SOLUSI
SOAL-SOAL LATIHAN 3
UJIAN SEKOLAH DAN UJIAN NASIONAL
MATEMATIKA SMA IPA TAHUN 2014

Pilihlah jawaban yang paling tepat!

1. Diberikan premis-premis berikut!

   1. Mathman belajar tidak serius atau ia dapat mengerjakan semua soal Ujian Nasional dengan benar.

   2. Ia tadak dapat mengerjakan semua soal Ujian Nasional dengan benar atau Mathman lulus Ujian Nasional.

   Negasi dari penarikan kesimpulan yang sah pada premis-premis tersebut adalah ….

   A. Mathman belajar dengan serius atau ia tidak lulus Ujian Nasional

   B. Mathman belajar dengan serius atau ia lulus Ujian Nasional.

   C. Mathman belajar dengan serius dan ia tidak lulus Ujian Nasional.

   D. Jika Mathman belajar dengan serius maka ia tidak lulus Ujian Nasional.

   E. Jika Mathman belajar dengan serius maka ia lulus Ujian Nasional.

   Solusi:

   $\sim p \vee q \equiv p \to q$

   $$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\sim q \vee r} \\ \quad \ldots. \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ \therefore\ p \to r \end{array}$$

   $\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$

   Jika Mathman belajar dengan serius maka ia dapat mengerjakan semua soal Ujian Nasional dengan benar.
   Jika ia dapat mengerjakan semua soal Ujian Nasional dengan benar, maka Mathman lulus Ujian Nasional.

   $\therefore$ Jika Mathman belajar dengan serius maka ia lulus Ujian Nasional.

   Negasi dari pernyataan "Jika Mathman belajar dengan serius, maka ia lulus Ujian Nasional" adalah "Mathman belajar dengan serius atau ia tidak lulus Ujian Nasional". $\to [A]$

2. Jika $a = 16$ dan $b = \frac{1}{27}$, maka nilai $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{4}} \sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}} b^{-1}}}{\left(a^{-3} b^{4}\right)^{\frac{1}{12}}} = \ldots.$

   A. $\frac{2}{9}$ D. $\frac{25}{9}$

   B. $\frac{5}{9}$ E. $\frac{32}{9}$

C. $\frac{6}{9}$

Solusi:

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}b^{-1}}}{\left(a^{-3}b^{4}\right)^{\frac{1}{12}}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{-1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}=a^{\frac{5}{4}}b^{\frac{2}{3}}=16^{\frac{5}{4}}\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}}=2^{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}=\frac{32}{9}\rightarrow \text{[E]}$$

3. Bentuk sederhana dari $\left(3-\sqrt{5}\right)\sqrt{3+\sqrt{5}}+\left(3+\sqrt{5}\right)\sqrt{3-\sqrt{5}}$ adalah ….

A. $2\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{10}$

B. $2+\sqrt{10}$ E. $9+2\sqrt{10}$

C. $2+3\sqrt{5}$

Solusi:

$$x=\left(3-\sqrt{5}\right)\sqrt{3+\sqrt{5}}+\left(3+\sqrt{5}\right)\sqrt{3-\sqrt{5}}$$

$$x=\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^{2}\left(3+\sqrt{5}\right)}+\sqrt{\left(3+\sqrt{5}\right)^{2}\left(3-\sqrt{5}\right)}$$

$$x=\sqrt{4\left(3-\sqrt{5}\right)}+\sqrt{4\left(3+\sqrt{5}\right)}$$

$$x^{2}=4\left(3-\sqrt{5}\right)+4\left(3+\sqrt{5}\right)+2\sqrt{16(9-5)}$$

$$x^{2}=24+16$$

$$x=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

Jadi, bentuk sederhana dari $\left(3-\sqrt{5}\right)\sqrt{3+\sqrt{5}}+\left(3+\sqrt{5}\right)\sqrt{3-\sqrt{5}}$ adalah $2\sqrt{10}$. $\rightarrow$ [D]

4. Diberikan ${}^{7}\log 3=a$ dan ${}^{3}\log 2=b$. Jika $x_0=\frac{k}{c}$, dengan $q\neq 0$ adalah solusi dari persamaan ${}^{0,4}\log x+{}^{2,5}\log(x+1)=2$, maka nilai ${}^{28}\log kc=....$

A. $\frac{2ab+a+1}{2ab+1}$ D. $\frac{2ab+4a+1}{2ab+1}$

B. $\frac{4ab+a+1}{4ab+1}$ E. $\frac{4ab+a+1}{4ab+1}$

C. $\frac{2ab+3a+1}{2ab+1}$

Solusi:

$${}^{0,4}\log x+{}^{2,5}\log(x+1)=2$$

$$\frac{\log x}{\log 0{,}4}+\frac{\log(x+1)}{\log 2{,}5}=2$$

$$\frac{\log x}{\log\frac{4}{10}}+\frac{\log(x+1)}{\log\frac{10}{4}}=2$$

$$-\frac{\log x}{\log\frac{10}{4}}+\frac{\log(x+1)}{\log\frac{10}{4}}=2$$

$$\frac{\log(x+1)-\log x}{\log\frac{10}{4}}=2$$

$$\log\frac{x+1}{x}=2\log\frac{10}{4}$$

$$\log\frac{x}{x+1}=\log\frac{100}{16}$$

$$\frac{x+1}{x}=\frac{100}{16}$$

$$4x+4=25x$$

$$21x=4$$

$$x=\frac{4}{21}$$

$$x_0=\frac{k}{c}=\frac{4}{21}$$

$k=4$ dan $c=21$

nilai $kc=4\times 21=84$

$$^{28}\log kc={}^{28}\log 84=\frac{^{7}\log 84}{^{7}\log 28}=\frac{^{7}\log 4+{}^{7}\log 3+{}^{7}\log 7}{^{7}\log 4+{}^{7}\log 7}=\frac{2\,{}^{7}\log 2+a+1}{2\,{}^{7}\log 2+1}=\frac{2\,{}^{7}\log 3\times{}^{3}\log 2+a+1}{2\,{}^{7}\log 3\times{}^{3}\log 2+1}$$

$$=\frac{2ab+a+1}{2ab+1}\rightarrow[\text{A}]$$

5. Jika persamaan kuadrat $4x^2+(4-8k)x+2k-k^2=0$ mempunyai dua akar yang positif , maka nilai k adalah ….

A. $k\le\frac{1}{5}$ atau $k>0$

B. $\frac{1}{5}\ge k>0$

C. $k<0$ atau $k>2$

D. $0<k<2$

E. $1\le k<2$

Solusi:

Persamaan kuadrat $4x^2+(4-8k)x+2k-k^2=0$ akar-akarnya x_1 dan x_2.

