Рівняння площини

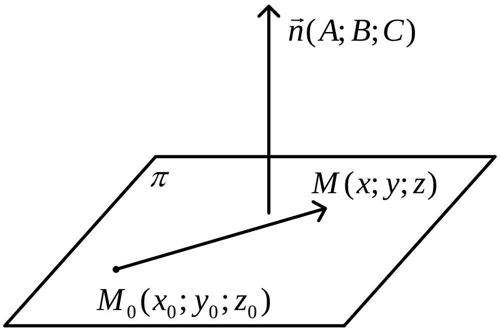
Нехай у просторі задано декартову прямокутну систему координат $Oxyz$ і деяку поверхню S.

Рівняння $G(x, y, z) = 0$, яке зв'язує змінні x, y, z, називається рівнянням поверхні S в обраній прямокутній системі координат, якщо координати будь-якої точки цієї поверхні S задовольняють рівняння, а координати будь-яких інших точок, що не належать поверхні S, не задовольняють зазначене рівняння.

Рівняння площини, що проходить через точку, перпендикулярно до заданого вектора

Означення. Ненульовий вектор, перпендикулярний до площини, називається *нормальним вектором* площини.

Нехай площина π проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}(A; B; C)$.



Нехай $M(x; y; z)$ – довільна точка площини π. Вектор $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ перпендикулярний до вектора $\vec{n}(A; B; C)$, скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю, тому

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

– *рівняння площини, що проходить через точку, перпендикулярно до заданого вектора*

Загальне рівняння площини

В рівнянні площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

розкриємо дужки. Тоді

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0.$$

Позначимо $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$.
Отже,

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

– *загальне рівняння площини*.

Нагадаємо, що вектор $\vec{n}(A; B; C)$ є нормальним вектором цієї площини.

Розглянемо випадки, коли загальне рівняння площини неповне.

1. Якщо $D = 0$, то точка $O(0;0;0)$ задовольняє рівняння площини $Ax + By + Cz = 0$, тому площина проходить через початок координат.

2. Якщо $A = 0$, то нормальним вектором площини $By + Cz + D = 0$ буде вектор $\vec{n}(0; B; C)$, який перпендикулярний до осі Ox, тому площина, перпендикулярна до нього, паралельна до осі Ox.

Аналогічно, якщо $B = 0$, то площина паралельна до осі Oy, якщо $C = 0$, то площина паралельна до осі Oz.

3. Якщо $A = B = 0$, то площина $Cz + D = 0$ паралельна до осі Ox і до осі Oy, тому ця площина паралельна до координатної площини xOy.

Аналогічно, якщо $A = C = 0$, то площина паралельна до площини xOz, якщо $B = C = 0$, то до площини yOz.

4. Якщо $A = D = 0$, то площина $By + Cz = 0$ паралельна до осі Ox і проходить через початок координат, тому ця площина проходить через вісь Ox.

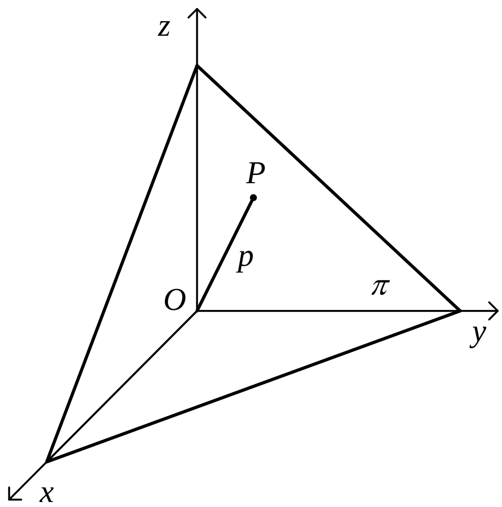
Аналогічно, якщо $B = D = 0$, то площина проходить через вісь Oy, якщо $C = D = 0$, то через вісь Oz.

5. Якщо $A = B = D = 0$, то площина $Cz = 0$ паралельна до площини xOy і проходить через початок координат, тому ця площина збігається з площиною xOy.

Аналогічно, якщо $A = C = D = 0$, то площина збігається з площиною xOz, якщо $B = C = D = 0$, то з площиною yOz.

Нормальне рівняння площини

Означення. Перпендикуляр, опущений з початку координат на площину, називається *нормаллю* цієї площини.



Нехай довжина нормалі p площини π і нормаль утворює кути α, β, γ з додатними напрямами осей Ox, Oy та Oz, відповідно. Нехай P – основа нормалі. Тоді вектор

$$\overrightarrow{OP}(p\cos\alpha;\ p\cos\beta;\ p\cos\gamma)$$

і, відповідно, точка

$$P(p\cos\alpha;\ p\cos\beta;\ p\cos\gamma).$$

Запишемо рівняння площини, що проходить через точку P, перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{OP}$

$$p\cos\alpha(x - p\cos\alpha) + p\cos\beta(y - p\cos\beta) + p\cos\gamma(z - p\cos\gamma) = 0.$$

Поділимо це рівняння на p і розкриємо дужки, тоді

$$x\cos\alpha - p\cos^2\alpha + y\cos\beta - p\cos^2\beta + z\cos\gamma - p\cos^2\gamma = 0,$$

або

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = 0.$$

Оскільки сума квадратів напрямних косинусів вектора дорівнює одиниці, тобто

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

то

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

– *нормальне рівняння площини*.

