Функції однієї змінної

Означення та найпростіші властивості функції однієї змінної

Нехай X та Y деякі множини. Якщо задано закон f, за яким кожному $x \in X$ ставиться у відповідність певне єдине число $y \in Y$, то кажуть, що на множині X задано ***функцію*** f зі значеннями у множині Y. Тобто, $y = f(x)$ — функція, $x \in X$ — аргумент функції, y — значення функції, X — область визначення функції, Y — область значень функції.

Означення. Функція $f(x)$, визначена на множині X називається ***обмеженою*** на X, якщо існує таке число $M > 0$, що для всіх $x \in X$ виконується умова $|f(x)| \le M$.

Приклад. Функції $y = \sin x$ та $y = \cos x$ обмежені на множині дійсних чисел, оскільки для всіх $x \in \mathrm{R}$ $|\sin x| \le 1$ і $|\cos x| \le 1$.

Означення. Функція $f(x)$, визначена на множині X називається ***зростаючою*** на X, якщо для всіх x_1 і x_2 з множини X з нерівності $x_1 < x_2$ випливає нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

Означення. Функція $f(x)$, визначена на множині X називається ***спадною*** на X, якщо для всіх x_1 і x_2 з множини X з нерівності $x_1 < x_2$ випливає нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Означення. Функція $f(x)$, визначена на множині X називається ***незростаючою*** на X, якщо для всіх x_1 і x_2 з множини X з нерівності $x_1 < x_2$ випливає нерівність $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Означення. Функція $f(x)$, визначена на множині X називається ***неспадною*** на X, якщо для всіх x_1 і x_2 з множини X з нерівності $x_1 < x_2$ випливає нерівність $f(x_1) \le f(x_2)$.

Означення. Зростаючі та спадні функції називаються ***строго монотонними***.

Означення. Незростаючі та неспадні функції називаються ***монотонними***.

Приклад. Функція $y = x^3$ зростаюча на множині R. Функція $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ спадна на множині R.

Нехай область визначення X функції $y = f(x)$ є симетричною відносно початку координат.

Означення. Функція $f(x)$ називається ***парною***, якщо для всіх $x \in X$ виконується умова $f(-x) = f(x)$.

Означення. Функція $f(x)$ називається ***непарною***, якщо для всіх $x \in X$ виконується умова $f(-x) = -f(x)$.

Приклад. Функції $y = x^2$, $y = x^4$, $y = \cos x$ є парними, функції $y = x$, $y = x^3$, $y = \sin x$, $y = tgx$, $y = ctgx$ є непарними. Крім того, існують функції, які не належать ні до парних, ні до непарних функцій. Функції $y = x + 3$, $y = x^2 - x + 2$ є ні парними, ні непарними.

Графіком парної функції є лінія, симетрична стосовно осі Oy. Графіком непарної функції є лінія, симетрична відносно початку координат.

Означення. Функція $y = f(x)$, визначена на всій числовій осі називається ***періодичною***, якщо $f(x+T) = f(x)$ для всіх $x \in (-\infty, \infty)$. Число T називається ***періодом*** функції.

Приклад. Функції $y = \sin x$ та $y = \cos x$ періодичні, $T = 2\pi$, функції $y = tgx$, $y = ctgx$ періодичні з періодом π.

Означення. Функція $y = f(x)$, визначена на множині X називається ***періодичною на множині*** X, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для будь-якого $x \in X$ $x+T$ та $x-T$ також належать до X і для всіх $x \in X$ $f(x+T) = f(x)$.

Властивості та графіки елементарних функцій

Лінійні функції

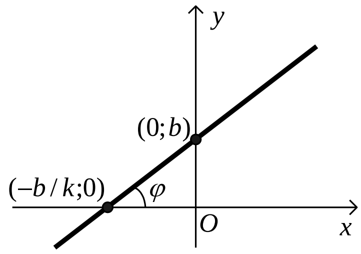


Рис. 7

Лінійна функція має вигляд $y = kx + b$, де b – відрізок, який задана пряма відтинає на осі Oy, k – тангенс кута нахилу заданої прямої до осі Ox, тобто $k = \mathrm{tg}\varphi$ (рис. 7).

Отже, пряму, яка є графіком лінійної функції можна побудувати так: на осі Oy відкласти відрізок b і через цю точку провести пряму під кутом $\varphi = \mathrm{arctg}k$ до осі Ox. Однак набагато зручніше будувати пряму за двома точками, одна з яких — точка з координатами $(0;b)$, другу точку можна визначити, порахувавши значення функції для якогось довільного значення x.

Часткові випадки лінійної функції.

