Jumat, 10 Juli 2015

Soal 1. Himpunan berhingga $\mathcal{S}$, terdiri dari titik-titik di bidang, kita katakan *seimbang* jika untuk setiap dua titik berbeda A dan B di $\mathcal{S}$, terdapat suatu titik C di $\mathcal{S}$ sehingga $AC = BC$. Himpunan $\mathcal{S}$ kita katakan *bebas-pusat* jika untuk setiap tiga titik berbeda A, B, dan C di $\mathcal{S}$, tidak terdapat titik P di $\mathcal{S}$ sehingga $PA = PB = PC$.

(a) Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat $n \geqslant 3$, terdapat himpunan seimbang yang terdiri dari n titik.

(b) Tentukan semua bilangan bulat $n \geqslant 3$ sehingga terdapat himpunan seimbang yang bebas-pusat dan terdiri dari n titik.

Soal 2. Tentukan semua tripel bilangan bulat positif (a, b, c) sehingga masing-masing dari

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

merupakan bilangan 2-berpangkat.

(*Bilangan* 2*-berpangkat adalah bilangan bulat berbentuk* 2^n*, dengan* n *bilangan bulat tak-negatif.*)

Soal 3. Misalkan ABC adalah segitiga lancip dengan $AB > AC$. Misalkan Γ adalah lingkaran luarnya, H adalah titik tingginya, dan F adalah kaki tinggi dari A. Misalkan M adalah titik tengah BC. Misalkan Q adalah titik pada Γ sehingga $\angle HQA = 90°$, dan K adalah titik pada Γ sehingga $\angle HKQ = 90°$. Asumsikan titik-titik A, B, C, K, dan Q semuanya berbeda, dan terletak pada Γ dalam urutan tersebut.

Buktikan bahwa lingkaran luar segitiga KQH dan lingkaran luar segitiga FKM saling menyinggung.

Waktu: 4 jam 30 menit
Masing-masing soal bernilai 7 poin

Language: **Indonesian**

Day: **2**

Sabtu, 11 Juli 2015

Soal 4. Segitiga ABC memiliki lingkaran luar Ω dengan pusat O. Suatu lingkaran Γ dengan pusat A memotong segmen BC di titik D dan E sedemikian hingga B, D, E, dan C semuanya berbeda dan terletak pada garis BC dalam urutan tersebut. Misalkan F dan G adalah titik-titik perpotongan Γ dan Ω sedemikian hingga A, F, B, C, dan G terletak pada Ω dalam urutan tersebut. Misalkan K adalah titik potong kedua dari perpotongan lingkaran luar segitiga BDF dengan segmen AB. Misalkan L adalah titik potong kedua dari perpotongan lingkaran luar segitiga CGE dan segmen CA.

Misalkan garis FK dan GL berbeda dan berpotongan di titik X. Buktikan bahwa X terletak pada garis AO.

Soal 5. Misalkan $\mathbb{R}$ adalah himpunan semua bilangan real. Tentukan semua fungsi $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang memenuhi persamaan

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

untuk semua bilangan real x dan y.

Soal 6. Barisan bilangan bulat $a_1, a_2, \ldots$ memenuhi kondisi-kondisi berikut:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ untuk setiap $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ untuk setiap $1 \leqslant k < \ell$.

Buktikan bahwa terdapat dua bilangan bulat positif b dan N sehingga

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b)\right| \leqslant 1007^2$$

untuk setiap bilangan bulat m dan n yang memenuhi $n > m \geqslant N$.

Waktu: 4 jam 30 menit
Masing-masing soal bernilai 7 poin