Зауважимо, що нормальне рівняння площиної має такі властивості:

- сума квадратів коефіцієнтів біля x, y та z дорівнює одиниці;
- вільний член цього рівняння є від’ємним.

Зведення загального рівняння площини до нормального вигляду

Нехай задано загальне рівняння площини

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

зведемо його до нормального вигляду. Домножимо рівняння на число $\mu \neq 0$. Таке число називають нормувальним множником. Отримаємо рівняння $\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = 0$. Для того, щоб рівняння стало нормальним, треба, щоб виконувалися дві умови: вільний член цього рівняння повинен бути від’ємним, тобто $\mu D < 0$, і сума квадратів коефіцієнтів біля x, y та z повинна дорівнювати одиниці, тобто $(\mu A)^2 + (\mu B)^2 + (\mu C)^2 = 1$. Тоді

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

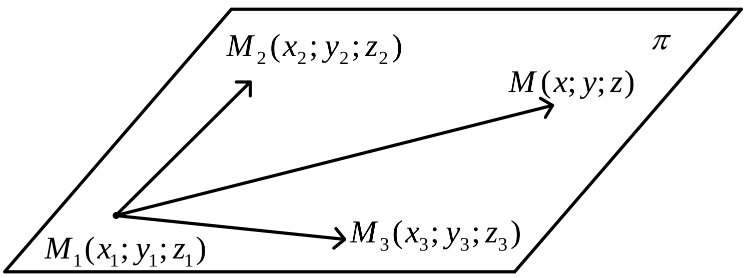
причому знак перед дробом вибираємо так, щоб він був протилежним до знака вільного члена D. Тобто

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

– *нормальне рівняння площини*.

Рівняння площини, що проходить через три точки

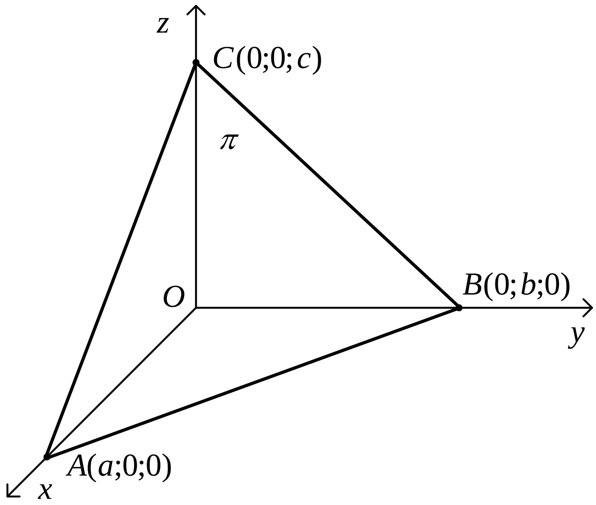
Нехай відомі три точки, які не лежать на одній прямій $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$.



Знайдемо рівняння площини π, яка проходить через ці точки. Нехай $M(x; y; z)$ – довільна точка цієї площини. Оскільки точки M, M_1, M_2 і M_3 належать одній площині, то вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарні і їхній мішаний добуток дорівнює нулю. Отже,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

– *рівняння площини, що проходить через три задані точки*.



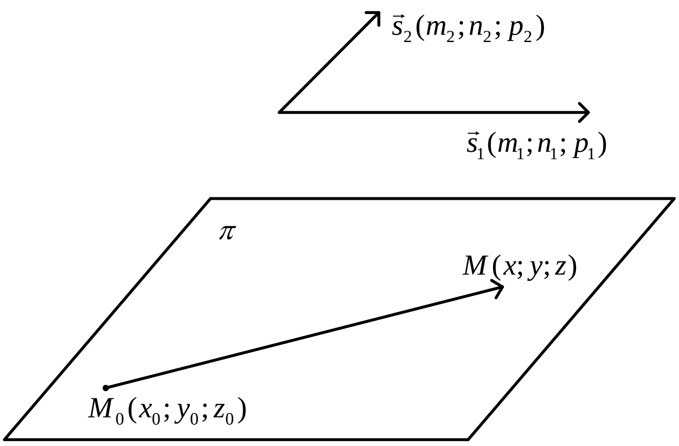
Якщо в рівняння площини, що проходить через три задані точки, підставити координати точок перетину площини з осями координат $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ і $C(0;0;c)$, то отримаємо рівняння площини у відрізках, які площина відтинає на осях координат.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

– рівняння площини, у відрізках.

