SOLUSI
SOAL-SOAL LATIHAN 1
UJIAN SEKOLAH DAN UJIAN NASIONAL
MATEMATIKA SMA IPA TAHUN 2014

Pilihlah jawaban yang paling tepat!

1. Diberikan premis-premis berikut!

   1. Jika *n* bilangan prima ganjil maka $n > 2$.

   2. Jika $n > 2$ maka $n^2 > 4$.

   Ingkaran dari kesimpulan tersebut adalah …..

   A. Jika *n* bilangan prima ganjil maka $n^2 > 4$.

   B. Jika *n* bilangan prima ganjil maka $n^2 \le 4$.

   C. *n* bilangan prima ganjil dan $n^2 > 4$.

   D. *n* bilangan prima ganjil dan $n^2 \le 4$.

   E. *n* bilangan prima ganjil atau $n^2 \le 4$.

   Solusi:

   $$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ \therefore p \to r \end{array}$$

   $\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$

   Jika *n* bilangan prima ganjil maka $n > 2$

   Jika $n > 2$ maka $n^2 > 4$

   $\therefore$ Jika *n* bilangan prima ganjil maka $n^2 > 4$

   Ingkaran dari pernyataan "Jika *n* bilangan prima ganjil maka $n^2 > 4$" adalah "*n* bilangan prima ganjil dan $n^2 \le 4$". $\to [D]$

2. Anggaplah bahwa $60^a = 3$ dan $60^b = 5$. Nilai dari $12^{\frac{1-a-b}{2-2b}} = ...$

   A. 8 D. 4

   B. 7 E. 2

   C. 6

   Solusi:

$12 = \frac{60}{5}$ dan $60^b = 5$

Sehingga

$12 = \frac{60}{60^b} = 60^{1-b}$

$12^{\frac{1-a-b}{2-2b}} = \left(60^{1-b}\right)^{\frac{1-a-b}{2-2b}} = 60^{\frac{1-a-b}{2}} = \sqrt{60^{1-a-b}} = \sqrt{\frac{60}{60^a 60^b}} = \sqrt{\frac{60}{3 \cdot 5}} = \sqrt{4} = 2$

3. Diberikan $a = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ dan $b = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$. Jika hasil dari $a^2 - b^2$ dinyatakan dalam bentuk $p + q\sqrt{3}$, maka nilai dari $p + q = \ldots.$

A. 152 D. 42

B. 112 E. 18

C. 54

Solusi:

$a = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 7 + 4\sqrt{3}$

$b = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 7 - 4\sqrt{3}$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = \left(7 + 4\sqrt{3} - 7 + 4\sqrt{3}\right)\left(7 + 4\sqrt{3} + 7 - 4\sqrt{3}\right) = \left(8\sqrt{3}\right)(14) = 112\sqrt{3} = p + q\sqrt{3}$

$p = 0$ dan $q = 112$

Jadi, nilai $p + q = 0 + 112 = 112. \to$ [B]

4. Diberikan akar-akar persamaan $\frac{1}{{}^{x+6}\log x} + {}^{x}\log(x-1) - \frac{1}{{}^{2}\log x} = 2$ adalah x_1 dan x_2. Jika ${}^{3}\log 5 = p$ dan ${}^{2}\log 27 = q$, maka nilai ${}^{18}\log 10x_1x_2$ adalah ….

A. $\frac{pq+q+6}{2p+3}$ D. $\frac{pq+q+6}{3q+2}$

B. $\frac{pq+q+3}{2q+6}$ E. $\frac{pq+q+6}{2q+3}$

C. $\frac{pq+q+6}{2q+1}$

Solusi:

$\frac{1}{{}^{x+6}\log x} + {}^{x}\log(x-1) - \frac{1}{{}^{2}\log x} = 2$

$^{x}\log(x+6)+{}^{x}\log(x-1)-{}^{x}\log 2=2$

$^{x}\log\frac{(x+6)(x-1)}{2}={}^{x}\log x^2$

$\frac{(x+6)(x-1)}{2}=x^2$

$x^2+5x-6=2x^2$

$x^2-5x+6=0$

$x_1x_2=6$

$^{2}\log 27=q \Leftrightarrow {}^{2}\log 3=\frac{q}{3} \Leftrightarrow {}^{3}\log 2=\frac{3}{q}$

$^{18}\log 10x_1x_2={}^{18}\log 60=\frac{^{3}\log 60}{^{3}\log 18}=\frac{^{3}\log 3+{}^{3}\log 4+{}^{3}\log 5}{^{3}\log 9+{}^{3}\log 2}=\frac{1+2\,{}^{3}\log 2+{}^{3}\log 5}{2+{}^{3}\log 2}=\frac{1+2\cdot\frac{3}{q}+p}{2+\frac{3}{q}}$

$=\frac{pq+q+6}{2q+3}\rightarrow$ [E]

5. Garis h melalui titik (2,0) menyinggung parabola $y=-x^2-6x$. Jika titik singgungnya terletak pada parabola di kuadran kedua, maka persamaan garis h adalah ….

A. $18x+y-36=0$

B. $18x-y-36=0$

C. $2x-y-4=0$

D. $2x+y-4=0$

E. $2x+y+4=0$

Solusi:

Ambillah persamaan garis singgungnya adalah $y=mx+n$

(2,0) $\rightarrow$ $y=mx+n$

$0=2m+n$

$n=-2m$

Persamaan garis singgungnya menjadi $y=mx-2m$

$y=mx-2m\rightarrow$ $y=-x^2-6x$

$mx-2m=-x^2-6x$

$x^2+(m+6)x-2m=0$

Syarat yang harus dipenuhi agar garis menyinggung parabola adalah $D=0$, sehingga

$(m+6)^2-4\times1\times(-2m)=0$

$m^2+12m+36+8m=0$

$m^2 + 20m + 36 = 0$

$(m+2)(m+18) = 0$

$m = -2$ atau $m = -18$

$m = -2 \to x^2 + (m+6)x - 2m = 0$

$x^2 + 4x + 4 = 0$

$(x+2)^2 = 0$

$x = -2$

$x = -2 \to y = -x^2 - 6x = -(-2)^2 - 6(-2) = 8$

Koordinat titik singgungnya $(-2,8)$ yang terletak di kuadran II.

$m = -18 \to x^2 + (m+6)x - 2m = 0$

$x^2 - 12x + 36 = 0$

$(x-6)^2 = 0$

$x = 6$

$x = 6 \to y = -x^2 - 6x = -(6)^2 - 6(6) = -72$

Koordinat titik singgungnya $(6,-72)$ yang terletak di kuadran IV.

Jadi, persamaan garis singgung yang diminta adalah

$m = -2 \to y = mx - 2m = -2x + 4$

$2x + y - 4 = 0 \to$ [D]

6. Diberikan persamaan kuadrat $2x^2 + x - k = 0$ mempunyai akar-akar p dan q. Jika $p^2 - q^2 = \frac{5}{4}$, maka nilai k adalah ….

