Поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називається множина всіх точок $M(x, y, z)$ простору $\mathbf{R}^3$, координати яких задовольняють рівняння

$$f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0,$$

причому хоча б один з коефіцієнтів a_{ij} відмінний від нуля.

Теорема. *Для довільної поверхні другого порядку існує прямокутна система координат, в якій рівняння цієї поверхні має один з таких виглядів:*

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ – еліпсоїд;
2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ – уявний еліпсоїд;
3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ – точка;
4. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ – однопорожнинний гіперболоїд;
5. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ – двопорожнинний гіперболоїд;
6. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ – еліптичний конус;
7. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2pz$ – еліптичний параболоїд;
8. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2pz$ – гіперболічний параболоїд;
9. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – еліптичний циліндр;
10. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ – уявний циліндр;
11. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – гіперболічний циліндр;
12. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ – вісь Oz;
13. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ – пара площин $\dfrac{y}{b} = \pm\dfrac{x}{a}$, які перетинаються;
14. $x^2 = 2py$ – параболічний циліндр;
15. $x^2 = a^2$ – пара паралельних площин;
16. $x^2 = -a^2$ – пара уявних площин;
17. $x^2 = 0$ – пара площин, які збігаються.

Еліпсоїд

Означення. *Еліпсоїдом* називається поверхня (рис. 1), яка в деякій прямокутній системі координат задана канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Координатні площини є площинами симетрії елепсоїда, еліпсоїд симетричний стосовно осей кооодинат і стосовно початку координат.

Еліпсоїд має шість вершин: $A_1(a;0;0)$, $A_2(-a;0;0)$, $B_1(0;b;0)$, $B_2(0;-b;0)$, $C_1(0;0;c)$, $C_2(0;0;-c)$. Відрізки $A_1A_2=2a$, $B_1B_2=2b$, $C_1C_2=2c$ називаються осями елепсоїда, а числа a, b та c – його півосями.

Якщо еліпсоїд перетнути площиною xOy, тобто площиною з рівнянням $z=0$, то утвориться еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Аналогічно перетином еліпсоїда і площин $x=0$ та $y=0$ є еліпси $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ та $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, відповідно.

Якщо $a=b$, то еліпсоїд задається рівнянням $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\quad+\frac{z^2}{c^2}=1$ і називається *еліпсоїдом обертання* навколо осі Oz. Аналогічно можна одержати еліпсоїди обертання навколо осей Ox та Oy.

Якщо $a=b=c$, то еліпсоїд є сферою $x^2+y^2+z^2=a^2$.

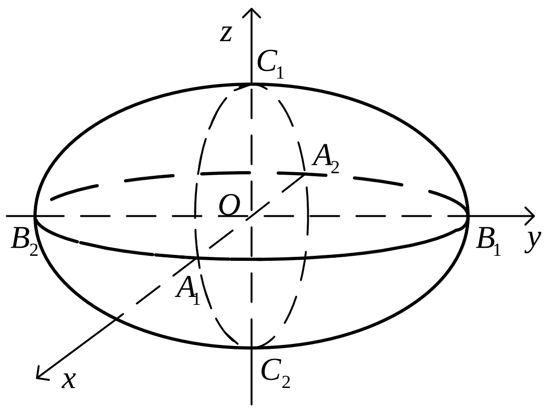

Рис. 1

Однопорожнинний гіперболоїд

Означення. *Однопорожнинним гіперболоїдом* називається поверхня (рис.2), яка в деякій прямокутній системі координат задана канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Координатні площини є площинами симетрії однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, а початок координат – його центром симетрії (рис. 2).

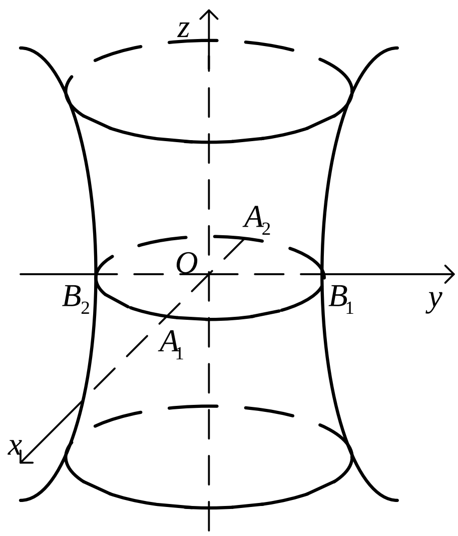

Рис. 2

Однопорожнинний гіперболоїд має чотири вершини: $A_1(a;0;0)$, $A_2(-a;0;0)$, $B_1(0;b;0)$, $B_2(0;-b;0)$. Відрізки $A_1A_2=2a$, $B_1B_2=2b$ називаються осями однопорожнинного гіперболоїда, а числа a, b та c – його півосями.