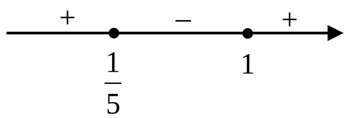
$D \geq 0$

$(4-8k)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (2k - k^2) \geq 0$

$16 - 64k + 64k^2 - 32k + 16k^2 \geq 0$

$80k^2 - 96k + 16 \geq 0$

$5k^2 - 6k + 1 \geq 0$



$(5k-1)(k-1) \geq 0$

$\frac{1}{5} \leq x \leq 1$ …. (1)

$x_1 + x_2 > 0$

$\frac{-(4-8k)}{4} > 0$

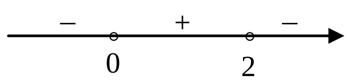
$-1 + 2k > 0$

$k > \frac{1}{2}$ …. (2)

$x_1 x_2 > 0$

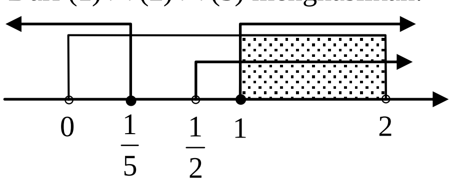
$\frac{2k - k^2}{4} > 0$

$k(2-k) > 0$



$2 > k > 0$ …. (3)

Dari (1) $\cap$ (2) $\cap$ (3) menghasilkan:



$1 \leq k < 2 \rightarrow$ [E]

6. Penyelesaian pertidaksamaan ${}^{\frac{1}{2}}\log x + {}^{\frac{1}{2}}\log(x-6) > -4$ adalah ….

A. $-2 < x < 8$

B. $6 < x < 8$

C. $0 < x < 8$

D. $x < -2$ atau $x > 8$

E. $x < 6$ atau $x > 8$

Solusi:

${}^{\frac{1}{2}}\log x + {}^{\frac{1}{2}}\log(x-6) > -4$

${}^{\frac{1}{2}}\log(x^2 - 6x) > {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

$\left(x^2-6x\right)<\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

$x^2-6x-16<0$

$(x+2)(x-8)<0$

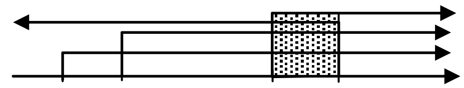
$-2<x<8$ …. (1)

$x>0$ …. (2)

$x-6>0$

$x>6$ …. (3)

Dari (1) $\cap$ (2) $\cap$ (3) diperoleh $6<x<8 \rightarrow [B]$



7. Jika fungsi kuadrat $f(x)=px^2-(2-p)x+2p-4=0$ selalu bernilai positif, maka batas-batas nilai p adalah ….

   A. $p>2$

   B. $p<-\frac{2}{7}$ atau $p>2$

   C. $p<0$ atau $p>2$

   D. $0<p<2$

   E. $p>0$

   Solusi:

   $f(x)=px^2-(2-p)x+2p-4=0$

   $a>0$

   $p>0$ …. (1)

   $D<0$

   $\left[-(2-p)\right]^2-4p(2p-4)<0$

   $(p-2)^2-8p(p-2)<0$

   $(p-2)(p-2-8p)<0$

   $(p-2)(-7p-2)<0$

   $(p-2)(7p+2)>0$

   $p<-\frac{2}{7}$ atau $p>2$ …. (2)

   Dari (1) $\cap$ (2) diperoleh $p>2 \rightarrow$ [A]

8. Lingkaran yang berpusat di titik (5,3) menyinggung garis *g*: $3x+4y-12=0$. Persamaan garis singgung yang sejajar dengan garis *g* adalah ….

   A. $3x+4y-42=0$

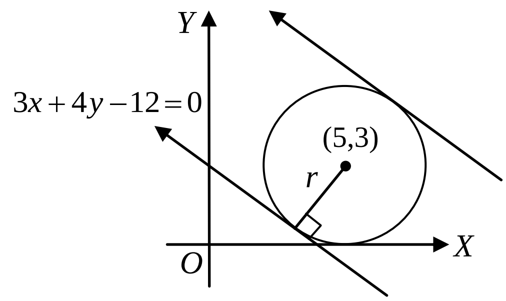
   D. $3x+4y-37=0$

B. $3x+4y-32=0$ E. $3x+4y-12=0$

C. $3x+4y-52=0$

Solusi:

$$r=\left|\frac{3x+4y-12}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=\left|\frac{3\cdot 5+4\cdot 3-12}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=\left|\frac{15}{5}\right|=3$$



Persamaan lingkaran adalah $(x-5)^2+(y-3)^2=9$

Gradien garis g: $3x+4y-12=0$ adalah $m_g=-\frac{3}{4}$

Persamaan garis singgung adalah

$$y-b=m(x-a)\pm r\sqrt{m^2+1}$$

$$y-3=-\frac{3}{4}(x-5)\pm 3\times\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2+1}$$

$$y-3=-\frac{3}{4}(x-5)\pm 3\times\frac{5}{4}$$

$$4y-12=-3(x-5)\pm 15$$

$4y-12=-3x+15+15$ dan $4y-12=-3x+15-15$

$3x+4y-42=0$ dan $3x+4y-12=0$

Jadi, persamaan garis singgung yang diminta adalah $3x+4y-42=0$.

9. Diberikan fungsi f didefinisikan sebagai $f(x)=x+1$ dan fungsi yang lain didefinisikan sebagai $(gof)(x)=x^2+2x+5$. Jumlah akar-akar persamaan $(fog)(x)=9$ adalah ….

A. 5 D. 2

B. 4 E. 0

C. 3

Solusi:

$$(gof)(x)=x^2+2x+5$$

$$g(f(x))=x^2+2x+5$$

$$g(x+1)=x^2+2x+5$$

$$t=x+1 \Leftrightarrow x=t-1$$

$$g(t)=(t-1)^2+2(t-1)+5$$

$$g(t)=t^2-2t+1+2t-2+5$$

$$g(t)=t^2+4$$

$g(x) = x^2 + 4$

$(fog)(x) = 9$

$f(g(x)) = 9$

$f(x^2 + 4) = 9$

$x^2 - 4 = 0$

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-0}{1} = 0$

Jadi, jumlah akar-akarnya adalah 0. $\rightarrow$ [E]

10. Diberikan fungsi $f(x) = \frac{x-3}{x+4}$, dengan $x \neq -4$. Jika $g: R \rightarrow R$ adalah suatu fungsi sehingga $(gof)(x) = x + 2$, maka fungsi invers $g^{-1}(x) = \ldots.$

A. $\frac{x-2}{x+5}$, $x \neq -5$

B. $\frac{x-5}{x+2}$, $x \neq -2$

C. $\frac{-2x-5}{x-1}$, $x \neq 1$

D. $\frac{x+5}{x+2}$, $x \neq -2$

E. $\frac{x-5}{x-2}$, $x \neq 2$

Solusi:

$(gof)(x) = x + 2$

$g(f(x)) = x + 2$

$g\left(\frac{x-3}{x+4}\right) = x + 2$

$t = \frac{x-3}{x+4}$

$tx + 4t = x - 3$

$x(t-1) = -4t - 3$

$x = \frac{-4t-3}{t-1}$

$g(t) = \frac{-4t-3}{t-1} + 2 \Leftrightarrow g(t) = \frac{-2t-5}{t-1} \Leftrightarrow g(x) = \frac{-2x-5}{x-1}$

Rumus: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$

$g(x) = \frac{-2x-5}{x-1} \Leftrightarrow g^{-1}(x) = \frac{x-5}{x+2}$, $x \neq -2 \rightarrow$ [B]

11. Diberikan suku banyak $x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ yang habis dibagi $(x - a)$ dan $(x - 2a)$, dengan a adalah bilangan bulat. Nilai a adalah ….

