## Qu'est-ce que le réseau de Petri

Les réseaux de Petri, inventés par Carl Adam Petri en 1962, regroupent des outils mathématiques (graphiques) de modélisation du comportement de systèmes dynamiques à évènements discrets.

Ils permettent de visualiser et d'étudier le comportement et la synchronisation des systèmes composés de sous-systèmes fonctionnant en parallèle, communiquant et partageant des ressources.

## Deux catégories d'applications des réseaux de Petri

- Rdp spécifie le système et constitue le point de départ du cycle de conception. Ces spécifications permettent des analyses qualitatives et quantitatives du système.
- ☐ Rdp est utilisé comme structure interne d'un système de contrôle ou d'aide à la décision.

#### La modélisation consiste à

- ☐ Raisonner en termes d'états et de transitions le comportement du système simulant l'enchaînement d'opérations, les communications et le partage de ressources.
- ☐ Concevoir des modules d'un système, ainsi que les interactions des ces modules interconnectés par de nouvelles places et transitions.

# Domaines d'application

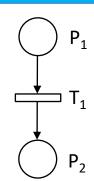
- ☐ Systèmes de production (Évaluation des performances, Simulation)
- ☐ Validation des protocoles de communication
- ☐ Systèmes temps réel / distribués
- ☐ Modèles de raisonnement / planification

### Propriété d'un modèle d'un processus de production

Les Rdp, selon les modèles qu'ils représentent, permettent de simuler et de vérifier certaines propriétés :

- Activité: Vérifie si le fonctionnement d'une partie ou de tout le système évolue, caractérise la possibilité qu'une partie ou tout le système n'évolue plus, une fois qu'un état spécifique est atteint.
- ☐ <u>Répétitivité</u> : Vérifie s'il y a des séquences qui se répètent dans le fonctionnement du système.
- ☐ <u>Vivacité</u>: Vérifie qu'un état du système puisse être atteignable, quel que soit l'état dans lequel il se trouve.
- ☐ Concurrence : Vérifie si le passage à un état entraîne la collaboration de deux ou plusieurs parties du système.

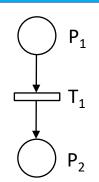
- La place (cercle), qui représente l'état du système ;
- ☐ La transition (trait ou rectangle) qui représente l'événement modificateur de l'état du système ;
- L'arc qui assure la liaison d'une place vers une transition ou d'une transition vers une place.



P<sub>1</sub> est en amont ou une entrée de T<sub>1</sub>

P<sub>2</sub> est en aval ou une sortie de T<sub>2</sub>

- La place (cercle), qui représente l'état du système ;
- ☐ La transition (trait ou rectangle) qui représente l'événement modificateur de l'état du système ;
- ☐ L'arc qui assure la liaison d'une place vers une transition ou d'une transition vers une place.

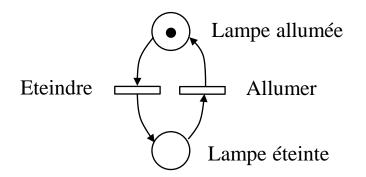


P<sub>1</sub> est en amont ou une entrée de T<sub>1</sub>

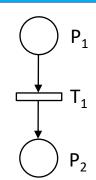
P<sub>2</sub> est en aval ou une sortie de T<sub>2</sub>

# Rdp marqué

Le marquage est la présence ou la réalisation d'une condition. Une place marquée signifie que la condition exprimée par cette place est vérifiée



- La place (cercle), qui représente l'état du système ;
- ☐ La transition (trait ou rectangle) qui représente l'événement modificateur de l'état du système ;
- ☐ L'arc qui assure la liaison d'une place vers une transition ou d'une transition vers une place.

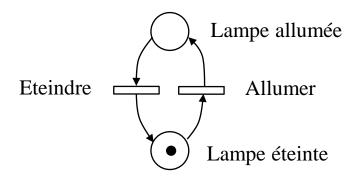


P<sub>1</sub> est en amont ou une entrée de T<sub>1</sub>

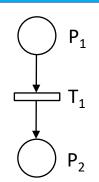
P<sub>2</sub> est en aval ou une sortie de T<sub>2</sub>

# Rdp marqué

Le marquage est la présence ou la réalisation d'une condition. Une place marquée signifie que la condition exprimée par cette place est vérifiée



- La place (cercle), qui représente l'état du système ;
- ☐ La transition (trait ou rectangle) qui représente l'événement modificateur de l'état du système ;
- ☐ L'arc qui assure la liaison d'une place vers une transition ou d'une transition vers une place.

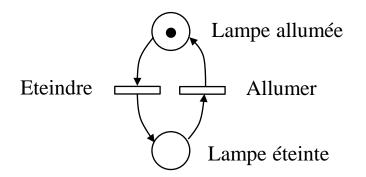


P<sub>1</sub> est en amont ou une entrée de T<sub>1</sub>

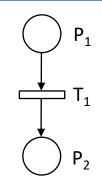
P<sub>2</sub> est en aval ou une sortie de T<sub>2</sub>

# Rdp marqué

Le marquage est la présence ou la réalisation d'une condition. Une place marquée signifie que la condition exprimée par cette place est vérifiée



- La place (cercle), qui représente l'état du système ;
- ☐ La transition (trait ou rectangle) qui représente l'événement modificateur de l'état du système ;
- L'arc qui assure la liaison d'une place vers une transition ou d'une transition vers une place.

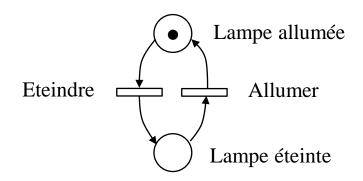


P<sub>1</sub> est en amont ou une entrée de T<sub>1</sub>

P<sub>2</sub> est en aval ou une sortie de T<sub>2</sub>

# Rdp marqué

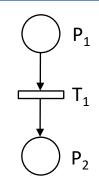
Le marquage est la présence ou la réalisation d'une condition. Une place marquée signifie que la condition exprimée par cette place est vérifiée



#### Franchissement d'une transition

La transition est dite « franchissable » s'il existe suffisamment de jetons à l'amont (en entrée) d'une transition.

- La place (cercle), qui représente l'état du système ;
- ☐ La transition (trait ou rectangle) qui représente l'événement modificateur de l'état du système ;
- ☐ L'arc qui assure la liaison d'une place vers une transition ou d'une transition vers une place.

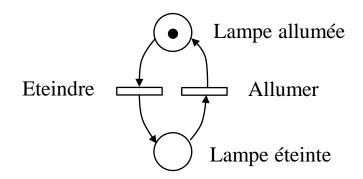


P<sub>1</sub> est en amont ou une entrée de T<sub>1</sub>

P<sub>2</sub> est en aval ou une sortie de T<sub>2</sub>

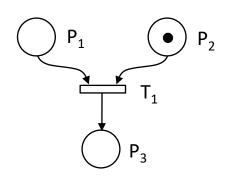
# Rdp marqué

Le marquage est la présence ou la réalisation d'une condition. Une place marquée signifie que la condition exprimée par cette place est vérifiée

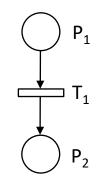


#### Franchissement d'une transition

La transition est dite « franchissable » s'il existe suffisamment de jetons à l'amont (en entrée) d'une transition.



- La place (cercle), qui représente l'état du système ;
- ☐ La transition (trait ou rectangle) qui représente l'événement modificateur de l'état du système ;
- ☐ L'arc qui assure la liaison d'une place vers une transition ou d'une transition vers une place.

