Власні значення і власні вектори матриці

Нехай $A = (a_{ij})$ — деяка квадратна матриця розміру $n \times n$ з дійсними елементами, λ — деяке невідоме число.

Означення Ненульовий вектор $\vec{x}$ називається власним вектором матриці A, що відповідає власному значенню λ, якщо $A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$.

Геометричний зміст полягає в тому, що під дією матриці A власний вектор переходить у колінеарний до нього, а число λ є коефіцієнтом розтягу.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\underline{n \times \underline{n}} = \underline{\underline{n} \times 1}$$

Тоді $\quad A \cdot \vec{x} - \lambda \vec{x} = \vec{0}$,

$(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$,

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Дістанемо однорідну систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

Система (1) має ненульовий розв'язок ($\vec{x} \neq \vec{0}$), якщо $\det(A - \lambda E) = 0$.

Означення. Рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$ називається характеристичним рівнянням матриці A, а його корені — власними значеннями матриці А.

Означення. Множина власних значень матриці A називається спектром матриці.

Для кожного λ_i знаходимо розв'язок системи лінійних рівнянь $(A - \lambda_i E)\vec{x} = \vec{0}$. Ненульові розв'язки цієї системи будуть власними векторами, відповідними власному значенню λ_i. Ці власні вектори утворюють фундаментальну систему розв'язків системи (1).

Властивості власних векторів та власних значень матриці

матриці

1. Власні вектори лінійного оператора, які відповідають різним власним значенням, лінійно незалежні.
2. Власні значення симетричної матриці є дійсні, а власні вектори, що відповідають різним власним значенням, перпендикулярні.
3. Якщо власні значеннння матриці A різні, то існує матиця T, складена з власних векторів матриці A, що матриця $B = T^{-1}AT$ – діагональна з власними значеннями по діагоналі.

Приклад. Знайти власні значення та власні вектори матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 7\end{pmatrix}$.

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 4\\ -2 & 7-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(1-\lambda)(7-\lambda)+8=0$$

$$7-\lambda-7\lambda+\lambda^2+8=0$$

$$\lambda^2-8\lambda+15=0$$

$\lambda_1=3 \quad \lambda_2=5$ – власні значення

Для $\lambda=3$:

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x+a_{12}y=0\\ a_{21}x+(a_{22}-\lambda)y=0\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -2 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$x-2y=0$

y – вільна

$r=\operatorname{rang}A=1$

$n=2$

$n-r=1$ вільна

$y=1$

$x-2=0$; $x=2$

$\vec{x}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ – власний вектор, що відпов. $\lambda=3$

Для $\lambda=5$

$$\begin{pmatrix}-4 & 4\\ -2 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$x-y=0$

y – вільна

$r=1$

$n=2$

$y=1$

$x=1$

$\vec{x}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ – власний вектор, що відпов. власн. значенню $\lambda=5$

Приклад. Знайти власні значення та власні вектори матриці $A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&-2&0\\-2&1-\lambda&-2\\0&-2&-\lambda\end{vmatrix}=\underbrace{(2-\lambda)(1-\lambda)}(-\lambda)-4(2-\lambda)+4\lambda=$$

$$=(2-2\lambda-\lambda+\lambda^2)(-\lambda)-8+4\lambda+4\lambda=$$

$$=-2\lambda+3\lambda^2-\lambda^3-8+8\lambda=-\lambda^3+6\lambda+3\lambda^2-8=0$$

$$\lambda^3-3\lambda^2-6\lambda+8=0$$

$$\pm1,\ \pm2,\ \pm4,\ \pm8$$

$\lambda=1$ $\quad 1^3-3\cdot1^2-6\cdot1+8=0$ $\quad$ УРА, ми вгадали

$$\begin{array}{r|l}\lambda^3-3\lambda^2-6\lambda+8 & \lambda-1\\ \hline -(\lambda^3-\lambda^2) & \lambda^2-2\lambda-8\\ -2\lambda^2-6\lambda & \\ -(-2\lambda^2+2\lambda) & \\ -8\lambda+8 & \\ -(-8\lambda+8) & \\ 0 & \end{array}$$

— λ – „те, що вгадали"

$$(\lambda-1)\cdot(\lambda^2-2\lambda-8)=0$$

$\lambda-1=0$ $\qquad \lambda^2-2\lambda-8=0$

$\lambda_1=1$ $\qquad \lambda_2=-2$ $\qquad \lambda_3=4$

Для $\lambda=1$

$$\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&0&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&-4&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{array}{ccc}x&y&z\\ \hline \end{array}\begin{pmatrix}\boxed{1}&-2&\boxed{0}\\\boxed{0}&2&\boxed{1}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$r=2$