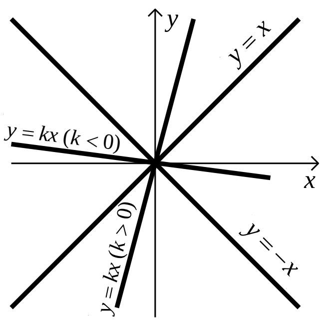


Рис. 8

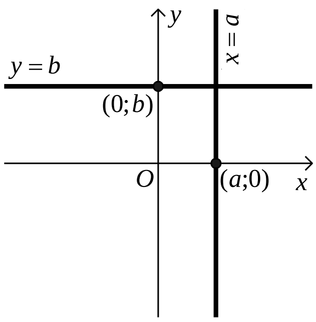


Рис. 9

1. Якщо немає вільного члена ($b = 0$), то функція набуває вигляду $y = kx$, графіком такої функції є пряма, що проходить через початок координат (рис. 8). Якщо $k > 0$, то пряма розміщена в першій і третій координатних чвертях, зокрема, при $k = 1$ пряма $y = x$ утворює кут 45° з віссю Ox. Якщо ж $k < 0$, то пряма розташована в другій і четвертій чвертях, зокрема при $k = -1$ пряма $y = -x$ є бісектрисою другої та четвертої координатних чвертей.

2. При $k = 0$ функція набуває вигляду $y = b$; графіком функції є пряма, паралельна осі Ox, яка перебуває на відстані b від цієї осі (рис. 9).

3. Рівняння $x = a$ задає пряму, яка паралельна до осі Oy і відстань від якої до цієї осі дорівнює a (рис. 9).

Степеневі функції

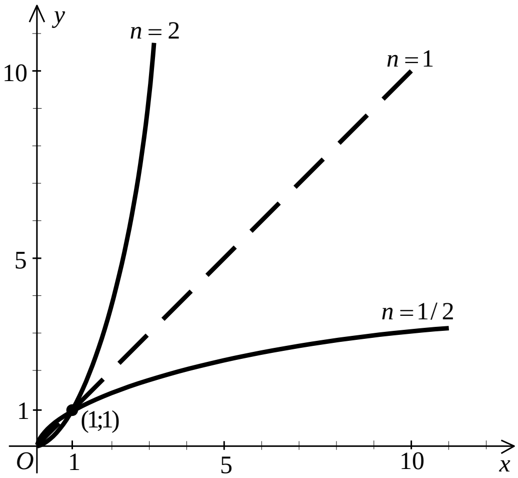


Рис. 10

Найпростіша степенева функція задається рівнянням $y = x^n$, де n – довільне додатне число.

При $n = 1$ функція набуває вигляду $y = x$. Графіком цієї функції є пряма, що проходить через початок координат і утворює кут 45° з віссю Ox.

Розглянемо тільки праву гілку графіка степеневої функції, яка розташована в першій чверті (рис. 10).

При $n > 1$ права гілка графіка опукла вниз, при $n < 1$ — опукла вгору. Всі криві (для всіх n) перетинаються в точці $(1;1)$, оскільки при $x = 1$ $y = 1^n = 1$. Правіше від цієї точки чим більший показник степеня n, тим вище розміщена крива.

При побудові повного графіка степеневої функції $y = x^n$ треба враховувати таке:

а) якщо степінь парний ($n = 2k$), то функція $y = x^{2k}$ парна, оскільки $(-x)^{2k} = x^{2k}$. Графік такої функції симетричний стосовно осі Oy і розміщений тільки в верхній півплощині, наприклад, $y = x^2$ (рис. 11);

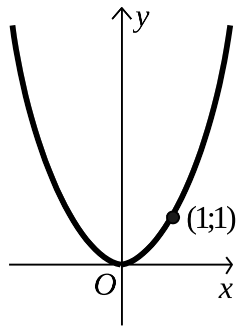


Рис. 11

б) якщо степінь непарний ($n = 2k + 1$), то функція $y = x^{2k+1}$ непарна, оскільки $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$. Графік такої функції симетричний стосовно початку координат і розміщений у першій і третій координатних чвертях, наприклад, $y = x^3$ (рис. 12);

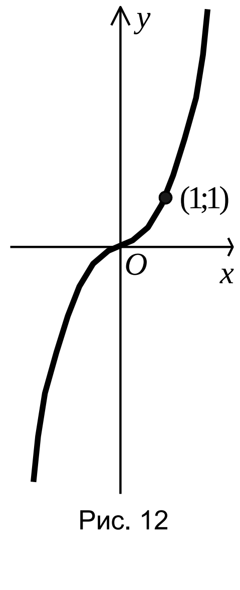


Рис. 12

в) якщо показник степеня дробове число, яке можна звести до правильного дробу $\frac{m}{n}$, де m і n — взаємно прості числа, то можливі три випадки:

