

# Питання до іспиту з вищої математики

## Закінчити речення.

1. Матриця, в якій кількість рядків дорівнює кількості стовпців, називається
2. Квадратна матриця, в якій  $a_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ , називається
3. Діагональна матриця, в якій  $a_{ii} = 1$ , називається
4. Матриця, в якій всі елементи дорівнюють нулю, називається
5. Якщо в матриці  $A$  замінити рядки на стовпці, то одержимо матрицю, яка називається
6. Квадратна матриця  $A = (a_{ij})$ , для якої  $a_{ij} = a_{ji}$ , для всіх  $i = 1, 2, \dots, n$ , називається
7. Квадратна матриця  $A = (a_{ij})$ , для якої  $a_{ij} = -a_{ji}$ , для всіх  $i = 1, 2, \dots, n$ , називається
8. Матриця, в якій  $a_{ij} = 0$  при  $i > j$ , називається
9. Матриця, в якій  $a_{ij} = 0$  при  $i < j$ , називається
10. Дві матриці, одна з яких отримана з іншої за допомогою елементарних перетворень, називаються
11. Матриця, яка задовольняє наступні умови: якщо в  $i$ -тому рядку матриці перший ненульовий елемент стоїть на  $k$ -тому місці, то в  $(i+1)$ -му рядку перших  $k$  елементів дорівнюють нулю; якщо всі елементи  $i$ -го рядка дорівнюють нулю, то кожен елемент  $(i+1)$ -го рядка дорівнює нулю, називається
12. Визначник  $(n-1)$ -го порядку, який одержуємо з визначника матриці  $A$   $n$ -го порядку шляхом викреслення  $i$ -го рядка та  $j$ -го стовпця, називається
13. Визначник, утворений з елементів, які стоять на перетині довільних  $k$  рядків та  $k$  стовпців матриці  $A$ , називається
14. Матриця, визначник якої дорівнює нулю, називається
15. Матриця, визначник якої не дорівнює нулю, називається
16. Найвищий порядок відмінних від нуля мінорів матриці  $A$  називається
17. Система лінійних рівнянь, в якій кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих, називається
18. Система лінійних рівнянь, в якій всі вільні члени дорівнюють нулю, називається
19. Сукупність чисел, яка перетворює всі рівняння системи лінійних рівнянь на тотожності, називається
20. Система лінійних рівнянь, яка має хоча б один розв'язок, називається
21. Система лінійних рівнянь, яка не має жодного розв'язку, називається
22. Система лінійних рівнянь, яка має лише один розв'язок, називається
23. Система лінійних рівнянь, яка має безліч розв'язків, називається
24. Системи лінійних рівнянь, множини розв'язків яких співпадають, називаються
25. Вектор, початок і кінець якого співпадають, називається
26. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається
27. Вектори, які лежать на одній або на паралельних прямих, називаються
28. Вектори, які є колінеарними, однаково напрямленими і які мають однакову довжину, називаються
29. Вектори, які є колінеарними, протилежно напрямленими, які мають однакову довжину, називаються
30. Вектори, які лежать в одній або в паралельних площинах, називаються
31. Вектор, початок якого співпадає з початком вектора  $\vec{a}$ , кінець — з кінцем вектора  $\vec{b}$ , при умові, що початок вектора  $\vec{b}$  співпадає з кінцем вектора  $\vec{a}$ , називається
32. Вектор, який треба додати до вектора  $\vec{b}$ , щоб дістати вектор  $\vec{a}$ , називається
33. Вектор  $\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$  називається
34. Якщо існують такі  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}$ , що не всі одночасно дорівнюють нулю, для яких правильною є рівність  $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}$ , то система векторів  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  називається