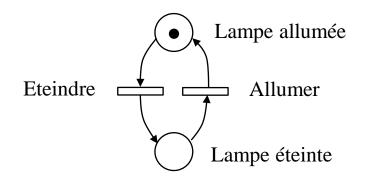


P<sub>1</sub> est en amont ou une entrée de T<sub>1</sub>

P<sub>2</sub> est en aval ou une sortie de T<sub>2</sub>

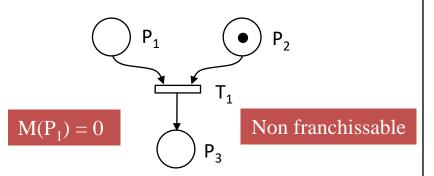
# Rdp marqué

Le marquage est la présence ou la réalisation d'une condition. Une place marquée signifie que la condition exprimée par cette place est vérifiée

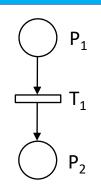


### Franchissement d'une transition

La transition est dite « franchissable » s'il existe suffisamment de jetons à l'amont (en entrée) d'une transition.



- La place (cercle), qui représente l'état du système ;
- ☐ La transition (trait ou rectangle) qui représente l'événement modificateur de l'état du système ;
- L'arc qui assure la liaison d'une place vers une transition ou d'une transition vers une place.

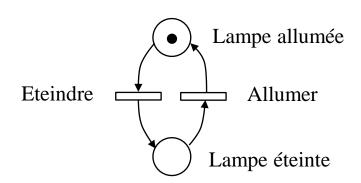


P<sub>1</sub> est en amont ou une entrée de T<sub>1</sub>

P<sub>2</sub> est en aval ou une sortie de T<sub>2</sub>

# Rdp marqué

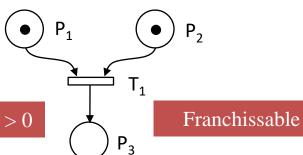
Le marquage est la présence ou la réalisation d'une condition. Une place marquée signifie que la condition exprimée par cette place est vérifiée



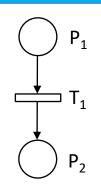
### Franchissement d'une transition

La transition est dite « franchissable » s'il existe suffisamment de jetons à l'amont (en entrée) d'une transition.

 $M(P_1) > 0$  et  $M(P_1) > 0$ 



- La place (cercle), qui représente l'état du système ;
- ☐ La transition (trait ou rectangle) qui représente l'événement modificateur de l'état du système ;
- L'arc qui assure la liaison d'une place vers une transition ou d'une transition vers une place.

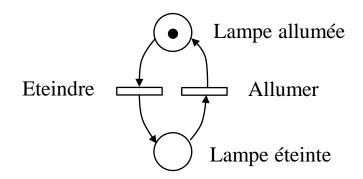


P<sub>1</sub> est en amont ou une entrée de T<sub>1</sub>

P<sub>2</sub> est en aval ou une sortie de T<sub>2</sub>

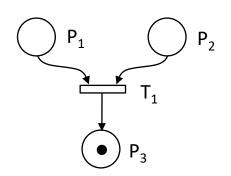
## Rdp marqué

Le marquage est la présence ou la réalisation d'une condition. Une place marquée signifie que la condition exprimée par cette place est vérifiée

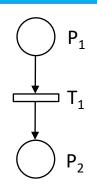


#### Franchissement d'une transition

La transition est dite « franchissable » s'il existe suffisamment de jetons à l'amont (en entrée) d'une transition.



- La place (cercle), qui représente l'état du système ;
- ☐ La transition (trait ou rectangle) qui représente l'événement modificateur de l'état du système ;
- ☐ L'arc qui assure la liaison d'une place vers une transition ou d'une transition vers une place.

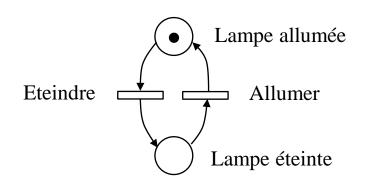


P<sub>1</sub> est en amont ou une entrée de T<sub>1</sub>

P<sub>2</sub> est en aval ou une sortie de T<sub>2</sub>

# Rdp marqué

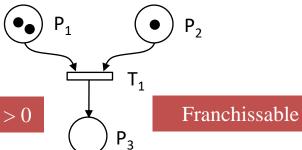
Le marquage est la présence ou la réalisation d'une condition. Une place marquée signifie que la condition exprimée par cette place est vérifiée



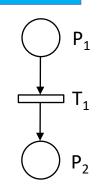
#### Franchissement d'une transition

La transition est dite « franchissable » s'il existe suffisamment de jetons à l'amont (en entrée) d'une transition.

 $M(P_1) > 0$  et  $M(P_1) > 0$ 



- La place (cercle), qui représente l'état du système ;
- ☐ La transition (trait ou rectangle) qui représente l'événement modificateur de l'état du système ;
- ☐ L'arc qui assure la liaison d'une place vers une transition ou d'une transition vers une place.

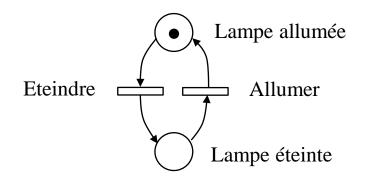


P<sub>1</sub> est en amont ou une entrée de T<sub>1</sub>

P<sub>2</sub> est en aval ou une sortie de T<sub>2</sub>

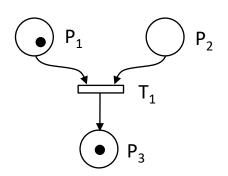
## Rdp marqué

Le marquage est la présence ou la réalisation d'une condition. Une place marquée signifie que la condition exprimée par cette place est vérifiée

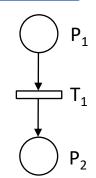


#### Franchissement d'une transition

La transition est dite « franchissable » s'il existe suffisamment de jetons à l'amont (en entrée) d'une transition.



- La place (cercle), qui représente l'état du système;
- ☐ La transition (trait ou rectangle) qui représente l'événement modificateur de l'état du système ;
- ☐ L'arc qui assure la liaison d'une place vers une transition ou d'une transition vers une place.

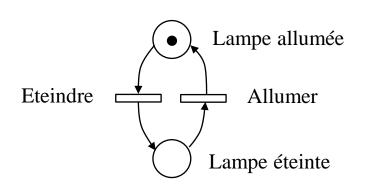


P<sub>1</sub> est en amont ou une entrée de T<sub>1</sub>

P<sub>2</sub> est en aval ou une sortie de T<sub>2</sub>

# Rdp marqué

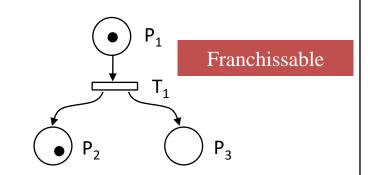
Le marquage est la présence ou la réalisation d'une condition. Une place marquée signifie que la condition exprimée par cette place est vérifiée



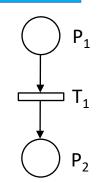
### Franchissement d'une transition

La transition est dite « franchissable » s'il existe suffisamment de jetons à l'amont (en entrée) d'une transition.

 $M(P_1) > 0$ 



- La place (cercle), qui représente l'état du système ;
- ☐ La transition (trait ou rectangle) qui représente l'événement modificateur de l'état du système ;
- ☐ L'arc qui assure la liaison d'une place vers une transition ou d'une transition vers une place.

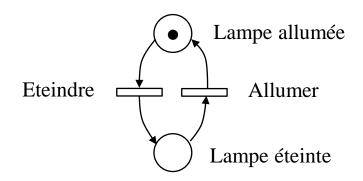


P<sub>1</sub> est en amont ou une entrée de T<sub>1</sub>

P<sub>2</sub> est en aval ou une sortie de T<sub>2</sub>

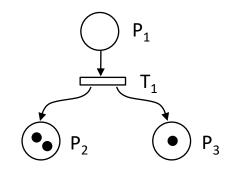
# Rdp marqué

Le marquage est la présence ou la réalisation d'une condition. Une place marquée signifie que la condition exprimée par cette place est vérifiée



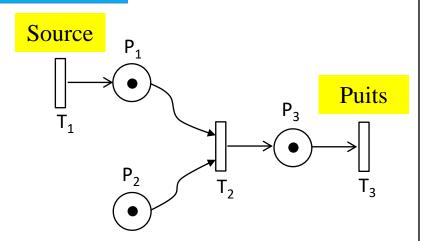
#### Franchissement d'une transition

La transition est dite « franchissable » s'il existe suffisamment de jetons à l'amont (en entrée) d'une transition.



