SOLUSI
PART 5
Creative Problem Solving in School Matematics

1. Nilai dari $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2010}\right)\left(1+\frac{1}{2011}\right)$ adalah ….

   Solusi:

   $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2010}\right)\left(1+\frac{1}{2011}\right)$

   $=\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{4}\right)\ldots\left(\frac{2011}{2010}\right)\left(\frac{2012}{2011}\right)$

   $=\frac{2012}{2}$

   $=1006$

2. Nilai dari $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+199^2-200^2$ adalah ….

   Solusi:

   Alternatif 1:

   $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+199^2-200^2$

   $=\left(1^2-2^2\right)+\left(3^2-4^2\right)+\left(5^2-6^2\right)+\ldots+\left(199^2-200^2\right)$

   $=(1-2)(1+2)+(3-4)(3+4)+(5-6)(5+6)+\ldots+(199-200)(199+200)$

   $=-3-7-11-\ldots-399$

   $=\frac{100}{2}(-3-399)$

   $=-20100$

   Alternatif 2:

   $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+199^2-200^2$

   $=1^2+\left(3^2-2^2\right)+\left(5^2-4^2\right)+\ldots+\left(199^2-198^2\right)-200^2$

   $=1+(3-2)(3+2)+(5-4)(5+4)+\ldots+(199-198)(199+198)-200^2$

   $=1+5+9+\ldots+397-200^2$

   $=\frac{100}{2}(1+397)-40000$

   $=19900-40000$

   $=-20100$

3. Diberikan segitiga siku-siku dengan panjang sisi-sisinya merupakan bilangan bulat positif yang membentuk barisan aritmetika Jika luas segitiga adalah 96 cm^2, maka kelilingnya adalah ….

   Solusi:

   Ambillah sisi-sisi segitiga tersebut adalah $a-b, a, a+b$.

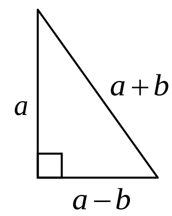
$(a+b)^2 = a^2 + (a-b)^2$

$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - 4ab = 0$

$a(a-4b) = 0$

$a = 0$ (ditolak) atau $a = 4b$ (diterima)



Sisi-sisi segitiga tersebut adalah $3b, 4b, 5b$

Kesimpulan:

Jika segitiga siku-siku dengan panjang sisi-sisinya merupakan bilangan bulat positif yang membentuk barisan aritmetika, maka sisi-sisinya berbanding sebagai 3 : 4 : 5.

Luas = 96

$\frac{1}{2}(a-b)b = 96$

$\frac{1}{2}(3b)b = 96$

$b^2 = 96 \times \frac{2}{3} = 64$

$b = 8$

$b = 8 \to a = 4b = 4 \times 8 = 32$ cm

Jadi, keliling segitiga adalah $a - b + a + a + b = 3a = 3 \times 32 = 96$ cm.

4. Sisi-sisi suatu segitiga mempunyai panjang 3 cm, 7 cm, dan 8 cm. Buktikan bahwa sudut-sudutnya merupakan barisan aritmetika.

Bukti:

Ambillah sudut-sudut segitiga yang membentuk barisan aritmetika adalah $\alpha - \beta, \alpha, \alpha + \beta$.

$\alpha - \beta + \alpha + \alpha + \beta = 180^\circ$

$3\alpha = 180^\circ$

$\alpha = 60^\circ$

$\cos\alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos\alpha = \frac{3^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 8} = \frac{1}{2}$ (terbukti)

5. Jumlah semua akar real dari persamaan $(2^x - 4)^3 + (4^x - 2)^3 = (4^x + 2^x - 6)^3$ adalah ….

Solusi:

Ambillah $a = 2^x - 4$ dan $b = 4^x - 2$.

