SOLUSI
PART 6
Creative Problem Solving in School Mathematics

1. Sederhanakanlah $\sqrt{^2\log 3 \times {}^2\log 12 \times {}^2\log 48 \times {}^2\log 192 + 16} - {}^2\log 12 \times {}^2\log 48 + 10$.

   Solusi:

   Ambillah $x = {}^2\log 24$, sehingga

   $${}^2\log 3 = {}^2\log \frac{24}{8} = {}^2\log 24 - {}^2\log 8 = x - 3$$

   $${}^2\log 12 = {}^2\log \frac{24}{2} = {}^2\log 24 - {}^2\log 2 = x - 1$$

   $${}^2\log 48 = {}^2\log(24 \times 2) = {}^2\log 24 + {}^2\log 2 = x + 1$$

   $${}^2\log 192 = {}^2\log(24 \times 8) = {}^2\log 24 + {}^2\log 8 = x + 3$$

   $$\sqrt{^2\log 3 \times {}^2\log 12 \times {}^2\log 48 \times {}^2\log 192 + 16} - {}^2\log 12 \times {}^2\log 48 + 10$$
   $$= \sqrt{(x-3)(x-1)(x+1)(x+3) + 16} - (x-1)(x+1) + 10$$
   $$= \sqrt{(x^2-9)(x^2-1) + 16} - (x^2-1) + 10$$
   $$= \sqrt{x^4 - 10x^2 + 9 + 16} - (x^2-1) + 10$$
   $$= \sqrt{x^4 - 10x^2 + 25} - (x^2-1) + 10$$
   $$= \sqrt{(x^2-5)^2} - (x^2-1) + 10$$
   $$= x^2 - 5 - x^2 + 1 + 10$$
   $$= 6$$

2. Jika $S = \frac{1}{1+1^2+1^4} + \frac{2}{1+2^2+2^4} + \frac{3}{1+3^2+3^4} + \ldots + \frac{200}{1+200^2+200^4}$, tentukan nilai $80402S$

   Solusi:

   Kita mengetahui bahwa $\frac{k}{1+k^2+k^4} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k-1)+1} - \frac{1}{k(k+1)+1}\right]$

   $$S = \frac{1}{1+1^2+1^4} + \frac{2}{1+2^2+2^4} + \frac{3}{1+3^2+3^4} + \ldots + \frac{200}{1+200^2+200^4}$$
   $$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times 0+1} - \frac{1}{1\times 2+1} + \frac{1}{2\times 1+1} - \frac{1}{2\times 3+1} + \frac{1}{3\times 2+1} - \frac{1}{3\times 4+1} + \ldots + \frac{1}{200\times 199+1} - \frac{1}{200\times 201+1}\right)$$
   $$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{40201}\right)$$
   $$= \frac{20100}{40201}$$

   Jadi, $80402S = 80402 \times \frac{20100}{40201} = 40200$

3. Jumlah akar-akar real dari persamaan $x^4 + 4 + 11x^2 = 8(x^3 + 2x)$ adalah ....

   Solusi:

$x^4+4+11x^2=8\left(x^3+2x\right)$

$x^2+\frac{4}{x^2}+11=8\left(x+\frac{2}{x}\right)$

$\left(x^2+4+\frac{4}{x^2}\right)+7=8\left(x+\frac{2}{x}\right)$

$\left(x+\frac{2}{x}\right)^2+7=8\left(x+\frac{2}{x}\right)$

Ambillah $x+\frac{2}{x}=a$, sehingga

$a^2+7=8a$

$a^2-8a+7=0$

$(a-1)(a-7)=0$

$a=1$ atau $a=7$

$x+\frac{2}{x}=1$

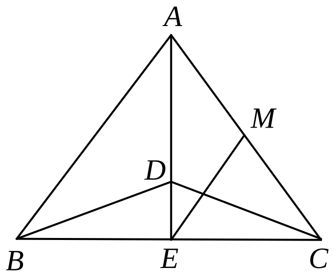
$x^2-x+2=0$, tidak memiliki akar real, karena diskriminan $D=b^2-4ac<0$

$x+\frac{2}{x}=7$

$x^2-7x+2=0$, dengan akar-akarnya x_1 dan x_2

$x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=(7)^2-2\times 2=45$

4. Diberikan ΔABC, titik E terletak pada pertengahan BC dan M terletak pada pertengahan AC. Jika titik D pada AE, sehingga $AD=BD=CD=169$ cm, dan $EM=156$ cm. Tentukan panjang DE.



Solusi:

Karena $BD=CD$ dan E adalah titik tengah BC, maka $\angle AEC=\angle DEC=90^\circ$.

Karena M titik tengah AC, maka $EE=AM=CM=156$ cm dan $AC=AM+CM=156+156=312$ cm.

