

# Індивідуальні завдання з вищої математики № 2

## Завдання 1

Обчислити границі:

1. а)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 4x - 15}$ ;  
б)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x}}{x-4}$ ;  
в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$ ;  
г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-6}{x+4} \right)^{7x+4}$ .
2. а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{2x^2 - x - 6}$ ;  
б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}}$ ;  
в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x \right)$ ;  
г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{3}{2x} \right)^{5x-3}$ .
3. а)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 5x + 6}$ ;  
б)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{9-x}}{x-5}$ ;  
в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}$ ;  
г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-6}{x-4} \right)^{4x+2}$ .
4. а)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 11x + 10}{2x^2 + 5x + 2}$ ;  
б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}}$ ;  
в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{x^2}$ ;  
г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+8}{x-2} \right)^{7x+1}$ .
5. а)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 14x + 8}{2x^2 - 7x - 4}$ ;  
б)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+7} - \sqrt{3-x}}{x+2}$ ;  
в)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{tg} x$ ;  
г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x-5}{4x-3} \right)^{3x+5}$ .
6. а)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{4x^2 - 25x + 25}{2x^2 - 15x + 25}$ ;  
б)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x+5} - \sqrt{3-x}}$ ;  
в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1} - 1}$ ;  
г)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$ .
7. а)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{7x^2 + 26x - 8}{2x^2 + x - 28}$ ;  
б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{8-x}}{x-2}$ ;  
в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sin 5x}$ ;  
г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+3} \right)^{2x}$ .
8. а)  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 + 15x + 25}{x^2 + 15x + 50}$ ;  
б)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x-2} - \sqrt{6-x}}$ ;  
в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$ ;  
г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-1}{3x+6} \right)^{2x+1}$ .
9. а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 5x - 8}{2x^2 + 3x - 5}$ ;  
б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}{x-3}$ ;  
в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5+x) - \sin(5-x)}{x}$ ;  
г)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{7-x}{x}}$ .
10. а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x^2 + 13x + 7}{3x^2 + 8x + 5}$ ;  
б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - 2}{x^2 - 3x + 2}$ ;  
в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + x \sin x}{\sin^2 x}$ ;  
г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x+1}{4x-3} \right)^{5x-1}$ .

11. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x^3}{5x^2}$ ;  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$ ;  
 в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{5x^2}$ ;  
 г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x$ .
12. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x^3 - 2}{x + x^2}$ ;  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{x^2}$ ;  
 в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{x^2}$ ;  
 г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2}$ .
13. а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ ;  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ ;  
 в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{3x}$ ;  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 + 2x}$ .
14. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 5x - 3}{2x^4 - x - 15}$ ;  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x} - \sqrt{1 - 2x}}{x + x^2}$ ;  
 в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}$ ;  
 г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x + 4}{3x + 2} \right)^{x+2}$ .
15. а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x}$ ;  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$ ;  
 в)  $\lim_{x \rightarrow 0} 5x \cdot \operatorname{ctg} 5x$ ;  
 г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+5}{x+2} \right)^{2x+1}$ .
16. а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 7x - 8}{x^2 + 2x + 1}$ ;  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x^2} - 1}{x^3 + x^2}$ ;
- в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \operatorname{tg} 5x}{\sin 7x}$ ;  
 г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+5}{x+3} \right)^{8x+3}$ .
17. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 2x^2 + x}{x^4 + 3x^2 + 2}$ ;  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{5}}{x-3}$ ;  
 в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 8x}{3x}$ ;  
 г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+1} \right)^{x+7}$ .
18. а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^3 + 1}$ ;  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{2x-2}}$ ;  
 в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x}$ ;  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 - 2x}$ .
19. а)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 5x + 6}$ ;  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2x}}$ ;  
 в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{7x^4}$ ;  
 г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2} \right)^{x^2}$ .
20. а)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 4x}$ ;  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}$ ;  
 в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$ ;  
 г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x-2} \right)^x$ .
21. а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 5x + 2}$ ;  
 б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ ;  
 в)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{ctg}^2 3x$ ;  
 г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x+1}{4x} \right)^x$ .