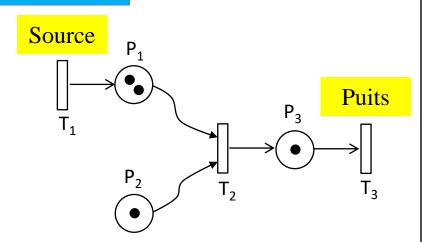
Une transition <u>source</u> est une transition qui ne comporte aucune place d'entrée ; c'est une transition toujours franchissable

Une transition <u>puits</u> est une transition qui ne comporte aucune place de sortie ; son franchissement enlève des jetons de toutes les places d'entrée de la transition.



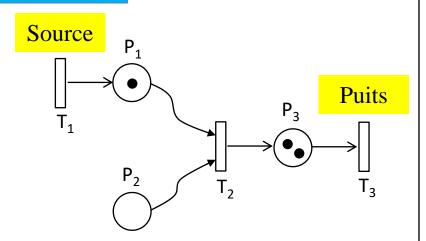
Une transition <u>source</u> est une transition qui ne comporte aucune place d'entrée ; c'est une transition toujours franchissable

Une transition **puits** est une transition qui ne comporte aucune place de sortie ; son franchissement enlève des jetons de toutes les places d'entrée de la transition.



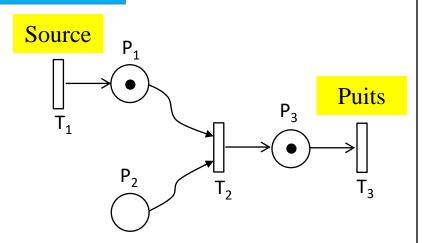
Une transition <u>source</u> est une transition qui ne comporte aucune place d'entrée ; c'est une transition toujours franchissable

Une transition <u>puits</u> est une transition qui ne comporte aucune place de sortie ; son franchissement enlève des jetons de toutes les places d'entrée de la transition.



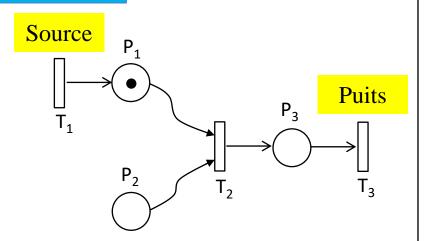
Une transition <u>source</u> est une transition qui ne comporte aucune place d'entrée ; c'est une transition toujours franchissable

Une transition **puits** est une transition qui ne comporte aucune place de sortie ; son franchissement enlève des jetons de toutes les places d'entrée de la transition.



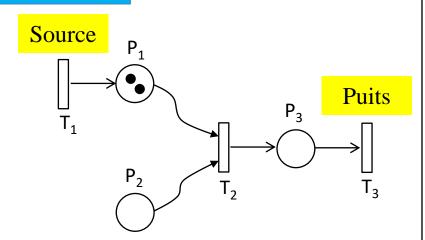
Une transition <u>source</u> est une transition qui ne comporte aucune place d'entrée ; c'est une transition toujours franchissable

Une transition <u>puits</u> est une transition qui ne comporte aucune place de sortie ; son franchissement enlève des jetons de toutes les places d'entrée de la transition.



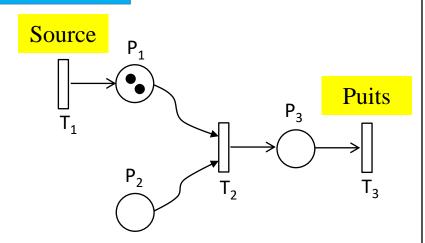
Une transition <u>source</u> est une transition qui ne comporte aucune place d'entrée ; c'est une transition toujours franchissable

Une transition <u>puits</u> est une transition qui ne comporte aucune place de sortie ; son franchissement enlève des jetons de toutes les places d'entrée de la transition.



Une transition <u>source</u> est une transition qui ne comporte aucune place d'entrée ; c'est une transition toujours franchissable

Une transition **puits** est une transition qui ne comporte aucune place de sortie ; son franchissement enlève des jetons de toutes les places d'entrée de la transition.



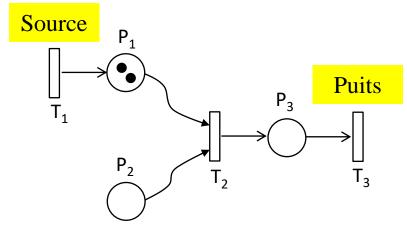
### Exemple

Un atelier possède une machine et un stock. Quand une commande arrive et que la machine est disponible, la commande peut être traitée.

Une fois le traitement terminé, la commande qui a été traitée est stockée. Sinon, la commande doit attendre que la machine se libère.

Une transition <u>source</u> est une transition qui ne comporte aucune place d'entrée ; c'est une transition toujours franchissable

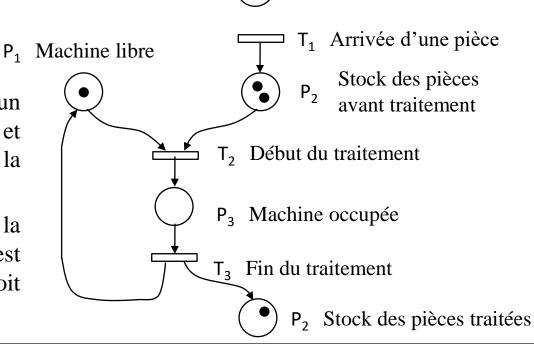
Une transition **puits** est une transition qui ne comporte aucune place de sortie ; son franchissement enlève des jetons de toutes les places d'entrée de la transition.



### Exemple

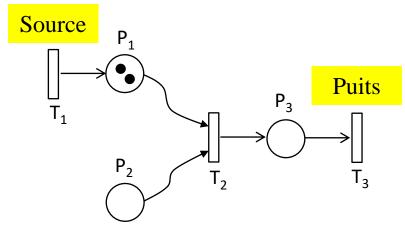
Un atelier possède une machine et un stock. Quand une commande arrive et que la machine est disponible, la commande peut être traitée.

Une fois le traitement terminé, la commande qui a été traitée est stockée. Sinon, la commande doit attendre que la machine se libère.



Une transition <u>source</u> est une transition qui ne comporte aucune place d'entrée ; c'est une transition toujours franchissable

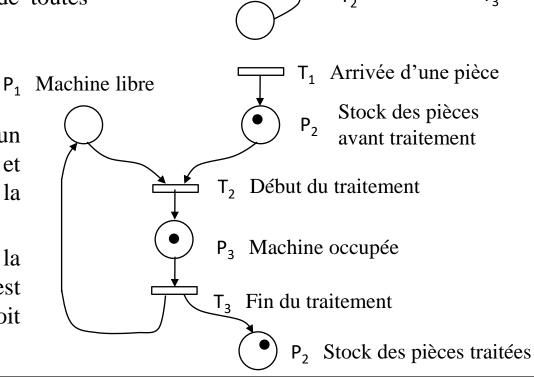
Une transition **puits** est une transition qui ne comporte aucune place de sortie ; son franchissement enlève des jetons de toutes les places d'entrée de la transition.



#### Exemple

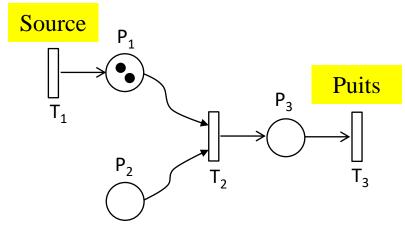
Un atelier possède une machine et un stock. Quand une commande arrive et que la machine est disponible, la commande peut être traitée.