A. 5 D. 2

B. 4 E. 1

C. 3

Solusi:

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$

$f(a) = f(2a) = 0$

$a^3 - 5a^2 + 2a + 8 = 8a^3 - 20a^2 + 4a + 8$

$a^3 - 5a^2 + 2a + 8 = 8a^3 - 20a^2 + 4a + 8$

$8a^3 - 20a^2 + 4a + 8 - 8(a^3 - 5a^2 + 2a + 8) = 0$

$20a^2 - 12a - 56 = 0$

$5a^2 - 3a - 14 = 0$

$(5a + 7)(a - 2) = 0$

$a = -\frac{7}{5}$ (ditolak) atau $a = 2$ (diterima)

$\therefore$ Nilai $a = 2$. $\to [D]$

12. Sebuah segitiga mempunyai sisi yang panjangnya berbeda. Sisi terpanjang 12 cm lebih panjang dari sisi terpendek; sisi terpanjang dan sisi tengah jumlahnya 54 cm. Dua kali sisi yang terpanjang, tiga kali sisi yang tengah, dan lima kali sisi terpendek jumlahnya 222 cm. Luas segitiga tersebut adalah ….

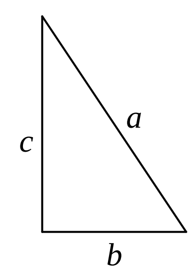
A. 256 cm^2 D. 116 cm^2

B. 216 cm^2 E. 112 cm^2

C. 214 cm^2

Solusi:

Ambillah sisi-sisi segitiga adalah a, b, dan c dengan $a > c > b$.



$a = b + 12$

$a - b = 12$ …. (1)

$a + c = 54$ …. (2)

$2a + 3c + 5b = 222$ …. (3)

Persamaan (2) – Persamaan (1) menghasilkan:

$b + c = 42$ …. (4)

Persamaan (3) – 2 × Persamaan (1) menghasilkan:

$7b + 3c = 198$ …. (5)

Persamaan (5) – 3 × Persamaan (4) menghasilkan:

$4b = 72$

$b = 18$

$b = 18 \rightarrow\ b + c = 42$

$18 + c = 42$

$c = 24$

$b = 18 \rightarrow\ a = b + 12 = 18 + 12 = 30$

$b^2 = a^2 + c^2$

$30^2 = 18^2 + 24^2$ (Triple Pythagoras)

Dengan demikian, segitiga itu adalah segitiga siku-siku.

Luas segitiga tersebut adalah $\frac{1}{2} \times 18 \times 24 = 216\,\text{cm}^2 \rightarrow$ [B]

13. Seorang pasien di rumah sakit membutuhkan sekurang-kurangnya 84 buah obat jenis *A* dan 120 obat jenis *B* setiap hari (diasumsikan over dosis untuk setiap obat tidak berbahaya). Setiap gram zat *M* berisi 10 unit obat *A* dan 8 unit obat *B*. Setiap zat *N* berisi 2 unit obat *A* dan 4 unit obat *B*. Jika harga zat *M* dan zat *N* masing-masing harganya Rp 90.000,00 dan Rp 40.0000,00, maka dengan mengombinasikan banyak gram zat *M* dan *N* untuk memenuhi kebutuhan obat minimum si pasien akan mengeluarkan biaya minimum pula setiap harinya sebesar ….

A. Rp 1.680.000,00 D. Rp 1.200.000,00

B. Rp 1.350.000,00 E. Rp 1.040.000,00

C. Rp 1.240.000,00

Solusi:

	Jumlah obat per gram zat *M*	Jumlah obat per gram zat *N*	Persyaratan harian minimum
Obat *A*	10	2	84
Obat *B*	8	4	120

Anggap x = jumlah gram zat *M* yang digunakan

y = jumlah gram zat *N* yang digunakan

Selanjutnya

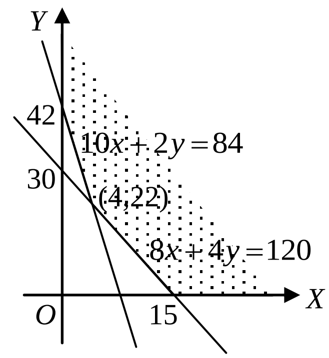
$$\begin{cases} 10x + 2y \ge 84 \\ 8x + 4y \ge 120 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Fungsi objektif $f(x,y) = 90.000x + 40.000y$

$10x + 2y = 84$ …. (1)

$8x + 4y = 120$

$4x + 2y = 60$ …. (2)



Selisih persamaan (1) dan (2) menghasilkan:

$6x = 24$

$x = 4$

$x = 4 \rightarrow 10x + 2y = 84$

$10(4) + 2y = 84$

$2y = 44$

$y = 22$

Koordinat titik potongnya adalah (4,22)

Titik	$f(x,y) = 90.000x + 40.000y$
(0,0)	$60.000 \times 0 + 100.000 \times 0 = 0$
(15,0)	$90.000 \times 15 + 40.000 \times 0 = 1.350.000$
(4,22)	$90.000 \times 4 + 40.000 \times 22 = 1.240.000$ (minimum)
(0,42)	$90.000 \times 0 + 40.000 \times 42 = 1.680.000$

Jadi, pasien itu akan mengeluarkan biaya minimum setiap harinya sebesar Rp 1.240.000,00. $\rightarrow$ [C]

14. Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 2b \\ 4 & 3c \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2c-3b & a \\ 2a+1 & b+7 \end{pmatrix}$. Jika $A^T = 2B$, dengan A^T adalah transpos matriks *A*, maka invers matriks *B* adalah $A^{-1} = ...$

A. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 24 & -10 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 24 & -10 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

C. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 12 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 12 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 12 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Solusi:

$A^T = 2B$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2b \\ 4 & 3c \end{pmatrix}^T = 2\begin{pmatrix} 2c-3b & a \\ 2a+1 & b+7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2b & 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4c-6b & 2a \\ 4a+2 & 2b+14 \end{pmatrix}$$

$2a = 4 \Leftrightarrow a = 2$

$a = 2 \rightarrow 2b = 4a + 2$

$2b = 4(2) + 2$

$b = 5$

$b = 5 \rightarrow 3c = 2b + 14$

$3c = 2(5) + 14$

$c = 8$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2b \\ 4 & 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2\cdot 5 \\ 4 & 3\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 4 & 24 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2\times 24 - 10\times 4}\begin{pmatrix} 24 & -10 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 24 & -10 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 12 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow [\text{C}]$$

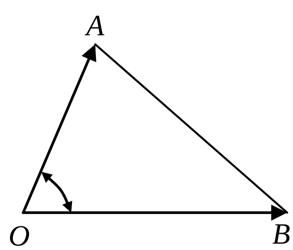
15. Diberikan titik-titik sudut $A(-1,1,2)$, $B(-2,-1,1)$, dan O bertindak sebagai titik pangkal. Besar $\angle AOB$ adalah ….

A. 120° D. 45°

B. 90° E. 30°

C. 60°

Solusi:



$$\overline{OA} = \begin{pmatrix} -1-0 \\ 1-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ dan } \overline{OB} = \begin{pmatrix} -2-0 \\ -1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rumus: $\cos\alpha = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$

$$\cos\angle AOB = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2}\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{2-1+2}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{4+1+1}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$\angle AOB = 60^\circ \rightarrow [\text{C}]$

16. Diberikan segitiga ABC dalam ruang, dengan koordinat titik $A(3,1,2)$, $B(4,3,0)$, dan $C(1,2,5)$. Proyeksi vektor dari vektor $\overline{AC}$ pada vekto $\overline{AB}$ adalah….

