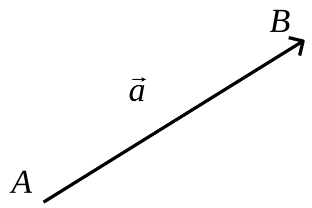
ВЕКТОРИ

Означення. *Вектор* – це напрямлений відрізок.

Вектори характеризуються не тільки своїм числовим значенням, а й напрямом. Якщо початком вектора є точка A, а кінцем – точка B, то вектор позначають $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$.



Означення. *Довжиною (модулем)* вектора називається довжина відрізка, який зображає вектор. Позначається довжина вектора $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$.

Означення. *Нульовим вектором* називають вектор, початок і кінець якого збігаються. Такий вектор позначають $\vec{0}$, його довжина дорівнює нулю, напрям не визначений.

Означення. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається *одиничним* або *нормованим*.

Означення. Вектори, які лежать на одній або на пара-лельних прямих, називаються *колінеарними*.

Означення. Вектори, які є колінеарними, однаково напрямленими, які мають однакову довжину, називаються *рівними*. Позначаємо це так: $\vec{a} = \vec{b}$.

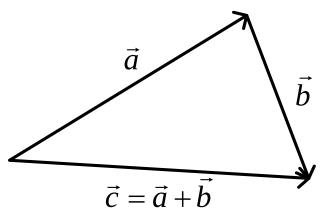
Означення. Вектори, які є колінеарними, протилежно напрямленими, які мають однакову довжину, називаються *протилежними*. Вектор, протилежний до вектора $\vec{a}$, позначається $(-\vec{a})$.

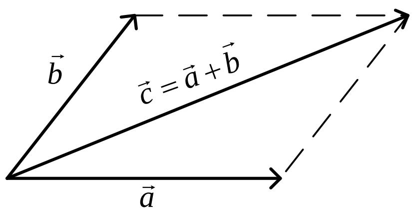
Означення. Вектори, які лежать в одній або в паралельних площинах, називаються *компланарними*.

Дії з векторами

Означення. Вектор $\vec{c}$, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, кінець – з кінцем вектора $\vec{b}$, за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$, називається *сумою векторів* $\vec{a}$ та $\vec{b}$, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Такий спосіб додавання векторів називають правилом трикутника.





Якщо вектори виходять з однієї точки, то їх додають за правилом паралелограма.

Твердження. Операція додавання векторів має такі властивості:

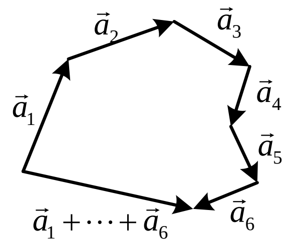
1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

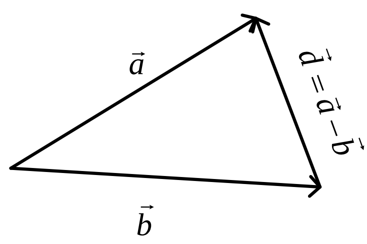
2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

З цього твердження випливає правило додавання довільної скінченної кількості векторів. Сумою n векторів є вектор, початок якого збігається з початком першого вектора, а кінець – з кінцем останнього вектора, за умови, що початок кожного наступного вектора збігається з кінцем попереднього. Геометрично цей спосіб називають правилом многокутника.





Означення. Вектор $\vec{d}$, який треба додати до вектора $\vec{b}$, щоб одержати вектор $\vec{a}$, називається *різницею* векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$.

Означення. *Добутком вектора $\vec{a}$ на число (скаляр) λ* називається вектор $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, який є колінеарним до вектора $\vec{a}$, $|\vec{b}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ і напрям вектора $\vec{b}$ збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\lambda>0$, або протилежний векторові $\vec{a}$, якщо $\lambda<0$.

Твердження. Множення вектора на скаляр має такі властивості:

1) $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$;
2) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;
3) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

База. Координати вектора

Означення. Вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ називають *лінійно залежними*, якщо існують такі числа $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, з яких хоча б одне не дорівнює нулю, за яких справджується рівність

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\lambda_3\vec{a}_3=\vec{0}.$$

Означення. Вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ називають *лінійно незалежними*, якщо ця рівність можлива лише у випадку, коли всі числа $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ дорівнюють нулю.

Прикладом системи лінійно незалежних векторів є три некомпланарні вектори у просторі. Будь-які чотири вектори простору – лінійно залежні. На площині будь-які два неколінеарні вектори лінійно незалежні, а довільні три вектори – лінійно залежні.

Означення. *Базою* множини векторів у просторі називається така впорядкована система векторів $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$, що будь-який вектор $\vec{a}$ виражається через ці вектори, тобто

$$\vec{a}=\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2+\lambda_3\vec{e}_3,$$

причому скаляри $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ визначаються однозначно.