A. 7 D. -1

B. 5 E. -2

C. 3

Solusi:

$2x^2 + x - k = 0$ akar-akarnya adalah p dan q.

$p + q = -\frac{1}{2}$ …. (1)

$pq = -\frac{k}{2}$ …. (2)

$p^2 - q^2 = \frac{5}{4}$

$$(p+q)(p-q)=\frac{5}{4}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)(p-q)=\frac{5}{4}$$

$$p-q=-\frac{5}{2} \ldots. (3)$$

Jumlah persamaan (1) dan (3) menghasilkan:

$$2p=-3$$

$$p=-\frac{3}{2}$$

$$p=-\frac{3}{2} \rightarrow p+q=-\frac{1}{2}$$

$$-\frac{3}{2}+q=-\frac{1}{2}$$

$$q=1$$

$$\left.\begin{array}{r} p=-\frac{3}{2} \\ q=1 \end{array}\right\} \rightarrow pq=-\frac{k}{2}$$

$$\left(-\frac{3}{2}\right)(1)=-\frac{k}{2}$$

$$k=3 \rightarrow \text{[C]}$$

7. Penyelesaian dari pertidaksamaan ${}^{\frac{1}{2}}\log(x-2)+{}^{\frac{1}{2}}\log x \geq -1$ adalah ….

A. $0 \leq x \leq 3$

B. $-1 \leq x \leq 3$

C. $2 < x \leq 3$

D. $x < 2 \text{ atau } x \geq 3$

E. $x < 0 \text{ atau } x \geq 3$

Solusi:

$${}^{\frac{1}{2}}\log(x-2)+{}^{\frac{1}{2}}\log x \geq -1$$

$${}^{\frac{1}{3}}\log(x^2-2x) \geq {}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$$(x^2-2x) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$$x^2-2x \leq 3$$

$$x^2-2x-3 \leq 0$$

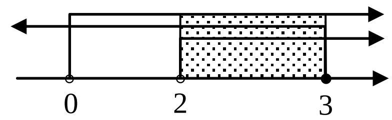
$(x+1)(x-3)\le 0$

$-1\le x\le 3$ …. (1)

$x-2>0$

$x>2$ …. (2)

$x>0$ …. (3)



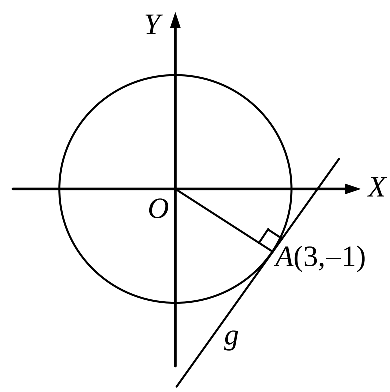
Dari (1) ∩ (2) ∩ (3) diperoleh $2<x\le 3\to$ [C]

8. Garis *g* adalah garis singgung pada lingkaran $x^2+y^2=10$ di titik $A(3,-1)$. Salah satu garis *h* menyinggung lingkaran itu dan tegak lurus pada garis *g* adalah ….

A. $x+3y-10=0$
B. $x-3y-10=0$
C. $x-3y+10=0$
D. $3x+y-10=0$
E. $3x+3y+10=0$

Solusi:

Gradien garis *OA* adalah $m_{OA}=\frac{-1-0}{3-0}=-\frac{1}{3}$.



Gradien garis *g* adalah m_g

$m_g\times m_{OA}=-1$

$m_g\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$

$m_g=3$

Gradien garis *h* adalah m_h

$m_h\times m_g=-1$

$m_h\times 3=-1$

$m_h=-\frac{1}{3}$

Persamaan garis singgungnya:

$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$

$y=-\frac{1}{3}x\pm\sqrt{10}\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+1}$

$y=-\frac{1}{3}x\pm\frac{10}{3}$

$x+3y-10=0$ dan $x+3y+10=0$

Jadi, salah satu garis *h* menyinggung lingkaran itu dan tegak lurus pada garis *g* adalah $x+3y-10=0\to[A]$

9. Diberikan fungsi f dan g yang didefinisikan sebagai $f(x)=\frac{x-5}{b}$, $b\neq 0$ dan $g(x)=\frac{ax}{x-2}$, $x\neq 2$, $a\neq 0$.

Jika $(f \circ g)(4)=f(8)$ dan $\left(g \circ f^{-1}\right)(1)=12$, maka nilai $a+b=\ldots$

A. 10 B. 9 C. 8 D. 6 E. 5

Solusi:

$f(x)=\frac{x-5}{b}$

$x=\frac{y-5}{b}$

$y=bx+5 \Leftrightarrow f^{-1}(x)=bx+5$

$(fog)(4)=f(8)$

$f(g(4))=\frac{3}{b}$

$f\left(\frac{4a}{4-2}\right)=\frac{3}{b}$

$f(2a)=\frac{3}{b}$

$\frac{2a-5}{b}=\frac{3}{b}$

$2a-5=3$

$a=4$

$\left(g \circ f^{-1}\right)(1)=12$

$g\left(f^{-1}(1)\right)=12$

$g(b+5)=12$

$\frac{a(b+5)}{b+5-2}=12$

$\frac{4(b+5)}{b+3}=12$

$b+5=3b+9$

$2b=-4$

$b=-2$

Jadi, nilai $a-b=4-(-2)=6 \rightarrow$ [D]

10. Jika $f(x+2)=\frac{x+3}{4-2x}$, $x\neq 2$ dan f^{-1} adalah invers dari fungsi f, maka $f^{-1}(-1)=\ldots$

A. 10

B. 9

C. 8

D. -6

E. -7

Solusi:

Ambillah $x+2=t \Leftrightarrow x=t-2$

$f(x+2)=\frac{x+3}{4-2x}$

$f(t)=\frac{t-2+3}{4-2(t-2)}=\frac{t+1}{8-2t}$

$f(x)=\frac{x+1}{8-2x}$, dengan $x\neq 4$

Alternatif 1:

$f(x)=\frac{x+1}{8-2x}$

$x=\frac{y+1}{8-2y}$

$8x-2xy=y+1$

$y(2x+1)=8x-1$

$y=\frac{8x-1}{2x+1}$

$f^{-1}(x)=\frac{8x-1}{2x+1}$, dengan $x\neq-\frac{1}{2}$

$f^{-1}(-1)=\frac{8(-1)-1}{2(-1)+1}=9\rightarrow$[B]

Alternatif 2:

$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$

$f(x)=\frac{x+1}{8-2x}\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-8x+1}{-2x-1}=\frac{8x-1}{2x+1},\ x\neq-\frac{1}{2}$

$f^{-1}(-1)=\frac{8(-1)-1}{2(-1)+1}=9\rightarrow$ [B]

11. Diberikan a dan b adalah bilangan bulat sedemikian sehingga x^2-x-1 merupakan faktor dari ax^3+bx^2+1. Nilai $a+b$ adalah ….