A. $\frac{4}{3}\bar{i} - \frac{2}{3}\bar{j} + \frac{4}{3}\bar{k}$ D. $-\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$

B. $-\frac{4}{3}\bar{i} + \frac{2}{3}\bar{j} - \frac{4}{3}\bar{k}$ E. $-\frac{4}{3}\bar{i} + \frac{1}{3}\bar{j} - \frac{4}{3}\bar{k}$

C. $-\frac{4}{3}\bar{i}-\frac{2}{3}\bar{j}+\frac{4}{3}\bar{k}$

Solusi:

$$\overline{AC}=\begin{pmatrix}1-3\\2-1\\5-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} \text{ dan } \overline{AB}=\begin{pmatrix}4-3\\3-1\\0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

Rumus: $\bar{z}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\left|\bar{b}\right|^2}\bar{b}$

$$\bar{z}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AB}}{\left|\overline{AB}\right|^2}\overline{AB}=\frac{\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}}{1^2+2^2+(-2)^2}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=\frac{-2+2-6}{9}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Jadi, proyeksi vektor dari vektor $\overline{AC}$ pada vekto $\overline{AB}$ adalah $-\frac{4}{3}\bar{i}+\frac{2}{3}\bar{j}-\frac{4}{3}\bar{k}$. $\rightarrow$ [B]

17. Bayangan ΔABC, dengan $A(3,-1)$, $B(-4,2)$, dan $C(5,1)$ oleh rotasi dengan pusat $O(0,0)$ sebesar $90°$ searah dengan arah jarum jam dilanjutkan dengan refleksi terhadap garis $x+y=0$ adalah ….

A. $A'(-3,1)$, $B(-4,-2)$, dan $C(5,-1)$

B. $A'(3,1)$, $B(4,-2)$, dan $C(5,-1)$

C. $A'(3,1)$, $B(-4,-2)$, dan $C(5,-1)$

D. $A'(-3,1)$, $B(4,-2)$, dan $C(5,-1)$

E. $A'(-3,1)$, $B(4,-2)$, dan $C(-5,-1)$

Solusi:

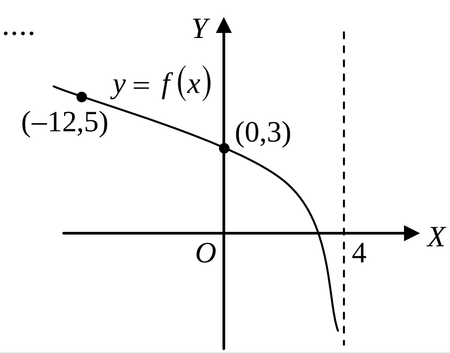
Ambillah bayangan ΔABC adalah $\Delta A'B'C'$.

Alternatif 1:

$$\begin{pmatrix}x_A' & x_B' & x_C'\\ y_A' & y_B' & y_C'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\-1 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\-1 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\1 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

Jadi, bayangannya adalah $\Delta A'B'C'$, dengan $A'(3,1)$, $B(-4,-2)$, dan $C(5,-1)$. $\rightarrow$ [C]

18. Diberikan fungsi logaritma $f(x)={}^2\log(a-x)+b$ yang ditunjukkan pada gambar berikut ini. Jika $f^{-1}(x)$ adalah invers dari fungsi logaritma f, maka $f^{-1}(x)=$….



A. $4-2^{x-1}$

B. $4+2^{x-1}$

C. $4-2^{x+1}$

D. $1-2^{x-4}$

E. $1-2^{x+1}$

Solusi:

$(0,3) \to f(x) = {}^2\log(a-x)+b$

$3 = {}^2\log(a-0)+b$

$3 = {}^2\log a + b$ …. (1)

$(-12,5) \to f(x) = {}^2\log(a-x)+b$

$5 = {}^2\log(a+12)+b$ …. (2)

Selisih persamaan (2) dan (1) menghasilkan:

$2 = {}^2\log(a+12) - \log a$

${}^2\log\frac{a+12}{a} = 2$

$\frac{a+12}{a} = 4$

$4a = a+12$

$3a = 12$

$a = 4$

$a = 4 \to 3 = {}^2\log a + b$

$3 = {}^2\log 4 + b$

$3 = 2 + b$

$b = 1$

Persamaan fungsi logaritma adalah $f(x) = {}^2\log(4-x)+1$

$f(x) = {}^2\log(4-x)+1$

$x = {}^2\log(4-y)+1$

${}^2\log(4-y) = x-1$

$2^{x-1} = 4-y$

$y = 4-2^{x-1}$

Jadi, fungsi inversnya adalah $f^{-1}(x) = 4-2^{x-1} \to$ [A]

19. Dari sebuah deret aritmetika jumlah 5 suku yang pertama adalah 125 kurang dari jumlah dari suku-suku yang ke-6, ke-7, ke-8, ke-9, dan ke-10. Jika 2 kali suku yang kedua dikalikan dengan sepertiga suku yang keempat, maka hasilnya adalah 96. Suku yang pertama positif. Jumlah 20 suku yang pertama dari deret tersebut adalah ….

A. 1.210 D. 1.010

B. 1.110 E. 1.000

C. 1.100

Solusi:

$u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=u_6+u_7+u_8+u_9+u_{10}-125$

$5a+10b=5a+35b-125$

$25b=125$

$b=5$

$2u_2\times\frac{1}{3}u_4=96$

$2(a+b)\times\frac{1}{3}(a+3b)=96$

$a^2+4ab+3b^2=144$

$a^2+4a(5)+3(5)^2=144$

$a^2+20a-69=0$

$(a+23)(a-3)=0$

$a=-23$ (ditolak) atau $a=3$ (diterima)

$S_n=\frac{n}{2}\left[2a+(n-1)b\right]$

$S_{20}=\frac{20}{2}\left[2\times3+(20-1)5\right]=1.010$

Jadi, jumlah 20 suku yang pertama dari deret tersebut adalah 1.010. $\rightarrow$ [D]

20. Ada sebuah deret aritmetika naik yang mempunyai banyak suku 10 buah. Suku pertama, suku ke-3, dan suku ke-7 merupakan deret geometri. Suku ke-5 deret aritmetika tersebut adalah 18. Jumlah 10 suku deret geometri adalah ….

A. 1.008 D. 1.836

B. 1.480 E. 6.138

C. 1.224

Solusi:

Deret aritmetika : $a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots + (a + 9b)$

$u_5=18$

$a+4b=18$

Deret geometri: $u_1+u_3+u_7$ atau $a+(a+2b)+(a+6b)$

$\frac{a+2b}{a}=\frac{a+6b}{a+2b}$

$a^2 + 4ab + 4b^2 = a^2 + 6ab$

$2ab - 4b^2 = 0$

$2b(a - 2b) = 0$

$b = 0$ (ditolak) atau $a = 2b$ (diterima)

$a = 2b \rightarrow a + 4b = 18$

$2b + 4b = 18$

$b = 3$

$a = 2b = 2 \cdot 3 = 6$

Deret geometri adalah 6 + 12 + 24 + …, dengan a = 6, $r = \frac{12}{6} = 2$, dan $n = 10$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_{10} = \frac{6(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 6.138$$

Jadi, jumlah 10 suku deret geometri adalah 6.138. → [E]

21. Diberikan kubus *ABCD.EFGH*, dengan panjang rusuk 6 cm. Titik *P* dan *Q* berturut-turut terletak pada pertengan *AB* dan *BC*. Jarak titik *D* ke bidang irisan kubus dengan bidang *HPQ* adalah ….