Рівняння площини, що проходить через точку паралельно до двох неколінеарних векторів

Нехай площина π проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ паралельно до пари неколінеарних векторів $\vec{s}_1(m_1;n_1;p_1)$ та $\vec{s}_2(m_2;n_2;p_2)$.



Нехай $M(x;y;z)$ – довільна точка цієї площини. Оскільки вектори

$\overrightarrow{M_0M}(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$, $\vec{s}_1(m_1;n_1;p_1)$ та $\vec{s}_2(m_2;n_2;p_2)$

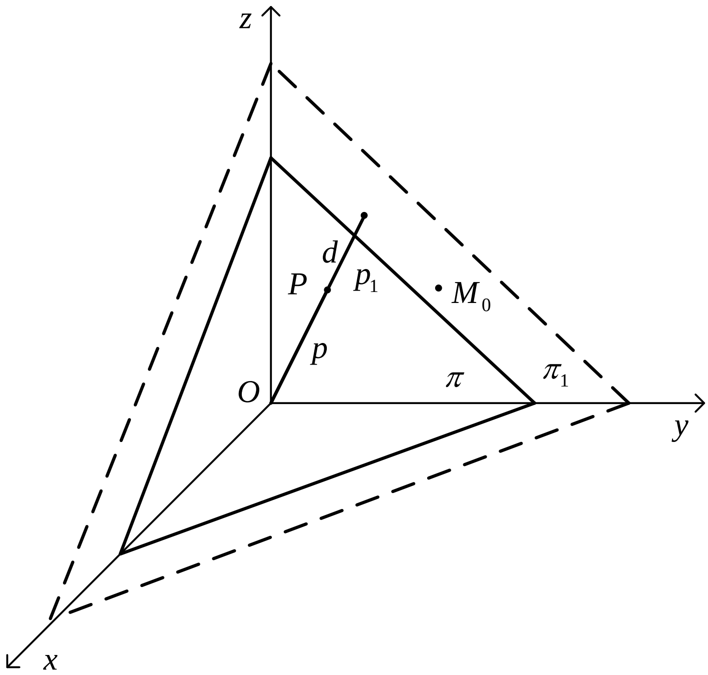
є компланарними, то їхній мішаний добуток дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$$

– рівняння площини, що проходить через точку паралельно до двох неколінеарних векторів.

Відстань від точки до площини

Нехай задано площину π нормальним рівнянням $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$. Знайдемо відстань d від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до цієї площини.



Проведемо через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ площину π_1, яка паралельна до площини π. Оскільки площини паралельні, то їхні нормалі p і p_1 утворюють однакові кути α, β, γ з додатними напрямами осей Ox, Oy та Oz, відповідно. Крім того, $p_1 = p + d$, якщо точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і початок координат $O(0;0;0)$ лежать по різні сторони від площини π, і $p_1 = p - d$, якщо $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і $O(0;0;0)$ лежать по одну сторону від цієї площини. Тому нормальним рівнянням площини π_1 буде

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - (p \pm d) = 0.$$

Оскільки точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ належить площині π_1, то її координати задовольняють рівняння цієї площини, тому

$$x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - (p \pm d) = 0.$$

Звідси

$$\pm d = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p.$$

Оскільки відстань $d \geq 0$, то

$$d = | x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p |$$

– формула відстані від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до прямої $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$.

Якщо площина π задана загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$, то спочатку зводимо його до нормального вигляду

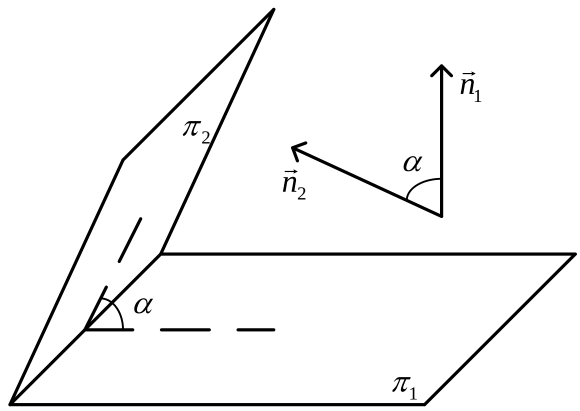
$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0.$$

Тоді формула відстані від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ матиме вигляд

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Кут між площинами

Нехай дві площини задані загальними рівняннями, тобто $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.



Кут α між площинами π_1 та π_2 дорівнює куту між їхніми нормальними векторами $\vec{n}_1(A_1; B_1; C_1)$ та $\vec{n}_2(A_2; B_2; C_2)$. Тому

$$\cos\alpha = \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Отже, кут між прямими, заданими загальними рівняннями, обчислюють за формулою

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Якщо площини π_1 та π_2 паралельні, то координати їхніх нормальних векторів пропорційні, тобто

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

– умова паралельності площин, заданих загальними рівняннями.

Якщо площини π_1 та π_2 перпендикулярні, то скалярний добуток їхніх нормальних векторів дорівнює нулю, тобто

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

– умова перпендикулярності площин, заданих загальними рівняннями.