Menurut Pythagoras:

Perhatikan ΔCED

$EC^2=CD^2-DE^2$

$EC^2=169^2-DE^2$ .... (1)

Perhatikan ΔAEC

$EC^2=AC^2-AE^2$

$EC^2=312^2-\left(169+DE\right)^2$

$EC^2=312^2-169^2-338DE-DE^2$ .... (2)

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$169^2-DE^2=312^2-169^2-338DE-DE^2$

$338DE=312^2-169^2$

$$DE = \frac{312^2 - 2\times169^2}{338} = 119\,\text{cm}$$

5. Tentukan nialai $\sin^2 1° + \sin^2 2° + \sin^2 3° + ... + \sin^2 360°$.

Solusi:

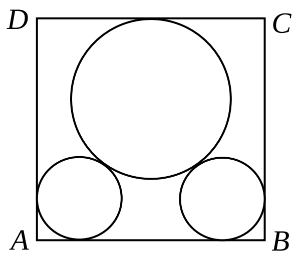
Kita mengetahui bahwa $\sin(90° + x) = \cos x$.

$$S = \sum_{i=1}^{90} \sin^2 i° + \sum_{i=1}^{90} \sin^2 (90+i)° + \sum_{i=181}^{270} \sin^2 i° + \sum_{i=181}^{270} \sin^2 (90+i)°$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{90} \sin^2 i° + \sum_{i=1}^{90} \cos^2 i°\right) + \left(\sum_{i=181}^{270} \sin^2 i° + \sum_{i=181}^{270} \cos^2 i°\right)$$

$$= 180$$

6. Di dalam persegi panjang *ABCD*, dengan *AB* = 34 cm terdapat dua buah lingkaran kecil yang identik berdiameter 10 cm dan sebuah lingkaran besar berdiameter 16 cm. Lingkaran-lingkaran itu saling bersinggungan dan menyinggung persegi panjang dari dalam. Luas persegi panjang *ABCD* adalah ....



Solusi:

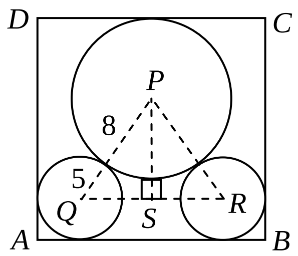
$$QS = \frac{34 - 2\times 5}{2} = 12 \text{ cm}$$

Menurut Pythagoras:

$$PS = \sqrt{PQ^2 - QS^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$$

$$AD = PS + 5 + 8 = 5 + 5 + 8 = 18\,\text{cm}$$

$$[ABCD] = 18 \times 34 = 612\,\text{cm}^2$$



7. Jika x dan y adalah bilangan real sedemikian sehingga $x + y + |x - y| = -148$, nilai terkecil yang mungkin dari xy.

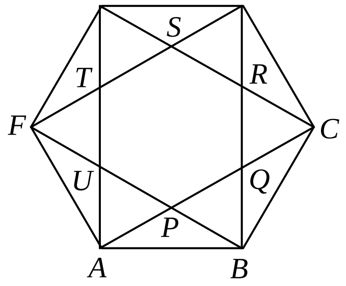
Solusi:

$$x + y + |x - y| = -148 = \begin{cases} x + y + (x - y) = 2x, \text{jika } x \ge y \\ x + y + (y - x) = 2y, \text{jika } x \le y \end{cases}$$

$x = -74$ dan $y = -74$

Jadi, nilai terkecil $xy = (-74)(-74) = 5476$

8. Diketahui segi enam beraturan *ABCDEF* yang mempunyai luas 54 cm^2. Jika luas segi enam yang merupakan persekutuan ΔACE dan ΔBDF adalah x cm^2. Tentukanlah nilai x.



Solusi:

Jika segi-n beraturan mempunyai jari-jari lingkaran luar R, maka luas segi-n beraturan $= \frac{n}{2} \times r^2 \times \sin \frac{360^\circ}{n}$.

Luas segi-6 beraturan $= \frac{6}{2} \times r^2 \times \sin \frac{360^\circ}{6} = \frac{3}{2} R^2 \sqrt{3}$

$$54 = 3 \times r^2 \times \sin 60^\circ$$

$$18 = r^2 \times \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$r^2 = \frac{36}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$$

Perhatikan ΔABP sama kaki, dengan $AB = r$, $AP = BP$, dan $\angle PAB = \angle PBA = 30^\circ$.

$$\cos \angle PAB = \frac{\frac{1}{2} AB}{AP}$$

$$AP = \frac{AB}{2\cos 30^\circ} = \frac{r}{2 \times \frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{r}{3}\sqrt{3}$$

$$[APU] = \frac{1}{2} AP \times AU \sin \angle PAU = \frac{1}{2} \times \frac{r}{3}\sqrt{3} \times \frac{r}{3}\sqrt{3} \times \sin 60^\circ = \frac{1}{12} r^2 \sqrt{3}$$