Une fois le traitement terminé, la commande qui a été traitée est stockée. Sinon, la commande doit attendre que la machine se libère.



Une transition <u>source</u> est une transition qui ne comporte aucune place d'entrée ; c'est une transition toujours franchissable

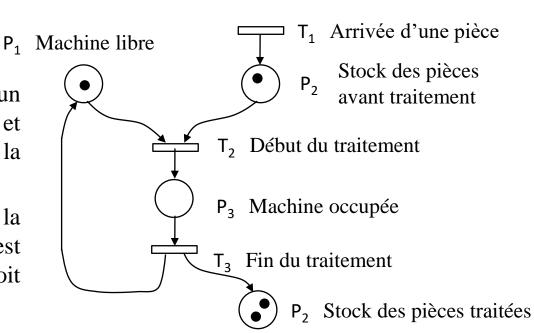
Une transition **puits** est une transition qui ne comporte aucune place de sortie ; son franchissement enlève des jetons de toutes les places d'entrée de la transition.



### Exemple

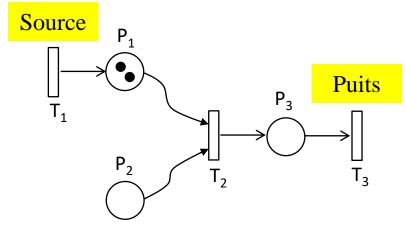
Un atelier possède une machine et un stock. Quand une commande arrive et que la machine est disponible, la commande peut être traitée.

Une fois le traitement terminé, la commande qui a été traitée est stockée. Sinon, la commande doit attendre que la machine se libère.



Une transition <u>source</u> est une transition qui ne comporte aucune place d'entrée ; c'est une transition toujours franchissable

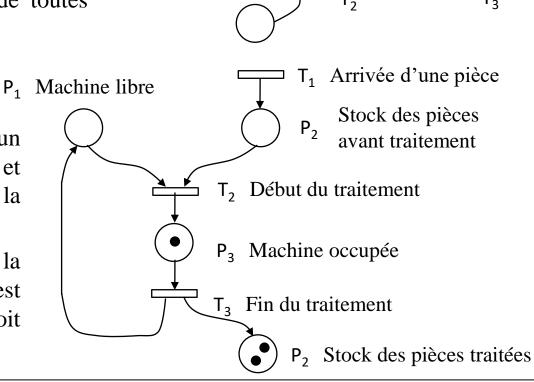
Une transition **puits** est une transition qui ne comporte aucune place de sortie ; son franchissement enlève des jetons de toutes les places d'entrée de la transition.



### Exemple

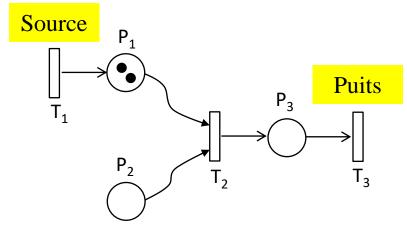
Un atelier possède une machine et un stock. Quand une commande arrive et que la machine est disponible, la commande peut être traitée.

Une fois le traitement terminé, la commande qui a été traitée est stockée. Sinon, la commande doit attendre que la machine se libère.



Une transition <u>source</u> est une transition qui ne comporte aucune place d'entrée ; c'est une transition toujours franchissable

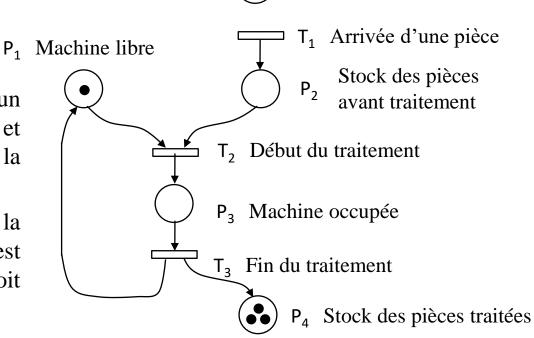
Une transition **puits** est une transition qui ne comporte aucune place de sortie ; son franchissement enlève des jetons de toutes les places d'entrée de la transition.



### Exemple

Un atelier possède une machine et un stock. Quand une commande arrive et que la machine est disponible, la commande peut être traitée.

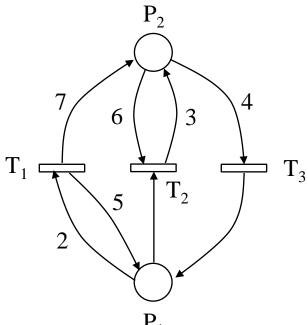
Une fois le traitement terminé, la commande qui a été traitée est stockée. Sinon, la commande doit attendre que la machine se libère.



# Définition algébrique d'un Rdp

On appelle Réseau de Petri le quadriplet R = (P, T, Pre, Post) où

- $\square$  P est un ensemble fini de place : P = {P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, ..., P<sub>n</sub>}
- T est un ensemble fini de transition :  $T = \{T_1, T_2, ..., T_m\}$
- Pre (Entrée) est une fonction de pré-condition ou d'incidence avant :  $P*T \rightarrow N$
- Post (Sortie) est une fonction de post-condition ou d'incidence arrière :  $T^*P \rightarrow N$



Pre 
$$(P_1, T_1) = 2$$
 Pre  $(P_2, T_1) = 0$ 

Pre 
$$(P_1, T_2) = 1$$
 Pre  $(P_2, T_2) = 6$ 

Pre 
$$(P_1, T_3) = 0$$
 Pre  $(P_2, T_3) = 4$ 

Post 
$$(P_1, T_1) = 2$$

Post 
$$(P_1, T_2) = 1$$

Post 
$$(P_1, T_3) = 0$$
 Post  $(P_2, T_3) = 4$ 

$$\Pr e = \begin{bmatrix} \frac{T_1}{2} & \frac{T_2}{3} & \frac{T_3}{2} & \frac{T_1}{2} & \frac{T_2}{3} & \frac{T_3}{2} \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_1} Post = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_1} P_2$$

Matrice d'incidence avant

Pre 
$$(P_2, T_1) = 0$$

Pre 
$$(P_2, T_2) = 6$$

Pre 
$$(P_2, T_3) = 4$$

Post 
$$(P_2, T_1) = 0$$

Post 
$$(P_1, T_1) = 2$$
 Post  $(P_2, T_1) = 0$   
Post  $(P_1, T_2) = 1$  Post  $(P_2, T_2) = 6$ 

Post 
$$(P_2, T_3) = 4$$

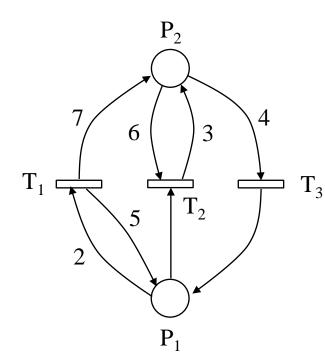
$$Post = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{ccc} P_1 \\ P_2 \end{array}$$

Matrice d'incidence arrière

# Définition algébrique d'un Rdp

On appelle Réseau de Petri le quadriplet R = (P, T, Pre, Post) où

- $\square$  P est un ensemble fini de place : P = {P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, ..., P<sub>n</sub>}
- T est un ensemble fini de transition :  $T = \{T_1, T_2, ..., T_m\}$
- Pre (Entrée) est une fonction de pré-condition ou d'incidence avant :  $P*T \rightarrow N$
- Post (Sortie) est une fonction de post-condition ou d'incidence arrière :  $T^*P \rightarrow N$



