# Послідовності

## Поняття числової послідовності

Якщо кожному натуральному числу $n \in \mathrm{N}$ поставити у відповідність за деяким правилом дійсне число $x_n$, то одержимо множину чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, яка називається ***числовою послідовністю*** і позначається $\{x_n\}$. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ називаються членами послідовності, число $x_n$ називається загальним членом послідовності.

Числову послідовність можна задати **рекурентним** способом, тобто задають один або декілька перших членів послідовності і правило, за яким можна знайти решта членів послідовності через задані.

## Дії з послідовностями

Дано дві послідовності: $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$.

*Означення.* ***Сумою послідовностей*** $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ називається послідовність $\{x_n + y_n\}$ з членами $x_1 + y_1$, $x_2 + y_2$, $x_3 + y_3, \ldots$, $x_n + y_n, \ldots$.

*Означення.* ***Різницею послідовностей*** $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ називається послідовність $\{x_n - y_n\}$ з членами $x_1 - y_1$, $x_2 - y_2$, $x_3 - y_3, \ldots$, $x_n - y_n, \ldots$.

*Означення.* ***Добутком послідовності*** $\{x_n\}$ ***на число*** $c$ називається послідовність $\{cx_n\}$ з членами $cx_1$, $cx_2$, $cx_3, \ldots$, $cx_n, \ldots$.

*Означення.* ***Добутком послідовностей*** $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ називається послідовність $\{x_n \cdot y_n\}$ з членами $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3, \ldots$, $x_n y_n, \ldots$.

*Означення.* ***Часткою послідовностей*** $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$, $y_n \neq 0$ називається послідовність $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ з членами $\dfrac{x_1}{y_1}$, $\dfrac{x_2}{y_2}$, $\dfrac{x_3}{y_3}, \ldots$, $\dfrac{x_n}{y_n}, \ldots$.

## Обмежені послідовності

*Означення.* Послідовність $\{x_n\}$ називається ***обмеженою зверху***, якщо існує таке число $M$, що кожен член послідовності $\{x_n\}$ задовольняє умову $x_n \leq M$.

*Означення.* Послідовність $\{x_n\}$ називається ***обмеженою знизу***, якщо існує таке число $m$, що кожен член послідовності $\{x_n\}$ задовольняє умову $x_n \geq m$.

*Означення.* Послідовність $\{x_n\}$ називається ***обмеженою***, якщо вона обмежена і зверху, і знизу, тобто, якщо існують такі числа $m$ та $M$, що кожен член послідовності $\{x_n\}$ задовольняє умову $m \leq x_n \leq M$.

Нехай $A = \max\{|m|, |M|\}$, тоді умову обмеженості можна записати у вигляді $|x_n| \leq A$.

*Означення.* Якщо існує таке число $A$, що кожен член послідовності $\{x_n\}$ задовольняє умову $|x_n| \le A$, то послідовність називається ***обмеженою***.

*Означення.* Послідовність $\{x_n\}$ називається ***необмеженою***, якщо для довільного числа $A > 0$ існує такий член послідовності $x_n$, що $|x_n| > A$.

## Монотонні послідовності

*Означення.* Послідовність $\{x_n\}$ називається ***зростаючою***, якщо кожний наступний член послідовності більший, ніж попередній, тобто $x_{n+1} > x_n$ для всіх $n \in \mathrm{N}$.

*Означення.* Послідовність $\{x_n\}$ називається ***спадною***, якщо кожний наступний член послідовності менший, ніж попередній, тобто $x_{n+1} < x_n$ для всіх $n \in \mathrm{N}$.

*Означення.* Послідовність $\{x_n\}$ називається ***незростаючою***, якщо кожний наступний член послідовності не більший, ніж попередній, тобто $x_{n+1} \le x_n$ для всіх $n \in \mathrm{N}$.

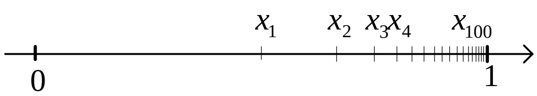
*Означення.* Послідовність $\{x_n\}$ називається ***неспадною***, якщо кожний наступний член послідовності не менший, ніж попередній, тобто $x_{n+1} \ge x_n$ для всіх $n \in \mathrm{N}$.