A. -3 D. 1

B. -2 E. 2

C. -1

Solusi:

Membagi ax^3+bx^2+1 dengan x^2-x-1 menghasilkan:

$ax^3+bx^2+1\equiv(x^2-x-1)(ax-1)\equiv ax^3-x^2-ax^2+x-ax+1\equiv ax^3+(-1-a)x^2+(1-a)x+1$

Sehingga

$1-a=0$

$a=1$

$b=-1-a=-1-1=-2$

Jadi, $a+b=1-2=-1\rightarrow$ [C]

12. Lima belas tahun yang lalu umur Mathman adalah 2 kali umur Martha; 15 tahun yang akan datang umurnya $\frac{4}{3}$ kali umur Martha. Jumlah umur mereka sekarang adalah ….

A. 80 tahun D. 65 tahun

B. 75 tahun E. 60 tahun

C. 70 tahun

Solusi:

Ambillah sekarang umur Mathman *x* tahun dan umur Martha *y* tahun.

$x-15=2(y-15)$

$x-2y=-15$ …. (1)

$x+15=\frac{4}{3}(y+15)$

$3x+45=4y+60$

$3x-4y=15$ …. (2)

Persamaan (2) – 2 × Persamaan (1) menghasilkan:

$x=45$

$x=45 \rightarrow x-2y=-15$

$45-2y=-15$

$y=30$

Jadi, jumlah umur mereka sekarang adalah (45 + 30) tahun = 75 tahun. → [B]

13. Sebuah perusahaan memproduksi 2 jenis pencukur. Sebuah pencukur tanpa kabel listrik membutuhkan waktu 4 jam untuk membuatnya dan dijual seharga \$40. Pencukur yang lainnya dengan kabel listrik membutuhkan waktu 2 jam untuk membuatnya dan dijual seharga \$30. Perusahaan itu hanya menpunyai waktu kerja 800 jam untuk digunakan memproduksi pencukur per harinya dan departemen pengiriman dapat membungkus 300 pencukur per hari. Banyak masing-masing jenis pencukur yang diproduksi oleh perusahaan itu per harinya agar diperoleh pendapatan maksimimum adalah ….

A. 300 pencukur dengan kabel listrik saja

B. 200 pencukur tanpa kabel listrik saja

C. 150 pencukur tanpa kabel listrik dan 150 pencukur dengan kabel listrik

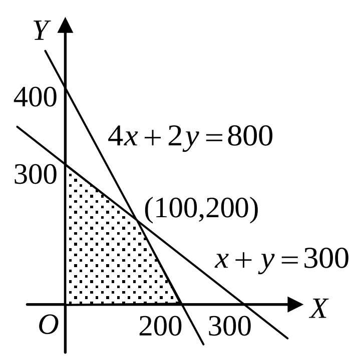
D. 100 pencukur tanpa kabel listrik dan 200 pencukur dengan kabel listrik

E. 200 pencukur tanpa kabel listrik dan 200 pencukur dengan kabel listrik

Solusi:

Ambillah banyak pencukur tanpa kabel listrik = x buah dan banyak pencukur dengan kabel listrik = y buah.

$$\begin{cases} 4x+2y\le 800 \\ x+y\le 300 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$



Fungsi objektif $f(x)=40x+30y$

$4x+2y=800$

$2x+y=400$ …. (1)

$x+y=300$ …. (2)

Selisih persamaan (1) dan (2) menghasilkan:

$x = 100$

$x = 100 \to \ x + y = 300$

$100 + y = 300$

$y = 200$

Koordinat titik potongnya adalah (100,200)

Titik	$f(x) = 40x + 30y$
(0,0)	$40 \times 0 + 30 \times 0 = 0$
(200,0)	$40 \times 200 + 30 \times 0 = 8.000$
(100,200)	$40 \times 100 + 30 \times 200 = 10.000$ (maksimum)
(0,300)	$40 \times 0 + 30 \times 300 = 9000$

Jadi, banyak masing-masing jenis pencukur yang diproduksi oleh perusahaan itu per harinya agar diperoleh pendapatan maksimimum adalah 100 buah pencukur tanpa kabel listrik dan 200 buah pencukur dengan kabel listrik. $\to$ [D]

14. Diberikan persamaan matriks $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, dengan matriks A berordo 2×2, A^t adalah transpos matriks A, dan I adalah matriks identitas berordo 2×2. Nilai determinan matriks $A^t I - A^2$ adalah ….

A. 16 D. 216

B. 184 E. 232

C. 200

Solusi:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{3(-1) - (-2)2}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 16 & -7 \end{pmatrix}$$

$$A^t I - A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 16 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 16 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -18 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det } \left(A^2 + A^t I\right) = \begin{vmatrix} -4 & 12 \\ -18 & 4 \end{vmatrix} = -4 \times 4 - 12(-18) = 200 \rightarrow [\text{C}]$$

15. Diberikan vektor-vektor $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$ dan $\bar{b} = 4\bar{i} + 10\bar{j} - 8\bar{k}$. Sudut antara vektor $\left(\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}\right)$ dan $\bar{a}$ adalah

….

A. 150^o D. 60^o

B. 120^o E. 45^o

C. 90^o

Solusi:

$$\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k} + \frac{1}{2}\left(4\bar{i} + 10\bar{j} - 8\bar{k}\right) = 4\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k}$$

Sudut antara vektor $\left(\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}\right)$ dan $\bar{a}$ adalah α.

Rumus: $\cos\alpha = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|}$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2}\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{8 - 4 - 4}{\sqrt{16 + 16 + 4}\sqrt{4 + 1 + 4}} = 0$$

$\alpha = 90^o$

Jadi, sudut antara vektor $\left(\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}\right)$ dan $\bar{a}$ adalah 90^o. $\rightarrow$ [C]

16. Diberikan vektor $\bar{a} = -3\bar{i} + 4\bar{j} - 6\bar{k}$ dan $\bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 6\bar{k}$. Panjang proyeksi vektor $\bar{a}$ pada vektor $\bar{b}$ adalah

….

A. 10 D. 6

B. 8 E. 5

C. 7

Solusi:

Rumus: Panjang proyeksi vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah $\left|\bar{c}\right| = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\left|\bar{b}\right|}$

$$\left|\bar{c}\right| = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2}} = \frac{-6+12+36}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{42}{\sqrt{49}} = \frac{42}{7} = 6$$

Jadi, panjang proyeksi vektor $\bar{a}$ pada vektor $\bar{b}$ adalah 6.

17. Garis $2x+3y-6=0$ adalah peta dari garis yang ditranformasikan oleh matriks $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ dilanjutkan dengan dilatasi $[O,2]$. Persamaan garis semula adalah ….