A. $\frac{8}{17}\sqrt{17}$ cm

B. $\frac{18}{17}\sqrt{17}$ cm

C. $\sqrt{17}$ cm

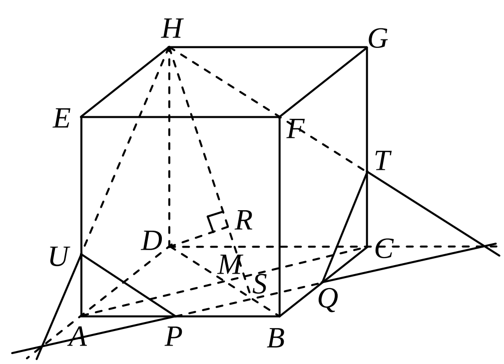
D. $7\sqrt{17}$ cm

E. $18\sqrt{17}$ cm

Solusi:

Perhatikan $\Delta BSQ \sim \Delta BMC$

$$\frac{BS}{BQ} = \frac{BM}{BC}$$



$$\frac{BS}{\frac{1}{2}BC} = \frac{\frac{1}{2}BD}{BC}$$

$$BS = \frac{1}{4}BD$$

$$BS = \frac{1}{4}\sqrt{6^2 + 6^2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$DS = BD - BS = 6\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{9}{2}\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$HS=\sqrt{DH^2+DS^2}=\sqrt{6^2+\left(\frac{9}{2}\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{36+\frac{81}{2}}=3\sqrt{4+\frac{9}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{34}\text{ cm}$$

$$\text{Luas }\Delta HDS=\frac{1}{2}\times HD\times DS=\frac{1}{2}\times HS\times DR$$

$$DR=\frac{HD\times DS}{HS}=\frac{6\times\frac{9}{2}\sqrt{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{34}}=\frac{18}{\sqrt{17}}=\frac{18}{17}\sqrt{17}\text{ cm}$$

Jadi, jarak titik D ke bidang irisan kubus dengan bidang HPQ adalah $\frac{18}{17}\sqrt{17}$ cm.

22. Diberikan Limas segitiga $D.ABC$, dengan AB = 15 cm, BC = 14 cm, AC = 13 cm, $DA\perp$ bidang ABC, dan DA = 6 cm. Jika sudut antara bidang DBC dan bidang ABC adalah α, maka $\cos\alpha=....$

A. 1 D. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ E. $\frac{2}{5}\sqrt{5}$

C. $\frac{1}{5}\sqrt{5}$

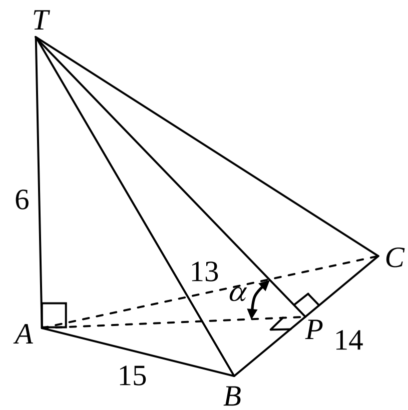
Solusi:

Menurut Heron:

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}(14+13+15)=21\text{ cm}$$

$$\text{Luas }\Delta ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{21(21-14)(21-13)(21-15)}=\sqrt{7\times3(7)(2^3)(2\times3)}=\sqrt{7^2\times3^2\times2^4}$$

$$=7\times3\times2^2=84\text{ cm}^2$$



$$\frac{1}{2}AP\times BC=84$$

$$\frac{1}{2}AP\times14=84$$

$$AP=12\text{ cm}$$

$$DP=\sqrt{AD^2+AP^2}=\sqrt{6^2+12^2}=6\sqrt{5}\text{ cm}$$

Jadi, nilai $\cos\alpha=\frac{AP}{DP}=\frac{12}{6\sqrt{5}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$. → [E]

23. Jika luas segi-12 beraturan yang mempunyai panjang sisi 6 cm dinyatakan dalam bentuk $\left(a+b\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$, maka nilai dari $a:b=....$

A. $2:1$ D. $1:2$

B. $3:1$ E. $1:4$

C. $2:3$

Solusi:

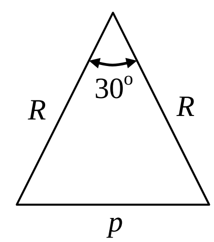
Menurut aturan Kosinus:

$p^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cos 30^\circ$

$6^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cos 30^\circ$

$36 = 2R^2 - R^2\sqrt{3}$

$R^2 = \dfrac{36}{2-\sqrt{3}}$



Luas segi-n berturan $= n \times \dfrac{1}{2} R^2 \sin \dfrac{360^\circ}{n}$

Luas segi-12 berturan $= 12 \times \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{36}{2-\sqrt{3}}\right)\sin\dfrac{360^\circ}{12} = 6\left(\dfrac{36}{2-\sqrt{3}} \times \dfrac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)\sin 30^\circ = 6 \times 36\left(2+\sqrt{3}\right) \times \dfrac{1}{2}$

$= \left(216 + 108\sqrt{3}\right)$ cm^2

$a = 216$ dan $b = 108$

Jadi, nilai dari $a : b = 216 : 108 = 2 : 1$

24. Diberikan prisma segi empat tegak $ABCD.\ EFGH$, dengan $\sin \angle BEA : \sin \angle ABE = 8:15$. Jika alas $ABCD$ adalah jajar genjang dengan diagonal-diagonalnya membentuk sudut 60°, AB = 16 cm, dan AD = 12 cm, maka volume prisma tersebut adalah ….

A. $6\sqrt{3}$ cm^2 D. $16\sqrt{3}$ cm^2

B. $8\sqrt{3}$ cm^2 E. $20\sqrt{3}$ cm^2

C. $14\sqrt{3}$ cm^2

Solusi:

Menurut aturan Sinus:

$\sin \angle BEA : \sin \angle ABE = 8:15$

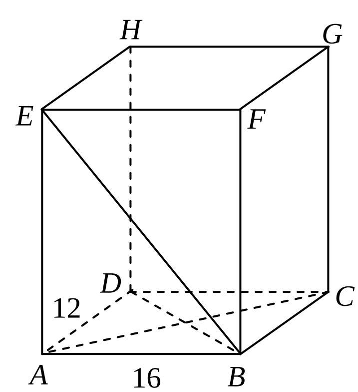
$\dfrac{AE}{\sin \angle ABE} = \dfrac{AB}{\sin \angle BEA}$

$\dfrac{\sin \angle BEA}{\sin \angle ABE} = \dfrac{AB}{AE}$

$\dfrac{8}{15} = \dfrac{16}{AE}$

$AE = 30$ cm

Ambillah diagonal $AC = 2a$ dan $BD = 2b$.



Menurut aturan Kosinus:

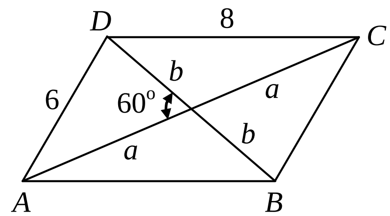
$12^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60°$

$144 = a^2 + b^2 - ab$ …. (1)

$16^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120°$

$256 = a^2 + b^2 + ab$ …. (2)

(2) − (1) menghasilkan: $ab = 112$



Luas jajar genjang $= 2ab\sin 60° = 2 \times 112 \times \frac{1}{2}\sqrt{3} = 112\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

Jadi, volume prisma segiempat tegak *ABCD.EFGH* = Luas alas *ABCD* × panjang rusuk tegak *AE* $= 112\sqrt{3} \times 30 = 3.360\sqrt{3}\ \text{cm}^3$. → [A]

25. Jika $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$ dan $0 \le x \le \pi$, maka $\tan x = ...$

A. $\frac{5}{3}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{5}{12}$

E. $\frac{12}{5}$

Solusi:

$\cos x = \frac{1}{5} - \sin x$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\sin^2 x = 1 - \left(\frac{1}{5} - \sin x\right)^2$

$\sin^2 x = 1 - \frac{1}{25} + \frac{2}{5}\sin x - \sin^2 x$

$2\sin^2 x - \frac{2}{5}\sin x - \frac{24}{25} = 0$

$25\sin^2 x - 5\sin x - 12 = 0$

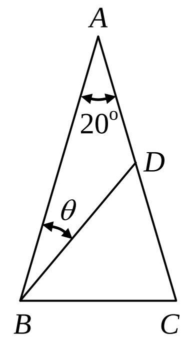
$(5\sin x + 3)(5\sin x - 4) = 0$

$\sin x = -\frac{3}{5}$ (ditolak) atau $\sin x = \frac{4}{5}$ (diterima)

$\cos x = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$

$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{4}{3} \rightarrow [B]$

26. Pada gambar ΔABC sama kaki dengan sudut puncak 20°. Titik D terletak pada AC, sehingga $AD = BC$ dan $\angle ABD = \theta$. Nilai $\sin\theta$ adalah ….