*Означення.* Зростаючі та спадні послідовності називаються ***строго монотонними***.

*Означення.* Незростаючі та неспадні послідовності називаються ***монотонними***.

## Границя послідовності

Розглянемо послідовність $\{x_n\}$, $x_n = \dfrac{n}{n+1}$. Тоді $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{2}{3}$, $x_3 = \dfrac{3}{4}$, $x_4 = \dfrac{4}{5}, \dots$, $x_{100} = \dfrac{100}{101}, \dots$. Зобразимо члени послідовності на числовій осі.




Бачимо, що при збільшенні номера $n$ члени послідовності дедалі ближче до одиниці. Це прийнято писати так: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

*Означення.* Число $a$ називається ***границею послідовності*** $\{x_n\}$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$), якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $n_0$, що для всіх $n > n_0$ виконується умова $|x_n - a| < \varepsilon$.

*Означення.* Послідовність, яка має границю, називається ***збіжною***.

Розглянемо геометричну інтерпретацію границі числової послідовності. Нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ можна записати так: $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$, або $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, або $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Інтервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ називають $\varepsilon -$околом точки $a$. Якщо $a$ є границею послідовності $\{x_n\}$, то для будь-якого $\varepsilon -$околу точки $a$ знайдеться номер $n_0$, що всі члени послідовності з номерами $n > n_0$ належать цьому $\varepsilon -$околу.

## Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності

*Означення.* Послідовність $\{x_n\}$ називається ***нескінченно малою***, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер $n_0$, що для всіх $n > n_0$ виконується умова $|x_n| < \varepsilon$.

Прикладами нескінченно малих послідовностей є $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{3}{2^n}$, оскільки границі цих послідовностей дорівнюють нулю. Послідовність $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ не є нескінченно малою, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 \neq 0$.

**Твердження 1.** Якщо послідовність $\{x_n\}$ збіжна і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то послідовність $\{\alpha_n\} = \{x_n - a\}$ нескінченно мала.

*Доведення.* Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тоді, за означенням границі,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \mathrm{n}_0(\varepsilon):\ |x_n - a| = |(x_n - a) - 0| < \alpha\ \forall \mathrm{n} > \mathrm{n}_0(\varepsilon).$$

Звідси випливає, що послідовність $\alpha_n = x_n - a$ збігається до нуля, тобто є нескінченно малою.

**Твердження 2.** Якщо послідовність $\{\alpha_n\} = \{x_n - a\}$ нескінченно мала, то послідовність $\{x_n\}$ збіжна і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

*Доведення.* Нехай послідовність з загальним членом $\alpha_n = x_n - a$ є нескінченно малою. Тоді $\forall \varepsilon > 0\ \exists \mathrm{n}_0(\varepsilon):\ |(x_n - a) - 0| = |x_n - a| < \alpha\ \forall \mathrm{n} > \mathrm{n}_0(\varepsilon)$, тобто за означенням границі послідовності маємо: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

**Твердження 3.** Якщо послідовності $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ нескінченно малі, то послідовність $\{\alpha_n + \beta_n\}$ нескінченно мала.

*Доведення.* Нехай $\varepsilon$ – довільне додатне число. Оскільки $\{\alpha_n\}$ та $\{\beta_n\}$ є нескінченно малими, то знайдуться такі номери $n_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ та $n_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, що виконуються нерівності:

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall \mathrm{n} > \mathrm{n}_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \qquad |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall \mathrm{n} > \mathrm{n}_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Отримуємо співвідношення:

$$|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Воно виконується для всіх номерів $n$, які перевищують найбільше з чисел $n_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ та $n_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$. Таким чином, $\{\alpha_n + \beta_n\}$ є нескінченно малою послідовністю.

**Твердження 4.** Якщо послідовності $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ нескінченно малі, то послідовність $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ нескінченно мала.

**Твердження 5.** Якщо послідовність $\{\alpha_n\}$ нескінченно мала і послідовність $\{c_n\}$ обмежена, то послідовність $\{c_n \cdot \alpha_n\}$ нескінченно мала.