A. $8x-y-8=0$ D. $8x+11y-3=0$

B. $3x-3y-3=0$ E. $3x-11y+3=0$

C. $8x-11y-3=0$

Solusi:

Alternatif 1:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2(-6)-(-2)\times 4}\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}y' \\ x' - \frac{1}{2}y' \end{pmatrix}$$

$x = \frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}y'$ …. (1)

$y = x' - \frac{1}{2}y'$ …. (2)

Selisih persamaan (1) dan (2) menghasilkan:

$x - y = \frac{1}{2}x'$

$x' = 2x - 2y$

$x' = 2x - 2y \rightarrow y = x' - \frac{1}{2}y'$

$y = 2x - 2y - \frac{1}{2}y'$

$2y = 4x - 4y - y'$

$y' = 4x - 6y$

$2x + 3y - 6 = 0$

$2(2x-2y) + 3(4x-6y) - 6 = 0$

$4x-4y+12x-18y-6=0$

$16x-22y-6=0$

$8x-11y-3=0$

Jadi, garis semula adalah $8x-11y-3=0$. $\to$ [C]

Alternatif 2:

Ambillah garis semula adalah $ax+by+c=0$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2(-6)-(-2)\times 4}\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x'-\frac{1}{2}y' \\ x'-\frac{1}{2}y' \end{pmatrix}$$

$x=\frac{3}{2}x'-\frac{1}{2}y'$

$y=x'-\frac{1}{2}y'$

$ax+by+c=0$

$a\left(\frac{3}{2}x'-\frac{1}{2}y'\right)+b\left(x'-\frac{1}{2}y'\right)+c=0$

$\left(\frac{3}{2}a+b\right)x'-\frac{1}{2}(a+b)+c=0 \Leftrightarrow 2x+3y-6=0$

$c=-6$

$\frac{3}{2}a+b=2$ …. (1)

$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b=-3$ …. (2)

Persamaan (1) – 2 × Persamaan (2) menghasilkan:

$\frac{1}{2}a=8$

$a=16$

$a=16 \to \frac{3}{2}a+b=2$

$\frac{3}{2}(16)+b=2$

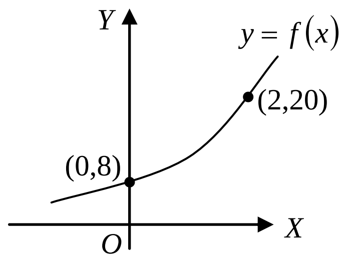
$b=-22$

$16x-22y-6=0$

$8x-11y-3=0$

Jadi, garis semula adalah $8x-11y-3=0$. $\to$ [C]

18. Diberikan fungsi eksponen $f(x)=a\times 2^x+b$ yang ditunjukkan pada gambar berikut ini. Jika $f^{-1}(x)$ adalah invers dari fungsi eksponen f, maka $f^{-1}(x)=\ldots.$



A. ${}^2\log\left(\frac{1}{4}x-1\right)$

B. ${}^2\log\left(\frac{1}{4}x+1\right)$

C. $\frac{1}{4}{}^2\log(x-4)$

D. $2-{}^2\log(x-4)$

E. ${}^2\log\left(\frac{1}{4}x-1\right)-2$

Solusi:

$(0,8)\to\ f(x)=a\times 2^x+b$

$8=a\times 2^0+b$

$a+b=8$ …. (1)

$(2,20)\to\ f(x)=a\times 2^x+b$

$20=a\times 2^2+b$

$4a+b=20$ …. (2)

Selisih persamaan (2) dan (1) menghasilkan:

$3a=12$

$a=4$

$a=4\to\ a+b=8$

$4+b=8$

$b=4$

Persamaan fungsi eksponen adalah $f(x)=4\times 2^x+4=2^{x+2}+4$

$f(x)=2^{x+2}+4$

$x=2^{y+2}+4$

$2^{y+2}=x-4$

$\log 2^{y+2}=\log(x-4)$

$(y+2)\log 2 = \log(x-4)$

$y+2 = {}^2\log(x-4)$

$y = {}^2\log(x-4) - 2$

$y = {}^2\log(x-4) - {}^2\log 4$

$y = {}^2\log\left(\frac{1}{4}x - 1\right)$

Jadi, fungsi inversnya adalah $f^{-1}(x) = {}^2\log\left(\frac{1}{4}x - 1\right) \rightarrow$ [A]

19. Diberikan barisan aritmetika dengan suku ke-5 adalah 20 dan suku ke-12 adalah 41. Jumlah 20 suku ganjil pertama dari barisan tersebut adalah …..

A. 900
D. 1.200
B. 1.000
E. 1.300
C. 1.100

Solusi:

$u_5 = 20 \Leftrightarrow a + 4b = 20$ …. (1)

$u_{12} = 41 \Leftrightarrow a + 11b = 41$ …. (2)

Selisih persamaan (2) dan (2) adalah

$7b = 21$

$b = 3$

$b = 3 \rightarrow a + 4b = 20$

$a + 4(3) = 20$

$a = 8$

Barisan aritmetika: 8, 11, 14, 17, 20, …

Barisan aritmetika suku ganjil: 8, 14, 20, …, dengan suku pertama a = 8 dan beda b = 14 – 8 = 6

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)b\right]$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}\left[2 \cdot 8 + (20-1)6\right] = 1.300$$

Jadi, jumlah 20 suku ganjil pertama dari barisan tersebut adalah 1.300. $\rightarrow$ [E]

20. Tiga buah bilangan membentuk barisan geometri dan jumlahnya 26. Jika bilangan ke-2 ditambah 4 menghasilkan sebuah barisan aritmetika, maka nilai bilangan ke-2 dari barisan semula adalah ….

A. 6
D. 14
B. 8
E. 16
C. 12

Solusi:

Barisan geometri: $\frac{a}{r}, a, ar$

$\frac{a}{r} + a + ar = 26$

$a + ar + ar^2 = 26r$

$ar^2 + a = 26r - ar$ …. (1)

Barisan aritmetika: $\frac{a}{r}, a + 4, ar$

$a + 4 - \frac{a}{r} = ar - a - 4$

$ar + 4r - a = ar^2 - ar - 4r$

$ar^2 - 2ar - 8r + a = 0$ …. (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$26r - ar - 2ar - 8r = 0$

$18r - 3ar = 0$

$3r(6 - a) = 0$

$r = 0$ (ditolak) atau $a = 6$

Jadi, nilai bilangan ke-2 dari barisan semula adalah 6.

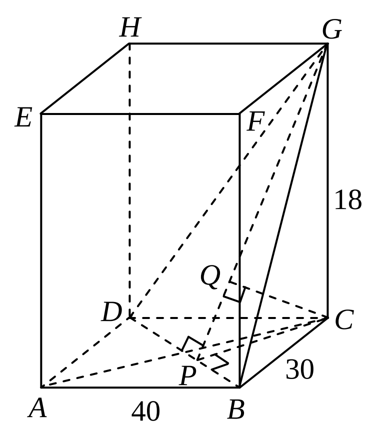
21. Diberikan balok *ABCD.EFGH*, dengan *AB* = 40 cm, *BC* = 30 cm, dan *CG* = 18 cm. Jarak dari titik *C* ke bidang *BDG* adalah ….

