## Криві другого порядку

До кривих другого порядку належать еліпс, гіпербола та парабола. Рівняння цих кривих у прямокутній декартовій системі координат є рівняннями другого степеня щодо $x$ і $y$, тобто

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0; \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

### *Коло*

**Означення.** *Колом* називають множину точок площини, які знаходяться на однаковій відстані від фіксованої точки (центра кола).

Рівняння кола з центром у початку координат і радіусом $R$ має вигляд:

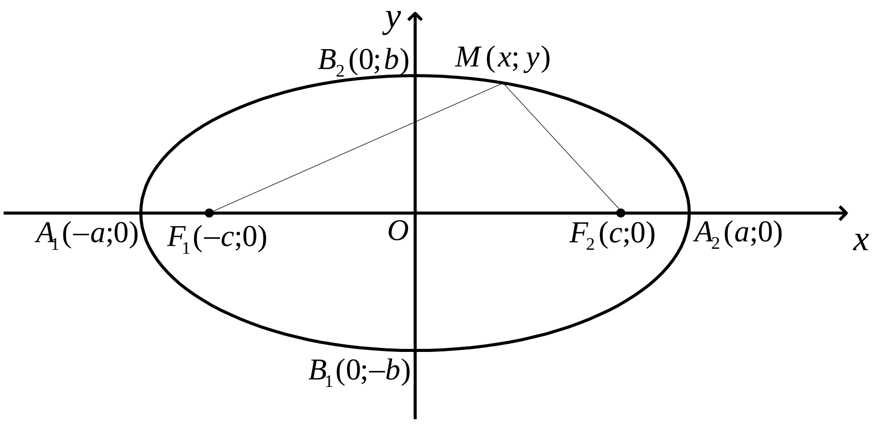
$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Рівняння кола з центом у точці $O(a;b)$ і радіусом $R$ має вигляд:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

### *Еліпс*

**Означення.** *Еліпсом* називають множину точок площини, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок (*фокусів еліпса*) є сталою.




Нехай $F_1$ і $F_2$ фокуси еліпса. Декартову систему координат виберемо так, щоб вісь $Ox$ проходила через фокуси, а вісь $Oy$ ділила відрізок $F_2F_1$ навпіл. Позначимо відстань між фокусами $2c$. Тоді $F_1(-c;0)$ і $F_2(c;0)$. Нехай $M(x;y)$ – довільна точка еліпса. Довжини відрізків $F_1M$ і $F_2M$ позначимо $r_1$ та $r_2$, відповідно. Сума цих відстаней є деякою сталою величиною, яка характеризує еліпс. Цю сталу величину позначимо $2a$. Тоді

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

– фокальні радіуси точки $M(x;y)$.

З означення еліпса $r_1 + r_2 = 2a$, тому

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Звідси

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата, отримаємо

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

Звівши подібні доданки, одержимо

$$4xc=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ .$$

Звідси

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx\,.$$

Знову обидві частини рівняння підносимо до квадрата, маємо

$$a^2((x-c)^2+y^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2\,.$$

Перегрупувавши доданки, отримаємо

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)\,.$$

Нехай $b^2=a^2-c^2$ (це можливо, оскільки $a>c$). Тоді рівняння запишемо у вигляді $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Поділимо рівняння на $a^2b^2$. Матимемо *канонічне рівняння еліпса*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ називають вершинами еліпса ; відрізки $|A_1A_2|=2a$ і $|B_1B_2|=2b$ довжинами великої і малої осей еліпса; точки $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ – фокусами, а відрізки $F_1M$ та $F_2M$ – фокальними радіусами точки $M(x;y)$, яка належить еліпсу.

**Означення**. *Ексцентриситет* еліпса – це відношеня відстані між фокусами еліпса до довжини його великої осі, тобто число $e=\dfrac{c}{a}$.