$n=3$

y – вільна

$$\begin{cases}x-2y=0\\2y+z=0\end{cases}\qquad y=1$$

$2\cdot1+z=0$

$z=-2$

$x-2=0$

$x=2$

$\vec{X_1}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ – власний вектор для $\lambda=1$

Для $\lambda=-2$

$\vec{X_2}=\begin{pmatrix}1/2\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r=2, \; n=3$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad z = 1 \quad y - 1 = 0 \quad y = 1$$

$$2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\vec{x_2} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Для $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r=2, \; n=3$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \quad z = 1 \quad y + 2 = 0$$

$$y = -2$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

$$\vec{x_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ – вл. вектор для $\lambda = 4$

Приклад. Знайти власні значення та власні вектори матриці $A=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Розв'язування.

Обчислимо характеристичний многочлен матриці A

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} \frac{2}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-\lambda \end{vmatrix}=\frac{1}{27}\begin{vmatrix} 2-3\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-3\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-3\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{27}\left((2-3\lambda)^3-1-1-3(2-3\lambda)\right)=$$

$$=\frac{1}{27}(8-36\lambda+54\lambda^2-27\lambda^3-8+9\lambda)=-\lambda^3+2\lambda^2-\lambda.=0$$

$$-\lambda(\lambda^2-2\lambda+1)=0$$

$$-\lambda=0 \qquad \lambda^2-2\lambda+1=0$$

$$\lambda_1=0 \qquad (\lambda-1)^2=0$$

$$\lambda_2=\lambda_3=1$$

Коренями цього многочлена є власні значення $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

Знайдемо власний вектор для власного значення $\lambda=0$ як ненульовий розв'язок системи лінійних рівнянь

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Зведемо матрицю системи до східчастого вигляду

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$r=2$

Система лінійних рівнянь набуде вигляду

$$\begin{cases} -x+2y-z=0, \\ y-z=0. \end{cases}$$

Нехай $\underline{z=1}$, тоді $\begin{cases} -x+2y=1, \\ y=1, \end{cases}$, $x=1$. Отже, $\vec{x}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – власний вектор, який відповідає власному значенню $\lambda=0$.

Для $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ власні вектори знайдемо з системи

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Зведемо матрицю системи до східчастого вигляду

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$r = 1$
$n = 3$
2 вільні
y, z – вільні

Система лінійних рівнянь набуде вигляду

$x + y + z = 0$.

$y = 1 \quad z = 0$ $\qquad$ $y = 0 \quad z = 1$

Одержуємо два власні вектори $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, знайдені як фундаментальна система розв'язків для цієї системи лінійних рівнянь.

Отже, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – власний вектор, який відповідає власному значенню $\lambda = 0$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – власні вектори, які відповідають власному значенню $\lambda = 1$.

Приклад. Знайти власні значення та власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти таку невироджену матрицю T, щоб матриця $A' = T^{-1}AT$ була діагональною.

Розв'язування. Знайдемо власні значення лінійного оператора як корені характеристичного многочлена

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 4) - 2(2 - 2\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 10 . = 0$$

$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 3\lambda + 10 = 0$

$\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 5 \quad \pm 10$

$\lambda=1 \qquad 1-6+3+10 \neq 0$

$\lambda=-1 \qquad -1-6-3+10=0$

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3-6\lambda^2+3\lambda+10 & \lambda+1 \\ \cline{2-2} -\ \lambda^3+\lambda^2 \qquad\qquad & \lambda^2-7\lambda+10 \\ \hline -7\lambda^2+3\lambda \qquad & \\ -\ -7\lambda^2-7\lambda \qquad & \\ \hline -\ 10\lambda+10 & \\ 10\lambda+10 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$(\lambda+1)(\lambda^2-7\lambda+10)=0$

$\lambda_1=-1 \qquad \lambda^2-7\lambda+10=0$

$\lambda_2=2 \qquad \lambda_3=5$

Корені цього многочлена $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=5$.

Обчислимо відповідні власні вектори.

Для $\lambda=-1$ розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Зводимо її матрицю до східчастого вигляду

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & 0 \end{array}\right).$$

$r=2$

Система лінійних рівнянь набуде вигляду

$z=2$

$$\begin{cases} 2x+3y+2z=0, \\ y+z=0. \end{cases}$$

Розв'зком цієї системи є, наприклад, $x=1$, $y=-2$, $z=2$, тому відповідний власний вектор

$$\vec{x}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно знаходимо інші власні вектори

$$\vec{x}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю T, стовпцями якої є координатні стовпці власних векторів. Отже,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо матрицю $T^{-1} = \dfrac{1}{27}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ 6 & -3 & -6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Звідси одержуємо

$$A' = T^{-1}AT = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ 6 & -3 & -6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$