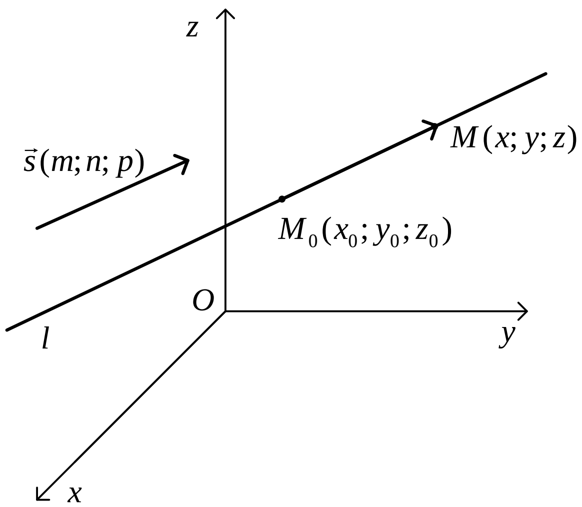
Рівняння прямої в просторі

Рівняння прямої, що проходитьчерез задану точку

паралельно до заданого вектора

Означення. Ненульовий вектор, паралельний до прямої називається *напрямним* вектором прямої.

Нехай пряма l проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ паралельно до заданого вектора $\vec{s}(m; n; p)$.



Нехай $M(x; y; z)$ – довільна точка прямої. Тоді вектор $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ паралельний до вектора $\vec{s}(m; n; p)$, а координати цих векторів пропорційні. Тому

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

–*канонічне рівняння прямої в просторі*.

Прирівнявши відношення з канонічного рівняння прямої до деякого параметра t, отримаємо $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$, або

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

– *параметричне рівняння прямої в просторі*.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай пряма l проходить через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ та $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Тоді вектор $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ буде напрямним вектором прямої l. Запишемо канонічне рівняння цієї прямої, врахувавши, що пряма проходить через точку $M_1(x_1;\ y_1; z_1)$. Тоді

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

– *рівняння прямої в просторі, що проходить через дві точки*.

Пряма як перетин двох площин

Якщо дві площини в просторі перетинаються, то вони перетинаються по прямій. Тому пряму в просторі можна задати за допомогою рівнянь тих площин, внаслідок перетину яких утворюється ця пряма. Тобто, загальне рівняння прямої в просторі набуде вигляду

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases},$$

причому нормальні вектори площин $\vec{n}_1(A_1; B_1; C_1)$ та $\vec{n}_2(A_2; B_2; C_2)$ не повинні бути паралельними.

Отже,

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

– *загальне рівняння прямої в просторі.*

Для того, щоб, маючи загальне рівнянння прямої в просторі, записати її канонічне чи параметричне рівнянння, треба знайти точку, через яку проходить пряма, та напрямний вектор цієї прямої. Щоб знайти необхідну точку, треба в загальне рівнянння прямої підставити конкретне значення однієї невідомої, наприклад, $z = 0$, потім з системи знайти інші невідомі x та y. Для того, щоб знайти напрямний вектор прямої $\vec{s}$, зауважимо, що $\vec{s}$ перпендикулярний до векторів $\vec{n}_1(A_1; B_1; C_1)$ та $\vec{n}_2(A_2; B_2; C_2)$, тому як $\vec{s}$ можна взяти векторний добуток векторів $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$, тобто $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, або

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

– *формула напрямного вектора прямої в просторі, заданої загальним рівнянням.*

Кут між прямими

Нехай дві прямі в просторі задані канонічними рівняннями, тобто

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \qquad l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Кут α між прямими l_1 та l_2 дорівнює куту між їхніми напрямними векторами $\vec{s}_1(m_1; n_1; p_1)$ та $\vec{s}_2(m_2; n_2; p_2)$. Тому

$$\cos\alpha = \cos(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = \frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}},$$

отже, кут між прямими, заданими канонічними рівняннями, обчислюють за формулою

$$\cos\alpha = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Для того, щоб прямі l_1 та l_2 були паралельними, необхідно, щоб їхні напрямні вектори були паралельними, тому координати векторів повинні бути пропорційними. Тому

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

– умова паралельності прямих, заданих канонічними рівняннями.