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\frac{AC}{\sin 120^\circ} = \frac{r}{\sin 30^\circ}$$

$$AC = \frac{r}{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2}\sqrt{3} = r\sqrt{3}$$

$$[ACE] = \frac{1}{2} AC \times AE \sin \angle CAE = \frac{1}{2} \times r\sqrt{3} \times r\sqrt{3} \times \sin 60^\circ = \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3}$$

$$[PQRSTU] = [ACE] - 3 \times [APU] = \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3} - 3 \times \frac{1}{12} r^2 \sqrt{3} = \frac{1}{2} r^2 \sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(12\sqrt{3}\right)\sqrt{3} = 18$$

9. Bentuk sederhana dari $144\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)$ adalah ....

Solusi:

$$x = 144\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)$$

$$x^2 = 144^2\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2$$

$$x^2 = 144^2\left(7+4\sqrt{3}+7-4\sqrt{3}+2\sqrt{49-48}\right)$$

$$x^2 = 144^2(14+2)$$

$$x^2 = 144^2(16)$$

$$x = 144(4) = 576$$

10. Hasil perkalian dari angka-angka dua angka terakhir dari 2004^{2004} adalah ....

Solusi:

$$2004^{2004} = 4^{2004} (\text{mod} 100)$$

Dua angka terakhir dari bentuk 4^n adalah

$4^n \equiv 04,16,64,56,24,96,84,36,44,76,04 \pmod{100}$

Sehingga $4^n \equiv 4^{n+10} \pmod{100}$

Dengan demikian, $4^{2004} = 4^4 = 56 \pmod{100}$

$\therefore$ hasil perkalian yang diperlukan adalah $5 \times 6 = 30$.

11. Jika $\sec^6 x = 49 + \tan^6 x$, dengan $0 < x < 90°$, tentukan nilai $\sec x \tan x$.

Solusi:

$\sec^6 x = 49 + \tan^6 x$

$\sec^6 x - \tan^6 x = 49$

$\left(\sec^2 x\right)^3 - \left(\tan^2 x\right)^3 = 49$

$\left(\sec^2 x - \tan^2 x\right)\left(\sec^4 x + \sec^2 x \tan^2 x + \tan^4 x\right) = 49$

$(1)\left[\left(\sec^2 x - \tan^2 x\right)^2 + 3\sec^2 x \tan^2 x\right] = 49$

$\left[(1)^2 + 3\sec^2 x \tan^2 x\right] = 49$

$1 + 3\sec^2 x \tan^2 x = 49$

$3\sec^2 x \tan^2 x = 48$

$\sec^2 x \tan^2 x = 16$

$\sec x \tan x = 4$

12. Faktor bilangan prima terbesar dari 99999744 adalah ....

Solusi:

Observasi $99999744 = 10^8 - 2^8 = 2^8\left(5^8 - 1\right) = 2^8(390624) = 2^8 \cdot 2^5 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 313$.

Jadi, faktaor bilangan prima terbesar dari 99999744 adalah 313.

13. Jika $|x + y + 2| + (x - y + 1)^2 = 0$, tentukan nilai $y - x$.

Solusi:

$|x + y + 2|$ dan $(x - y + 1)^2$ keduanya adalah bilangan non negatif, sehingga haruslah

$x - y + 1 = 0$

$y - x = 1$

14. Jika x dan y adalah bilangan real, $x - y = 8$ dan $x^2 + y^2 = 194$, nilai dari xy adalah ....

Solusi:

$(x - y)^2 + 2xy = 194$

$(8)^2 + 2xy = 194$

$2xy = 194 - 64$

$xy = 65$

15. Tentukan jumlah dua digit (angka) terakhir dari 9^{103}.

Solusi:

$$9^{103} = (10-1)^{103} = \binom{103}{103}10^{103} - \binom{103}{102}10^{102} + \ldots - \binom{103}{2}10^2 + \binom{103}{1}10 - \binom{103}{0}$$

$$= 0 - 0 + 0 - \ldots - 0 + 30 - 1$$

$$\equiv 29 \pmod{100}$$

Jadi, jumlah dua digit (angka) terakhir dari 9^{103} adalah 2 + 9 = 11.

16. Tentukan penyelesaian sistem persamaan $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ x^3+y^3+z^3=34 \end{cases}$

Solusi:

Ambillah persamaan monik $P(t)=t^3+at^2+bt+c$, dengan akar-akarnya *x*, *y*, dan *z*.