Post

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

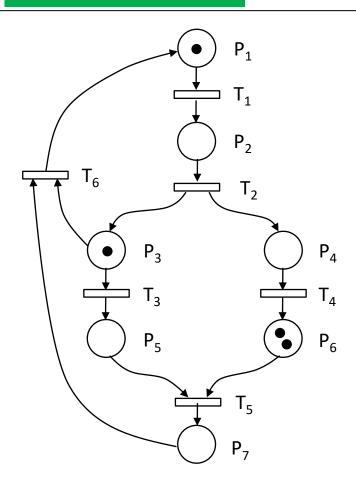
$$\Pr{e = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}} \quad P_1 \qquad Post = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix} P_1 \\ P_2 \qquad P_2 \qquad Post = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix} P_2$$

Matrice d'incidence avant

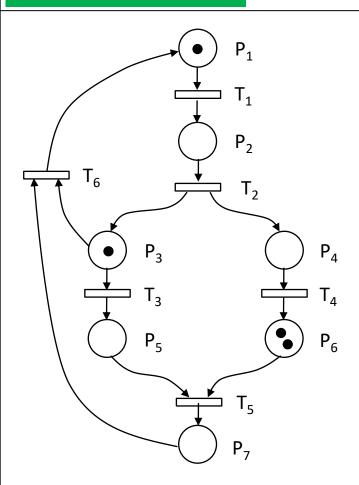
Matrice

d'incidence

Matrice d'incidence arrière

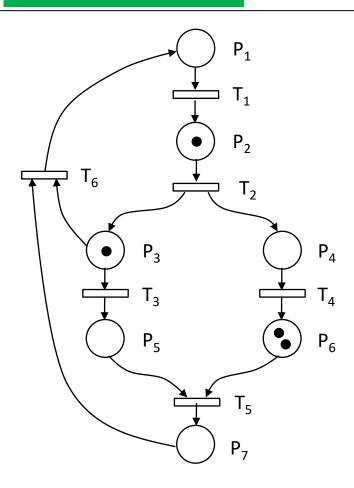


- $\Box$  Les places :  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7)$
- Un marquage initial :  $M_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 2, 0)$



- Les transitions :  $T = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$
- Les places :  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7)$
- Un marquage initial :  $M_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 2, 0)$

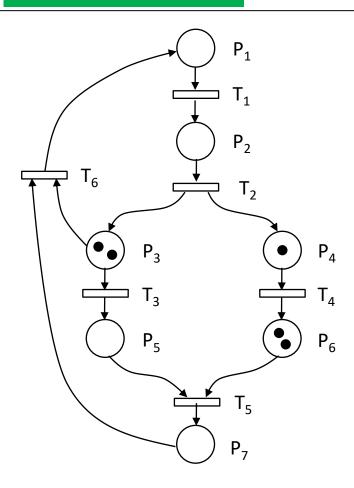
Evolution de l'état du système



- Les transitions :  $T = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$
- Les places :  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7)$
- Un marquage initial :  $M_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 2, 0)$

# Evolution de l'état du système

 $T_1: M_0(T_1 > M_1 = (0, 1, 1, 0, 0, 2, 0)$ 

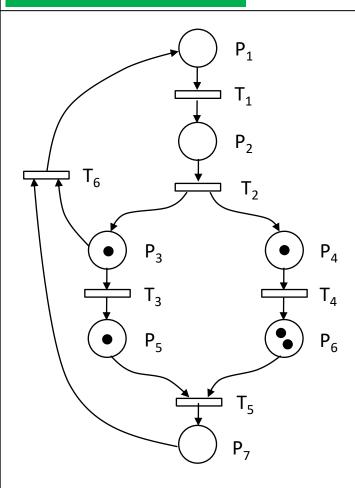


- Les transitions :  $T = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$
- Les places :  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7)$
- Un marquage initial :  $M_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 2, 0)$

# Evolution de l'état du système

 $T_1: M_0(T_1 > M_1 = (0, 1, 1, 0, 0, 2, 0)$ 

 $T_2: M_1(T_2 > M_2 = (0, 0, 2, 1, 0, 2, 0)$ 



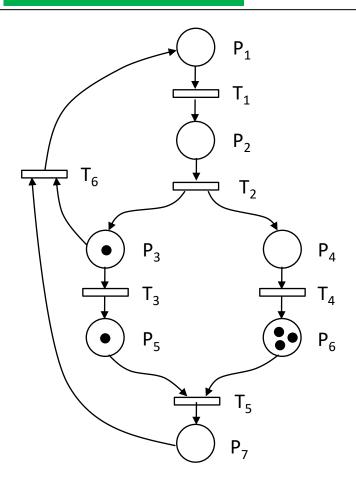
- Les transitions :  $T = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$
- Les places :  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7)$
- Un marquage initial :  $M_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 2, 0)$

# Evolution de l'état du système

 $T_1: M_0(T_1 > M_1 = (0, 1, 1, 0, 0, 2, 0)$ 

 $T_2: M_1(T_2 > M_2 = (0, 0, 2, 1, 0, 2, 0)$ 

 $T_3: M_2(T_3>M_3=(0,0,1,1,1,2,0)$ 



- Les transitions :  $T = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$
- Les places :  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7)$
- Un marquage initial :  $M_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 2, 0)$

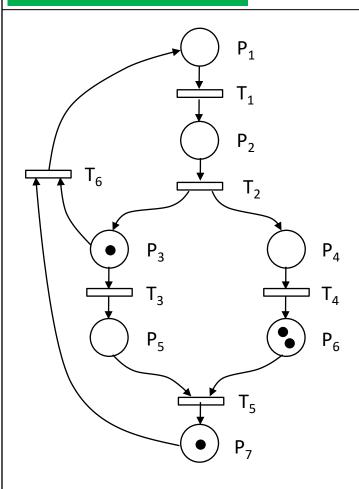
# Evolution de l'état du système

 $T_1: M_0(T_1>M_1=(0, 1, 1, 0, 0, 2, 0))$ 

 $T_2: M_1(T_2 > M_2 = (0, 0, 2, 1, 0, 2, 0)$ 

 $T_3: M_2(T_3 > M_3 = (0, 0, 1, 1, 1, 2, 0)$ 

 $T_4: M_3(T_4>M_4=(0,0,1,0,1,3,0)$ 



- Les transitions :  $T = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$ 
  - Les places :  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7)$
  - Un marquage initial :  $M_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 2, 0)$

# Evolution de l'état du système

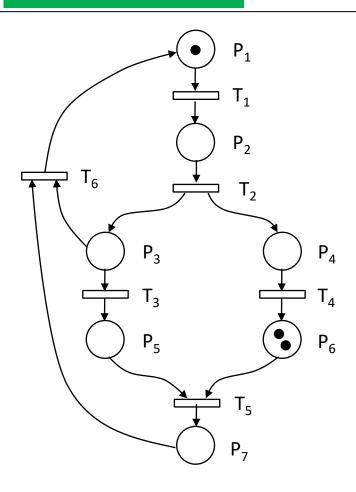
 $T_1: M_0(T_1 > M_1 = (0, 1, 1, 0, 0, 2, 0)$ 

 $T_2: M_1(T_2 > M_2 = (0, 0, 2, 1, 0, 2, 0)$ 

 $T_3: M_2(T_3 > M_3 = (0, 0, 1, 1, 1, 2, 0)$ 

 $T_4: M_3(T_4>M_4=(0, 0, 1, 0, 1, 3, 0)$ 

 $T_5: M_4(T_5 > M_5 = (0, 0, 1, 0, 0, 2, 1)$ 



- Les transitions :  $T = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$
- $\blacksquare$  Les places :  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7)$
- Un marquage initial :  $M_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 2, 0)$