35. Якщо з рівності  $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}$  випливає, що  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ , то система векторів  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  називається
36. Якщо система векторів  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  є лінійно незалежною і довільний вектор є лінійною комбінацією векторів цієї системи, то вектори  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  називаються
37. Сукупність точки (початку координат) та векторів бази називається
38. Система координат, вектори бази якої є одиничними та взаємно перпендикулярними, називається
39. Число, яке дорівнює добутку довжин двох векторів на косинус кута між ними, називається
40. Якщо скалярний добуток двох векторів дорівнює нулю, то
41. Вектор, який є перпендикулярним до двох заданих векторів, довжина якого дорівнює добутку довжин цих векторів на синус кута між ними, і який напрямлений так, що ці три вектори утворюють праву трійку, називається
42. Якщо векторний добуток двох векторів дорівнює нулю, то
43. Площа паралелограма, побудованого на двох векторах, дорівнює
44. Площа трикутника, побудованого на двох векторах, дорівнює
45. Число, яке дорівнює скалярному добутку векторного добутку двох векторів та третього вектора, називається
46. Об'єм паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах, дорівнює
47. Об'єм піраміди, побудованої на трьох векторах, дорівнює
48. Ненульовий вектор, паралельний до прямої, називається
49. Ненульовий вектор, перпендикулярний до прямої на площині, називається
50. Перпендикуляр, опущений з початку координат на пряму на площині, називається
51. Ненульовий вектор, перпендикулярний до площини, називається
52. Якщо площина  $\pi$  задана рівнянням  $Ax + By + Cz + D = 0$  і площина проходить через початок координат, то
53. Якщо площина  $\pi$  задана рівнянням  $Ax + By + Cz + D = 0$  і  $\pi$  паралельна до осі  $Ox$ , то
54. Якщо площина  $\pi$  задана рівнянням  $Ax + By + Cz + D = 0$  і  $\pi$  паралельна до осі  $Oy$ , то
55. Якщо площина  $\pi$  задана рівнянням  $Ax + By + Cz + D = 0$  і  $\pi$  паралельна до осі  $Oz$ , то
56. Якщо площина  $\pi$  задана рівнянням  $Ax + By + Cz + D = 0$  і  $\pi$  паралельна до площини  $xOy$ , то
57. Якщо площина  $\pi$  задана рівнянням  $Ax + By + Cz + D = 0$  і  $\pi$  паралельна до площини  $xOz$ , то
58. Якщо площина  $\pi$  задана рівнянням  $Ax + By + Cz + D = 0$  і  $\pi$  паралельна до площини  $yOz$ , то
59. Якщо площина  $\pi$  задана рівнянням  $Ax + By + Cz + D = 0$  і  $\pi$  проходить через вісь  $Ox$ , то
60. Якщо площина  $\pi$  задана рівнянням  $Ax + By + Cz + D = 0$  і  $\pi$  проходить через вісь  $Oy$ , то
61. Якщо площина  $\pi$  задана рівнянням  $Ax + By + Cz + D = 0$  і  $\pi$  проходить через вісь  $Oz$ , то
62. Лінії, рівняння яких в прямокутній декартовій системі координат на площині є рівняннями другого степеня відносно змінних  $x$  та  $y$ , називаються
63. Множина точок площини, які знаходяться на однаковій відстані від фіксованої точки, називається
64. Відрізок, який сполучає дві точки кола і проходить через його центр, називається
65. Множина точок площини, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок площини, є величиною стала, називається
66. Відношення відстані між фокусами еліпса до довжини його великої осі називається
67. Прямі, перпендикулярні до великої осі еліпса, розмішені симетрично відносно центра еліпса на відстані  $\frac{a}{e}$  від нього, називаються
68. Множина точок площини, різниця відстаней від яких до двох фіксованих точок площини, є величиною стала, називається
69. Відношення відстані між фокусами гіперболи до довжини її дійсної осі називається
70. Рівняння  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  на площині є рівнянням