A. $\frac{1}{3}\sqrt{706}$ cm   D. $14\frac{3}{5}$ cm

B. $\frac{2}{3}\sqrt{706}$ cm   E. 14 cm

C. $14\frac{2}{5}$ cm

Solusi:



$BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\text{ cm}$

Luas $\Delta BCD = \frac{1}{2} \times BC \times CD = \frac{1}{2} \times BD \times CP$

$CP = \frac{BC \times CD}{BD} = \frac{30 \times 40}{50} = 24\text{ cm}$

$PG = \sqrt{CG^2 + CP^2} = \sqrt{18^2 + 24^2} = 30\text{ cm}$

Luas $\Delta GCP = \frac{1}{2} \times CG \times CP = \frac{1}{2} \times PG \times CQ$

$CQ = \frac{CG \times CP}{PG} = \frac{18 \times 24}{30} = 14\frac{2}{5}$ cm

Jadi, jarak dari titik *C* ke bidang *BDG* adalah $14\frac{2}{5}$ cm.

22. Dari prisma segitiga tegak *ABC.DEF* diketahui ΔABC adalah siku-siku di *A*, *AB* = 6 cm, luas ΔABC = 24 cm^2, dan jumlah luas bidang sisi tegak = 96 cm^2. Sudut yang dibentuk antara bidang *BCD* dan bidang alas adalah θ. Nilai cos θ adalah ….

A. $\frac{5}{\sqrt{61}}$ D. $\frac{10}{\sqrt{61}}$

B. $\frac{6}{\sqrt{61}}$ E. $\frac{12}{\sqrt{61}}$

C. $\frac{8}{\sqrt{61}}$

Solusi:

Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times AB \times AC$

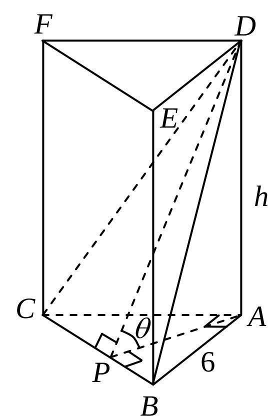
$24 = \frac{1}{2} \times 6 \times AC$

$AC = 8$ cm

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ cm

Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2} \times BC \times AP$

$AP = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{6 \times 8}{10} = 4{,}8$ cm



Jumlah luas bidang sisi tegak = 96

$6h + 8h + 10h = 96$

$24h = 96$

$h = 4$ cm

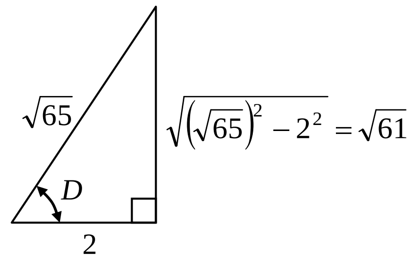
$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$ cm

$CD = \sqrt{AC^2 + AD^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80}$ cm

Pandanglah ΔBCD:

$$\cos D = \frac{BD^2 + CD^2 - BC^2}{2 \cdot BD \cdot CD} = \frac{\left(\sqrt{52}\right)^2 + \left(\sqrt{80}\right)^2 - 10}{2 \cdot \sqrt{52} \cdot \sqrt{80}} = \frac{52 + 80 - 100}{2 \cdot 2\sqrt{13} \cdot 4\sqrt{5}} = \frac{32}{2 \cdot 2\sqrt{13} \cdot 4\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{65}}$$

$$\sin D = \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{65}}$$



$$\text{Luas } \Delta BCD = \frac{1}{2} \times BD \times CD \times \sin D = \frac{1}{2} \times BC \times DP$$

$$DP = \frac{BD \times CD \times \sin D}{BC} = \frac{\sqrt{52} \times \sqrt{80} \times \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{65}}}{10} = \frac{2\sqrt{13} \times 4\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{65}}}{10} = \frac{4}{5}\sqrt{61}$$

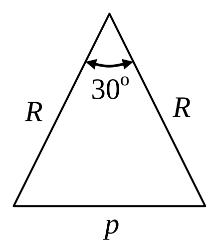
$$\cos\theta = \frac{AP}{DP} = \frac{4{,}8}{\frac{4}{5}\sqrt{61}} = \frac{6}{\sqrt{61}} \rightarrow [\text{B}]$$

23. Keliling segi-12 beraturan yang mempunyai luas 588 cm^2 adalah ….

A. $7\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$ cm
B. $14\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$ cm
C. $84\left(\sqrt{2} - 1\right)$ cm
D. $84\left(\sqrt{6} - 1\right)$ cm
E. $84\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$ cm

Solusi:

Luas segi-n beraturan $= n \times \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$



Luas segi-12 beraturan $= 12 \times \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{12}$

$588 = 6R^2 \sin 30^\circ$

$588 = 6R^2 \times \frac{1}{2}$

$R^2 = 196$

$R = 14$

Menurut aturan Kosinus:

$p^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cos 30^\circ$

$p^2 = 196 + 196 - 2 \cdot 14 \cdot 14 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$

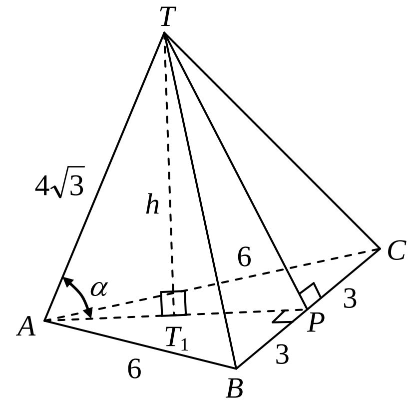
$p^2 = 2 \cdot 196 - 196\sqrt{3}$

$p = \sqrt{2 \cdot 196 - 196\sqrt{3}} = 7\sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = 7\sqrt{8 - 2\sqrt{12}} = 7\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$

Jadi, keliling segi-12 beraturan itu adalah $8 \times 7\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) = 84\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$ cm. $\rightarrow [E]$

24. Diberikan limas segitiga beraturan $T.ABC$, dengan $TA = 4\sqrt{3}$ dm dan $AB = 6$ dm. Volume limas tersebut adalah ….