$$22. \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 20}; \\ \text{б)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}; \\ \text{в)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^3}{x^6}; \\ \text{г)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{1/x}. \end{aligned}$$

$$23. \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{2x^2 - 7x - 15}; \\ \text{б)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}); \\ & 2 \operatorname{tg}^2 \frac{7x}{2}; \\ \text{в)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg}^2 \frac{7x}{2}}{\sin^2 5x}; \\ \text{г)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x-1}{4x+1} \right)^{2x}. \end{aligned}$$

$$24. \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x - 7}{3x^2 - x - 2}; \\ \text{б)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}; \\ \text{в)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \operatorname{ctg}^3 2x}{\sin 5x}; \\ \text{г)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}. \end{aligned}$$

$$25. \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6}; \\ \text{б)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}); \\ \text{в)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{tg} 7x}{\sin^3 2x}; \\ \text{г)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-10}{x+1} \right)^{3x+1}. \end{aligned}$$

## Завдання 2

Знайти похідну функції:

$$1. \quad y = \ln \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right).$$

$$2. \quad y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}.$$

$$3. \quad y = \arcsin \sqrt{\frac{x+2}{x}}.$$

$$4. \quad y = \sqrt{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}.$$

$$5. \quad y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1}.$$

$$6. \quad y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2}}.$$

$$7. \quad y = \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}.$$

$$8. \quad y = \arcsin \frac{x^2}{3x+1}.$$

$$9. \quad y = \ln \frac{x^4 + x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$10. \quad y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

$$11. \quad y = \arcsin \frac{4x+3}{x^2}.$$

$$12. \quad y = \frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}.$$

$$13. \quad y = x \cdot \arcsin \frac{x}{4x-1}.$$

$$14. \quad y = x \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

$$15. \quad y = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$16. \quad y = \ln(\sin(\operatorname{tg} x)).$$

$$17. \quad y = \operatorname{arctg} \left( \frac{x^2}{1+x} \right).$$

$$18. \quad y = \arcsin \frac{1+x^2}{x}.$$

$$19. \quad y = \operatorname{tg} \sqrt{x^2 - 1}.$$

$$20. \quad y = (\arcsin x)^2.$$

$$21. \quad y = 3 \arcsin \frac{x}{x+2}.$$

$$22. \quad y = \ln(\sqrt{x-1} + 1).$$

$$23. \quad y = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}.$$

$$24. \quad y = \arcsin \frac{x}{2x+3}.$$

$$25. \quad y = \ln(\sqrt{x+4} + \sqrt{1+x}).$$

$$26. \quad y = \ln \frac{\sqrt{x^2 + x - 1}}{x}.$$

$$27. \quad y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$28. \quad y = \arcsin \frac{x^2}{3x-4}.$$

$$29. \quad y = x^3 \cdot \arcsin x.$$

$$30. \quad y = \ln \left( \frac{x}{1 + \sqrt{1-4x^2}} \right).$$

## Завдання 3

Знайти похідну функції:

$$1. \quad y = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1}) + x(5x^2 + 3)\sqrt{4x^2 + 1}$$

$$2. \quad y = \frac{x \arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}} + \ln \sqrt{1-9x^2}$$

$$3. \quad y = 2 \ln \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{2}$$

$$4. y = \frac{x^3}{\arcsin x} + \frac{x^2 + 1}{x} \sqrt{1 - x^2}$$

$$5. y = 2 \arccos \frac{3}{2x+1} + \sqrt{x^2 + x - 2}, \quad 2x+1 > 0$$

$$6. y = \ln(2x + \sqrt{1+4x^2}) - \sqrt{1+4x^2} \operatorname{arctg} 2x$$

$$7. y = 3 \arccos \frac{1}{2x+3} - 2\sqrt{x^2 + 3x + 2}, \quad 2x+3 > 0$$

$$8. y = \ln(3x + \sqrt{1+9x^2}) - x(2x^2 + 3)\sqrt{1+9x^2}$$

$$9. y = \ln(2x - \sqrt{1+4x^2}) + \frac{\sqrt{1+4x^2}}{x}$$

$$10. y = \sqrt{4-10x-3x^2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arcsin \frac{3x+5}{3\sqrt{3}}$$

$$11. y = \sqrt{(5+x)(2-x)} + 2 \ln(\sqrt{5+x} + \sqrt{2-x})$$

$$12. y = \operatorname{arctg} \frac{3x+1}{\sqrt{5}} + \ln \frac{\sqrt{3x^2 + 2x + 2}}{x}$$