71. Рівняння  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  на площині є рівнянням
72. Рівняння  $y^2 = 2px$  на площині є рівнянням
73. Множина точок площини, відстань від яких до фіксованої точки дорівнює відстані до фіксованої прямої, називається
74. Поверхня, задана рівнянням  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  називається
75. Поверхня, задана рівнянням  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  називається
76. Поверхня, задана рівнянням  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$  називається
77. Поверхня, задана рівнянням  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$  називається
78. Поверхня, задана рівнянням  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$  називається
79. Поверхня, задана рівнянням  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$  називається
80. Поверхня, задана рівнянням  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  називається
81. Поверхня, задана рівнянням  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  називається
82. Поверхня, задана рівнянням  $x^2 = 2py$  називається
83. Якщо  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ , то ненульовий вектор  $\vec{x}$  називається
84. Якщо  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ , то число  $\lambda$  називається

### Сформулювати означення чи твердження.

1. Означення матриці.
2. Означення квадратної матриці.
3. Означення діагональної матриці.
4. Означення скалярної матриці.
5. Означення одиничної матриці.
6. Означення транспонованої матриці.
7. Означення симетричної матриці.
8. Означення косиметричної матриці.
9. Означення верхньої трикутної матриці.
10. Означення нижньої трикутної матриці.
11. Правило додавання матриць.
12. Правило множення матриці на скаляр.
13. Умова існування добутку двох матриць.
14. Означення добутку матриць.
15. Означення еквівалентних матриць.
16. Означення елементарних перетворень матриці.
17. Означення східчастої матриці.
18. Формула обчислення визначника другого порядку.
19. Формула обчислення визначника третього порядку.
20. Означення визначника  $n$ -го порядку.
21. Означення мінора елемента матриці.
22. Означення алгебраїчного доповнення елемента матриці.

23. Означення мінора  $k$ -го порядку матриці.
24. Означення виродженої та невивродженої матриці.
25. Означення оберненої матриці.
26. Формула оберненої матриці.
27. Матричні рівняння та формули їх розв'язування.
28. Означення рангу матриці по мінорах.
29. Означення рангу матриці по рядках.
30. Означення рангу матриці по стовпцях.
31. Означення базового мінора матриці.
32. Означення системи лінійних рівнянь.
33. Означення однорідної та неоднорідної системи лінійних рівнянь.
34. Означення розв'язку системи лінійних рівнянь.
35. Означення сумісної та несумісної системи лінійних рівнянь.
36. Означення визначеної та невизначеної системи лінійних рівнянь.
37. Сформулювати теорему Кронекера-Капеллі.
38. Сформулювати теорему про розв'язування системи лінійних рівнянь методом Крамера.
39. Означення рівносильних систем лінійних рівнянь.
40. Означення елементарних перетворень системи лінійних рівнянь.
41. Означення фундаментальної системи розв'язків системи лінійних рівнянь.
42. Означення вектора.
43. Означення довжини вектора.
44. Означення ноль-вектора.
45. Означення одиничного вектора.
46. Означення колінеарних векторів.
47. Означення рівних векторів.
48. Означення протилежних векторів.
49. Означення компланарних векторів.
50. Означення суми векторів.
51. Означення різниці векторів.
52. Означення добутку вектора на скаляр.
53. Означення лінійної комбінації системи векторів.
54. Означення лінійно залежної системи векторів.
55. Означення лінійно незалежної системи векторів.
56. Означення бази простору.
57. Означення проекції вектора на вісь.
58. Формули поділу відрізка у заданому відношенні.
59. Формули середини відрізка.
60. Означення скалярного добутку векторів.
61. Формула скалярного добутку векторів, заданих координатами.
62. Формула довжини вектора, заданого координатами.
63. Формула кута між векторами.
64. Означення векторного добутку векторів.
65. Формула векторного добутку векторів, заданих координатами.
66. Геометричний зміст векторного добутку векторів.
67. Означення мішаного добутку векторів.
68. Формула мішаного добутку векторів, заданих координатами.
69. Геометричний зміст мішаного добутку векторів.
70. Означення напрямного вектора прямої.
71. Означення нормального вектора прямої.
72. Канонічне рівняння прямої на площині.
73. Параметричне рівняння прямої на площині.
74. Рівняння прямої на площині, яка проходить через дві точки.
75. Рівняння прямої у відрізках.
76. Рівняння прямої на площині, що проходить через задану точку з заданим кутовим коефіцієнтом.

77. Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.
78. Формули напрямного та нормального вектора прямої на площині, заданої загальним рівнянням.
79. Нормальне рівняння прямої на площині.
80. Кут між прямими на площині, заданими канонічними рівняннями.
81. Кут між прямими на площині, заданими загальним рівняннями.
82. Кут між прямими на площині, заданими рівняннями з кутовими коефіцієнтами.
83. Умова паралельності та перпендикулярності прямих, заданих загальними рівняннями.
84. Умова паралельності та перпендикулярності прямих, заданих канонічними рівняннями.
85. Умова паралельності та перпендикулярності прямих, заданих рівняннями з кутовим коефіцієнтом.
86. Формула відстані від точки до прямої.
87. Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.
88. Рівняння площини, що проходить через три точки.
89. Рівняння площини у відрізках.
90. Нормальне рівняння площини.
91. Рівняння площини, що проходить через задану точку, паралельно до двох неколінеарних векторів.
92. Формула кута між площинами.
93. Умова перпендикулярності та паралельності площин.
94. Формула відстані від точки до площини.
95. Канонічне рівняння прямої в просторі.
96. Параметричне рівняння прямої в просторі.
97. Рівняння прямої в просторі, що проходить через дві точки.
98. Загальне рівняння прямої в просторі.
99. Формула напрямного вектора прямої в просторі, заданої загальним рівнянням.
100. Формула кута між прямими в просторі.
101. Умова паралельності та перпендикулярності прямих в просторі.
102. Формула кута між прямою та площиною.
103. Умова паралельності та перпендикулярності прямої та площини.
104. Означення кривої другого порядку.
105. Означення кола.
106. Означення діаметра кола.
107. Означення еліпса.
108. Означення ексцентриситета еліпса.
109. Означення директрис еліпса.
110. Означення гіперболи.
111. Означення ексцентриситета гіперболи.
112. Означення директрис гіперболи.
113. Формула асимптот гіперболи.
114. Означення параболі.
115. Канонічне рівняння еліпса.
116. Канонічне рівняння гіперболи.
117. Канонічне рівняння параболі.
118. Полярне рівняння кривих другого порядку.
119. Канонічне рівняння еліпсоїда. Намалювати його.
120. Канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда. Намалювати його.
121. Канонічне рівняння двопорожнинного гіперболоїда. Намалювати його.
122. Канонічне рівняння еліптичного конуса. Намалювати його.
123. Канонічне рівняння еліптичного параболоїда. Намалювати його.
124. Канонічне рівняння гіперболічного параболоїда. Намалювати його.
125. Канонічне рівняння еліптичного циліндра. Намалювати його.
126. Канонічне рівняння гіперболічного циліндра. Намалювати його.
127. Канонічне рівняння параболічного циліндра. Намалювати його.
128. Означення власного вектора та власного значення матриці.

129. Означення квадратичної форми.  
 130. Означення додатно визначеної та від'ємно визначеної квадратичної форми.  
 131. Сформулювати критерій Сильвестра додатної визначеності квадратичної форми.

### Зразок практичних завдань

1. Обчислити  $2AB - 3BA$ , якщо  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ .

2. Обчислити  $f(A)$ , якщо  $f(x) = x^2 - 5x + 3$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ .

3. Обчислити визначник  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ .

4. Обчислити визначник  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 5 & -3 \\ 4 & 5 & 9 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 8 \end{vmatrix}$ .

5. Знайти обернену матрицю до матриці  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ .

6. Розв'язати рівняння  $A \cdot X = B$ , якщо  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ .

7. Розв'язати рівняння:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ -3 & -2 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$ .

8. Знайти ранг матриці  $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ .

9. Розв'язати систему (методом Крамера, Гаусса та матричним)  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$

10. Знайти загальний розв'язок системи  $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$ .

11. Знайти скалярний добуток та векторний добуток векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , якщо  $\vec{a}(2; -1; 3)$  і  $\vec{b}(-1; 4; 7)$ .

12. Знайти кут між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , якщо  $\vec{a}(1; -1; 1)$ ,  $\vec{b}(4; 4; -4)$ .

13. Обчислити площу паралелограма (трикутника), побудованого на векторах  $\vec{a}(8;4;1)$  і  $\vec{b}(2;-2;1)$ .
14. Обчислити площу паралелограма (трикутника), побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , якщо  $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ ,  $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$ ;  $|\vec{p}| = 10$ ,  $|\vec{q}| = 1$ ,  $(\vec{p} \wedge \vec{q}) = \pi/2$ .
15. Дано піраміду з вершинами  $A(2;0;0)$ ,  $B(0;3;0)$ ,  $C(0;0;6)$  і  $D(2;3;8)$ . Обчислити об'єм піраміди.
16. Через точку  $M(2;-3)$  провести пряму, паралельну до прямої  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{5}$ .
17. Через точку  $M(-4;2)$  провести пряму, перпендикулярну до прямої  $2x - 3y + 6 = 0$ .
18. Задано координати вершин трикутника  $ABC$ . Знайти рівняння сторін трикутника, рівняння медіани та висоти, проведеної з вершини  $A$ , якщо  $A(-5, 2)$ ,  $B(8, -4)$ ,  $C(7, 6)$ .
19. Знайти точку перетину прямих  $x + y - 2 = 0$  та  $x + 2y + 3 = 0$ .
20. Знайти відстань від точки  $M(1;-3)$  до прямої  $5x - 12y + 52 = 0$ .
21. Знайти точку, симетричну до точки  $M(1;-3)$  стосовно прямої  $5x - 12y + 52 = 0$ .
22. Знайти кут між прямими  $3x - y + 5 = 0$  та  $2x + y - 7 = 0$ .
23. Визначити координати нормального вектора площини, що проходить через точки  $A(2;-1;1)$ ,  $B(3;1;0)$  та  $C(1;5;-2)$ .
24. Знайти відстань від точки  $M(3;2;1)$  до площини, що проходить через точки  $A(2;1;2)$ ,  $B(3;-2;1)$  і  $C(2;3;-4)$ .
25. Знайти кут між площинами  $x + 4y - z + 1 = 0$  і  $x + y - z - 3 = 0$ .
26. Через точку  $M(-1;2;3)$  провести пряму, паралельну до прямої  $\begin{cases} 2x - 3y + z - 11 = 0 \\ x - y + 2z + 9 = 0 \end{cases}$ .
27. Знайти точку перетину прямої та площини  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{1}$ ,  $x - 2y + 4z - 19 = 0$ .
28. Знайти точку  $M'$ , симетричну до точки  $M(2;-1;1)$  стосовно прямої  $\frac{x-4,5}{1} = \frac{y+3}{-0,5} = \frac{z-2}{1}$ .
29. Знайти точку  $M'$ , симетричну до точки  $M(-2;-3;0)$  стосовно площини  $x + 5y + 4 = 0$ .
30. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо мала піввісь дорівнює 3, ексцентриситет  $\sqrt{2}/2$ .
31. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо довжина дійсної осі дорівнює 1, а точка  $M(1;3)$  належить гіперболі.
32. Знайти власні значення та власні вектори матриці  $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ .
33. Знайти власні значення та власні вектори матриці  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ .
34. При яких значеннях параметра  $\lambda$  квадратична форма додатно визначена  
 $Q(x) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ .
35. Звести квадратичну форму до нормального вигляду  $Q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2x_3$ .