#### Evolution de l'état du système

 $T_1: M_0(T_1 > M_1 = (0, 1, 1, 0, 0, 2, 0)$ 

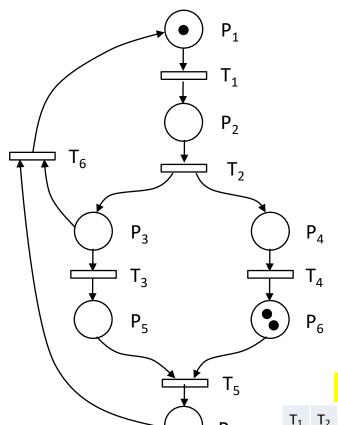
 $T_2: M_1(T_2 > M_2 = (0, 0, 2, 1, 0, 2, 0)$ 

 $T_3: M_2(T_3 > M_3 = (0, 0, 1, 1, 1, 2, 0)$ 

 $T_4: M_3(T_4>M_4=(0, 0, 1, 0, 1, 3, 0)$ 

 $T_5: M_4(T_5 > M_5 = (0, 0, 1, 0, 0, 2, 1)$ 

 $T_6: M_5(T_6 > M_6 = (1, 0, 0, 0, 0, 2, 0)$ 



- Les transitions :  $T = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$
- $\Box$  Les places :  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7)$
- Un marquage initial :  $M_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 2, 0)$

## Evolution de l'état du système

$$T_1: M_0(T_1>M_1=(0, 1, 1, 0, 0, 2, 0))$$

$$T_2: M_1(T_2 > M_2 = (0, 0, 2, 1, 0, 2, 0)$$

$$T_3: M_2(T_3 > M_3 = (0, 0, 1, 1, 1, 2, 0)$$

$$T_4: M_3(T_4>M_4=(0, 0, 1, 0, 1, 3, 0)$$

$$T_5: M_4(T_5 > M_5 = (0, 0, 1, 0, 0, 2, 1)$$

$$T_6: M_5(T_6 > M_6 = (1, 0, 0, 0, 0, 2, 0)$$

#### Post

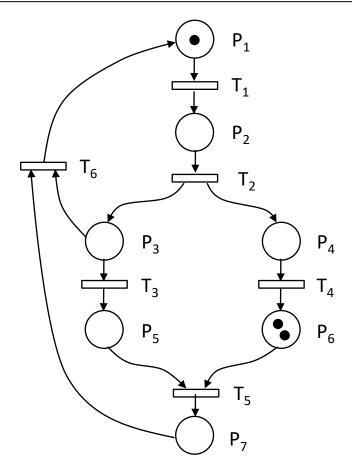
	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	T <sub>4</sub>	<b>T</b> <sub>5</sub>	T <sub>6</sub>
$P_1$	0	0	0	0	0	1
$P_2$	1	0	0	0	0	0
$P_3$	0		0	0	0	0
P <sub>4</sub>	0	1	0	0	0	0
<b>P</b> <sub>5</sub>	0	0	1	0	0	0
P <sub>6</sub>	0	0	0	1	0	0
<b>P</b> <sub>7</sub>	0	0	0	0	1	0

#### Pre

	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	T <sub>4</sub>	<b>T</b> <sub>5</sub>	<b>T</b> <sub>6</sub>
$P_1$	1	0	0	0	0	0
$P_2$	0	1	0	0	0	0
$P_3$	0	0	1	0	0	1
P <sub>4</sub>	0	0	0	1	0	0
<b>P</b> <sub>5</sub>	0	0	0	0	1	0
$P_6$	0	0	0	0	1	0
<b>P</b> <sub>7</sub>	0	0	0	0	0	1

#### Matrice d'incidence

					T <sub>5</sub>	
$P_1$	-1	0	0	0	0	1
$P_2$	1	-1	0	0	0	0
$P_3$	1 0	1	-1	0	0	-1
P <sub>4</sub>	0	1	0	-1	0	0
<b>P</b> <sub>5</sub>	0	0	1	0	-1	0
$P_6$	0 0	0	0	1	-1	0
P <sub>7</sub>	0	0	0	0	1	-1



- Les transitions :  $T = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$
- $\blacksquare$  Les places :  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7)$
- ☐ Un marquage initial :  $M_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 2, 0)$

$$T_1: M_0(T_1 > M_1 = (0, 1, 1, 0, 0, 2, 0)$$

$$T_2: M_1(T_2 > M_2 = (0, 0, 2, 1, 0, 2, 0)$$

$$T_3: M_2(T_3 > M_3 = (0, 0, 1, 1, 1, 2, 0)$$

$$T_4: M_3(T_4>M_4=(0, 0, 1, 0, 1, 3, 0)$$

$$T_5: M_4(T_5 > M_5 = (0, 0, 1, 0, 0, 2, 1)$$

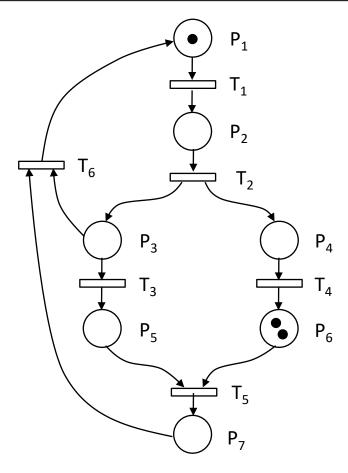
$$T_6: M_5(T_6>M_6=(1,0,0,0,0,2,0)$$

$$M_0(S \rightarrow M_2)$$
  $S = T_1 T_2$ 

$$S^{T} = (1,1,0,0,0,0)$$

1		-1	0	0	0	0	1	
0		1	-1	0	0	0	0	
1		0	1	-1	0	0	-1	
0	+	0	1	0	-1	0	0	
0		0	0	1	0	-1	0	
2		0	0	0	1	-1	0	
0		0	0	0	0	1	-1	

$$\begin{array}{c|cccc}
X & \begin{array}{c}
1 \\
1 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array} = \begin{array}{c}
0 \\
0 \\
2 \\
0 \\
0 \\
2 \\
0
\end{array}$$



- Les transitions :  $T = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$
- $\blacksquare$  Les places :  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7)$
- Un marquage initial :  $M_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 2, 0)$

$$T_1: M_0(T_1>M_1=(0, 1, 1, 0, 0, 2, 0))$$

$$T_2: M_1(T_2 > M_2 = (0, 0, 2, 1, 0, 2, 0)$$

$$T_3: M_2(T_3 > M_3 = (0, 0, 1, 1, 1, 2, 0)$$

$$T_4: M_3(T_4>M_4=(0, 0, 1, 0, 1, 3, 0)$$

$$T_5: M_4(T_5 > M_5 = (0, 0, 1, 0, 0, 2, 1)$$

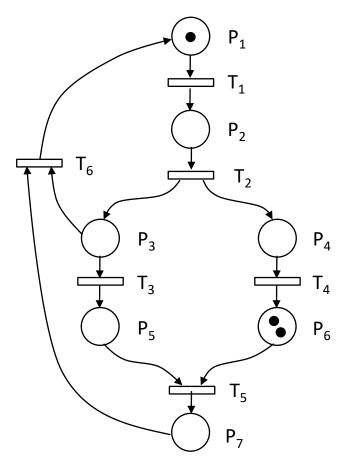
$$T_6: M_5(T_6>M_6=(1,0,0,0,0,2,0)$$

$$M_0(S \rightarrow M_3)$$
  $S = T_1T_2T_3$ 

$$S^T = (1,1,1,0,0,0)$$

	_	_						_
1		-1	0	0	0	0	1	
0		1	-1	0	0	0	0	
1		0	1	-1	0	0	-1	
0	+	0	1	0	-1	0	0	
0		0	0	1	0	-1	0	
2		0	0	0	1	-1	0	
0		0	0	0	0	1	-1	

$$\begin{array}{c|cccc}
X & \begin{array}{c}
1 \\
1 \\
1 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{array} = \begin{array}{c}
0 \\
0 \\
1 \\
1 \\
2 \\
0
\end{array}$$