Якщо однопорожнинний гіперболоїд перетнути площиною xOy, тобто площиною з рівнянням $z=0$, то утвориться еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Перетином однопорожнинного гіперболоїда і площин $x=0$ та $y=0$ є гіперболи $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ та $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, відповідно. Якщо однопорожнинний гіперболоїд перетнути площиною $z=h$, де $h\in\mathbf{R}$, то утвориться еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}$.

Двопорожнинний гіперболоїд

Означення. *Двопорожнинним гіперболоїдом* називається поверхня (рис. 3), яка в деякій прямокутній системі координат задана канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Координатні площини є площинами симетрії двопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, а початок координат – його центром симетрії (рис. 3).

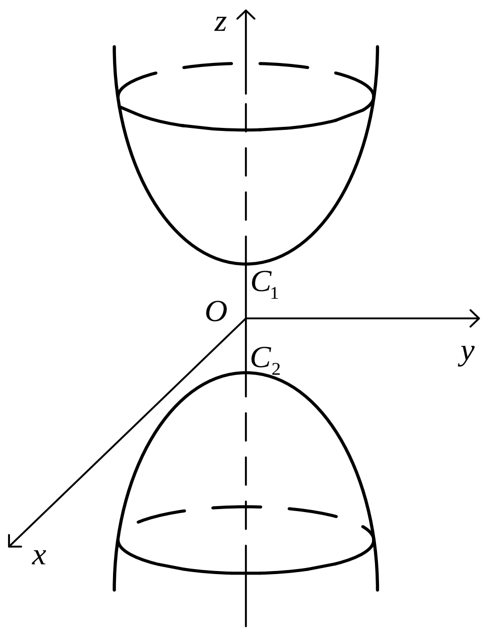

Рис. 3

Двопорожнинний гіперболоїд має дві вершини: $C_1(0;0;c)$, $C_2(0;0;-c)$. Відрізок $C_1C_2=2c$ є віссю симетрії, а числа a, b та c – півосями двопорожнинного гіперболоїда.

Перетином двопорожнинного гіперболоїда і площин $x=0$ та $y=0$ є гіперболи $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ та $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$. Якщо двопорожнинний гіперболоїд перетнути площиною $z=h$, де $h\in\mathbf{R}$, $|h|>c$, то утвориться еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1$.

Конус

Означення. *Еліптичним конусом* називається поверхня (рис. 4), яка в деякій прямокутній системі координат задана канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

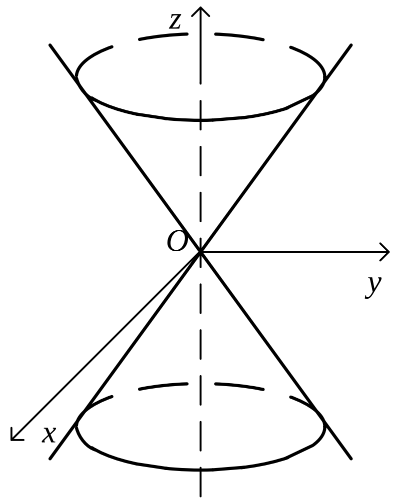

Рис. 4

Конус утворюється прямими, які проходять через початок координат. Справді, треба довести, що пряма, яка з'єднує початок координат та довільну точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ конуса, повністю лежить на конусі. Очевидно, що $\frac{x_0{}^2}{a^2}+\frac{y_0{}^2}{b^2}-\frac{z_0{}^2}{c^2}=0$. Якщо деяка точка $M(x;y;z)$ належить прямій, то її координати $M(tx_0;ty_0;tz_0)$, де t – деяке число. Підставимо координати цієї точки в рівняння конуса, одержимо рівність $\frac{x_0{}^2}{a^2}+\frac{y_0{}^2}{b^2}-\frac{z_0{}^2}{c^2}=0$.

Перетином конуса та площини $z=h$, де $h\in\mathbf{R}$, є крива $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}$, тобто еліпс $\frac{x^2}{\frac{a^2h^2}{c^2}}+\frac{y^2}{\frac{b^2h^2}{c^2}}=1$.

Еліптичний параболоїд

Означення. *Еліптичним параболоїдом* називається поверхня (рис. 5), яка в деякій прямокутній системі координат задана канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz.$$

Координатні площини xOz та yOz є площинами симетрії еліптичного параболоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$, вісь Oz – його віссю симетрії, а початок координат – його вершиною (рис. 5).

