Квадратичні форми

Означення. ***Квадратичною формою*** від змінних x_1, $x_2, \dots,$ x_n називається однорідний многочлен другого степеня вигляду

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \ ,$$

де $a_{ij} = a_{ji}$, $a_{ij} \in \mathrm{R}$.

Використовуючи матрично-векторні позначення, квадратичну форму $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ записуватимемо у вигляді

$$Q(\vec{x}) = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{nn} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{x}^T A \vec{x} \,,$$

де $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $A = (a_{ij})$, $A = A^T$.

Матрицю A називають ***матрицею квадратичної форми*** $Q(\vec{x})$.

Означення. Квадратична форма має ***канонічний вигляд***, якщо її матриця діагональна, $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$, тобто:

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) \; = \; a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2 \,.$$

Означення. Квадратична форма має ***нормальний вигляд***, якщо в її канонічному вигляді коефіцієнти $a_i \in \{-1, 1\}$.

Твердження. Кожну квадратичну форму за допомогою невиродженого лінійного перетворення координат можна звести до канонічного та нормального вигляду.

Квадратичну форму можна звести до канонічного вигляду ***методом виділення повних квадратів***, який відомий як ***метод Лагранжа***.

Квадратичну форму можна зводити до канонічного вигляду методом ***зведенням до головних осей.***

Щоб звести квадратичну форму до головних осей, треба записати матрицю A цієї квадратичної форми, знайти її власні значення λ_i. Тоді зведена квадратична форма матиме канонічний вигляд $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$. Якщо ж треба знайти відповідне перетворення, то для кожного власного значення λ_i знаходимо власний вектор. Система векторів, які відповідають різним власним значенням, є ортогональною. Пронормувавши систему власних векторів, складаємо з них матрицю T і записуємо перетворення.

Означення. Квадратична форма $Q(\vec{x})$ називається ***додатно визначеною***, якщо для довільного $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, $Q(\vec{x}) > 0$.

Означення. Квадратична форма $Q(\vec{x})$ називається ***від'ємно визначеною***, якщо для довільного $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, $Q(\vec{x}) < 0$.

Якщо квадратична форма $Q(\vec{x})$ може набувати додатних і від'ємних значень, то вона називається ***знакозмінною***.

Правильні такі умови додатної визначеності.

1. Квадратична форма $Q(\vec{x})$ додатно визначена тоді і тільки тоді, коли всі коефіцієнти в канонічному вигляді квадратичної форми додатні.
2. Квадратична форма $Q(\vec{x})$ додатно визначена тоді і тільки тоді, коли всі власні значення матриці квадратичної форми додатні.
3. Якщо квадратична форма $Q(\vec{x})$ додатно визначена, то визначник її матриці додатний. Обернене твердження неправильне.

Вироджена квадратична форма ($rangA < n$) не може бути додатно визначеною, і лише знакозмінна або невід'ємна.

Головними мінорами матриці $A = (a_{ij})$ називаються мінори $\Delta_1 = |a_{11}|$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \cdots,$ $\Delta_n = \det A$.

Справджується **теорема (критерій Сильвестра).**

Квадратична форма $Q(\vec{x})$ є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли всі головні мінори її матриці додатні. Тобто:

$$Q(\vec{x}) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \\ \quad \cdots \\ \Delta_n > 0 \end{cases}$$

Квадратична форма $Q(\vec{x})$ є від'ємно визначена тоді і тільки тоді, коли знаки кутових мінорів чергуються, причому $\Delta_1 < 0$. Тобто:

$$Q(\vec{x}) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 < 0 \\ \Delta_4 > 0 \\ \quad \cdots \end{cases}$$