Оскільки в еліпса $c<a$, то $e<1$. Через ексцентриситет еліпса можна виразити співвідношення його півосей

$$\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2}}=\sqrt{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\sqrt{1-e^2}$$

і фокальні радіуси

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=$$

$$=\sqrt{x^2+2cx+c^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2+2cx+c^2+a^2-c^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{c^2x^2}{a^2}+2xc+a^2}=\sqrt{\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2}=\left|a+\frac{c}{a}x\right|=a+ex\,.$$

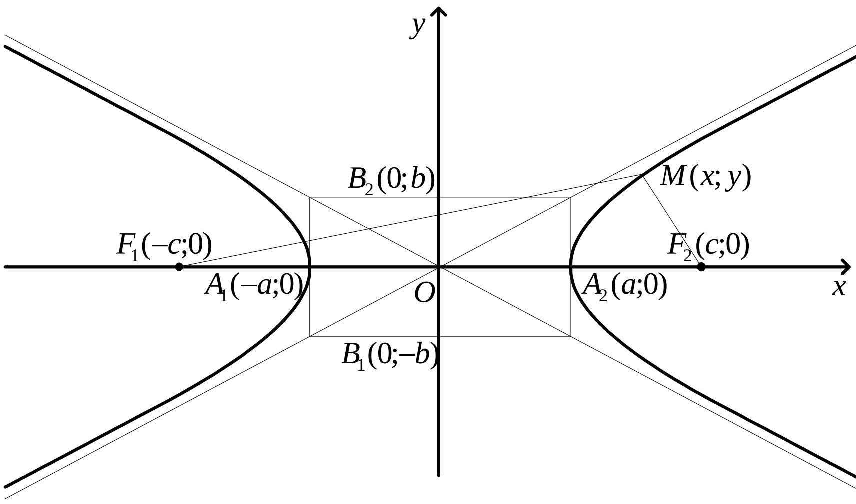
Отже, $r_1=a+ex$, аналогічно $r_2=a-ex$.

**Означення.** *Директрисами еліпса* називають дві прямі, перпендикулярні до великої осі еліпса, які розташовані симетрично щодо центра еліпса на відстані $\dfrac{a}{e}$ від нього. Рівняння директрис $x=\pm\dfrac{a}{e}$.

Якщо фокуси еліпса на осі $Oy$, то $b>a$ і $c=\sqrt{b^2-a^2}$, то ексцентриситет $e=\dfrac{c}{b}$, рівняння директрис $y=\pm\dfrac{b}{e}$.

### 3.5.2. Гіпербола

**Означення.** *Гіперболою* називають множину точок площини, різниця відстаней яких від двох фіксованих точок (*фокусів*) є сталою.




Цю сталу величину позначаємо $2a$, відстань між фокусами – $2c$, вважаємо, що $2c > 2a$. Декартову систему координат вибираємо так, як і для виведення канонічного рівняння еліпса, тобто вісь абсцис проведемо через фокуси $F_1$ і $F_2$ гіперболи, а початком координат буде середина відрізка $F_1F_2$.

Нехай $M(x;y)$ – довільна точка гіперболи. Довжини відрізків $F_1M$ і $F_2M$ позначимо $r_1$ та $r_2$, відповідно. Тоді

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

З означення гіперболи $|r_1 - r_2| = 2a$. Тоді

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

Або

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Звідси

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата, отримаємо

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Звівши подібні доданки, одержимо

$$4xc = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Звідси

$$\mp a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Знову обидві частини рівняння підносимо до квадрата, отримаємо

$$a^2((x-c)^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2.$$

Перегрупувавши доданки, матимемо

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Нехай $b^2 = c^2 - a^2$ (це можливо, оскільки $c > a$). Тоді рівняння запишемо у вигляді $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$. Поділимо рівняння на $a^2 b^2$. Одержимо *канонічне рівняння гіперболи*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ називають дійсними вершинами гіперболи; а відрізок $|A_1A_2| = 2a$ – довжиною дійсної осі гіперболи; точки $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ – уявними вершинами гіперболи; відрізок довжиною $2b$ – уявною віссю гіперболи; точки $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ – фокусами, а відрізки $F_1M$ та $F_2M$ – фокальними радіусами точки $M(x;y)$ гіперболи.

Рівняння $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ – рівняння гіперболи, для якої вісь $Oy$ – дійсна, $Ox$ – уявна. Для такої гіперболи $F_1(0;-c)$, $F_2(0;c)$.