Базою у просторі може бути будь-яка впорядкована трійка некомпланарних векторів, на площині – будь-яка впорядкована пара неколінеарних векторів, а на прямій довільний ненульовий вектор.

Означення. Якщо $\vec{a}=\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2+\lambda_3\vec{e}_3$, то коефіцієнти $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ цього розкладення *називаються координатами вектора $\vec{a}$ в базі* $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ і записуватимемо це так:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix} \text{ або } \vec{a}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3).$$

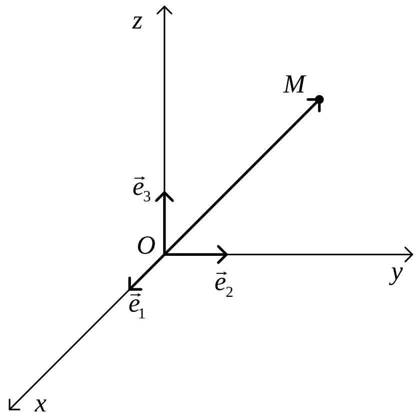
Координати вектора визначають однозначно у цій базі, тому два вектори будуть рівними тоді і тільки тоді, коли рівні їхні відповідні координати у фіксованій базі.

При додаванні (відніманні) векторів їхні відповідні координати додаються (віднімаються), а при множенні вектора на скаляр множаться на цей скаляр.

Система координат

Виберемо в просторі базу $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ і точку O (початку координат).

Означення. *Декартовою системою координат* називається сукупність точки O (початку координат) і бази $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.



Кожній точці M простору поставимо у відповідність її радіус-вектор $\overrightarrow{OM}$.

Означення. Координати радіуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ в базі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ називають *координатами точки* M *у системі координат* $O_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3}$.

Якщо $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$, то $M(x, y, z)$, причому перша координата x називається *абсцисою* точки M, друга y *– ординатою*, третя z *– аплікатою*.

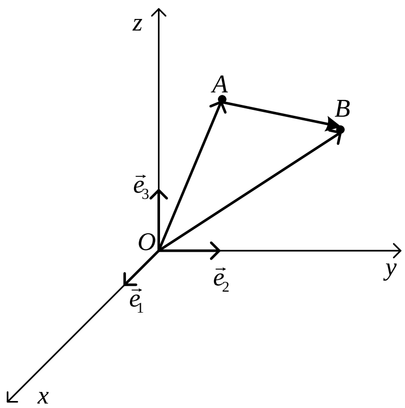
Означення. Декартова система координат $O_{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3}$ називається *прямокутною*, якщо $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$ і кути між базовими векторами прямі. Тоді базові вектори позначають через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Якщо розглядати декартову систему координат на площині, то база буде складатися тільки з двох векторів, тому кожна точка теж матиме тільки дві координати $M(x, y)$.

Нехай у прямокутній декартовій системі координат в просторі задано дві точки $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AB}$. За означенням $\overrightarrow{OA}(x_1, y_1, z_1)$ і $\overrightarrow{OB}(x_2, y_2, z_2)$. Оскільки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, то

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Отже, щоб знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$, треба від координат кінця вектора відняти координати його початку.

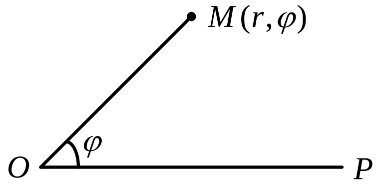


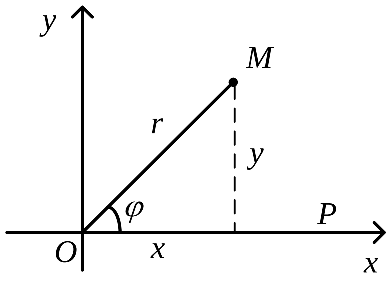
Полярна система координат

Якщо на площині вибрати точку O (полюс) і промінь OP (полярну вісь), то утвориться *полярна система координат*. Нехай r – відстань від деякої точки M до полюса O, а φ – кут між полярною віссю і променем OM. Тоді числа $r \geq 0$ і φ $(0 \leq \varphi < 2\pi)$ називаються полярними координатами точки M (рис. 3.8).