A. $18\sqrt{3}$ liter
D. $12\sqrt{3}$ liter
B. 18 liter
E. 8 liter
C. $16\sqrt{3}$ liter



Solusi:

Lihat ΔAPB siku-siku di P:

$AP = AB\sin B = 6\sin 60° = 3\sqrt{3}$ dm

Lihat ΔTPB siku-siku di P:

$TP^2 = TB^2 - BP^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 - 3^2 = 48 - 9 = 39$

Lihat ΔTAP:

$$\cos\alpha = \frac{AP^2 + TA^2 - TP^2}{2\cdot AP\cdot TA} = \frac{\left(3\sqrt{3}\right)^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2 - 39}{2\cdot 3\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}} = \frac{27+48-39}{72} = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$$

$\alpha = 60°$

Luas $\Delta TAP = \frac{1}{2}TA\cdot AP\sin\alpha = \frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}\times\sin 60° = 18\times\frac{1}{2}\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$ cm^2

$\frac{1}{2}AP\cdot TT_1 = 9\sqrt{3}$

$\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\cdot h = 9\sqrt{3}$

$h = 6$ cm

Jadi, volume limas tersebut adalah $\frac{1}{3}\times$ Luas $\Delta ABC\times h = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 6\times 6\times\sin 60°\times 6 = 18\sqrt{3}$ liter $\to [A]$

25. Jika α dan β, dengan $\alpha > \beta$ adalah solusi dari persamaan $2\sin x\tan x + 5 - 4\sec x = 0$, dengan $0 \le x \le 2\pi$, maka nilai $\cos(\alpha - \beta) = ...$

A. -1
D. 0
B. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
E. 1
C. $-\frac{1}{2}$

Solusi:

$2\sin x\tan x + 5 - 4\sec x = 0$

$2\sin x\times\frac{\sin x}{\cos x} + 5 - 4\times\frac{1}{\cos x} = 0$

$2\sin^2 x + 5\cos x - 4 = 0$

$2(1-\cos^2 x) + 5\cos x - 4 = 0$

$2 - 2\cos^2 x + 5\cos x - 4 = 0$

$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$

$(2\cos x - 1)(\cos x - 2) = 0$

$\cos x = \frac{1}{2}$ (diterima) atau $\cos x = 2$ (ditolak)

$\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, dengan $k \in B$

$x = \frac{\pi}{3}$ atau $x = \frac{5\pi}{3}$

Jadi, $\cos(\alpha - \beta) = \cos\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} \rightarrow$ [C]

26. Sinus-sinus dari tiga buah sudut dalam suatu segitiga berbanding sebagai 3 : 4 : 5. Jika A adalah sudut dalam terkecil dan C adalah sudut terbesar dari segitiga itu, maka nilai $\tan(A - B)$ adalah ….

A. $-\frac{4}{3}$

B. -1

C. $-\frac{7}{24}$

D. $\frac{7}{24}$

E. 1

Solusi:

Menurut aturan Sinus dalam ΔABC :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 4 : 5$

$a : b : c = 2R\sin A : 2R\sin B : 2R\sin C = \sin A : \sin B : \sin C = 3 : 4 : 5$

Ambillah $a = 3k$, $b = 4k$, dan $c = 5k$, dengan $k > 0$

Menurut aturan Kosinus dalam ΔABC :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(4k)^2 + (5k)^2 - (3k)^2}{2 \cdot 4k \cdot 5k} = \frac{4}{5}$$

$$\sin A = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{3}{4}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(3k)^2 + (5k)^2 - (4k)^2}{2 \cdot 3k \cdot 5k} = \frac{3}{5}$$

$$\sin B = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{4}{3}$$

Jadi, nilai $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cos B} = \dfrac{\frac{3}{4} - \frac{4}{3}}{1 + \frac{3}{4} \times \frac{4}{3}} = -\dfrac{7}{24} \to$ [C]

27. Jika $\sin x - \cos x = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$, dengan $0 \le x \le 90°$, maka nilai $\cos x + \sin x$ adalah ….

A. $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

B. $\dfrac{\sqrt{13}}{3}$

C. $\dfrac{\sqrt{11}}{3}$

D. $\dfrac{\sqrt{8}}{3}$

E. $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

Solusi:

$$\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$(\sin x - \cos x)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x = \frac{5}{9}$$

$$1 - \sin 2x = \frac{5}{9}$$

$$\sin 2x = \frac{4}{9}$$

$$\cos 2x = \sqrt{1-\left(\frac{4}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{65}}{9}$$

$$\therefore \cos x + \sin x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \frac{\frac{\sqrt{65}}{9}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{\sqrt{13}}{3} \to [B]$$

28. Nilai $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+12x-2010}-\sqrt{x^2-5x+2009}-\sqrt{x^2+x-2008}\right)$ adalah ….

A. 2 D. 5

B. 3 E. 8

C. 4

Solusi:

Alternatif 1:

Anda harus ingat rumus: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{ax^2+px+q}\right)=\frac{b-p}{2\sqrt{a}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+12x-2010}-\sqrt{x^2-5x+2009}-\sqrt{x^2+x-2008}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(2\sqrt{x^2+3x-\frac{2010}{4}}-\sqrt{x^2-5x+2009}-\sqrt{x^2+x-2008}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-\frac{2010}{4}}-\sqrt{x^2-5x+2009}+\sqrt{x^2+3x-\frac{2010}{4}}-\sqrt{x^2+x-2008}\right)$$

$$=\frac{3-(-5)}{2\sqrt{1}}+\frac{3-1}{2\sqrt{1}}=4+1=5$$

Alternatif 2:

Anda tidak harus ingat rumus: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{ax^2+px+q}\right)=\frac{b-p}{2\sqrt{a}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+12x-2010}-\sqrt{x^2-5x+2009}-\sqrt{x^2+x-2008}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{(2x+3)^2}-\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[(2x+3)-\left(x-\frac{5}{2}\right)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(2x+3-x+\frac{5}{2}-x-\frac{1}{2}\right)$$

$= 5 \rightarrow [C]$

29. Nilai $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 8x}{x^2 + \sin x \tan x} = \ldots.$

A. 64 D. 8

B. 32 E. 4

C. 16

Solusi:

Alternatif 1:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 8x}{x^2 + \sin x \tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 4x}{x^2 + \sin x \tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{\frac{x^2}{\sin^2 4x} + \frac{\sin x \tan x}{\sin^2 4x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2}{\frac{1}{16}\left(\frac{4x}{\sin 4x}\right)^2 + \frac{1}{16} \times \frac{\sin x \cdot 4x \cdot 4x \tan x}{x \cdot \sin 4x \cdot \sin 4x \cdot x}} = \frac{2}{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = 16 \rightarrow [C]$$

Alternatif 2:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 8x}{x^2 + \sin x \tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}(8x)^2}{x^2 + x \cdot x} = \lim_{x \to 0} \frac{32x^2}{2x^2} = 16 \rightarrow [C]$$

30. Diberikan kurva fungsi $y = x^3 + ax^2 + b$, dengan $a < 0$, a dan b adalah konstanta. Garis singgung kurva pada titik $P\left(\frac{1}{3}a, 0\right)$ dan (3,4) adalah sejajar. Nilai $a^2 + 2ab + b^2 = \ldots.$

A. 49 D. -1

B. 7 E. -49

C. 1

Solusi:

$y = x^3 + ax^2 + b$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2ax$

Gradien garis singgung adalah $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{1}{3}a}$

$3(3)^2 + 2a(3) = 3\left(\frac{1}{3}a\right)^2 + 2a\left(\frac{1}{3}a\right)$

$3(3)^2 + 2a(3) = \frac{a^2}{3} + \frac{2a^2}{3}$

$27 + 6a = a^2$

$a^2 - 6a - 27 = 0$

$(a-9)(a+3) = 0$

$a = 9$ (ditolak) atau $a = 3$ (diterima)

$\left.\begin{matrix} a = -3 \\ (3,4) \end{matrix}\right\} \to y = x^3 + ax^2 + b$

$4 = (3)^3 + (-3)(3)^2 + b$

$b = 4$

Jadi, nilai $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = (-3+4)^2 = 1$

31. Keuntungan maksimum jika persamaan permintaan (demand equation) $p = 36 - 4x$ dan biaya total (total cost) $C = 2x^2 + 6$ adalah ….