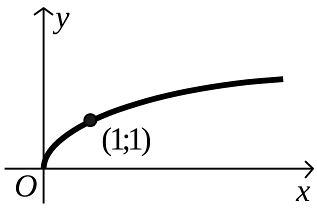


Рис. 13

1) знаменник — парне число (чисельник обов'язково повинен бути непарним). Тоді функція існує тільки для $x \geq 0$, графік функції розміщений у першій чверті, наприклад, $y = x^{\frac{1}{2}}$ (рис. 13);

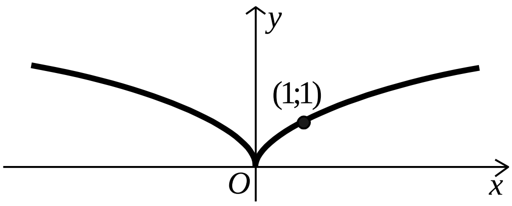


Рис. 14

2) знаменник — непарне число, чисельник — парне число, наприклад, $y = x^{\frac{2}{3}}$. Функція парна, оскільки $f(-x) = (-x)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-x)^2} = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} = f(x)$. Графік такої функції є в першій і другій координатних чвертях (рис. 14);

3) знаменник і чисельник — непарні взаємно прості числа, наприклад, $y = x^{\frac{1}{3}}$. Функція непарна, оскільки $f(-x) = (-x)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -x^{\frac{1}{3}} = -f(x)$.

Графік такої функції розміщений у першій і третій координатних чвертях (рис. 15).

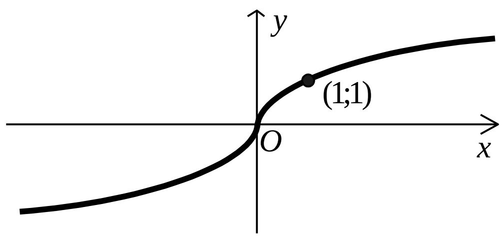


Рис. 15

Якщо в степеневій функції показник від'мний, то загальний вигляд функції $y = x^{-n}$, або $y = \frac{1}{x^n}$, де n – довільне додатне число.

Властивості функції.

1. Для функції з від'ємним показником $x \neq 0$ і $y \neq 0$, тобто графік не перетинає осей координат.

2. Графік проходить через точку $(1;1)$. Праві гілки графіків, що зображають функції з від'ємними показниками, розташовані в першій чверті (рис. 18). Залежно від показника n крива буде крутішою чи пологішою.

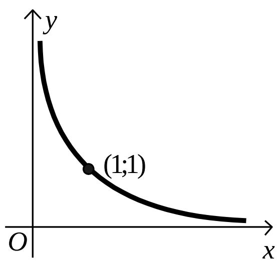


Рис. 18

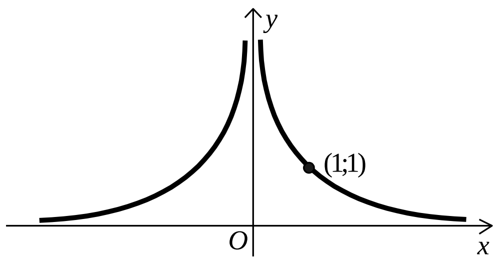


Рис. 19

3. Якщо n — парне $(n = 2k)$, то функція парна, графік розташований у верхній півплощині, ліва гілка симетрична до правої стосовно осі Y. Наприклад, $y = \frac{1}{x^2}$ (рис. 19).

4. Якщо n — непарне $(n = 2k+1)$, то функція непарна, ліва гілка симетрична до правої стосовно початку координат, наприклад, $y = \frac{1}{x^3}$ (рис. 20).