$$13. y = \ln \left( \sqrt[3]{\frac{2x-1}{2x+1}} \right) - \arcsin \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}$$

$$14. y = \frac{\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}} + \ln \frac{1-3x}{1+3x}$$

$$15. y = \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x} - 2 \arcsin 2x$$

$$16. y = \arcsin \sqrt{x+3} - \sqrt{(x+3)(4-x)}$$

$$17. y = x(\arccos x)^2 - 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x + 2x$$

$$18. y = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{3} + \sqrt{x^2 + 3}}{x} - \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x^2}$$

$$19. y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\sqrt{16x^4 + 1} - 4x^2}}{2x}$$

$$20. y = \ln \frac{\cos x + \sqrt{\cos 2x}}{\sin x}$$

$$21. y = \operatorname{arctg} \sqrt{9x^2 - 1} - \ln \frac{3x}{\sqrt{9x^2 - 1}}$$

$$22. y = \ln(4 + \sqrt{x+4}) + \sqrt{(x+4)(x-1)}$$

$$23. y = \arccos \left( \frac{x}{3} \right) + x(x^2 - 1)\sqrt{9 - x^2}$$

$$24. y = \arcsin e^{-2x} + \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} - 1})$$

$$25. y = \frac{\arccos 7x}{\sqrt{1-49x^2}} + \ln \frac{1-7x}{1+7x}$$

#### Завдання 4

Знайти похідну  $y'_x$  першого порядку та  $y''_{xx}$  другого порядку від функції, заданої параметрично.

$$1. \begin{cases} x = \sin t + \cos t, \\ y = \cos 2t \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = t \sin t + \cos t, \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x = \operatorname{sh} t, \\ y = \operatorname{ch}^{2/3} t \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \ln \cos 2t \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x = e^t, \\ y = \arccos t \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos^3(t/2) \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = 1/\sqrt{1-2t} \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x = \sqrt[3]{t}, \\ y = \sqrt[3]{1-t} \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x = \operatorname{ctg} t, \\ y = 1/\sin t \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \operatorname{ctg}^2 t \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x = t - \sin 2t, \\ y = 3 - 2 \cos 2t \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x = t + \sin 3t, \\ y = 2 + 3 \cos 3t \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \operatorname{cosec} t \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x = \sqrt{t-2}, \\ y = (t+1)/\sqrt{t-2} \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x = \sqrt[3]{t+1}, \\ y = \ln t \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x = \sqrt{t-2}, \\ y = \ln(t-1) \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x = 1/t^2, \\ y = 1/(4t^2 + 1) \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x = \operatorname{ch}^2 t, \\ y = 1/\operatorname{sh}^2 t \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x = \cos 3t, \\ y = \ln \sin 3t \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x = \sqrt[3]{t-1}, \\ y = t/\sqrt{t-1} \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x = \ln t, \\ y = \operatorname{arctg} t \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x = \sqrt{t+1}, \\ y = \sqrt[3]{t/(t+1)} \end{cases}$$

### Завдання 5

Знайти похідну вказаного порядку за формулою Лейбніца.