A. 1

B. $\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$

C. $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

D. $\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

E. $\dfrac{1}{2}$

Solusi:

$\angle B = \angle C = \dfrac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$

Menurut aturan Sinus:

Perhatikan ΔABC:

$\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AB}{\sin C}$

$BC = \dfrac{AB}{\sin C} \times \sin A$

$BC = \dfrac{AB}{\sin 80^\circ} \times \sin 20^\circ = \dfrac{AB}{\cos 10^\circ} \times 2\sin 10^\circ \cos 10^\circ = 2AB\sin 10^\circ$

$AD = BC = 2AB\sin 10^\circ$

Perhatikan ΔABD:

$\dfrac{AD}{\sin\angle ABD} = \dfrac{AB}{\sin\angle BDA}$

$\dfrac{2AB\sin 10^\circ}{\sin\theta} = \dfrac{AB}{\sin\left[180^\circ - \left(20^\circ + \theta\right)\right]}$

$\dfrac{2\sin 10^\circ}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\sin\left(20^\circ + \theta\right)}$

$\dfrac{\sin\left(20^\circ + \theta\right)}{\sin\theta} = \dfrac{1}{2\sin 10^\circ}$

$\dfrac{\sin\left(20^\circ + \theta\right)}{\sin\theta} = \dfrac{\sin 30^\circ}{\sin 10^\circ}$

$\sin 10° \sin(20° + \theta) = \sin 30° \sin \theta$

$\cos(10° + \theta) - \cos(\theta + 30°) = \cos(\theta - 30°) - \cos(\theta + 30°)$

$\cos(10° + \theta) = \cos(\theta - 30°)$

Karena $0 < \theta < 80°$, maka

$10° + \theta = -(\theta - 30°)$

$\theta = 10°$

Jadi, $\sin 3\theta = \sin 3 \times 10° = \sin 30° = \frac{1}{2}$. $\rightarrow$ [E]

27. Rasio sisi-sisi suatu segitiga yang jari-jari lingkaran luarnya $2\sqrt{3}$ cm adalah 3 : 5 : 7. Luas segitiga itu adalah ….

A. $\frac{135}{49}\sqrt{3}$ cm^2

B. $\frac{315}{49}\sqrt{3}$ cm^2

C. $\frac{135}{149}\sqrt{3}$ cm^2

D. $\frac{135}{49}$ cm^2

E. $\frac{315}{49}$ cm^2

Solusi:

Ambillah segitiga *ABC*, dengan $a = 3k$, $b = 5k$, dan $c = 7k$.

Menurut aturan Kosinus:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(3k)^2 + (5k)^2 - (7k)^2}{2(3k)(5k)} = -\frac{1}{2}$$

$C = 120°$

Menurut aturan Sinus:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$\frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$\frac{7k}{\sin 120°} = 2(2\sqrt{3})$$

$$k = \frac{6}{7}$$

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}(3k)(5k)\sin 120° = \frac{15}{2}\left(\frac{6}{7}\right)^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{135}{49}\sqrt{3}\text{ cm}^2 \rightarrow [A]$$

28. Nilai $\lim_{x \to 8} \frac{\sqrt{7 + \sqrt[3]{x}} - 3}{x - 8} = ...$

A. $\frac{1}{72}$ D. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{64}$ E. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{36}$

Solusi:

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}-3}{x-8}=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}-3}{x-8}\times\frac{\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}+3}{\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}+3}=\lim_{x\to 8}\frac{7+\sqrt[3]{x}-9}{(x-8)\left(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{(x-8)\left(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}+3\right)}=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)\left(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)\left(\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}+3\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{8^2}+2\sqrt[3]{8}+4\right)\left(\sqrt{7+\sqrt[3]{8}}+3\right)}$$

$$=\frac{1}{(4+4+4)\left(\sqrt{7+2}+3\right)}=\frac{1}{(12)(3+3)}=\frac{1}{72}\to[\text{A}]$$

29. Jika $\lim_{x\to 0}\frac{x-ax\cos x+b-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$, maka nilai $a^3-b^3=....$

A. 0 D. 3

B. 1 E. 4

C. 2

Solusi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-ax\cos x+b-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$x=0\to$ $x-ax\cos x+b-\cos x=0$

$0-a\cdot 0\cdot\cos 0+b-\cos 0=0]$

$0-0+b-1=0$

$b=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-ax\cos x+1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Menurut Teorema Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cos x+ax\sin x+\sin x}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cos 0+a\cdot 0\cdot\sin 0+\sin 0}{2\cdot 0}=\frac{1}{2}$$

$1 - a = 0$

$a = 1$

Jadi, nilai $a^3 - b^3 = 1^3 - 1^3 = 0$. $\to$ [A]

Pemeriksaan:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - x\cos x + 1 - \cos x}{x^2}$$

Menurut Teorema Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - x\cos x + 1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x + x\sin x + \sin x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x + \sin x + x\cos x + \cos x}{2}$$

$$= \frac{-\sin 0 + \sin 0 + 0 \cdot \cos 0 + \cos 0}{2} = \frac{1}{2} \text{ (OK)}$$

30. Garis pada singgung kurva $y = \sqrt{1 - 2x}$ pada titik $(-4, -12)$, memotong sumbu-sumbu koordinat di titik P dan Q. Jika jarak PQ dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}\sqrt{c}$, dengan a, b, c adalah bilangan asli dan c bilangan asli yang tidak dapat disederhanakan lagi, maka nilai $a + b + c = \ldots.$

A. 75 D. 33

B. 50 E. 30

C. 45

Solusi:

Jelaslah titik $(-4, -12)$ terletak pada kurva $y = \sqrt{1 - 2x}$, karena $-12 = -4\sqrt{1 - 2(-4)}$ adalah pernyataan yang bernilai benar.

$$y = \sqrt{1 - 2x} \to \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{2\sqrt{1 - 2x}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - 2x}}$$

$$m = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=-4} = \frac{-1}{\sqrt{1 - 2(-4)}} = \frac{1}{3}$$