- $\blacksquare$  Les places :  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7)$
- Un marquage initial :  $M_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 2, 0)$

$$T_1: M_0(T_1 > M_1 = (0, 1, 1, 0, 0, 2, 0)$$

$$T_2: M_1(T_2 > M_2 = (0, 0, 2, 1, 0, 2, 0)$$

$$T_3: M_2(T_3 > M_3 = (0, 0, 1, 1, 1, 2, 0)$$

$$T_4: M_3(T_4>M_4=(0,0,1,0,1,3,0)$$

$$T_5: M_4(T_5>M_5=(0,0,1,0,0,2,1)$$

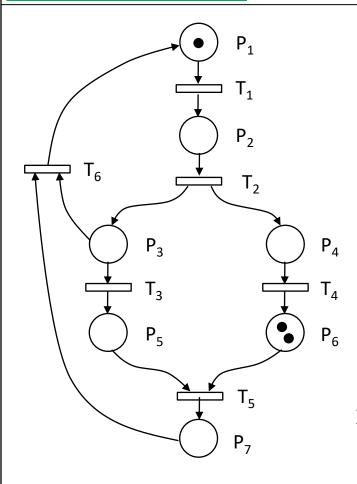
$$T_6: M_5(T_6>M_6=(1,0,0,0,0,2,0)$$

$$M_0(S \to M_4)$$
  $S = T_1 T_2 T_3 T_4$ 

$$S^T = (1,1,1,1,0,0)$$

	_						
1		-1	0	0	0	0	1
0		1	-1	0	0	0	0
1		0	1	-1	0	0	-1
0	+	0	1	0	-1	0	0
0		0	0	1	0	-1	0
2		0	0	0	1	-1	0
0		0	0	0	0	1	-1

			0
	1		0
	1		1
Χ	1	=	0
	1 1 1 0 0		1
	0		3
			0



- ☐ Les transitions :  $T = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$
- $\blacksquare$  Les places :  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7)$
- Un marquage initial :  $M_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 2, 0)$

$$T_1: M_0(T_1>M_1=(0, 1, 1, 0, 0, 2, 0))$$

$$T_2: M_1(T_2 > M_2 = (0, 0, 2, 1, 0, 2, 0)$$

$$T_3: M_2(T_3 > M_3 = (0, 0, 1, 1, 1, 2, 0)$$

$$T_4: M_3(T_4>M_4=(0,0,1,0,1,3,0)$$

$$T_5: M_4(T_5 > M_5 = (0, 0, 1, 0, 0, 2, 1)$$

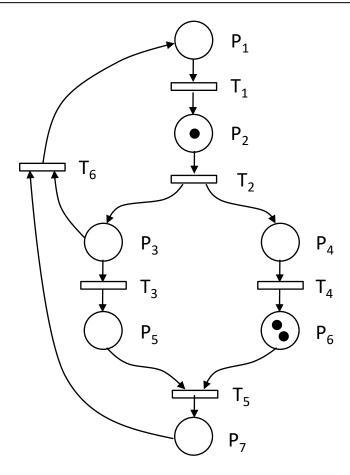
$$T_6: M_5(T_6>M_6=(1, 0, 0, 0, 0, 2, 0)$$

$$M_0(S \to M_6)$$
  $S = T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6$ 

$$S^{T} = (1,1,1,1,1,1)$$

	_	_					
1		-1	0	0	0	0	1
0		1	-1	0	0	0	0
1		0	1	-1	0	0	-1
0	+	0	1	0	-1	0	0
0		0	0	1	0	-1	0
2		0	0	0	1	-1	0
0		0	0	0	0	1	-1

			1
	1		0
	1		0
Χ	1 1 1 1 1	=	0
	1		0
	1		2
			0



 $T_1: M_6(T_1 > M_7 = (0, 1, 0, 0, 0, 2, 0)$ 

Soit un réseau de Petri défini par :

- Les transitions :  $T = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$
- $\Box$  Les places :  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7)$
- Un marquage initial :  $M_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 2, 0)$

$$T_1: M_0(T_1>M_1=(0, 1, 1, 0, 0, 2, 0))$$

$$T_2: M_1(T_2 > M_2 = (0, 0, 2, 1, 0, 2, 0)$$

$$T_3: M_2(T_3 > M_3 = (0, 0, 1, 1, 1, 2, 0)$$

$$T_4: M_3(T_4>M_4=(0, 0, 1, 0, 1, 3, 0)$$

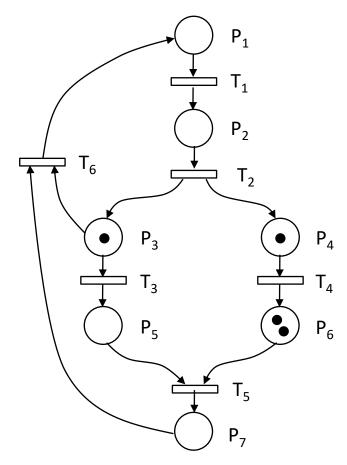
$$T_5: M_4(T_5 > M_5 = (0, 0, 1, 0, 0, 2, 1)$$

$$T_6: M_5(T_6 > M_6 = (1, 0, 0, 0, 0, 2, 0)$$

$$M_0(S \to M_7)$$
  $S = T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 T_1$ 

$$S^T = (2,1,1,1,1,1)$$

1		-1	0	0	0	0	1
0		1	-1	0	0	0	0
1		0	1	-1	0	0	-1
0	+	0	1	0	-1	0	0
0		0	0	1	0	-1	0
2		0	0	0	1	-1	0
0		0	0	0	0	1	-1



 $T_1: M_6(T_1>M_7=(0, 1, 0, 0, 0, 2, 0))$ 

 $T_2: M_1(T_2 > M_8 = (0, 0, 1, 1, 0, 2, 0)$ 

Soit un réseau de Petri défini par :

- Les transitions :  $T = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$
- $\Box$  Les places :  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7)$
- Un marquage initial :  $M_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 2, 0)$

$$T_1: M_0(T_1 > M_1 = (0, 1, 1, 0, 0, 2, 0)$$

$$T_2: M_1(T_2 > M_2 = (0, 0, 2, 1, 0, 2, 0)$$

$$T_3: M_2(T_3 > M_3 = (0, 0, 1, 1, 1, 2, 0)$$

$$T_4: M_3(T_4>M_4=(0,0,1,0,1,3,0)$$

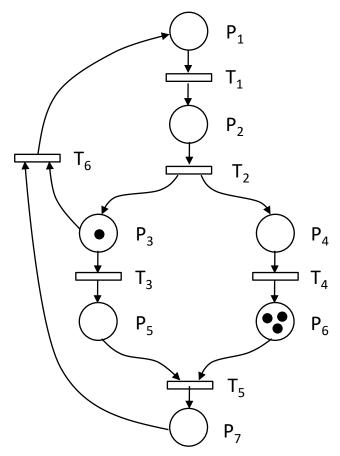
$$T_5: M_4(T_5 > M_5 = (0, 0, 1, 0, 0, 2, 1)$$

$$T_6: M_5(T_6 > M_6 = (1, 0, 0, 0, 0, 2, 0)$$

$$M_0(S \to M_8)$$
  $S = T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 T_1 T_2$   $S^T = (2,2,1,1,1,1)$ 

							_
1		-1	0	0	0	0	1
0		1	-1	0	0	0	0
1		0	1	-1	0	0	-1
0	+	0	1	0	-1	0	0
0		0	0	1	0	-1	0
2		0	0	0	1	-1	0
0		0	0	0	0	1	-1

