $2x - 1 \mid x^2 - 2x + 7$

Jika $2x-1=-25$, maka $x=-12$ yang memenuhi $2x-1 \mid x^2-2x+7$

Jika $2x-1=25$, maka $x=13$ yang memenuhi $2x-1 \mid x^2-2x+7$

Sehingga banyaknya nilai $x \in Z$ yang memenuhi ada 6.

Jadi, banyaknya himpunan bagian dari S adalah $2^6 = 64$.

17. Untuk $x>0$, $y>0$, didefinisikan $f(x,y)$ adalah nilai terkecil di antara x, $\frac{y}{2}+\frac{2}{x}$, dan $\frac{1}{y}$. Nilai terbesar yang mungkin dicapai oleh $f(x,y)$ adalah ....

Solusi:

Ambillah $a=x$ dan $b=\frac{1}{y}$, sehingga $a>0$ dan $b>0$

$$f(x,y)=f(a,b)=\min\left(a,b,\frac{1}{2b}+\frac{2}{a}\right)$$

Jika $a=b=\frac{1}{2b}+\frac{2}{a}$

$$a=\frac{1}{2a}+\frac{2}{a}$$

$$2a^2=1+4$$

$$a^2=\frac{5}{2}$$

$$a=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{10}$$

$$b=a=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{10}$$

Jika $a\le\frac{1}{2}\sqrt{10}$ atau $b\le\frac{1}{2}\sqrt{10}$, maka $f(x,y)\le\frac{1}{2}\sqrt{10}$

Jika $a>\frac{1}{2}\sqrt{10}$ atau $b>\frac{1}{2}\sqrt{10}$, maka $f(x,y)=\frac{1}{2b}+\frac{2}{a}<\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{1}{2}\sqrt{10}$

Sehingga $f(x,y)\le\frac{1}{2}\sqrt{10}$ dengan tanda tak kesamaan terjadi jika $a=b=\frac{1}{2}\sqrt{10}$

Dengan demikian nilai terbesar yang mungkin dicapai oleh $f(x,y)$ adalah $\frac{1}{2}\sqrt{10}$.

18. Nilai k terkecil, sehingga sembarang k bilangan dipilih dari $\{1,2,...,30\}$, selalu dapat ditemukan dua bilangan yang hasil kalinya merupakan bilangan kuadrat sempurna adalah ....

Solusi:

$S = \{1,2,...,30\}$

Ambillah $A = \{10,11,13,14,15,17,19,21,22,23,26,29,30\}$

$B = \{1,4,9,16,25\}$

$C = \{2,8,18\}$

$D = \{3,12,27\}$

$E = \{5,20\}$

$F = \{6,24\}$

$G = \{7,28\}$

A adalah himpunan yang jika dikalikan salah satu anggotanya dengan anggota himpunan A maupun anggota himpunan lainnya maka tidak akan menghasilkan bilangan kuadrat sempurna.

Himpunan B, C, D, E, F, dan G adalah himpunan yang jika salah satu anggotanya dikalikan dengan anggota dari himpunannya sendiri akan menghasilkan bilangan kuadrat sempurna.

Selanjutnya jika seluruh anggota A digabungkan dengan masing-masing satu anggota dari himpunan B, C, D, E, dan G, maka tidak akan ada dua anggota yang jika dikalikan akan menghasilkan bilangan kuadrat sempurna, sehingga banyak anggota himpunan ini adalah $13 + 6 \times 1 = 19$.
Tetapi jika satu anggota lagi dipilih dari himpunan manapun maka aka nada dua anggota dari himpunan tersebut yang jika dikalikan akan menghasilkan bilangan kuadrat sempurna.
Dengan demikian, nilai k terkecil yang memenuhi adalah 20.

19. Diketahui x_1, x_2 adalah dua bilangan bulat berbeda yang merupakan akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2 + px + q + 1 = 0$. Jika p dan $p^2 + q^2$ adalah bilangan-bilangan prima, maka nilai terbesar yang mungkin dari $x_1^{2013} + x_2^{2013}$ adalah ....

Solusi:

Persamaan kuadrat $x^2 + px + q + 1 = 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2

$x_1 + x_2 = -p \rightarrow p = -(x_1 + x_2)$

$x_1 x_2 = q + 1 \rightarrow q = x_1 x_2 - 1$

$$p^2 + q^2 = [-(x_1 + x_2)]^2 + (x_1 x_2 - 1)^2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 + (x_1 x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 1 = x_1^2 + x_2^2 + (x_1 x_2)^2 + 1$$

$$= (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)$$

Karena p dan p^2+q^2 adalah bilangan prima, maka salah satu x_1 atau x_2 adalah nol. Ambillah $x_1=0$, sehingga $q=x_1x_2-1=0\cdot x_2-1=-1$, maka $p^2+q^2=p^2+(-1)^2=p^2+1$ adalah bilangan prima.

Jika *p* bilangan ganjil, maka p^2+1 bilangan prima genap yang hanya dicapai jika $p=\pm 1$. Tetapi *p* juga harus bilangan prima, sehingga tidak ada p bilangan ganjil yang memenuhi.

Jika *p* bilangan genap, maka $p=2$ yang memenuhi p^2+1 bilangan prima, sehingga $x_2=-p=-2$. Dengan demikian, $x_1^{2013}+x_2^{2013}=0^{2013}+(-2)^{2013}=-2^{2013}$

20. Misalkan $\lfloor x\rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan *x* dan $\lceil x\rceil$ menyatakan bilang bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan *x*. Tentukan semua *x* yang memenuhi $\lfloor x\rfloor+\lceil x\rceil=5$.

Solusi:

$\lfloor x\rfloor+\lceil x\rceil=5$

Jika x bilangan bulat , maka $\lfloor x\rfloor=\lceil x\rceil$, sehingga tidak mungkin $\lfloor x\rfloor+\lceil x\rceil=5$.

Jika x bukan bilangan bulat , maka $\lceil x\rceil-\lfloor x\rfloor=1$, yang dicapai jika $\lceil x\rceil=3$ dan $\lfloor x\rfloor=2$.

Dengan demikian, x yang memenuhi adalah $2<x<3$.