1.  $y = (2x^2 - 7)\ln(x-1)$ ,  $y^V = ?$
2.  $y = (3 - x^2)\ln^2 x$ ,  $y''' = ?$
3.  $y = x \cos x^2$ ,  $y''' = ?$
4.  $y = \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}$ ,  $y''' = ?$
5.  $y = \frac{\log_2 x}{x^3}$ ,  $y''' = ?$
6.  $y = (4x^3 + 5)e^{2x+1}$ ,  $y^V = ?$
7.  $y = x^2 \sin(5x-3)$ ,  $y''' = ?$
8.  $y = \frac{\ln x}{x^2}$ ,  $y^{IV} = ?$
9.  $y = (2x+3)\ln^2 x$ ,  $y''' = ?$
10.  $y = (1+x^2) \cdot \arctg x$ ,  $y''' = ?$
11.  $y = \frac{\ln x}{x^3}$ ,  $y^{IV} = ?$
12.  $y = (4x+3)2^{-x}$ ,  $y^V = ?$
13.  $y = e^{1-2x} \sin(2+3x)$ ,  $y^{IV} = ?$
14.  $y = \frac{\ln(3+x)}{3+x}$ ,  $y''' = ?$
15.  $y = (2x^3+1)\cos x$ ,  $y^V = ?$
16.  $y = (x^2+3)\ln(x-3)$ ,  $y^{IV} = ?$
17.  $y = (1-x-x^2)e^{(x-1)/2}$ ,  $y^{IV} = ?$
18.  $y = \frac{1}{x} \sin 2x$ ,  $y''' = ?$
19.  $y = (x+7)\ln(x+4)$ ,  $y^V = ?$
20.  $y = (3x-7) \cdot 3^{-x}$ ,  $y^{IV} = ?$
21.  $y = \frac{\ln(2x+5)}{2x+5}$ ,  $y''' = ?$
22.  $y = e^{x/2} \sin 2x$ ,  $y^{IV} = ?$
23.  $y = \frac{\ln x}{x^5}$ ,  $y''' = ?$
24.  $y = x \ln(1-3x)$ ,  $y^{IV} = ?$
25.  $y = (x^2+3x+1) \cdot e^{3x+2}$ ,  $y^V = ?$
26.  $y = (5x-8) \cdot 2^{-x}$ ,  $y^{IV} = ?$
27.  $y = \frac{\ln(x-2)}{x-2}$ ,  $y^V = ?$
28.  $y = e^{-x}(\cos 2x - 3\sin 2x)$ ,  $y^{IV} = ?$
29.  $y = (5x-1)\ln^2 x$ ,  $y''' = ?$
30.  $y = \frac{\log_3 x}{x^2}$ ,  $y^{IV} = ?$

### Завдання 6

Обчислити границі функцій, застосовуючи правило Лопітала:

1. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$ .  
б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin^2 x}$ .
3. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 3x}$ .  
б)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sin(x+1)}$ .
5. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))}$ .  
б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}$ .
7. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2}$ .  
б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$ .
2. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{e^{x^2} - 1}$ .  
б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 x}$ .
4. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x}$ .  
б)  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \alpha}{\ln x - \ln \alpha}$ .
6. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{3x}}{\operatorname{arctg} x - x^2}$ .  
б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{tg}\left[2\pi\left(x+1/2\right)\right]}$ .
8. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}$ .  
б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(e^x - e^{-x})}{e^{x^3+1} - e}$ .

9. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\ln(1 + 2x)}$ .  
 б)  $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{1 - 2\cos x}{\sin(\pi - 3x)}$ .
11. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 7x)}{\sin(\pi(x + 7))}$ .  
 б)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\ln \operatorname{tg} x}$ .
13. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9\ln(1 - 2x)}{4\operatorname{arctg} 3x}$ .  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin 3x}$ .
15. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x^2 + \pi x}$ .  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\log_2 x}$ .
17. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin[\pi(x + 1)]}{\ln(1 + 2x)}$ .  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x}$ .
19. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sin[\pi(x + 2)]}$ .  
 б)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h + x) - \sin(x - h)}{h}$ .
21. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \sin x}$ .  
 б)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2}$ .
23. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\sin[\pi(x/2 + 1)]}$ .  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{5 + x} - 2}{\sin \pi x}$ .
25. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{x^4}$ .  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg x - 1}{\sqrt{x - 9} - 1}$ .
10. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin[2\pi(x + 10)]}$ .  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}$ .
12. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + 5\pi/2) \operatorname{tg} x}{\arcsin 2x^2}$ .  
 б)  $\lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b}$ .
14. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{3x + 1}}{\cos[\pi(x + 1)/2]}$ .  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2\sin x}{x \ln \cos 5x}$ .
16. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + x} - 2}{3\operatorname{arctg} x}$ .  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{\ln x}$ .
18. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos x}$ .  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\log_5 x - 1}{\operatorname{tg} \pi x}$ .
20. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin[5(x + \pi)]}{e^{-3x} - 1} \ln 2$ .  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{\sin 3x}$ .
22. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{2^{-3x} - 1} \ln 2$ .  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}$ .
24. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^{3x} - 1)^2}$ .  
 б)  $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$ .
26. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\ln(e - x) - 1}$ .  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x+1} - 3}{\ln(1 + x\sqrt{1 + xe^x})}$ .