$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$

$x+y+z=-\frac{a}{1}=4 \to a=-4$

Sehingga $P(t)=t^3-4t^2+bt+c$

$x^2+y^2+z^2=14$

$(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)=14$

$(4)^2-2(xy+xz+yz)=14$

$2(xy+xz+yz)=16-14$

$xy+xz+yz=1$

$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}$

$xy+xz+yz=\frac{b}{1}=1 \to b=1$

Sehingga $P(t)=t^3-4t^2+t+c$

Karena x, y, dan z adalah akar-akar *P*, maka

$x^3-4x^2+x+c=0$ .... (1)

$y^3-4y^2+y+c=0$ .... (2)

$z^3-4z^2+z+c=0$ .... (3)

Jumlah ketiga persamaan tersebut menghasilkan:

$(x^3+y^3+z^3)-4(x^2+y^2+z^2)+(x+y+z)+3c=0$

$(34)-4(14)+(4)+3c=0$

$3c=-34+56-4$

$c=6$

Sehingga $P(t)=t^3-4t^2+t+6$

$t^3-4t^2+t+6=0$

$(t+1)(t^2-5t+6)=0$

$(t+1)(t-2)(t-3)=0$

$t=-1$ atau $t=2$ atau $t=3$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

Jadi, penyelesaian system persamaan tersebut adalah permutasi dari $(-1,2,3)$.

17. Dua angka terakhir dari $1!+2!+3!+4!+\ldots+2014!$ adalah ....

Solusi:

$1!=\underline{1}$, $2!=\underline{2}$, $3!=\underline{6}$, $4!=\underline{24}$, $5!=1\underline{20}$, $6!=7\underline{20}$, $7!=50\underline{40}$, $8!=403\underline{20}$, $9!=3628\underline{80}$, $10!=36288\underline{00}$, $11!=...\underline{00}$, ...

Jadi, jumlahnya adalah 1 + 2 + 6 + 24 + 20 + 20 + 40 + 20 + 80 + 00 + 00 + ... + 00 = 213.

18. Hasil perkalian digit-digit dari bilangan dua digit *N* adalah *M*. Tentukan *N*, jika $M+N=150$.

Solusi:
Misalkan N adalah bilangan dengan *a* sebagai digit puluhan dan *b* sebagai digit satuan
$M = ab$
$N = 10a + b$
$M + N = 150$
$ab + 10a + b = 150$
Karena *a* dan *b* adalah digit satuan yang merupakan bilangan bulat non negatif 0, 1, 2, …, 9 dengan $a \neq 0$, sehingga
Jika $a = 1$, maka $b = 70$ (ditolak)
Jika $a = 2$, maka $b = 43\frac{1}{3}$ (ditolak)
Jika $a = 3$, maka $b = 30$ (ditolak)
Jika $a = 4$, maka $b = 22$ (ditolak)
Jika $a = 5$, maka $b = 16\frac{2}{3}$ (ditolak)
Jika $a = 6$, maka $b = 12\frac{6}{7}$ (ditolak)
Jika $a = 7$, maka $b = 10$ (ditolak)
Jika $a = 8$, maka $b = 7\frac{7}{9}$ (ditolak)
Jika $a = 9$, maka $b = 6$ (ditolak)
Jadi, bilangan yang diminta adalah 96.

19. Jika $xyz = 1$ maka nilai dari $\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}$.

Solusi:

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = \frac{1}{1+x+xy} \times \frac{z}{z} + \frac{1}{1+y+yz} \times \frac{xz}{xz} + \frac{1}{1+z+zx}$$

$$= \frac{z}{z+xz+xyz} + \frac{xz}{xz+xyz+xyzz} + \frac{1}{1+z+zx}$$

$$= \frac{z}{z+xz+1} + \frac{xz}{xz+1+1\cdot z} + \frac{1}{1+z+zx}$$

$$= \frac{z}{z+xz+1} + \frac{xz}{xz+1+z} + \frac{1}{1+z+zx}$$

$$= \frac{z+xz+1}{z+xz+1} = 1$$

20. Jika $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 3$, maka nilai $\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8} + \frac{x^8-y^8}{x^8+y^8}$ adalah ....

Solusi:

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 3$$

$$\frac{x^4+2x^2y^2+y^4+x^4-2x^2y^2+y^4}{x^4-y^4} = 3$$

$$\frac{2x^4+2y^4}{x^4-y^4} = 3$$

$$\frac{x^4+y^4}{x^4-y^4} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{x^4+y^4}{x^4-y^4}+\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}=\frac{3}{2}+\frac{2}{3}$$

$$\frac{x^8+2x^4y^4+y^8+x^8-2x^4y^4+y^8}{x^8-y^8}=\frac{13}{6}$$

$$\frac{2x^8+2y^8}{x^8-y^8}=\frac{13}{6}$$

$$\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8}=\frac{13}{12}$$

$$\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8}+\frac{x^8-y^8}{x^8+y^8}=\frac{13}{12}+\frac{12}{13}=\frac{169+144}{156}=2\frac{1}{156}$$