$(2^x - 4)^3 + (4^x - 2)^3 = (4^x + 2^x - 6)^3$

$(2^x - 4)^3 + (4^x - 2)^3 = (4^x - 2 + 2^x - 4)^3$

$a^3 + b^3 = (a+b)^3$

$a^3 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$3a^2b + 3ab^2 = 0$

$3ab(a+b) = 0$

$a=0$ atau $b=0$ atau $a+b=0$

$2^x-4=0$ atau $4^x-2=0$ atau $4^x+2^x-6=0$

$2^x=4$ atau $4^x=2$ atau $2^{2x}+2^x-6=0$

$x=2$ atau $x=\frac{1}{2}$ atau $\left(2^x-2\right)\left(2^x+3\right)=0$

$x=2$ atau $x=\frac{1}{2}$ atau $2^x-2=0$ atau $2^x+3=0$ (ditolak)

$x=2$ atau $x=\frac{1}{2}$ atau $x=1$ atau $2^x+3=0$ (ditolak)

Jadi, jumlah semua akar realnya adalah $2+\frac{1}{2}+1=3\frac{1}{2}$.

6. Penyelesaian dari $8\cdot 9^x+3\cdot 6^x-81\cdot 4^x=0$ adalah ….

   Solusi:

   $8\cdot 9^x+3\cdot 6^x-81\cdot 4^x=0$

   $8\cdot 3^{2x}+3\cdot 2^x\cdot 3^x-81\cdot 2^{2x}=0$

   $\left(8\cdot 3^{2x}+27\cdot 2^x\right)\left(3^x-3\cdot 2^x\right)=0$

   $8\cdot 3^{2x}+27\cdot 2^x=0$ (ditolak) atau $3^x-3\cdot 2^x=0$ (diterima)

   $3^x=3\cdot 2^x$

   $x\log 3=\log 3+x\log 2$

   $x\left(\log 3-\log 2\right)=\log 3$

   $x=\frac{\log 3}{\log 3-\log 2}$

7. Nilai x yang memenuhi persamaan $\frac{x}{2^{-3x}}-16x^3=16x-x^3\cdot 8^x$ adalah ….

   Solusi:

   $\frac{x}{2^{-3x}}-16x^3=16x-x^3\cdot 8^x$

   $x\cdot 8^x-16x^3-16x+x^3\cdot 8^x=0$

   $x\cdot 8^x\left(1+x^2\right)-16x\left(x^2+1\right)=0$

   $\left(x\cdot 8^x-16x\right)\left(1+x^2\right)=0$

   $x\left(8^x-16\right)\left(1+x^2\right)=0$

   $x=0$ (diterima) atau $8^x=16$ atau $1+x^2=0$

   $x=0$ atau $2^{3x}=2^4$

   $x=0$ atau $x=\frac{4}{3}$

8. Persamaan ${}^{2}\log^2 x-(k+1)^2\log x+2=0$ dan ${}^{2}\log^2 x+(a+3)^2\log x-6=0$ mempunyai sebuah akar persekutuan (akar berserikat) . Banyaknya semua akar persaman tersebut adalah ….

   Solusi:

$$\begin{array}{l} {}^2\log^2 x - (k+1)\,{}^2\log x + 2 = 0 \\ \underline{{}^2\log^2 x + (k+3)\,{}^2\log x - 6 = 0} \quad - \\ \qquad (-2k-4)\,{}^2\log x + 8 = 0 \end{array}$$

$${}^2\log x = \frac{-8}{-2k-4} = \frac{4}{k+2}$$

$${}^2\log x = \frac{4}{k+2} \to \left(\frac{4}{k+2}\right)^2 - (k+1)\left(\frac{4}{k+2}\right) + 2 = 0$$

$$4^2 - 4(k+1)(k+2) + 2(k+2)^2 = 0$$

$$8 - 2k^2 - 6k - 4 + k^2 + 4k + 4 = 0$$

$$k^2 + 2k - 8 = 0$$

$$(k-2)(k+4) = 0$$

$$k = 2 \text{ atau } k = -4$$

$k = 2 \to {}^2\log^2 x - (k+1)\,{}^2\log x + 2 = 0$

${}^2\log^2 x - 3\,{}^2\log x + 2 = 0$ (karena $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 > 0$, berarti ada 2 akar)

