# Системи лінійних рівнянь

**Означення.** Системою $m$ лінійних рівнянь із $n$ невідомими називається сукупність рівностей вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ........................................... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – невідомі, $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ – коефіцієнти системи, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – вільні члени.

Введемо позначення

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – основна матриця системи,

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – стовпець невідомих, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – стовпець вільних членів.

Тоді систему (1) можна записати у вигляді

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, тобто

$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ – матричний запис системи.

Крім того, розглядатимемо розширену матрицю системи

$$\overline{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

**Означення.** Розв'язком системи (1) називається впорядкований набір із $n$ дійсних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, які при підстановці в систему перетворюють всі рівняння в правильні числові рівності (тотожності).

**Означення.** Система, яка має хоча б один розв'язок, називається сумісною.

**Означення.** Якщо система не має жодного розв'язку, то вона називається несумісною.

**Означення.** Система лінійних рівнянь, яка має лише один розв'язок, називається визначеною.

**Означення.** Система лінійних рівнянь, яка має безліч розв'язків, називається невизначеною.

**Означення.** Система лінійних рівнянь (1) називається квадратною, якщо в неї кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих ($m = n$).

**Означення.** Система лінійних рівнянь (1) називається однорідною, якщо в неї всі вільні члени дорівнюють нулю.

**Означення.** Система лінійних рівнянь (1) називається неоднорідною, якщо в неї хоча б один вільний член ненульовий.

## Метод Гаусса

Метод Гаусса є універсальним. З його допомогою можна розв'язать будь-яку систему лінійних рівнянь.

**Означення.** Елементарними перетвореннями системи лінійних рівнянь називають такі перетворення.

1. Перестановка двох рівнянь системи.
2. Множення рівняння на ненульове число.
3. Додавання до одного рівняння іншого рівняння, помноженого на довільне число.

**Означення.** Системи лінійних рівнянь, множини розв'язків яких збігаються, називаються рівносильними (еквівалентними).

**Твердження.** Елементарні перетворення системи лінійних рівнянь зводять її до рівносильної системи.

Кожну систему лінійних рівнянь шляхом елементарних перетворень можна звести до рівносильної системи, яку можна легко розв'язати. Такий метод зведення називається методом послідовного виключення невідомих або методом Гаусса.

Оскільки система повністю визначається своєю розширеною матрицею, то для спрощення записів можна проводити елементарні перетворення розширеної матриці системи $\overline{A}$.

**Для того, щоб розв'язати систему методом Гаусса треба:**

1. Записати розширену матрицю системи;
2. Звести цю матрицю до східчастого вигляду (з допомогою елементарних перетворень);
3. По східчастій матриці виписати рівносильну систему;
4. Записати розв'язок системи, починаючи з останнього рівняння.

Задачу про сумісність і визначеність системи лінійних рівнянь можна розв'язати, дослідивши останній ненульовий рядок східчастої матриці. Можливі такі випадки.

1. Нехай останній ненульовий рядок східчастої матриці набув вигляду $(0 \ \cdots \ 0 | b_s)$, причому $b_s \neq 0$. Тоді йому відповідає рівняння $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = b_s$. Очевидно, що система несумісна.

2. Нехай останній ненульовий рядок східчастої матриці має вигляд $(0 \ \ldots \ 0 \ \ a_{sj_s} \ \ldots \ a_{sn} | b_s)$. Тоді система сумісна, якщо $j_s \leq n-1$, то вона невизначена.

3. Система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок (є визначеною), якщо східчаста матриця має трикутний вигляд

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right).$$