**Означення**. Прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$ називаються *асимптотами гіперболи*.

**Означення**. *Ексцентриситетом* гіперболи називають відношеня відстані між фокусами гіперболи до довжини її дійсної осі, тобто число $e = \frac{c}{a} > 1$.

Через ексцентриситет гіперболи можна виразити співвідношення її півосей

$$\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$$

і фокальні радіуси

$$r_1 = \pm(ex + a),\ r_2 = \pm(ex - a),$$

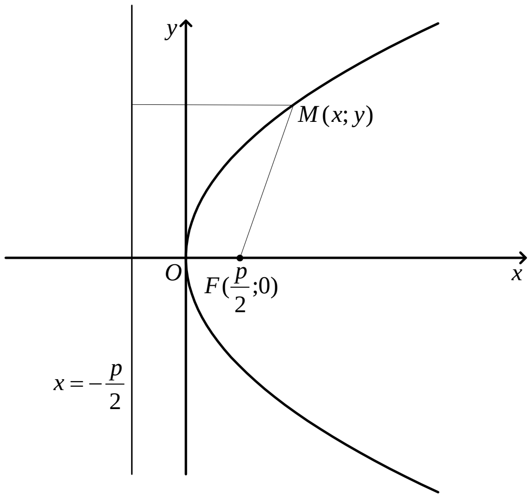
де плюс (мінус) беремо для правої (лівої) гілки гіперболи.

**Означення.** *Директрисами гіперболи* називають прямі, перпендикулярні до дійсної осі гіперболи , які є на відстані $\frac{a}{e}$ від початку координат. Рівняння директрис $x = \pm\frac{a}{e}$.

Для гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ рівняння директрис $y = \pm\frac{b}{e}$.

## *Парабола*

**Означення.** *Параболою* називають множину всіх точок площини, рівновіддалених від фіксованої прямої (*директриси*) і фіксованої точки (*фокуса*), яка не належить цій прямій.




Виберемо систему координат так, щоб вісь $Ox$ проходила через фокус перпендикулярно до директриси, а вісь $Oy$ через середину перпендикуляра, опущеного з фокуса на директрису. Позначимо відстань від фокуса до директриси через $p$. Тоді координати фокуса $F(\frac{p}{2};0)$, а рівняння директриси $x=-\frac{p}{2}$. Нехай $M(x;y)$ – довільна точка параболи. Тоді відстань від точки $M$ до директриси дорівнює $x+\frac{p}{2}$, а довжина відрізка $MF$ дорівнює $\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}$. З означення параболи

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=x+\frac{p}{2}.$$

Піднесемо цю рівність до квадрата, одержимо

$$(x-\frac{p}{2})^2+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

тоді

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}.$$

Матимемо *канонічне рівняння параболи*

$$y^2=2px.$$

Рівняння $x^2=2py$ теж є канонічними рівняннями параболи, симетричної стосовно осі $Oy$.

Фокальний радіус точки, яка належить параболі,

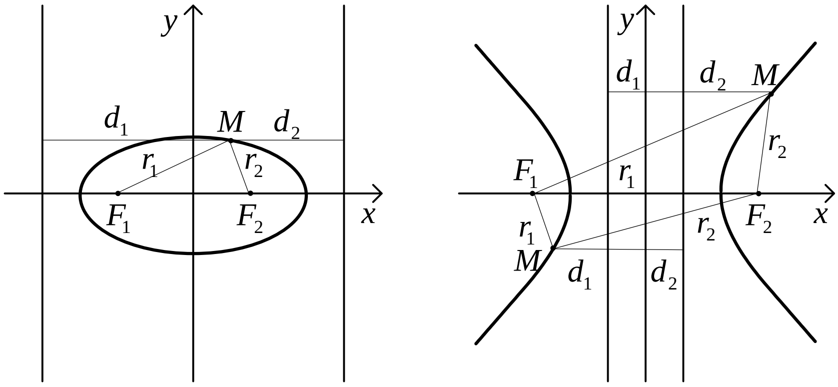
$$r=x+\frac{p}{2}.$$

## *Директоріальна властивість кривих другого порядку*

**Теорема.** *Відношення довжини фокального радіуса кожної точки кривої другого порядку до відстані від цієї точки до відповідної директриси є величиною сталою і дорівнює ексцентриситету кривої, тобто*

$$\frac{r}{d} = e .$$

*Доведення.* Нехай $M(x; y)$ – довільна точка на кривій другого порядку.