$\left({}^2\log x - 1\right)\left({}^2\log x - 2\right) = 0$

${}^2\log x = 1$ atau ${}^2\log x = 2$

$x = 2$ atau $x = 4$

$k = 2 \to {}^2\log^2 x + (k+3)\,{}^2\log x - 6 = 0$

${}^2\log^2 x + 5\,{}^2\log x - 6 = 0$ (karena $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) > 0$, berarti ada 2 akar)

$\left({}^2\log x - 1\right)\left({}^2\log x + 6\right) = 0$

${}^2\log x = 1$ atau ${}^2\log x = -6$

$x = 2$ atau $x = \dfrac{1}{64}$

$k = -4 \to {}^2\log^2 x - (k+1)\,{}^2\log x + 2 = 0$

${}^2\log^2 x + 3\,{}^2\log x + 2 = 0$ (karena $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 > 0$, berarti ada 2 akar)

$\left({}^2\log x + 1\right)\left({}^2\log x + 2\right) = 0$

${}^2\log x = -1$ atau ${}^2\log x = -2$

$x = \dfrac{1}{2}$ atau $x = \dfrac{1}{4}$

$k = -4 \to {}^2\log^2 x + (k+3)\,{}^2\log x - 6 = 0$

${}^2\log^2 x - {}^2\log x - 6 = 0$ (karena $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) > 0$, berarti ada 2 akar)

$\left({}^2\log x - 3\right)\left({}^2\log x + 2\right) = 0$

${}^2\log x = 3$ atau ${}^2\log x = -2$

$x = 8$ atau $x = \dfrac{1}{4}$

Jadi, banyak semua akarnya adalah 8.

9. Jika akar-akar persamaan $\frac{1}{{}^{x+6}\log x}+{}^{x}\log(x-1)-\frac{1}{{}^{2}\log x}=2$ adalah x_1 dan x_2. Nilai $(x_1-x_2)^2$ adalah ….

Solusi:

$\frac{1}{{}^{x+6}\log x}+{}^{x}\log(x-1)-\frac{1}{{}^{2}\log x}=2$

${}^{x}\log(x+6)+{}^{x}\log(x-1)-{}^{x}\log 2=2$

${}^{x}\log\frac{(x+6)(x-1)}{2}={}^{x}\log x^2$

$\frac{(x+6)(x-1)}{2}=x^2$

$x^2+5x-6=2x^2$

$x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$

$x_1=2$ atau $x_2=2$

Jadi, nilai $(x_1-x_2)^2=(2-3)^2=1$.

10. Jika $x_0=\frac{k}{c}$, dengan $q\neq 0$ adalah solusi dari persamaan ${}^{0,4}\log x+{}^{2,5}\log(x+1)=2$, maka nilai $kc=$….

Solusi:

${}^{0,4}\log x+{}^{2,5}\log(x+1)=2$

$\frac{\log x}{\log 0{,}4}+\frac{\log(x+1)}{\log 2{,}5}=2$

$\frac{\log x}{\log\frac{4}{10}}+\frac{\log(x+1)}{\log\frac{10}{4}}=2$

$-\frac{\log x}{\log\frac{10}{4}}+\frac{\log(x+1)}{\log\frac{10}{4}}=2$

$\frac{\log(x+1)-\log x}{\log\frac{10}{4}}=2$

$\log\frac{x+1}{x}=2\log\frac{10}{4}$

$\log\frac{x}{x+1}=\log\frac{100}{16}$

$\frac{x+1}{x}=\frac{100}{16}$

$4x+4=25x$

$21x=4$

$x=\frac{4}{21}$

$x_0 = \frac{k}{c} = \frac{4}{21}$

$k = 4$ dan $c = 21$

Jadi, nilai $kc = 4 \times 21 = 84$.

11. Diberikan persamaan ${}^{8x^2}\log\frac{1}{64} - {}^{\frac{512}{x}}\log\frac{1}{8} = \frac{3}{5}$ yang akar-akarnya x_1 dan x_2. Nilai dari x_1x_2 adalah ….