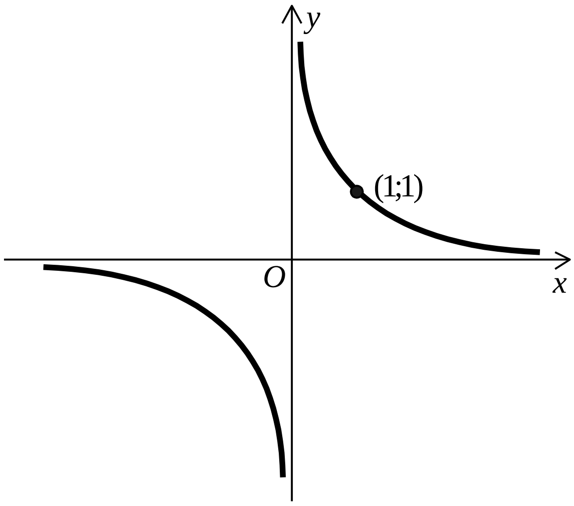


Рис. 20

Логарифмічні функції

Логарифмічна функція має вигляд $y = \log_a x$ $(a > 1)$. Областю визначення функції є інтервал $(0; \infty)$, оскільки $x > 0$. Функція не є ні парною, ні непарною. Графік перетинає вісь X у точці $(1; 0)$ (рис. 21). Функція зростає на всій області визначення, якщо $a > 1$, то $\log_a x_1 < \log_a x_2$ при $x_1 < x_2$. Функція опукла вгору на всій області визначення. На графік нанесено контрольну точку $(a; 1)$, оскільки при $x = a$ $y = \log_a a = 1$.

Графік функції $y = \log_a x$ $(0 < a < 1)$ можна побудувати, використавши рівність $\log_{1/a} x = -\log_a x$. Отже, графік цієї функції зображено на рис. 22.

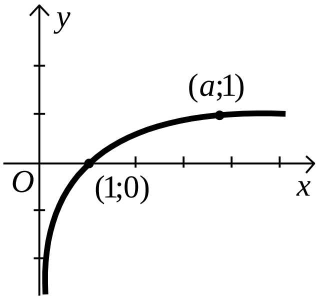


Рис. 21

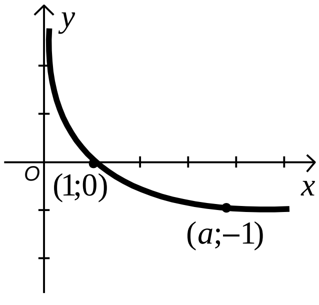


Рис. 22

Показникові функції

Показникова функція має вигляд $y = a^x$ $\quad (a > 0$ і $a \neq 1)$.

Областю визначення цієї функції є вся числова вісь $x \in (-\infty; \infty)$. Область значень функції $0 < y < \infty$, графік розміщений вище від осі абсцис. Графік проходить через точку $(0;1)$, оскільки при $x = 0$ $\quad y = a^0 = 1$. Подальше дослідження функції $y = a^x$ дає різні результати залежно від значення основи a.

При $a > 1$ функція зростаюча, оскільки при збільшенні аргументу x збільшується і функція $y = a^x$ при всіх значеннях аргументу x (рис. 23).

При $0 < a < 1$ функція є спадною, оскільки при зростанні аргументу x функція $y = a^x$ спадає при всіх значеннях аргументу x. Графік функції $y = a^x$ при $0 < a < 1$ зображено на рис. 24.

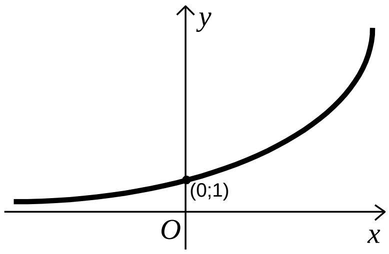


Рис. 23

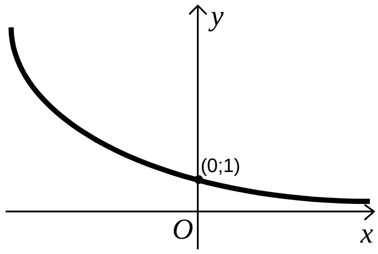


Рис. 24

Тригонометричні функції

1) $y = \sin x$.

Областю визначення цієї функції є вся числова вісь $x \in (-\infty; \infty)$. Область значень функції $-1 \le y \le 1$. Функція періодична з періодом 2π. Задана функція є непарною. Графік функції $y = \sin x$ зображено на рис. 25.

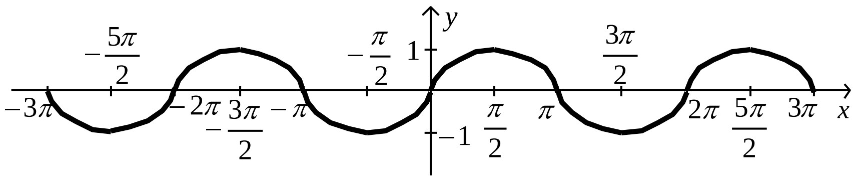


Рис. 25

2) $y = \cos x$.

Областю визначення цієї функції є вся числова вісь $x \in (-\infty; \infty)$. Область значень функції $-1 \le y \le 1$. Функція періодична з періодом 2π. Функція є парною. Графік функції $y = \cos x$ зображено на рис. 26.