A. \$96 D. \$32

B. \$64 E. \$28

C. \$48

Solusi:

Keuntungan $\pi = px - C = (36-4x)x - (2x^2 + 6) = -6x^2 + 36x - 6$

$\pi = -6x^2 + 36x - 6$

$\pi' = -12x + 36$

$\pi'' = -12$

Nilai stasioner (titik kritis) dicapai untuk $\pi' = 0$, sehingga

$-12x + 36 = 0$

$x = 3$

Karena $\pi'' = -12 < 0$, maka fungsi keuntungan π dicapai pada $x = 3$.

$\pi = -6(3)^2 + 36(3) - 6 = 48$

Jadi, keuntungan maksimumnya adalah \$48. → [C]

32. Jika $\int_{-a}^{a} 13(x+3)dx = \int_{0}^{4} 18\sqrt{2t+1}dt$, maka nilai a adalah ….

A. 6 D. 2

B. 4 E. 1

C. 3

Solusi:

$\int_{-a}^{a} 13(x+3)dx = \int_{0}^{4} 18\sqrt{2t+1}dt$

$$\left[\frac{13}{2}x^2+39x\right]_{-a}^{a}=\int_0^4 9\sqrt{2t+1}\,d(2t+1)$$

$$\frac{13}{2}a^2+39a-\frac{13}{2}a^2+39a=\left[6(2t+1)\right]_0^4$$

$$78a=6(2\cdot 4+1)^{\frac{3}{2}}-6(2\cdot 0+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$78a=162-6$$

$$a=\frac{156}{78}=2$$

Jadi, nilai a adalah 2. $\rightarrow$ [D]

33. Hasil dari $\int_3^8 \frac{3x}{\sqrt{x+1}}$ adalah ….

A. 64 D. 32

B. 48 E. 12

C. 36

Solusi:

Alternatif 1: Metode Substitusi:

Ambillah $u=\sqrt{x+1} \Leftrightarrow du=\frac{dx}{2\sqrt{x+1}}$

$$u=\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x=u^2-1$$

$$x=3 \rightarrow u=\sqrt{x+1}=\sqrt{3+1}=2$$

$$x=8 \rightarrow u=\sqrt{x+1}=\sqrt{8+1}=3$$

$$\int_3^8 \frac{3x}{\sqrt{x+1}}=\int_2^3 6\left(u^2-1\right)du=\left[2u^3-6u\right]_2^3=54-18-16+12=32 \rightarrow \text{[D]}$$

Alternatif 2: Metode Integral Parsial:

Ambillah $u=3x \Leftrightarrow du=3dx$

$$dv=\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx \Leftrightarrow v=\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx=2\sqrt{x+1}$$

$$\int udv=uv-\int vdu$$

$$\int\frac{3x}{\sqrt{x+1}}dx=3x\cdot 2\sqrt{x+1}-\int 2\sqrt{x+1}\cdot 3dx=6x\sqrt{x+1}-\int 6\sqrt{x+1}\,d(x+1)=6x\sqrt{x+1}-4(x+1)\sqrt{x+1}+C$$

$$\int_3^8\frac{3x}{\sqrt{x+1}}=\left[6x\sqrt{x+1}-4(x+1)\sqrt{x+1}\right]_3^8=48\sqrt{9}-4(9)\sqrt{9}-18\sqrt{4}+4(4)\sqrt{4}=144-108-18+32=32 \rightarrow \text{[D]}$$

34. Hasil integral dari $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\cos^4 x dx = \ldots.$

A. 16π

B. 13π

C. 6π

D. 3π

E. 2π

Solusi:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\cos^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\left(\cos^2 x\right)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\left(\frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4+8\cos 2x+2+2\cos 4x\right)dx = \left[6x+4\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 3\pi + 4\sin\pi + \frac{1}{2}\sin 2\pi - 0 - 4\sin 0 - \frac{1}{2}\sin 0 = 3\pi \to \text{[D]}$$

35. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva fungsi $y = 2x^2$, $y = 2$, dan $6x + y - 20 = 0$ adalah ….

A. 5

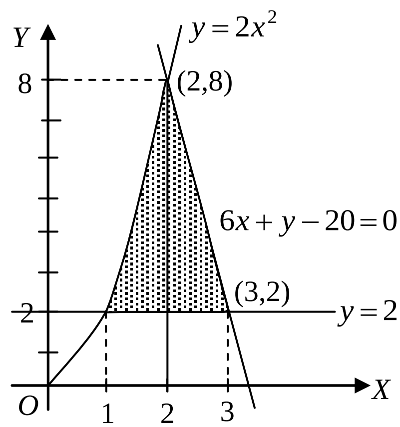
B. $5\frac{1}{3}$

C. $5\frac{2}{3}$

D. $7\frac{2}{3}$

E. $17\frac{2}{3}$

Solusi:



Batas-batas integral:

Kurva $y = 2x^2$ dan $y = 2$.

$2x^2 = 2$

$x = \pm 1$

Kurva $y = 2x^2$ dan $6x + y - 20 = 0$.

$2x^2 + 6x - 20 = 0$

$x^2 + 3x - 10 = 0$

$(x-2)(x+5) = 0$

$x = 2$ atau $x = -5$

Kurva $6x + y - 20 = 0$ dan $y = 2$.

$6x + 2 - 20 = 0$

$x = 3$

Luas $L = \int_a^b f(x)dx$

Luas daerah yang diarsir adalah

$$L = \int_1^2 (2x^2 - 2)dx + \int_2^3 (-6x + 20 - 2)dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - 2x\right]_1^2 + \left[-3x^2 + 18x\right]_2^3 = \frac{16}{3} - 4 - \frac{2}{3} + 2 - 27 + 54 + 12 - 36$$

$$= \frac{14}{3} + 1 = 5\frac{2}{3}. \rightarrow \text{[D]}$$

36. Volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 4 - x^2$, garis $y = 3x$, dan garis $x = 2$ yang diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360^o adalah ….