Persamaan garis singgungnya adalah

$y - b = m(x - b)$

$y + 12 = \frac{1}{3}(x + 4)$

$3y + 36 = x + 4$

$x - 3y - 32 = 0$

$x = 0 \to x - 3y - 32 = 0$

$0 - 3y - 32 = 0$

$y = -\frac{32}{3}$

Koordinat titik $P\left(0, -\frac{32}{3}\right)$

$y = 0 \rightarrow x - 3y - 32 = 0$

$x - 3 \cdot 0 - 32 = 0$

$x = 32$

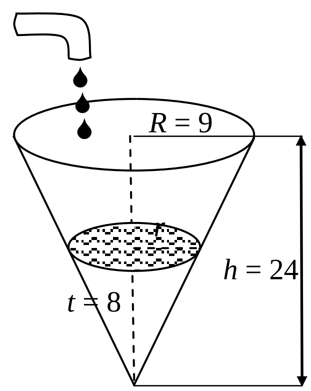
Koordinat titik $Q(32, 0)$

$PQ = \sqrt{(32-0)^2 + \left(0 + \frac{32}{3}\right)^2} = 32\sqrt{1 + \frac{1}{9}} = \frac{32}{3}\sqrt{10}$ sesuai dengan bentuk $\frac{a}{b}\sqrt{c}$

$a = 32$, $b = 3$, dan $c = 10$

Jadi, $a + b + c = 32 + 3 + 10 = 45$. $\rightarrow$ [C]

31. Air dituangkan ke dalam suatu tanki berbentuk kerucut terbalik dengan laju 12 dm^3/menit. Jika tinggi kerucut adalah 24 dm dan jari-jari permukaan atas 9 dm, maka laju kenaikan permukaan air pada saat kedalaman air dalam kerucut 8 dm adalah ….



A. $\frac{8}{\pi}$ dm/menit

B. $\frac{6}{\pi}$ dm/menit

C. $\frac{4}{\pi}$ dm/menit

D. $\frac{3}{\pi}$ dm/menit

E. $\frac{2}{\pi}$ dm/menit

Solusi:

Pertambahan volume $\frac{dV}{dt} = 12$ dm^3/menit

Tinggi air h = 8 dm dan jari-jari r

$\frac{t}{h} = \frac{r}{R}$

$\frac{8}{24} = \frac{r}{9}$

$r = 3$

Volume kerucut $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{dh}{dt}$

$12 = \frac{1}{3}\pi(3)^2 \frac{dh}{dt}$

$$\frac{dh}{dt}=\frac{4}{\pi}$$

Jadi, laju kenaikan permukaan air pada saat ke dalaman air dalam kerucut 8 dm adalah $\frac{4}{\pi}$ dm/menit $\to$ [C]

32. Jika $\int_2^a 6(1-x)^2\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 26(\cos x-\sin x)dx$, maka nilai 2^a-1 adalah ….

A. 3 D. 31

B. 7 E. 63

C. 15

Solusi:

$$\int_2^a 6(1-x)^2\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 26(\cos x-\sin x)dx$$

$$\int_2^a 6\left(1-2x+x^2\right)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 26(\cos x-\sin x)dx$$

$$\left[6x-6x^2+2x^3\right]_2^a=26\left[-\sin x-\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$6a-6a^2+2a^3-12+24-16=26\left(-\sin\pi-\cos\pi+\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right)$$

$$2a^3-6a^2+6a-4=26(2)$$

$$a^3-3a^2+3a-28=0$$

$$(a-4)\left(a^2+a+7\right)=0$$

$$\begin{array}{c|cccc}
4 & 1 & -3 & 3 & -28 \\
 & & 4 & 4 & 28 \\
\hline
 & 1 & 1 & 7 & \boxed{0}
\end{array}$$

$a=4$ (diterima) atau $a^2+a+7=0$ (ditolak, karena $D=1^2-4\cdot1\cdot7<0$, akar-akarnya tidak real)

Jadi, nilai $2^a-1=2^4-1=15\to$ [C]

33. Hasil dari $\int\frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}dx=....$

A. $\frac{1}{3}\left(4+x^2\right)^{\frac{3}{2}}-4\left(4+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+C$

B. $\frac{1}{3}\left(4+x^2\right)^{\frac{3}{2}}+4\left(4+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+C$

C. $\frac{1}{3}\left(4+x^2\right)^{\frac{3}{2}}-\left(4+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+C$

D. $x^2\left(4+x^2\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\left(4+x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$

E. $x^2\left(4+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}\left(4+x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$

Solusi:

Alternatif 1: Metode Substitusi:

Ambillah $u=\sqrt{4+x^2} \Leftrightarrow du=\frac{2x}{2\sqrt{4+x^2}}dx \Leftrightarrow du=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}dx$

$$u=\sqrt{4+x^2} \Leftrightarrow u^2=4+x^2 \Leftrightarrow x^2=u^2-4$$

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}dx.=\int x^2\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}dx=\int\left(u^2-4\right)du=\frac{1}{3}u^3-4u+C=\frac{1}{3}\left(4+x^2\right)^{\frac{3}{2}}-4\left(4+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+C\to \text{[A]}$$

Alternatif 2: Metode Integral Parsial:

Ambillah $u=x^2 \Leftrightarrow du=2xdx$

$$dv=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}dx \Leftrightarrow v=\int\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}dx=\int\frac{1}{2\sqrt{4+x^2}}d\left(4+x^2\right)=\sqrt{4+x^2}$$

$$\int udv=uv-\int vdu$$

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}dx.=x^2\sqrt{4+x^2}-\int\sqrt{4+x^2}\cdot 2xdx=x^2\sqrt{4+x^2}-\int\sqrt{4+x^2}\,d\left(4+x^2\right)$$

$$=x^2\left(4+x^2\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}\left(4+x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C=\left(4+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\left[x^2-\frac{2}{3}\left(4+x^2\right)\right]+C$$

$$=\frac{\left(4+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{3}\left(3x^2-8-2x^2\right)+C=\frac{\left(4+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{3}\left(x^2-8\right)+C=\frac{\left(4+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{3}\left(4+x^2-12\right)+C$$

$$=\frac{1}{3}\left(4+4+x^2\right)^{\frac{3}{2}}-4\left(4+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+C\to \text{[A]}$$

34. Hasil dari $\int 4x^2\sin 2xdx=\ldots.$

A. $4x^2\cos 2x-4x\sin 2x+2\cos 2x+C$

B. $-2x^2\cos 2x+2x\sin 2x-\cos 2x+C$

C. $-x^2\cos 2x-x\sin 2x+2\cos 2x+C$

D. $x^2\cos 2x+x\sin 2x+\cos 2x+C$

E. $-2x^2\cos 2x+2x\sin 2x+\cos 2x+C$

Solusi:

Alternatif 1: Metode Integral Parsial:

Ambillah $u=4x^2 \Leftrightarrow du=8xdx$

$$dv=\sin 2xdx \Leftrightarrow v=-\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\int udv=uv-\int vdu$$

$$\int x^2\sin 2xdx=4x^2\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)-\int-\frac{1}{2}\cos 2x\cdot 8xdx=-2x^2\cos 2x+\int 4x\cos 2xdx$$

Ambillah $u = 4x \Leftrightarrow du = 4dx$

$$dv = \cos 2x dx \Leftrightarrow v = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\int x^2 \sin 3x dx = -2x^2 \cos 2x + \int x \cos 2x dx = -2x^2 \cos 2x + 4x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) - \int \frac{1}{2}\sin 2x \cdot 4dx$$

$$= -2x^2 \cos 2x + 2x \sin 2x + \cos 2x + C$$

Alternatif 2:

Diferensial	Integral	
$4x^2$	$\sin 2x$	
$8x$	$-\frac{1}{2}\cos 2x$	$+$
8	$-\frac{1}{4}\sin 2x$	$-$
0	$\frac{1}{8}\cos 2x$	$+$

$$\int x^2 \sin 2x dx = -2x^2 \cos 2x + 2x \sin 2x + \cos 2x + C$$

35. Perhatikan gambar berikut ini!

Rasio luas daerah A dan B adalah ….