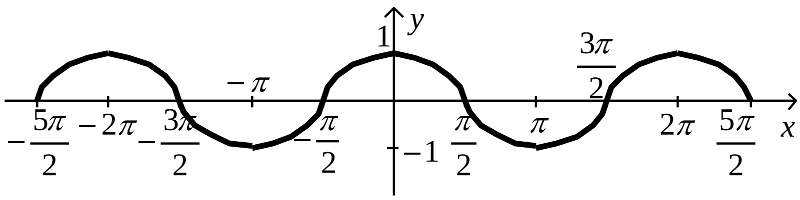


Рис. 26

3) $y = \operatorname{tg} x$.

Областю визначення цієї функції є нескінченний набір відкритих інтервалів $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, оскільки $x \neq \pi n \pm \frac{\pi}{2}$. Функція періодична з періодом π. Задана функція — непарна. Функція є зростаючою. Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ зображено на рис. 27.

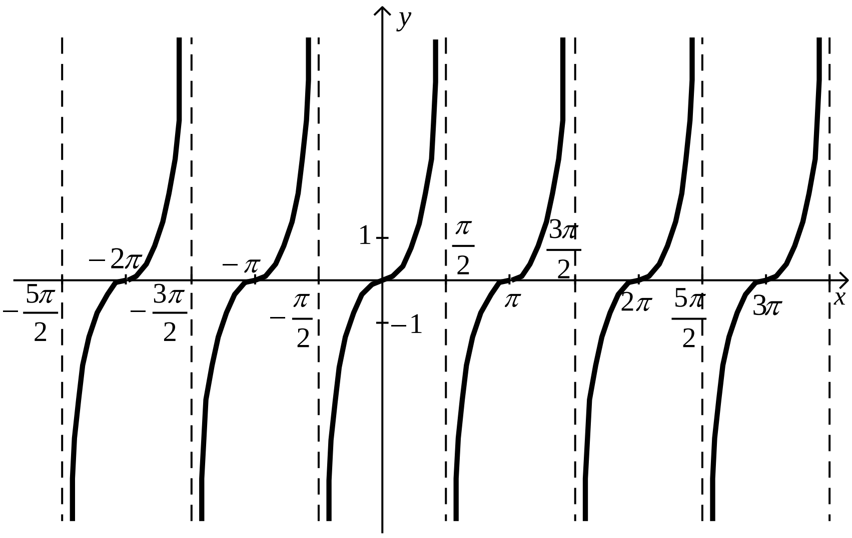


Рис. 27

4) $y = \operatorname{ctg} x$.

Областю визначення цієї функції є нескінченний набір відкритих інтервалів $(\pi n; \pi + \pi n)$, оскільки $x \neq \pi n$. Функція періодична з періодом π. Задана функція — непарна. Функція є спадною. Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ зображено на рис. 28.

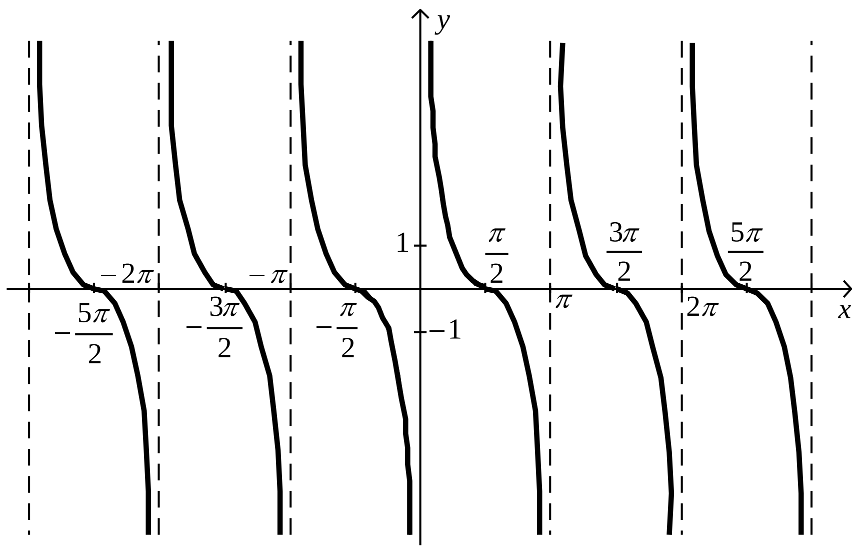


Рис. 28

Обернені тригонометричні функції

1) $y = \arcsin x$.

Областю визначення функції є відрізок $[-1;1]$, а множиною значень відрізок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Функція є непарною. Графік функції $y = \arcsin x$ зображено на рис. 45.

