



Senin, 18 Juli 2011

**Soal 1.** Diberikan sebarang himpunan  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  dari empat bilangan bulat positif berbeda, jumlah  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$  didefinisikan dengan  $s_A$ . Misalkan  $n_A$  menyatakan banyaknya pasangan  $(i, j)$  dengan  $1 \leq i < j \leq 4$  sehingga  $a_i + a_j$  membagi  $s_A$ . Cari semua himpunan  $A$  dari empat bilangan bulat positif berbeda yang merealisasikan nilai  $n_A$  terbesar yang mungkin.

**Soal 2.** Misalkan  $\mathcal{S}$  adalah suatu himpunan hingga dari paling sedikit dua titik pada bidang tertentu. Asumsikan bahwa tidak ada tiga titik dari  $\mathcal{S}$  yang segaris. Suatu *pusaran* adalah suatu proses yang dimulai dengan suatu garis  $\ell$  melalui suatu titik tunggal  $P \in \mathcal{S}$ . Garis itu berputar searah putaran jarum jam dengan *pusat*  $P$  sampai waktu pertama garis itu bertemu suatu titik lain anggota  $\mathcal{S}$ . Titik ini,  $Q$ , mengambil alih sebagai pusat baru, dan garis itu sekarang berputar searah putaran jarum jam dengan pusat  $Q$ , sampai garis itu bertemu suatu titik berikutnya dari  $\mathcal{S}$ . Proses ini berlanjut secara terus menerus.

Buktikan bahwa kita dapat memilih suatu titik  $P$  di  $\mathcal{S}$  dan suatu garis  $\ell$  melalui  $P$  sehingga pusaran yang dihasilkan menggunakan masing-masing titik dari  $\mathcal{S}$  sebagai pusat tak hingga banyak kali.

**Soal 3.** Misalkan  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  adalah suatu fungsi bernilai real terdefinisi pada himpunan bilangan real memenuhi

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

untuk semua bilangan real  $x$  dan  $y$ . Buktikan bahwa  $f(x) = 0$  untuk semua  $x \leq 0$ .



Selasa, 19 Juli 2011

**Soal 4.** Misalkan  $n > 0$  adalah suatu bilangan bulat. Kita diberi suatu neraca dan  $n$  pemberat dengan berat  $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$ . Kita letakkan masing-masing dari  $n$  pemberat pada neraca, satu demi satu, sedemikian cara sehingga baki kanan tidak pernah lebih berat dari baki kiri. Pada masing-masing langkah kita memilih satu dari pemberat yang belum diletakkan pada neraca, dan meletakkannya pada baki kiri atau kanan, sampai semua pemberat terletakkan. Tentukan banyak cara yang seperti ini dapat dilakukan.

**Soal 5.** Misalkan  $f$  adalah suatu fungsi dari himpunan bilangan bulat ke himpunan bilangan bulat positif. Anggap bahwa, untuk sebarang dua bilangan bulat  $m$  dan  $n$ , beda  $f(m) - f(n)$  terbagi oleh  $f(m - n)$ . Buktikan bahwa, untuk semua bilangan bulat  $m$  dan  $n$  dengan  $f(m) \leq f(n)$ , bilangan  $f(n)$  terbagi oleh  $f(m)$ .

**Soal 6.** Misalkan  $ABC$  adalah suatu segitiga lancip dengan lingkaran luar  $\Gamma$ . Misalkan  $\ell$  adalah suatu garis singgung  $\Gamma$ , dan misalkan  $\ell_a, \ell_b$  dan  $\ell_c$  berturut-turut adalah garis-garis yang diperoleh dari mencerminkan  $\ell$  pada garis-garis  $BC, CA$  dan  $AB$ . Buktikan bahwa lingkaran luar segitiga yang dibentuk oleh garis-garis  $\ell_a, \ell_b$  dan  $\ell_c$  bersinggungan dengan lingkaran  $\Gamma$ .