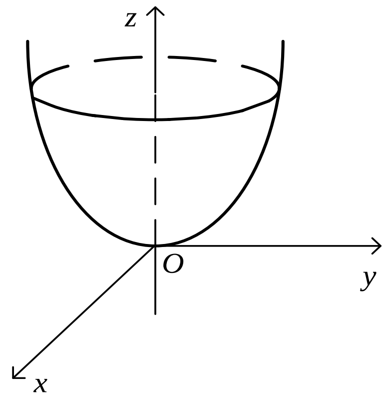

Рис. 5

Перетином еліптичного параболоїда та площин $x=0$ та $y=0$ є, відповідно, параболи $y^2=2b^2pz$ та $x^2=2a^2pz$. Якщо еліптичний параболоїд перетнути площиною $z=h$, де $h\in\mathbf{R}$, $|h|>0$, то утвориться еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2ph$.

Гіперболічний параболоїд

Означення. *Гіперболічним параболоїдом* називається поверхня (рис. 6), яка в деякій прямокутній системі координат задана канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz.$$

Координатні площини xOz та yOz є площинами симетрії гіперболічного параболоїда, вісь Oz – його віссю симетрії, а початок координат – його вершиною (рис. 6).

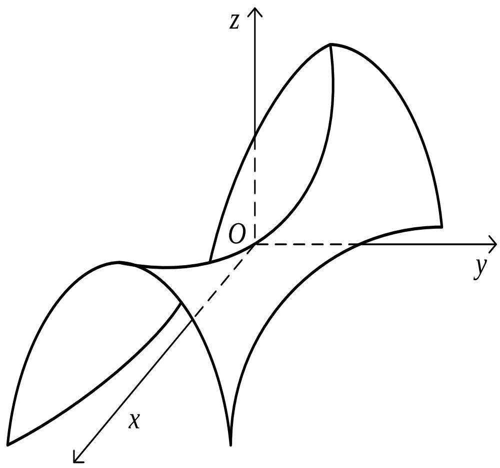

Рис. 6

Перетином гіперболічного параболоїда та площин $x=0$ і $y=0$ є, відповідно, параболи $y^2=-2b^2pz$ та $x^2=2a^2pz$. Якщо гіперболічний параболоїд перетнути площиною $z=h$, де $h\in\mathbf{R}$, $h\neq 0$, то утвориться гіпербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2ph$. Перетином гіперболічного параболоїда та площини $z=0$ є пара прямих

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \text{ та } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0.$$

Циліндри

Означення. *Циліндром* називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат задана канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

– еліптичний циліндр (рис. 7), або

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

– гіперболічний циліндр (рис. 8), або

$$x^2=2py$$

– параболічний циліндр (рис. 9).

Циліндри утворені прямими лініями, паралельними осі Oz, на це вказує відсутність координати z в рівняннях.

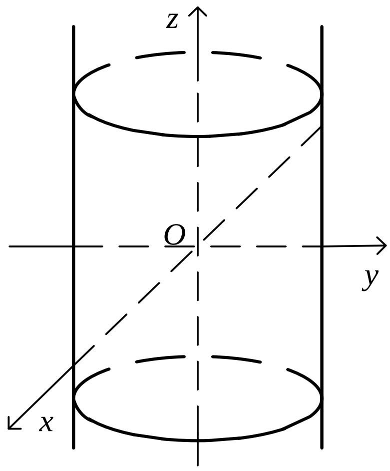

Рис. 7

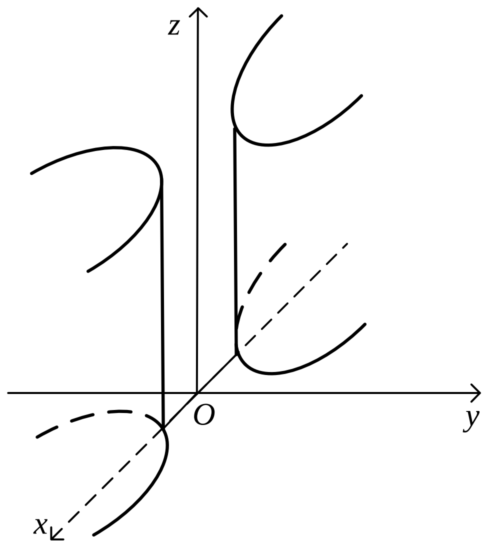

Рис. 8

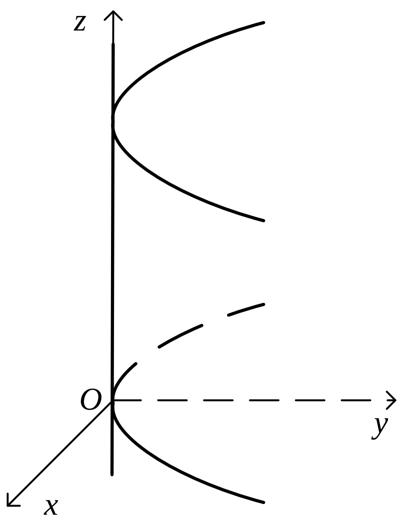

Рис. 9