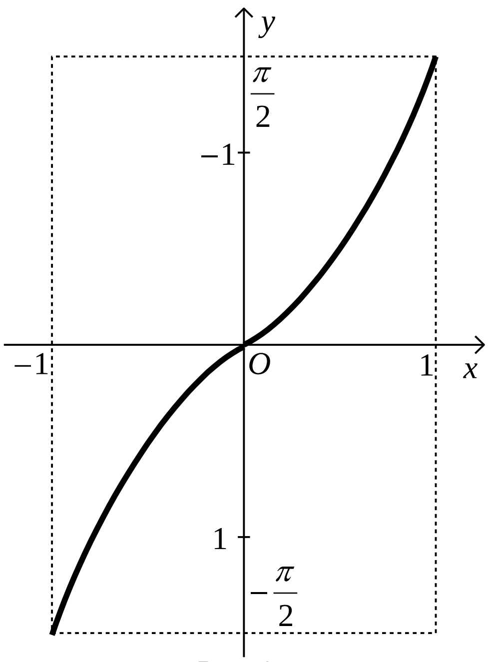


Рис. 45

2) $y = \arccos x$.

Областю визначення функції є відрізок $[-1;1]$, множиною значень відрізок $[0;\pi]$. Функція не є ні парною, ні непарною. Графік функції $y = \arccos x$ зображено на рис. 46.

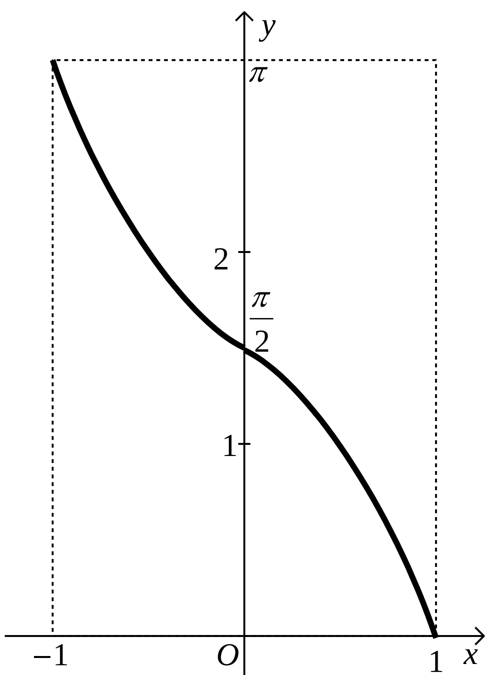


Рис. 46

3) $y = \operatorname{arctg} x$.

Областю визначення функції є вся числова вісь $(-\infty;\infty)$, множиною значень інтервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Функція є непарною. Функція зростає на всій області визначення, її графік проходить через початок координат. Графік функції $y = \operatorname{arctg} x$ зображено на рис. 47.

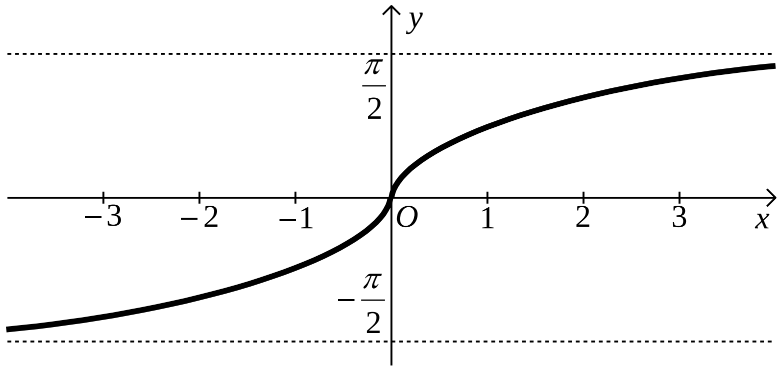


Рис. 47

4) $y = \mathrm{arccrg}\, x$

Областю визначення функції є вся числова вісь $(-\infty;\infty)$, множиною значень інтервал $(0;\pi)$. Функція не є ні парною, ні непарною. Функція спадає на всій області визначення, її графік проходить через точку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Графік функції $y = \mathrm{arccrg}\, x$ зображено на рис. 48.