Для еліпса $r_1 = a + ex$, $r_2 = a - ex$ – фокальні радіуси, $d_1 = x + \frac{a}{e}$, $d_2 = \frac{a}{e} - x$ – відстані від точки до відповідних директрис. Тому

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a + ex}{x + \frac{a}{e}} = \frac{(a + ex)e}{xe + a} = e ,$$

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{a - ex}{\frac{a}{e} - x} = \frac{(a - ex)e}{a - ex} = e .$$

Для правої гілки гіперболи $r_1 = ex + a$, $r_2 = ex - a$, $d_1 = x + \frac{a}{e}$, $d_2 = x - \frac{a}{e}$ , тому

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a + ex}{x + \frac{a}{e}} = \frac{(a + ex)e}{xe + a} = e ,$$

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{ex - a}{x - \frac{a}{e}} = \frac{(ex - a)e}{ex - a} = e .$$

Для лівої гілки гіперболи $r_1 = -ex - a$, $r_2 = a - ex$, $d_1 = -\frac{a}{e} - x$, $d_2 = \frac{a}{e} - x$. Тоді

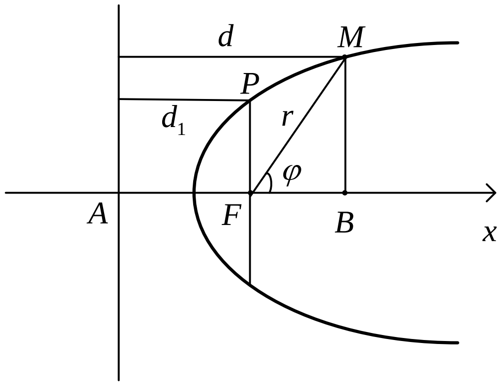
$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{-ex - a}{-\frac{a}{e} - x} = \frac{(-ex - a)e}{-a - ex} = e ,$$

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{a - ex}{\frac{a}{e} - x} = \frac{(a - ex)e}{a - ex} = e .$$

Для параболи $r = d = x + \frac{p}{2}$, тому $\frac{r}{d} = 1$, отже, ексцентриситет параболи дорівнює одиниці. Теорему доведено.

## *Полярні рівняння кривих другого порядку*

Полярні рівняння кривих другого порядку одержуємо, використовуючи попередню теорему, тобто, що $\frac{r}{d}=e$.




Візьмемо за полярну вісь вісь абсцис, а за полюс – лівий фокус еліпса, або правий фокус гіперболи, або фокус параболи. Нехай у цій полярній системі координат точка на кривій другого порядку має координати $M(r;\varphi)$. Проведемо через фокус хорду, перпендикулярну до полярної осі, позначимо її довжину $2p$. Верхній кінець хорди має координати $P(p;\frac{\pi}{2})$.

Число $p$ називається полярним параметром кривої. Для всіх точок кривої правильною є рівність $\frac{r}{d}=e$. Для точки $P$ ця рівність набуде вигляду $\frac{p}{d_1}=e$.

Позначимо через $A$ точку перетину полярної осі та директриси, через $B$ – основу перпендикуляра, опущеного з точки $M$ на полярну вісь. Тоді

$$d = AB = AF + FB = d_1 + r\cos\varphi .$$

Оскільки $d_1=\frac{p}{e}$, то $d=\frac{p}{e}+r\cos\varphi$. Позаяк $\frac{r}{d}=e$, то

$$\frac{r}{\frac{p}{e}+r\cos\varphi}=e .$$

Звідси одержуємо полярне рівняння кривих другого порядку

$$r=\frac{p}{1-e\cos\varphi},$$

яке у випадку $e<1$ є рівнянням еліпса, у випадку $e>1$ – гіперболи, у випадку $e=1$ – параболи.

Для еліпса та гіперболи $p=\frac{b^2}{a}$.