$\forall$ - квантор загальності; читається “для будь-якого”.

$\exists$ - квантор існування; читається “існує”.

$\exists !$ -“існує єдиний (єдина)”.

Якщо з твердження А випливає В, тобто $A \to B$, то В є необхідною умовою для виконання А, в той час як А є достатньою умовою для виконання В.

$A \leftrightarrow B$ можна прочитати і в такий спосіб: “для виконання твердження А необхідно і достатньо виконання твердження В.”

$\sum$ - скорочене позначення для суми. $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

$\prod$ - скорочене позначення для добутку $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$

МНОЖИНИ

Поняття множини

Основи теорії множин були закладені відомим німецьким математиком Георгом Кантором у другій половині минулого століття (1871-1873 рр.)

В теорії множин поняття "***множина***" належить до первинних не означуваних понять (як “число”, “нескінченність” в алгебрі, “точка”, “пряма” в геометрії). Це поняття не може бути означено через інші простіші терміни або об’єкти. Його пояснюють на прикладах, апелюючи до нашої уяви та інтуїції.

Означення. Множина – це сукупність деяких об’єктів (елементів множини), виділених за певною ознакою чи властивістю з інших об’єктів. При цьому потрібно мати повний опис класу всіх об’єктів, які розглядаються (універсальна множина U).

Множини позначають великими латинськими літерами $A, B, C, \ldots$, а елементи множини – малими латинськими літерами $a, b, c, \ldots$

Якщо a є одним з об’єктів множини A, то говорять, що a - елемент множини A, або a належить A, позначають $a \in A$, якщо ж елемент a не належить множині B, то пишуть $a \notin B$.

Множину називають скінченною, якщо кількість її елементів скінчена, тобто існує натуральне число k, що є кількістю елементів цієї множини. У протилежному випадку множина є нескінченною.

Множину вважають заданною, якщо для довільного елемента є можливість визначити, чи є він елементом цієї множини чи ні.

Скінченні множини можна задавати списком всіх елементів множини. Записують цей список у фігурних дужках, $A = \{a_1, a_2, a_3\}$.

Також множини можна задавати описом характеристичних властивостей, якими повинні володіти елементи множини. Так, множина A, що складається з таких елементів x, які мають властивість $P(x)$, позначають так: $A = \{x | P(x)\}$.

Означення. Множина, яка не містить жодного елементу, називається порожньою множиною, позначають порожню множину символом Ø.

Означення. Якщо кожен елемент множини A міститься в множині B, то множина A називається підмножиною множини B ($A \subset B$).

Означення. Множини A та B називаються рівними ($A = B$), якщо $A \subset B$ і $B \subset A$.

Операції над множинами

1. Об’єднання

Означення. Об’єднанням множин A і B називають множину $A \cup B$, елементами якої є елементи, які належать або до множини A, або до множини B (тобто хоча б одній з цих множин).

2. Перетин (переріз)

Означення. Перетином множин A і B називають множину $A \cap B$, елементами якої є елементи, які належать і до множини A, і до множини B одночасно.

3. Різниця

Означення. Різницею множин A і B називають множину $A \setminus B$, елементами якої є ті елементи множини A, які не належать до множини B.

4. Доповнення

Означення. Доповненням множини A називають множину $\overline{A}$, елементами якої є ті елементи універсальної множини U, які не належать до множини A.

Властивості операцій над множинами

1. $A \cup A = A$
2. $A \cap A = A$
3. $A \cup B = B \cup A$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
6. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
8. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$
9. $A \cup \varnothing = A$
10. $A \cup U = U$
11. $A \cap \varnothing = \varnothing$
12. $A \cap U = A$
13. $\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$
14. $A \cup \overline{A} = U$
15. $A \cap \overline{A} = \varnothing$
16. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
17. $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Добуток множин

Означення. Декартовим добутком множин A і B називають множину $A \times B$ всіх впорядкованих пар елементів (a,b), з яких перший елемент а належить множині A, а другий в – множині B, тобто $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Очевидно, що $A \times B \neq B \times A$.

Числові множини

Множини, елементами яких є числа, називають *числовими множинами*. До основних числових множин відносяться:

1) множина натуральних чисел $\mathbf{N} = \{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$;
2) множина цілих чисел $\mathbf{Z} = \{0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots,\pm n,\ldots\}$;
3) множина раціональних чисел $\mathbf{Q} = \left\{\frac{m}{n} \middle| m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\right\}$, раціональне число є нескінченним періодичним десятковим дробом;
4) множина ірраціональних чисел $\mathbf{I}$, ірраціональне число є нескінченним неперіодичним десятковим дробом;
5) множина дійсних чисел $\mathbf{R}$, раціональні та ірраціональні числа утворюють множину дійсних чисел.

Між цими множинами існує зв’язок: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. Всі наведені вище основні числові множини є нескінченними.

Межі числових множин

Означення. Непорожня числова множина A називається обмеженою зверху, якщо існує таке число M, що для всіх елементів $x \in A$ множини виконується умова $x \leq M$. Число M в цьому випадку називається верхньою межею множини A.

Означення. Непорожня числова множина A називається обмеженою знизу, якщо існує таке число m, що для всіх елементів $x \in A$ множини виконується умова $m \leq x$. Число m в цьому випадку називається нижньою межею множини A.

Означення. Непорожня числова множина A називається обмеженою, якщо вона обмежена і зверху, і знизу.

Очевидно, що для множини A верхніх та нижніх меж може існувати багато.

Якщо множина не обмежена зверху, то її верхньою межею вважають $+\infty$.

Якщо множина не обмежена знизу, то її нижньою межею вважають $-\infty$.

Означення. Найменша верхня межа непорожньої числової множини A називається точною верхньою межею (гранню) множини A і позначається $\sup(A)$.

Означення. Найбільша нижня межа непорожньої числової множини A називається точною нижньою межею (гранню) множини A і позначається $\inf(A)$.

Основні властивості точних меж:

Якщо $\sup A = \alpha$, то 1) $\forall x \in A \;\; x \le \alpha$;

2) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x_1 \in A \;\; x_1 > \alpha - \varepsilon$.

Якщо $\inf A = \beta$, то 1) $\forall x \in A \;\; \beta \le x$;

2) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x_1 \in A \;\; x_1 < \beta + \varepsilon$.

Твердження 1. Будь-яка непорожня обмежена зверху числова множина має точну верхню грань.

Твердження 2. Будь-яка непорожня обмежена знизу числова множина має точну нижню грань.

Не слід ототожнювати точну верхню (нижню) грань з найбільшим (найменшим) елементом множини. Найбільше (найменше) число множини має належати цій множині, тоді як точна верхня (нижня) грань множини може й не належати цій множині.