Solusi:

$${}^{8x^2}\log\frac{1}{64} - {}^{\frac{512}{x}}\log\frac{1}{8} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{{}^{8}\log\frac{1}{64}}{{}^{8}\log 8x^2} - \frac{{}^{8}\log\frac{1}{8}}{{}^{8}\log\frac{512}{x}} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{-2}{{}^{8}\log 8 + {}^{8}\log x^2} - \frac{-1}{{}^{8}\log 512 - {}^{8}\log x} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{-2}{1 + 2\,{}^{8}\log x} + \frac{1}{3 - {}^{8}\log x} = \frac{3}{5}$$

Ambillah $a = {}^{8}\log x$, sehingga

$$\frac{-2}{1+2a} + \frac{1}{3-a} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{-6+2a+1+2a}{3+5a-2a^2} = \frac{3}{5}$$

$$-25 + 20a = 9 + 15a - 6a^2$$

$$6a^2 + 5a - 34 = 0$$

Alternatif 1:

$$a_1 + a_2 = -\frac{5}{6}$$

$${}^{8}\log x_1 + {}^{8}\log x_2 = -\frac{5}{6}$$

$${}^{8}\log x_1x_2 = -\frac{5}{6}$$

$$x_1x_2 = 8^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{8}\sqrt{2}$$

Alternatif 2:

$$6a^2 + 5a - 34 = 0$$

$$(6a+17)(a-2) = 0$$

$a = -\frac{17}{6}$ atau $a = 2$

${}^{8}\log x = -\frac{17}{6}$ atau ${}^{8}\log x = 2$

$x=8^{-\frac{17}{6}}$ atau $x=8^2$

$x=8^{-\frac{17}{6}}=\frac{1}{526\sqrt{2}}$ atau $x=8^2=64$

$x_1x_2=\frac{1}{526\sqrt{2}}\times 64=\frac{1}{8}\sqrt{2}$

Jadi, nilai $x_1x_2=\frac{1}{8}\sqrt{2}$

12. Pasangan (x,y) yang memenusi system persamaan $\begin{cases} x=16y \\ {}^{y}\log x - {}^{x}\log y = \frac{8}{3} \end{cases}$ adalah ….

Solusi:

${}^{y}\log x - {}^{x}\log y = \frac{8}{3}$

$\frac{\log x}{\log y}-\frac{\log y}{\log x}=\frac{8}{3}$

Ambillah $\frac{\log x}{\log y}=a$, maka

$a-\frac{1}{a}=\frac{8}{3}$

$3a^2-8a-3=0$

$(3a+1)(a-3)=0$

$a=-\frac{1}{3}$ atau $a=3$

$\frac{\log x}{\log y}=-\frac{1}{3}$ atau $\frac{\log x}{\log y}=3$

$3\log x=-\log y$ atau $\log x=3\log y$

$3\log 16y=-\log y$ atau $\log 16y=3\log y$

$(16y)^3=\frac{1}{y}$ atau $16y=y^3$

$16^3y^4=1$ atau $y(y^2-16)=0$

$2^{12}y^4-1=0$ atau $y(y-4)(y+4)=0$

$(2^6y^2-1)(2^6y^2+1)=0$ atau $y(y-4)(y+4)=0$

$y=\pm\frac{1}{8}$ atau $2^6y^2+1=0$ (ditolak) atau $y(y-4)(y+4)=0$

$y=\frac{1}{8}$ atau $y=-\frac{1}{8}$ (ditolak) atau $2^6y^2+1=0$ (ditolak) atau $y=0$ (ditolak) atau $y=4$ atau $y=-4$ (ditolak)

$y=\frac{1}{8}\rightarrow x=16y=16\times\frac{1}{8}=2$

$y = 4 \to x = 16y = 16 \times 4 = 64$

Jadi, pasangan (x, y) yang memenuhi adalah $\left(2, \frac{1}{8}\right)$ dan $(64,4)$.