### Завдання 7

Провести повне дослідження функції та побудувати її графік

- |                                    |                              |                               |                                |
|------------------------------------|------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| 1. $y = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$ | 8. $y = \frac{2x^2}{x-1}$    | 15. $y = \frac{x^2}{2(x-2)}$  | 22. $y = \frac{x^3}{3-x^2}$    |
| 2. $y = \frac{x^3}{x^2-1}$         | 9. $y = \frac{x^2-5x}{x-1}$  | 16. $y = x + \frac{1}{x}$     | 23. $y = \frac{4-x^3}{x^2}$    |
| 3. $y = \frac{2x^2+8}{x}$          | 10. $y = x + \frac{1}{x+1}$  | 17. $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$ | 24. $y = \frac{2x^2}{x-1}$     |
| 4. $y = \frac{x^2}{3(x-1)}$        | 11. $y = \frac{x^2}{x-2}$    | 18. $y = \frac{x^3+4}{x^2}$   | 25. $y = \frac{x^2+6x+9}{x+4}$ |
| 5. $y = \frac{2x^2-6}{x-2}$        | 12. $y = 2 + \frac{12}{x-4}$ | 19. $y = \frac{x^2}{1+x}$     |                                |
| 6. $y = \frac{x^2-4x+4}{x+1}$      | 13. $y = \frac{x^2}{2(1+x)}$ | 20. $y = \frac{x^3}{x^2-4}$   |                                |
| 7. $y = x + \frac{4}{x+2}$         | 14. $y = \frac{3-x^2}{x+2}$  | 21. $y = \frac{x^2}{2-5x}$    |                                |

### Завдання 8

Знайти частинні похідні та повні диференціали першого і другого порядку функції

- |  |  |
|--|--|
| 1. $z = \operatorname{tg}(x^2 + y^2)$ .            | 13. $z = \ln(3x^2 - y^4)$ .                |
| 2. $z = \sin \sqrt{\frac{y}{x^3}}$ .               | 14. $z = e^{2x^2-y^2}$ .                   |
| 3. $z = \cos \sqrt{x^2 + y^2}$ .                   | 15. $z = \operatorname{ctg}(3x-2y)$ .      |
| 4. $z = \operatorname{arctg}(xy^2)$ .              | 16. $z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ .             |
| 5. $z = \arcsin(2x^3y)$ .                          | 17. $z = \sin \frac{x+y}{x-y}$ .           |
| 6. $z = \ln(\sqrt{xy} - 1)$ .                      | 18. $z = \sin \sqrt{\frac{y}{x+y}}$ .      |
| 7. $z = \operatorname{tg} \frac{2x-y^2}{x}$ .      | 19. $z = \arcsin \sqrt{xy}$ .              |
| 8. $z = \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{x}{x-y}}$ . | 20. $z = e^{x^2+y^3}$ .                    |
| 9. $z = \cos(y^2 - e^{-x})$ .                      | 21. $z = \ln(y^2 - e^{-x})$ .              |
| 10. $z = \cos(x^3 - 2xy)$ .                        | 22. $z = e^{-x^2+y^2}$ .                   |
| 11. $z = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$ .        | 23. $z = \operatorname{ctg} \sqrt{xy^3}$ . |
| 12. $z = \arccos \frac{x}{y}$ .                    | 24. $z = \operatorname{tg}(x^3y^4)$ .      |
|  | 25. $z = \sin \sqrt{x-y^3}$ .              |

### Завдання 9

Дослідити функцію двох змінних на екстремум

- |                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| 1. $z = x^2 + xy + 2y^2 - x + 4$ .   | 6. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$ . |
| 2. $z = x^3 + xy^2 + 6xy$ .          | 7. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y + 3$ . |
| 3. $z = -x^2 - xy - y^2 + 3x + 6y$ . | 8. $z = (x-y)^2 + (y-1)^3$ .            |
| 4. $z = x^3 + 8y^3 + 6xy - 1$ .      | 9. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ .     |
| 5. $z = 1 - x^4 - (y-2)^6$ .         | 10. $z = e^{\frac{y}{x^2+y}}$ .         |

11.  $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 3y$ .
12.  $z = (y - x)^2 + (y + 2)^2$ .
13.  $z = xy(1 - x - y)$ .
14.  $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ .
15.  $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$ .
16.  $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ .
17.  $z = x - y(3 - x - y)$ .
18.  $z = 3x - x^2 - xy - y^2 + 6$ .
19.  $z = 2x^2 - 3y^2 - 8x - 12y + 1$ .
20.  $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$ .
21.  $z = (x^2 + y)\sqrt{e^y}$ .
22.  $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$ .
23.  $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$ .
24.  $z = 3x^2 - y^2 + 4y + 5$ .
25.  $z = -x^2 - 4y^2 + 5x - 8y + 3$ .