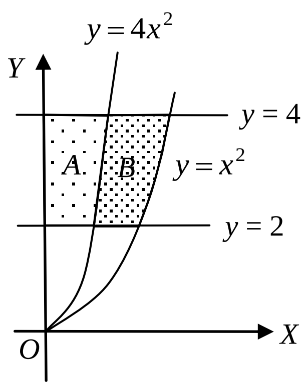
A. $3:2$

B. $2:1$

C. $28:21$

D. $14:13$

E. $18:17$



Solusi:

Luas daerah $A = \int_2^4 4x^2 dx = \left[\frac{4}{3}x^3\right]_2^4 = \frac{256}{3} - \frac{32}{3} = \frac{224}{3}$

Luas daerah A dan $B = \int_2^4 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^4 = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}$

Luas daerah B = Luas daerah A dan B – Luas daerah $A = \frac{224}{3} - \frac{56}{3} = \frac{168}{3}$

Jadi, rasio luas daerah A dan B adalah $\frac{224}{3} : \frac{168}{3} = 28:21 \to$ [C]

36. Jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, $y = 6 - x$, dan sumbu X diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360^o, maka volume benda putar yang terjadi adalah ….

A. $\frac{16\pi}{3}$ D. 16π

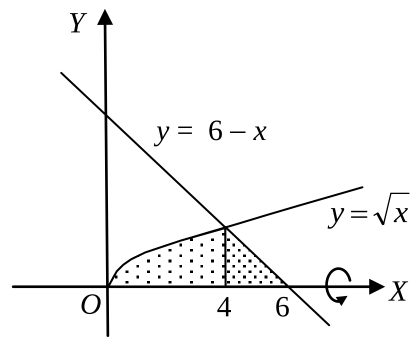
B. $\frac{32\pi}{3}$ E. 32π

C. 8π

Solusi:

Batas-batas integral:

Kurva $y = 6 - x$ dan $y = \sqrt{x}$



$\sqrt{x} = 6 - x$

$x = 36 - 12x + x^2$

$x^2 - 13x + 36 = 0$

$(x-4)(x-9) = 0$

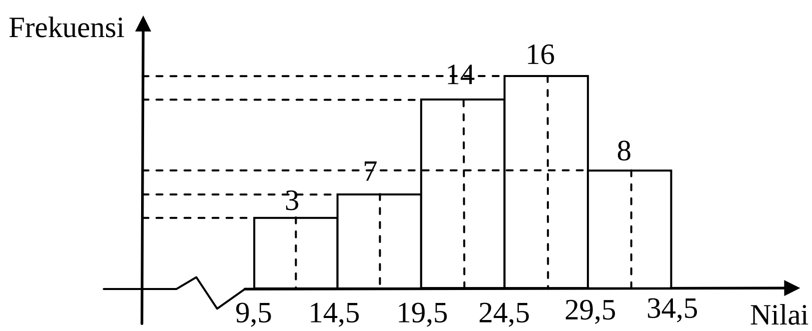
$x = 4$ atau $x = 9$

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx + \pi \int_4^6 (6-x)^2 dx = \pi \int_0^4 x dx + \pi \int_4^6 \left(36 - 12x + x^2\right) dx$$

$$= 8\pi + \pi\left(216 - 216 + \frac{216}{3} - 144 + 96 - \frac{64}{3}\right) = 8\pi + \pi\left(\frac{152}{3} - 48\right) = 8\pi + \frac{8\pi}{3} = \frac{32\pi}{3} \rightarrow [B]$$

37. Perhatikan histogram berikut ini.



Rasio median dan modus dari data tersebut adalah ….

A. $33:55$ D. $53:55$

B. $35:43$ E. $63:65$

C. $49:51$

Solusi:

Jumlah data $n = 3 + 7 + 14 + 16 + 8 = 48$.

Karena $\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}\times 48=24$, maka kelas interval median adalah 20 – 24.

$$Me=L_2+\left(\frac{\frac{1}{2}n-fk_2}{f_2}\right)p$$

dengan: Me = median

L_2 = tepi bawah kelas yang memuat median (kuartil tengah Q_2) = 19,5

p = panjang kelas atau interval kelas = 5

fk_2 = jumlah frekuensi sebelum kelas yang memuat median (kuartil tengah Q_2) = 3 + 7 = 10

f_2 = frekuensi kelas yang memuat median (kuartil tengah Q_2) = 14

$$Me=19{,}5+\left(\frac{24-10}{14}\right)5=24{,}5$$

Karena frekuensi tertinggi adalah 16, maka kelas interval modus adalah 25 – 29.

$$Mo=L+\left(\frac{d_1}{d_1+d_2}\right)p$$

dengan: Mo = modus

L = tepi bawah kelas modus (yang memiliki frekuensi tertinggi) = 24,5

p = panjang kelas atau interval kelas = 5

d_1 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sebelumnya = 16 – 14 = 2

d_2 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sesudahnya = 16 – 8 = 8

$$Mo=24{,}5+\left(\frac{2}{2+8}\right)5=25{,}5$$

$Me:Mo=24{,}5:25{,}5=245:255=49:51$.

Jadi, rasio median dan modus dari data tersebut adalah 49 : 51. $\rightarrow$ [C]

38. Bilangan yang terdiri dari tiga angka disusun dari angka-angka 2, 3, 5, 6, 7, 8, dan 9 . Banyak bilangan dengan angka-angka yang berlainan dan kurang dari 600 adalah ….

A. 180 D. 72

B. 120 E. 60

C. 90

Solusi:

Posisi angka pada bilangan tiga angka kurang dari 600.

2		

3		

5		

Bilangan yang terdiri dari tiga angka yang kurang dari 600, angka pertamanya 2, 3, dan 5. Dua angka yang dibelakangnya dipilih dengan menggunakan permutasi.

Jadi, bilangan tiga angka yang diminta = ${}_6P_2 + {}_6P_2 + {}_6P_2 = 3 \times {}_6P_2 = 3 \times \frac{6!}{(6-2)!} = 3 \times \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!} = 90 \rightarrow$ [C]

39. Jika dari 11 laki-laki dan 8 perempuan dipilih 9 laki-laki dan 6 perempuan, maka banyaknya cara pemilihan adalah ….

A. 83
D. 1.540
B. 1.440
E. 1.560
C. 1.500

Solusi:

Banyaknya cara pemilihan adalah ${}_{11}C_9 \times {}_8C_6 = \frac{11!}{9!2!} \times \frac{8!}{6!2!} = \frac{11 \times 10 \times 9!}{9! \times 2 \times 1} \times \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2 \times 1} = 55 \times 28 = 1.540 \rightarrow$ [D]

40. Jika sebuah dadu dilempar dua kali, maka peluang untuk memperoleh jumlah angka kurang dari 7 adalah ….

A. $\frac{1}{36}$
D. $\frac{5}{12}$
B. $\frac{1}{9}$
E. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{7}{12}$

Solusi:

Dadu	1	2	3	4	5	6
1	**(1,1)**	**(1,2)**	**(1,3)**	**(1,4)**	**(1,5)**	(1,6)
2	**(2,1)**	**(2,2)**	**(2,3)**	**(2,4)**	(2,5)	(2,6)
3	**(3,1)**	**(3,2)**	**(3,3)**	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	**(4,1)**	**(4,2)**	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	**(5,1)**	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Jumlah titik sampel adalah $n(S) = 36$

Angka kurang dari 7 adalah A = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (5,1)}, sehingga $n(A)$ = 15.

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \rightarrow$ [D]