Для того, щоб прямі l_1 та l_2 були перпендикулярними, необхідно, щоб їхні напрямні вектори були перпендикулярними, тому скалярний добуток $(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0$, тобто

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

– умова перпендикулярності прямих, заданих канонічними рівняннями.

Розміщення двох прямих у просторі

Дві прямі в просторі можуть бути мимобіжними, а можуть лежати в одній площині, тобто перетинатися чи бути паралельними. Нехай задано дві прямі в просторі

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \qquad l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ належить прямій l_1, напрямний вектор цієї прямої $\vec{s}_1(m_1; n_1; p_1)$. Аналогічно точка $M_2(x_2; y_2; z_2)$ належить прямій l_2, напрямний вектор цієї прямої $\vec{s}_2(m_2; n_2; p_2)$. Для того, щоб прямі l_1 та l_2 лежали в одній площині, необхідно та достатньо, щоб вектори $\overrightarrow{M_1 M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, $\vec{s}_1(m_1; n_1; p_1)$ і $\vec{s}_2(m_2; n_2; p_2)$ були компланарними, тобто, щоб виконувалася умова

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

– умова належності двох прямих одній площині.

Перетин прямої та площини

Знайдемо точку перетину прямої $l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ та площини $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$.

Запишемо параметричне рівняння прямої $\pi : \begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt \end{cases}$ та розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

Підставивши значення x, y, z з перших трьох рівнянь у четверте, одержимо рівняння

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0,$$

$$(Am + Bn + Cp)t = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D).$$

Можливі такі три випадки.

1. Якщо $Am + Bn + Cp \neq 0$, то система має єдиний розв'язок

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp},$$

$$x = x_0 - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp} m,$$

$$y = y_0 - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp} n,$$

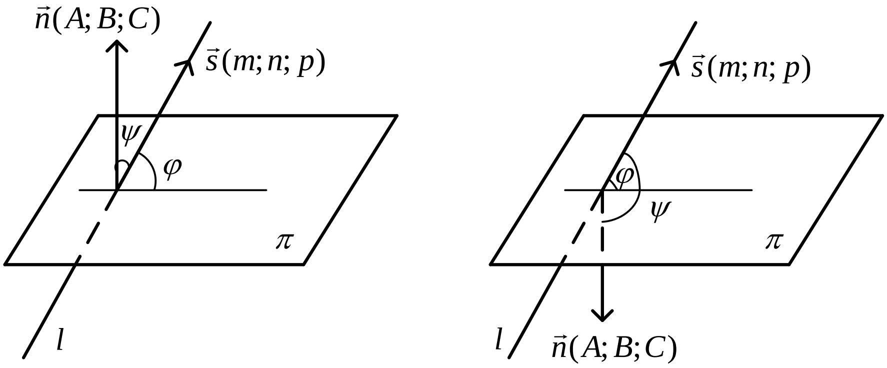
$$z = z_0 - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp} p.$$

Тобто пряма перетинає площину.

2. Якщо $Am + Bn + Cp = 0$, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то система не має розв'язку, пряма паралельна до площини.
3. Якщо $Am + Bn + Cp = 0$, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то система має безліч розв'язків, пряма l належить площині π.

Кут між прямою та площиною

Нехай задано пряму l з напрямним вектором $\vec{s}(m;n;p)$ і площину π з нормальним вектором $\vec{n}(A;B;C)$. Позначимо через φ кут між прямою l і площиною π, а через ψ – кут між векторами $\vec{s}(m;n;p)$ і $\vec{n}(A;B;C)$. Очевидно, що $\varphi = 90° - \psi$, якщо $\psi \leq 90°$ (рис. 3.29) і $\varphi = \psi - 90°$, якщо $\psi > 90°$. Крім того, $\sin\varphi = |\cos\psi|$.



Обчислюємо

$$\cos\psi = \cos(\vec{s}, \vec{n}) = \frac{\vec{s} \cdot \vec{n}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

тому

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

– формула кута між прямою та площиною.

Пряма l та площина π паралельні, якщо вектори $\vec{s}(m;n;p)$ та $\vec{n}(A;B;C)$ перпендикулярні, тому

$$Am + Bn + Cp = 0$$

– умова паралельності прямої та площини.

Пряма l та площина π перпендикулярні, якщо вектори $\vec{s}(m;n;p)$ та $\vec{n}(A;B;C)$ паралельні, тому

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

– умова перпендикулярності прямої та площини.