### Завдання 10

Визначити найменше та найбільше значення функції в замкненій обмеженій області

1.  $z = 2y^3 + 4y^2 + x^2 - 2xy$  в області, обмеженій параболою  $x = y^2$ , прямою  $x = 4$  і віссю  $Ox$ .
2.  $z = y^2 - 2xy + 3$  в області, обмеженій параболою  $x = 4 - y^2$  і віссю  $Oy$ .
3.  $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$  в трикутнику, обмеженому осями координат і прямою  $x + y = 3$ .
4.  $z = xy^2$  в крузі  $x^2 + y^2 \leq 1$ .
5.  $z = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 2$  в прямокутнику  $-3 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 4$ .
6.  $z = x^2 + y^2 - 4xy - 4$  в квадраті  $0 \leq x \leq 4$ ,  $0 \leq y \leq 4$ .
7.  $z = -x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 6y$  в трикутнику, обмеженому осями координат і прямою  $y = 4 - x$ .
8.  $z = 2x^2 + y^2 + 4xy + 1$  в квадраті  $0 \leq x \leq 2$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ .
9.  $z = x^3 + y^3 - 3xy$  в квадраті  $0 \leq x \leq 4$ ,  $0 \leq y \leq 4$ .
10.  $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5$  в трикутнику, обмеженому осями координат і прямою  $x + y = 3$ .
11.  $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$  в області, обмеженій параболою  $y = x^2$ , прямою  $y = 4$  і віссю  $Oy$ .
12.  $z = x^2 + xy - 3x - y$  в прямокутнику  $0 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 3$ .
13.  $z = x^2 - 2xy + 3$  в області, обмеженій параболою  $y = 4 - x^2$  і віссю  $Ox$ .
14.  $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y + 3$  в трикутнику, обмеженому прямими  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $y = x + 2$ .
15.  $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$  в прямокутнику  $1 \leq x \leq 4$ ,  $-3 \leq y \leq 2$ .
16.  $z = x^2 + 4xy - y^2 - 1$  в трикутнику, обмеженому осями координат і прямою  $y = 2 - x$ .
17.  $z = x^2 + 2y^2 + 4xy + 2x + 4y$  в квадраті  $0 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 2$ .
18.  $z = x^2 - xy + y^2$  в квадраті  $|x| + |y| \leq 1$ .
19.  $z = x^2 - 2xy + 4x - 4y$  в області, обмеженій параболою  $y = -x^2 - 4x$  і віссю  $Ox$ .
20.  $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$  в крузі  $x^2 + y^2 \leq 25$ .
21.  $z = x^2 - \frac{7}{6}x - 2xy + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}xy^3$  в трикутнику, обмеженому віссю  $Ox$  і прямими  $x + y = 3$ ,  $y - x = 3$ .
22.  $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y + 3$  в трикутнику, обмеженому віссю  $Oy$  і прямими  $x + y = 2$ ,  $x - y = 2$ .
23.  $z = x^2 - \frac{9}{2}x + 6xy - \frac{5}{2}xy^2 + \frac{1}{3}xy^3$  в трикутнику, обмеженому віссю  $Ox$  і прямими  $x + y = 5$ ,  $y - x = 5$ .
24.  $z = -x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 6y$  в трикутнику, обмеженому віссю  $Oy$  і прямими  $x + y = 4$ ,  $x - y = 4$ .
25.  $z = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 2$  в трикутнику, обмеженому віссю  $Ox$  і прямими  $x + y = 4$ ,  $y - x = 4$ .
26.  $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$  в трикутнику, обмеженому віссю  $Oy$  і прямими  $x + y = 3$ ,  $x - y = 3$ .
27.  $z = x^2y$  в крузі  $x^2 + y^2 \leq 1$ .