Множина комплексних чисел $\mathbf{C}$

Означення. Комплексним числом називається число вигляду $z = a + bi$, де $a, b \in \mathrm{R}$, i – уявна одиниця, для якої $i^2 = -1$.

Дійсною частиною комплексного числа $z = a + bi$ є $a = \mathrm{Re}\, z$, а уявною – $b = \mathrm{Im}\, z$.

Означення. Два комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$ називаються рівними $z_1 = z_2$, якщо

$$\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

Дії з комплексними числами

1. Додавання

Якщо $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, то $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

2. Віднімання

Якщо $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, то $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$.

3. Множення

Якщо $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, то $z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 =$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i.$$

Означення. Спряженим до комплексного числа $z = a + bi$ називається комплексне число $\bar{z} = a - bi$.

4. Ділення

Для того, щоб поділити комплекні числа, треба чисельник і знаменник домножити на спряжене число до знаменника, тобто, якщо $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Операція спряження має такі властивості.

1. $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z$.
2. $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\, z$.

3. $\bar{\bar{z}} = z$.

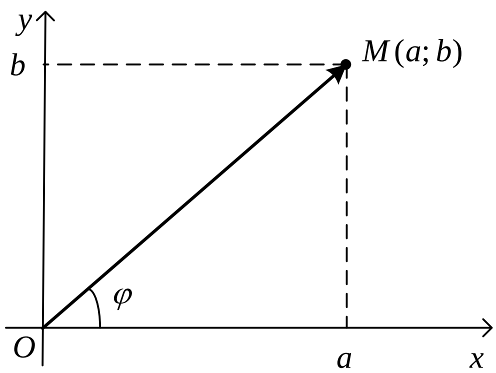
4. Якщо $z \in \mathbf{R}$, то $\bar{z} = z$.

5. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$.

6. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

7. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Комплексному числу $z = a + bi$ поставимо у відповідність точку $M(a;b)$ площини $\mathbf{R}^2$. По осі Ox відкладаємо дійсну частину комплексного числа $\operatorname{Re} z$, по осі Oy – уявну частину $\operatorname{Im} z$. Початку координат відповідає $z = 0$.



Спряженому комплексному числу $\bar{z} = a - bi$ відповідатиме точка, симетрична до точки $M(a;b)$ стосовно дійсної осі.

Модуль і аргумент комплексного числа

Означення. Модулем комплексного числа $z = a + bi$ називається довжина вектора $\overrightarrow{OM}$, тобто $r = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Означення. Аргументом комплексного числа $z = a + bi$ називається кут $\varphi = \arg z$ між вектором $\overrightarrow{OM}$ і додатним напрямом осі Ox.

Очевидно, що аргумент комплексного числа визначається з системи $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r}. \end{cases}$

Вважатимемо, що $0 \le \varphi < 2\pi$.

Тригонометрична форма комплексного числа

Означення. Тригонометричною формою комплексного числа z називають його запис у вигляді $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де $r = |z|$ – модуль числа z, а $\varphi = \arg z$.

Нехай задано два комплексні числа в тригонометричній формі $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ та $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тоді

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Отже, при множенні двох комплексних чисел їхні модулі перемножуються, а аргументи додаються. Це правило можна узагальнити для довільної скінченної кількості співмножників.

При діленні двох комплексних чисел їхні модулі діляться, а аргументи віднімаються

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right).$$

Якщо за формулою множення комплексних чисел у тригонометричній формі множити n однакових комплексних чисел $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то одержимо ***формулу Муавра***

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Добування кореня з комплексного числа

Означення. Коренем n – го степеня ($n \in \mathbf{N}$) з комплексного числа z називається таке число ω, що $\omega^n = z$. Його позначають $\sqrt[n]{z}$.

Нехай $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Якщо $z = 0$, то $\sqrt[n]{z} = 0$.

Припустимо, що $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$. Тоді

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Два комплексні числа рівні, якщо їхні модулі рівні, а аргументи рівні, або відрізняються на число, кратне періоду 2π. Отож,

$$\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2\pi k, \qquad \text{де } k \in \mathbf{Z}.$$

Звідси $\quad \rho = \sqrt[n]{r}, \qquad \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}, \qquad k \in \mathbf{Z}.$

Отже, $\omega_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k \in \mathbf{Z}$.

При $k = 0, 1, \ldots, n-1$ одержимо різні значення ω_k, а далі вони будуть повторюватися.

Отже, для $z \neq 0$ існує n різних значень кореня n – го степеня, які знаходимо за формулою

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Корені n – го степеня з комплексного числа розміщені у вершинах правильного n-кутника.