*Доведення.* За умовою, послідовність $\{c_n\}$ обмежена, тобто $\exists M > 0 \ |c_n| < M \ \forall n \in \mathbb{N}$. Оскільки $\{\alpha_n\}$ є нескінченно малою послідовністю, то існує номер $n_0\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)$, такий, що для всіх $n > n_0\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)$ $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$. Тоді для цих $n$ виконується нерівність:

$$|c_n \cdot \alpha_n| = |c_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon .$$

Ця нерівність означає, що послідовність $\{c_n \cdot \alpha_n\}$ є нескінченно малою.

*Означення.* Послідовність $\{x_n\}$ називається ***нескінченно великою***, якщо для будь-якого числа $A > 0$ існує такий номер $n_0$, що для всіх $n > n_0$ виконується умова $|x_n| > A$. ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$)

Прикладами нескінченно великих послідовностей є $x_n = 3n$, $x_n = 5^n$.

**Твердження.**

1. Якщо послідовність $\{x_n\}$ нескінченно велика і $x_n \neq 0$ для всіх $n \in \mathrm{N}$, то послідовність $\{y_n\} = \left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ нескінченно мала.
2. Якщо послідовність $\{x_n\}$ нескінченно мала і $x_n \neq 0$ для всіх $n \in \mathrm{N}$, то послідовність $\{y_n\} = \left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ нескінченно велика.

## Властивості збіжних послідовностей

**Твердження 1.**

Збіжна послідовність є обмеженою.

*Доведення.* Нехай послідовність $\{x_n\}$ збіжна і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер $n_0$, що для всіх $n > n_0$ виконується умова $|x_n - a| < \varepsilon$.

Нехай $\varepsilon = 1$. Тоді $|x_n - a| < 1$.

Оскільки $|x_n| - |a| \leq |x_n - a|$, то $|x_n| - |a| < 1$, тоді $|x_n| < |a| + 1$ для всіх $n > n_0$.

Нехай $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|, |a| + 1\}$.

Тоді $|x_n| < M$ для всіх $n \in \mathrm{N}$. Отже, послідовність $\{x_n\}$ обмежена.

**Твердження 2.**

Збіжна послідовність має тільки одну границю.

*Доведення.* Від супротивного. Припустимо, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ і $a \neq b$.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий номер $n_0^1$, що для всіх $n > n_0^1$ виконується умова $|x_n - a| < \varepsilon$.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, то для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий номер $n_0^2$, що для всіх $n > n_0^2$ виконується умова $|x_n - b| < \varepsilon$..

Нехай $n_0 = \max\{n_0^1, n_0^2\}$.

Тоді для всіх $n > n_0$ $|a-b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| = |x_n - a| + |x_n - b| < \varepsilon = \varepsilon = 2\varepsilon$.

Отже, $|a-b| < \varepsilon$.

Оскільки $\varepsilon$ — довільне додатне число, то нехай $\varepsilon = \frac{1}{3}|a-b|$.

Тоді $|a-b| < \frac{2}{3}|a-b|$, тобто $1 < \frac{2}{3}$.

Отримали суперечність. Отже, збіжна послідовність має тільки одну границю.

**Твердження 3.** (про проміжну послідовність)

Нехай елементи послідовностей $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ задовольняють умову $x_n \leq y_n \leq z_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ та $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Тоді послідовність $\{y_n\}$ збіжна і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

**Твердження 4.**

Якщо послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ збіжні, і для довільного $n$ $x_n \leq y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

**Твердження 5.**

1. Якщо послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ збіжні, то послідовність $\{x_n + y_n\}$ збіжна і $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

2. Якщо послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ збіжні, то послідовність $\{x_n - y_n\}$ збіжна і $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

3. Якщо послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ збіжні, то послідовність $\{x_n \cdot y_n\}$ збіжна і $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

4. Якщо послідовність $\{x_n\}$ збіжна, то послідовність $\{cx_n\}$ збіжна і $\lim\limits_{n\to\infty}(cx_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

5. Якщо послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ збіжні, $y_n \neq 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то послідовність $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ збіжна і $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

## Число $e$.

**Твердження.**

Якщо послідовність $\{x_n\}$ монотонно неспадна (незростаюча) і обмежена зверху (знизу), то вона збіжна.

Розглянемо послідовність $\{x_n\}$ $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Можна показати, що ця послідовність зростаюча і обмежена і $1 < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$. Тому ця послідовність збіжна і її границя дорівнює $e$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$