A. $\frac{262}{15}\pi$ D. $\frac{160}{15}\pi$

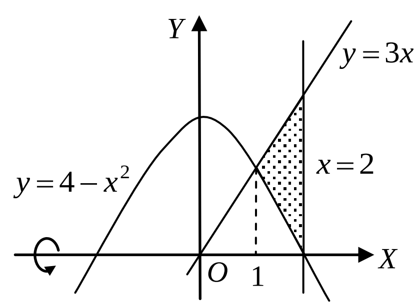
B. $\frac{260}{15}\pi$ E. $\frac{120}{15}\pi$

C. $\frac{162}{15}\pi$

Solusi:

Batas-batas integral:

Kurva $y = 4 - x^2$ dan garis $y = 3x$



$3x = 4 - x^2$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$(x + 4)(x - 1) = 0$

$x = -4$ atau $x = 1$

$V = \pi\int_a^b \{f^2(x) - g^2(x)\}dx$, $f(x) > g(x)$

$$V = \pi\int_1^2 \left[(3x)^2 - (4 - x^2)^2\right]dx = \pi\int_1^2 (9x^2 - 16 + 8x^2 - x^4)dx = \pi\int_1^2 (17x^2 - 16 - x^4)dx$$

$$= \pi\left[\frac{17}{3}x^3 - 16x - \frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \pi\left(\frac{136}{3} - 32 - \frac{32}{5} - \frac{17}{3} + 16 + \frac{1}{5}\right) = \pi\left(\frac{119}{3} - 16 - \frac{31}{5}\right) = \frac{262}{15}\pi \rightarrow \text{[A]}$$

37. Data yang disajikan pada berikut adalah tinggi badan sekelompok siswa .

Tinggi Badan (cm)	Frekuensi
151 – 155	5
156 – 160	20
161 – 165	*a*
166 – 170	28
171 – 175	7

Jika **modus** pada tabel tersebut adalah 163,625, maka nilai *a* adalah ….

A. 48 D. 42

B. 46 E. 40

C. 44

Solusi:

$$Mo = L + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)p$$

dengan: Mo = modus

L = tepi bawah kelas modus (yang memiliki frekuensi tertinggi)

p = panjang kelas atau interval kelas

d_1 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sebelumnya

d_2 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sesudahnya

Nilai **modus** pada tabel tersebut adalah 163,625 menunjukkan bahwa kelas modus terletak pada interval kelas 161 – 165 dengan frekuensi *a*.

Mo = 163,625; L = 160,5; p = 5; $d_1 = a - 20$; dan $d_2 = a - 28$

$$163{,}625 = 160{,}5 + \left(\frac{a-20}{a-20+a-28}\right)5$$

$$3{,}125 = \left(\frac{a-20}{a-20+a-28}\right)5$$

$$0{,}625 = \frac{a-20}{2a-48}$$

$$1{,}25a - 30 = a - 20$$

$$0{,}25a = 10$$

$$a = 40$$

Jadi, nilai *a* dalah 40. → [E]

38. Banyaknya bilangan 8 angka berbeda yang dapat dibentuk dengan cara mengubah susunan angka dari 91909595 adalah ….

A. 840 D. 325

B. 735 E. 105

C. 420

Solusi:

Bilangan 91909595 terdiri dari 8 angka, dengan dua angka 5 dan empat angka 9 yang sama, sehingga banyaknya susunan 8 angka adalah $\frac{8!}{2!4!}=\frac{8\times7\times6\times5\times4!}{2\times1\times4!}=840$.

Perlu dipahami bahwa banyaknya bilangan 840 buah ini termasuk bilangan dengan angka pertama 0 (misalnya 01559999 artinya 1559999 bukan bilangan 8 angka yang dimaksud)

Sehingga banyak bilangan dengan 0 yang bertindak sebagai angka pertama adalah $\frac{7!}{2!4!}=\frac{7\times6\times5\times4!}{2\times1\times4!}=105$

Jadi, banyaknya bilangan yang dapat dibentuk tersebut adalah 840 – 105 = 735. $\rightarrow$ [C]

39. Dari 12 siswa yang terdiri dari 7 laki-laki dan sisanya perempuan akan dibentuk kelompok belajar yang beranggotakan 6 orang. Jika dalam kelompok belajar itu terdapat paling sedikit 3 laki-laki, maka banyaknya cara membentuk kelompok belajar tersebut adalah ….

A. 812 D. 352

B. 800 E. 112

C. 720

Solusi:

Ada 7 siswa laki-laki dan 5 siswa perempuan.

Kelompok belajar yang akan dibentuk beranggotakan 6 siswa, dengan paling sedikit ada 3 orang laki-laki.

Kemungkinannya adalah (3*L*, 3*P*), (4*L*, 2*P*), (5*L*, *P*), (6*L*, 0*P*)

Jadi, banyaknya cara membentuk kelompok belajar tersebut adalah

$$={}_7C_3\times{}_5C_3+{}_7C_4\times{}_5C_2+{}_7C_5\times{}_5C_1+{}_7C_6\times{}_5C_0$$

$$=\frac{7!}{3!4!}\times\frac{5!}{3!2!}+\frac{7!}{4!3!}\times\frac{5!}{2!3!}+\frac{7!}{5!2!}\times\frac{5!}{1!4!}+\frac{7!}{6!1!}\times\frac{5!}{0!5!}$$

$$=\frac{7\times6\times5\times4!}{3\times2\times1\times4!}\times\frac{5\times4\times3!}{3!\times2\times1}+\frac{7\times6\times5\times4!}{4!\times3\times2\times1}\times\frac{5\times4\times3!}{2\times1\times3!}+\frac{7\times6\times5!}{5!\times2\times1}\times\frac{5\times4!}{1\times4!}+\frac{7\times6!}{6!\times1}\times\frac{5!}{1\times5!}$$

$$=35\times10+35\times10+21\times5+7\times1$$

$$=350+350+105+7$$

$$=812\rightarrow[\text{A}]$$

40. Dalam sebuah kantong terdapat 10 butir kelereng yang terdiri dari 6 butir kelereng berwarna hijau dan sisanya kelereng berwarna putih. Jika dari kantong itu diambil secara acak (random) 3 butir kelereng sekaligus, maka peluang yang terambil kelereng berawarna sama adalah ….

A. $\frac{7}{15}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{3}{5}$

E. $\frac{5}{21}$

Solusi:

Kelereng berwarna hijau = 6 butir

Kelereng berwarna putih = 10 – 6 = 4 butir

$$\text{P(kelereng berwarna sama)} = \frac{{}_6C_3 + {}_4C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{\frac{6!}{3!(6-3)!} + \frac{4!}{3!(4-3)!}}{\frac{10!}{3!(10-3)!}} = \frac{\frac{6\times5\times4\times3!}{3\times2\times1\times3!} + \frac{4\times3!}{3!\times1}}{\frac{10\times9\times8\times7!}{3\times2\times1\times7!}} = \frac{20+4}{120}$$

$$= \frac{24}{120} = \frac{1}{5} \to \text{[B]}$$