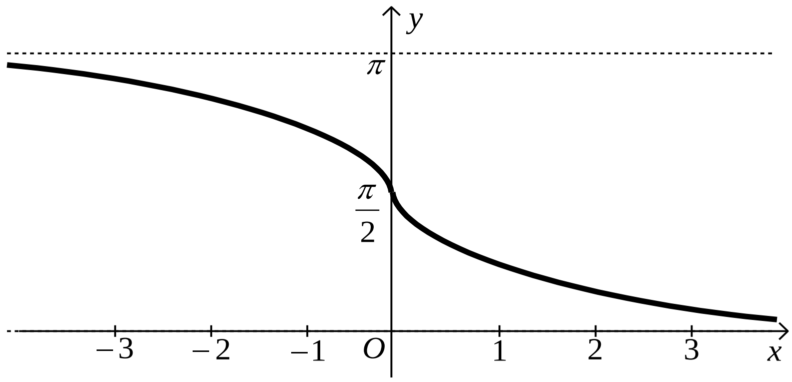


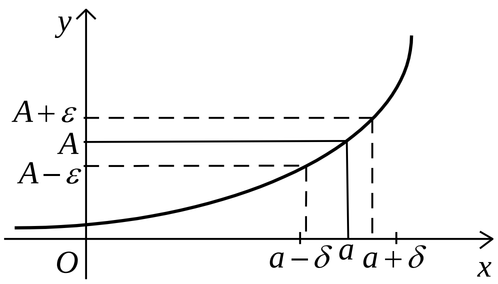
Рис. 48

Границя функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки a, крім, можливо, самої точки a.

Означення. Число A називається ***границею функції*** $f(x)$ ***в точці*** a ($A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$), якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для всіх x з умови $|x - a| < \delta$ випливає, що $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Геометрична інтерпретація поняття границі функції точці: для всіх x з $\delta -$околу точки a значення функції $f(x)$ містяться в $\varepsilon -$околі точки A. Див рисунок:



Означення. Число A називається ***границею функції*** $f(x)$ ***при*** $x \to \infty$ ($A = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$), якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M > 0$, що для всіх x з умови $|x| > M$ випливає, що $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Властивості границі функції

Твердження 1. Функція $f(x)$ не може мати двох різних границь в одній точці.

Доведення. Від супротивного. Припустимо, що $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ і $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$ і $A \neq B$. Оскільки $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta_1 > 0$, що для всіх x з умови $|x - a| < \delta_1$ випливає, що $|f(X) - A| < \varepsilon$. Оскільки $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$, то для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta_2 > 0$, що для всіх x з умови $|x - a| < \delta_2$ випливає, що $|f(X) - B| < \varepsilon$. Нехай $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тоді для довільного числа $\varepsilon > 0$ для всіх x з умови $|x - a| < \delta$ випливає, що $|f(X) - A| < \varepsilon$ і $|f(X) - B| < \varepsilon$. Тоді $|A - B| = |A - f(x) + f(x) - B| \leq |A - f(x)| + |f(x) - B| = |f(x) - A| + |f(x) - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Тобто, $|A - B| < 2\varepsilon$. Оскільки ε — довільне додатне число, то нехай $\varepsilon = \frac{1}{4}|A - B|$. Тоді $|A - B| < \frac{1}{2}|A - B|$. Оскільки $A \neq B$, то $1 < \frac{1}{2}$. Суперечність, отже, функція не може мати двох різних границь в одній точці.

Твердження 2. (про граничний перехід)

Якщо в деякому околі точки a, крім, можливо, самої точки a виконується нерівність $f(x) \leq g(x)$ і кожна з функцій $f(x)$ та $g(x)$ має границю в точці a, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

Твердження 3. (про границю проміжної функції)

Якщо в деякому околі точки a, крім, можливо, самої точки a виконується нерівність $f(x) \le g(x) \le h(x)$ і кожна з функцій $f(x)$ та $h(x)$ має границю в точці a і $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$, то функція $g(x)$ теж має границю в точці a і $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Твердження 4.

Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ мають границю в точці a, то в цій точці мають границю функції $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ($\lim\limits_{x\to a} g(x) \ne 0$) і мають місце рівності:

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$,

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$,

3) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$,

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$.

Важливі границі

При обчисленні границь, що містять тригонометричні функції та зводяться до невизначеності виду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, часто використовують **<u>першу важливу границю</u>**:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (1)$$

Доведемо рівність (1). Для цього використаємо відому подвійну нерівність $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, що виконується при $x \in \left(0; \pi/2\right)$. Поділимо всі частини цієї подвійної нерівності на $\sin x > 0$. Отримаємо нерівність:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Звідси маємо: $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$. Перейдемо у цій нерівності до границі при $x \to 0$. Отримуємо:

$$\lim_{x\to 0}\cos x \le \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \le \lim_{x\to 0} 1.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, то, отримуємо, що $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Нехай $x \to 0$ і при цьому $x < 0$. Тоді $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin(-x)}{-x}$, $-x > 0$. У цьому випадку маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{-x\to 0}\frac{\sin(-x)}{-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1.$$

При обчисленні цієї границі ми використали заміну $-x=t$. При $x\to 0$ $t\to 0$.
Таким чином, і у цьому випадку має місце рівність (1).