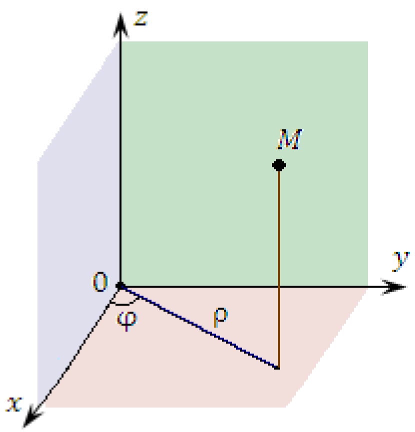
Між полярними та прямокутними координатами існує такий зв'язок:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad \text{і} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, tg\varphi = \frac{y}{x}.$$





Циліндрична система координат



Координати точки $M(\rho, \varphi, z)$ в циліндричній системі визначають так:

ρ – відстань від осі Oz до точки M; $\rho \geq 0$.

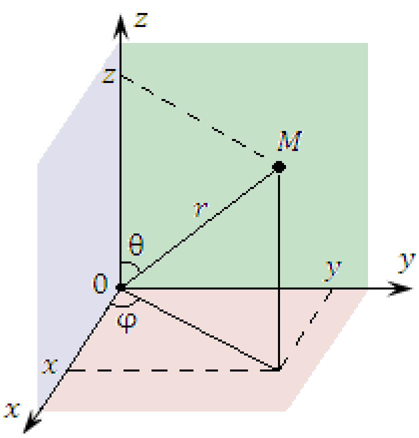
φ – кут між проекцією радіус-вектора точки M на площину xOy з додатним напрямом осі Ox; $0 \leq \varphi < 2\pi$.

z – відстань від точки M до площини xOy; $-\infty < z < \infty$.

Між циліндричними та прямокутними координатами існує такий зв'язок:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z \end{cases}$$

Сферична система координат



Координати точки $M(r, \varphi, \theta)$ в циліндричній системі визначають так:

r – відстань від початку координат до точки M; $r \geq 0$.

φ – кут між проекцією радіус-вектора точки M на площину xOy з додатним напрямом осі Ox; $0 \leq \varphi < 2\pi$.

θ – кут між радіус-вектором точки M з додатним напрямом осі Oz; $0 \leq \theta \leq \pi$.

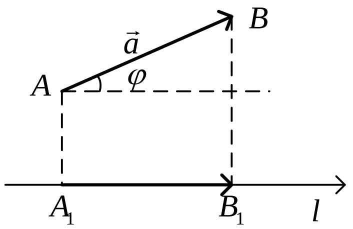
Між сферичними та прямокутними координатами існує такий зв'язок:

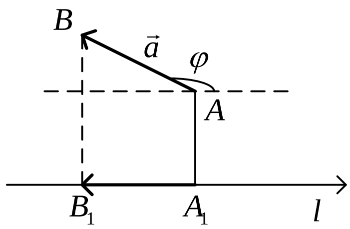
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Проекція вектора на вісь

Розглянемо поняття проекції вектора на вісь. Нехай заданий вектор $\overrightarrow{AB}$ і вісь l. З точок A і B опустимо перпендикуляри на вісь l. Одержимо точки A_1 та B_1 – проекції точок A і B на вісь l.

Означення. *Проекцією вектора* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *на вісь* називається довжина вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$, яку взяли зі знаком "+", якщо напрям $\overrightarrow{A_1B_1}$ збігається з напрямом осі та зі знаком "-", якщо напрями протилежні. Позначають $pr_l\vec{a}$.





Знайдемо $pr_l\vec{a}$. Якщо φ – кут між вектором $\overrightarrow{AB}$ і віссю l, то в першому випадку

$$pr_l\vec{a} = |\overrightarrow{A_1B_1}| = |\vec{a}|\cos\varphi \ ,$$

у другому випадку

$$pr_l\vec{a} = -|\overrightarrow{A_1B_1}| = -|\vec{a}|\cos(180^0 - \varphi) = |\vec{a}|\cos\varphi .$$

Отже, проекція вектора на вісь дорівнює добутку довжини вектора на косинус кута між вектором і віссю.

Координатами вектора в прямокутній системі координат будуть проекції вектора на осі координат.

Нехай вектор $\vec{a}$ має координати a_x, a_y, a_z, тобто $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і утворює з осями координат кути α, β, γ, відповідно. Тоді $a_x = |\vec{a}|\cos\alpha$, $a_y = |\vec{a}|\cos\beta$, $a_z = |\vec{a}|\cos\gamma$.

Числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ називають *напрямними косинусами вектора* $\vec{a}$. З попередніх формул одержуємо

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Поділ відрізка у заданому відношенні

Нехай задано дві точки: $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$. Знайдемо точку $M(x, y, z)$, яка ділить відрізок AB у відношенні λ, тобто $\frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{MB}|} = \lambda$. Цю умову можна записати у вигляді $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$. Оскільки

$$\overrightarrow{AM} = (x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1), \quad \overrightarrow{MB} = (x_2 - x,\ y_2 - y,\ z_2 - z),$$

то

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x);$$
$$y - y_1 = \lambda(y_2 - y);$$
$$z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

Розв’яжемо кожне з цих рівнянь стосовно x, y, z і одержимо формули для визначення координат точки M

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Зокрема, якщо точка M ділить відрізок AB навпіл, то $\lambda = 1$ і координати точки M можна знайти за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Скалярний добуток векторів

Означення. *Скалярним добутком* векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається добуток довжин цих векторів на косинус кута між ними, тобто $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}\hat{}\vec{b})$.

Зокрема, скалярний квадрат вектора дорівнює квадратові його довжини, тобто $(\vec{a})^2 = (\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos\left(\vec{a}\hat{}\vec{a}\right) = |\vec{a}|^2$.

Властивості скалярного добутку такі:

1) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$;
2) $(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$;
3) $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$;
4) $(\vec{a}, \vec{a}) \geq 0$ і $(\vec{a}, \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$;
5) $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

Нехай у прямокутній декартовій системі координат $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, тобто

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, \qquad \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}.$$

Тоді

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) =$$
$$= a_1b_1\vec{i}\cdot\vec{i} + a_1b_2\vec{i}\cdot\vec{j} + a_1b_3\vec{i}\cdot\vec{k} + a_2b_1\vec{j}\cdot\vec{i} + a_2b_2\vec{j}\cdot\vec{j} + a_2b_3\vec{j}\cdot\vec{k} + a_3b_1\vec{k}\cdot\vec{i} + a_3b_2\vec{k}\cdot\vec{j} + a_3b_3\vec{k}\cdot\vec{k}.$$

Оскільки $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ і вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ взаємно перпендикулярні, то

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0, \qquad \vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1,$$

тобто

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

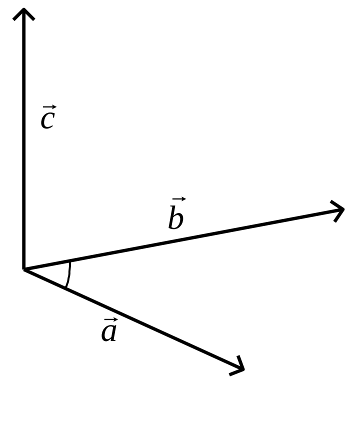
Отже, $(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ – формула скалярного добутку векторів, заданих координатами.

Очевидно, що довжина вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Векторний добуток векторів

Означення. Лінійно незалежні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють *праву трійку векторів*, якщо з кінця вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ видно проти годинникової стрілки, в іншому випадку говорять про ліву трійку векторів.



Означення. *Векторним добутком векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, який має довжину $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a} \,\hat{}\, \vec{b})$, є перпендикулярним до площини, утвореної векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів.

Властивості векторного добутку:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
2) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$;
3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$;
4) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$;
5) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow$ вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

Нехай у прямокутній декартовій системі координат $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, тобто

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, \qquad \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) =$$

$$= a_1b_1\vec{i} \times \vec{i} + a_1b_2\vec{i} \times \vec{j} + a_1b_2\vec{i} \times \vec{k} + a_2b_1\vec{j} \times \vec{i} + a_2b_2\vec{j} \times \vec{j} + a_2b_3\vec{j} \times \vec{k} + a_3b_1\vec{k} \times \vec{i} + a_3b_2\vec{k} \times \vec{j} + a_3b_3\vec{k} \times \vec{k}.$$

Оскільки

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}, \qquad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k},\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},$$

то

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_1b_2\vec{k} - a_1b_3\vec{j} - a_2b_1\vec{k} + a_2b_3\vec{i} + a_3b_1\vec{j} - a_3b_2\vec{i} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Отже, $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ – формула векторного добутку векторів, заданих координатами.

Геометричний зміст векторного добутку полягає в тому, що площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах, дорівнює модулю векторного добутку цих векторів. Це випливає з означення векторного добутку.

Мішаний добуток векторів

Означення. *Мішаним добутком* трьох упорядкованих векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Властивості мішаного добутку:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$;
2) $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = -\vec{b} \cdot \vec{a} \cdot \vec{c} = -\vec{c} \cdot \vec{b} \cdot \vec{a}$;
3) $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні.

Нехай у прямокутній декартовій системі координат $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$, тобто

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}, \qquad \vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}, \qquad \vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}.$$

Тоді

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}(c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k})=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}\right)(c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k})=$$

$$=c_1\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}+c_2\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

Отже, $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$ – формула мішаного добутку векторів, заданих координатами.

Об’єм паралелепіпеда, побудованого на трьох некомпланарних векторах, дорівнює модулю мішаного добутку цих векторів.