Наслідок. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$

Доведемо формулу:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad (2)$$

Формулу (2) називають **<u>другою важливою границею</u>**.

Для доведення формули (2) розглянемо два випадки.

1. Нехай $x\to+\infty$. Кожне значення змінної x знаходиться між двома послідовними натуральними числами: $n\le x<n+1$, де $n=[x]$, $n\in\mathbb{N}$. Тоді виконується нерівність $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}$, звідки $1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\le 1+\frac{1}{n}$. З цієї нерівності отримаємо:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

При $x\to+\infty$ $n\to\infty$, тому, перейшовши у останній подвійній нерівності до границі при $n\to\infty$, маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\le\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \qquad (3)$$

Далі використаємо формулу $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, $n\in\mathbb{N}$. Знайдемо границі послідовностей у лівій та правій частинах нерівності (3).

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{e}{1}=e.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e.$$

Таким чином, $e\le\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le e$, звідки випливає формула (2).

2. Нехай $x\to-\infty$. Зробимо заміну змінної $-x=t$. Тоді знаходимо:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=e\cdot 1=e.$$

Таким чином, формула (2) виконується при $x\to\pm\infty$.

Наслідок. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

Нескінченно великі функції

Означення. Функцію $y=f(x)$ називають *нескінченно великою при* $x\to x_0$, якщо $\forall M>0\ \exists\delta(M)>0:\ 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)|>M$.

Використовують позначення: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$, або $f(x)\to\infty$ при $x\to x_0$.

Приклад. Функція $y=\dfrac{1}{x-2}$ є нескінченно великою при $x\to 2$.

Означення. Функцію $y=f(x)$ називають *нескінченно великою при* $x\to\infty$, якщо $\forall M>0\ \exists P(M)>0:\ |x|>P\Rightarrow|f(x)|>M$.

Використовують позначення: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, або $f(x)\to\infty$ при $x\to\infty$.

Приклад. Функція $y=x^2$ є нескінченно великою при $x\to\infty$.

Нескінченно малі функції та їх властивості

Означення. Функцію $f(x)$ називають *нескінченно малою* при $x\to x_0$ $(x\to\infty)$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0\right)$.

Умову $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ можна записати у вигляді:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\,\exists\delta(\varepsilon)>0:0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon.$$

Використовуючи означення нескінченно малої величини, можна довести наступні основні властивості нескінченно малих величин.

1. Сума скінченної кількості нескінченно малих величин є нескінченно малою.
2. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу є нескінченно малою.
3. Добуток нескінченно малих величин є нескінченно малою.
4. Частка від ділення нескінченно малої при $x\to x_0$ величини на функцію, що має границю, відмінну від нуля при $x\to x_0$, є нескінченно малою.
5. Якщо функція $\alpha(x)$ є нескінченно малою, то обернена їй функція $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою, і, навпаки, якщо $f(x)$ є нескінченно великою, то $\dfrac{1}{f(x)}$ є нескінченно малою.

Порівняння нескінченно малих функцій

Дві нескінченно малі функції порівнюють між собою за допомогою дослідження їх відношення. Нехай $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ – нескінченно малі функції при $x \to x_0$, тобто виконуються рівності:

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = \lim_{x\to x_0} \beta(x) = 0.$$

<u>Означення.</u> Функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називають *нескінченно малими одного порядку* при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0, \quad C \in \mathbb{R}$.

<u>Означення.</u> Функцію $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою вищого порядку*, ніж $\beta(x)$ при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

<u>Означення.</u> Функцію $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою нижчого порядку*, ніж $\beta(x)$ при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$.

<u>Означення.</u> Функцію $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою* k*-го порядку* відносно $\beta(x)$ при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = C \neq 0, \quad C \in \mathbb{R}$.

<u>Означення.</u> Нескінченно малі функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називають *непорівняними* при $x \to x_0$, якщо у точці x_0 не існує границі їх відношення.

У означеннях замість $x \to x_0$ може розглядатися $x \to \pm\infty$.

Серед нескінченно малих функцій одного порядку важливе значення для практичних застосувань мають еквівалентні нескінченно малі.

<u>Означення.</u> Функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$, що є нескінченно малими при $x \to x_0$, називають *еквівалентними нескінченно малими*, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Використовують позначення $\alpha(x) \sim \beta(x)$.