			0
	2		0
	2		1
Χ	1	=	1
	2 2 1 1 1		0
	1		2
			0



$$T_1: M_6(T_1 > M_7 = (0, 1, 0, 0, 0, 2, 0)$$

$$T_2: M_7(T_2 > M_8 = (0, 0, 1, 1, 0, 2, 0)$$

$$T_4: M_8(T_3>M_9=(0, 0, 1, 0, 0, 3, 0)$$

- Les transitions :  $T = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$
- $\Box$  Les places :  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7)$
- Un marquage initial :  $M_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 2, 0)$

$$T_1: M_0(T_1 > M_1 = (0, 1, 1, 0, 0, 2, 0)$$

$$T_2: M_1(T_2 > M_2 = (0, 0, 2, 1, 0, 2, 0)$$

$$T_3: M_2(T_3 > M_3 = (0, 0, 1, 1, 1, 2, 0)$$

$$T_4: M_3(T_4>M_4=(0,0,1,0,1,3,0)$$

$$T_5: M_4(T_5 > M_5 = (0, 0, 1, 0, 0, 2, 1)$$

$$T_6: M_5(T_6 > M_6 = (1, 0, 0, 0, 0, 2, 0)$$

$$M_0(S \to M_9)$$
  $S = T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 T_1 T_2 T_4$   $S^T = (2,2,1,2,1,1)$ 

	_							_
1		-1	0	0	0	0	1	
0		1	-1	0	0	0	0	
1		0	1	-1	0	0	-1	
0	+	0	1	0	-1	0	0	X
0		0	0	1	0	-1	0	
2		0	0	0	1	-1	0	
0		0	0	0	0	1	-1	

			0
X	2 2 1 2 1	П	0
			1
			0
			0
	1		3
			0



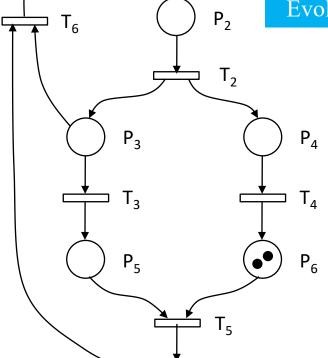
 $\mathsf{T_1}$ 

 $P_7$ 

Soit un réseau de Petri défini par :

- Les transitions :  $T = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$ 
  - Les places :  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7)$
- Un marquage initial :  $M_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 2, 0)$

Evolution de l'état du système

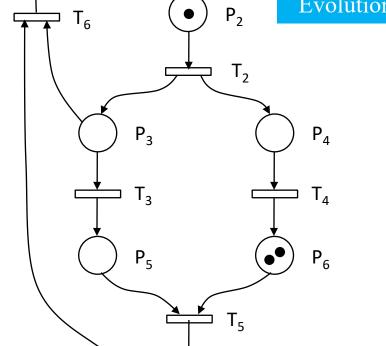


 $\begin{bmatrix}
 M_0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 2 \\
 0
 \end{bmatrix}$ 



- □ Les transitions :  $T = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$
- Les places :  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7)$
- Un marquage initial :  $M_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 2, 0)$

# Evolution de l'état du système



 $P_7$ 

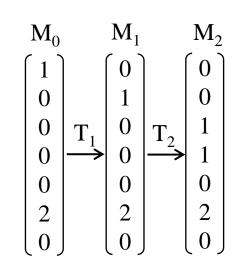
 $P_1$ 

 $\mathsf{T_1}$ 

$\mathbf{M}_0$		$\mathbf{M}_1$
$\left(1\right)$		$\left[ 0 \right]$
0		1
0	$T_1$	0
0	$\xrightarrow{-1}$	0
0		0
2		2
$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$		[0]

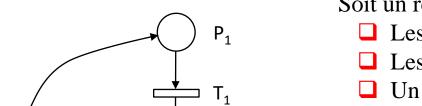


- Les transitions :  $T = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$
- $\Box$  Les places : P = (P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, P<sub>3</sub>, P<sub>4</sub>, P<sub>5</sub>, P<sub>6</sub>, P<sub>7</sub>)
- Un marquage initial :  $M_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 2, 0)$



		$P_1$	
		⊐ T <sub>1</sub>	
$T_6$		) P <sub>2</sub>	Evol
		$\overline{T}_2$	
	) P <sub>3</sub>		P <sub>4</sub>
	⊐ T <sub>3</sub>		T <sub>4</sub>
	) P <sub>5</sub>		P <sub>6</sub>
		T <sub>5</sub>	
		) P <sub>7</sub>	

 $T_6$ 



 $P_2$ 

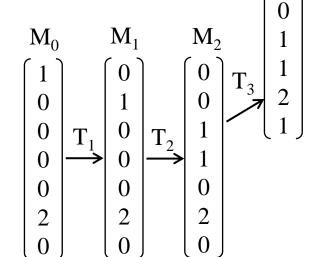
Soit un réseau de Petri défini par :

- Les transitions :  $T = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$ 
  - Les places :  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7)$
- Un marquage initial :  $M_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 2, 0)$

 $M_3$ 

0

0



	2
P <sub>3</sub>	• P <sub>4</sub>
T <sub>3</sub>	$T_4$
• P <sub>5</sub>	$ \begin{array}{c} \downarrow \\ \bullet^{\bullet} \end{array} $ $P_6$
	$\stackrel{\checkmark}{=}$ T <sub>5</sub>



- Les transitions :  $T = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$ 
  - Les places :  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7)$
  - Un marquage initial :  $M_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 2, 0)$

0

0

# Evolution de l'état du système

<b>+</b> •	$T_6$			$P_2$		
			T			
\		[		$T_2$		
				. 2		
`						
	$(\bullet)$	$P_3$		(	)	$P_4$
	$\mathcal{L}$	J				•
	$\downarrow$	_		•	ļ	_
		$T_3$				$T_4$
	$\downarrow$				,	
		D				D
\	$\bigvee$	$P_5$				$P_6$
		Ì	* *	T <sub>5</sub>		
				- 5		
			<u> </u>			

 $P_1$ 

 $\mathsf{T_1}$ 

 $P_7$ 

 $T_6$ 

 $P_3$ 

 $T_3$ 

 $P_5$ 

 $P_1$ 

 $\mathsf{T_1}$ 

 $P_2$ 

 $\mathsf{T_2}$ 

 $P_7$ 

 $P_4$ 

 $T_4$ 

0



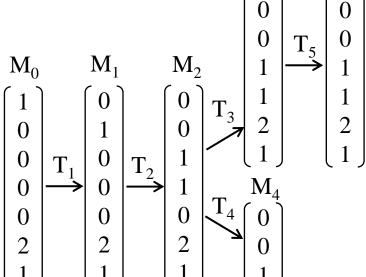
- Les transitions :  $T = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$ 
  - Les places :  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7)$
- Un marquage initial :  $M_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 2, 0)$

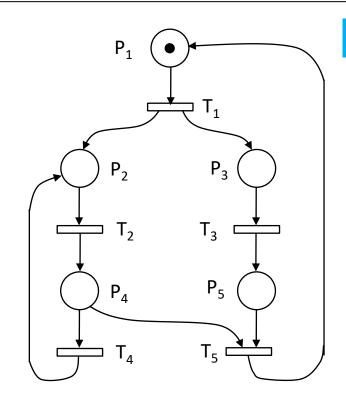
0

0

# Evolution de l'état du système

 $\mathbf{M}_0$  $\mathbf{M}_1$  $\mathbf{0}$ 0 0  $T_1$ 0 0 0 ()





#### Graphe de marquage

$$M_{0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{1}} M_{1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{2}} M_{3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_0(S_1 \to M_4)$$
  $S_1 = T_1 T_3 T_2$   $S_1^T = (1,1,1,0,0)$ 

$$S_1 = T_1 T_2 T_2$$

$$S_1^T = (1.1.1.0.0)$$

$$M_0(S_2 \rightarrow M_4)$$

$$M_0(S_2 \to M_4)$$
  $S_2 = T_1 T_2 T_4 T_3 T_2$   $S_2^T = (1,2,1,1,0)$ 

$$S_2^T = (1,2,1,1,0)$$

#### Sortie

0 0

0 0

#### Entrée

0 0

0 0 0 1

 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ 

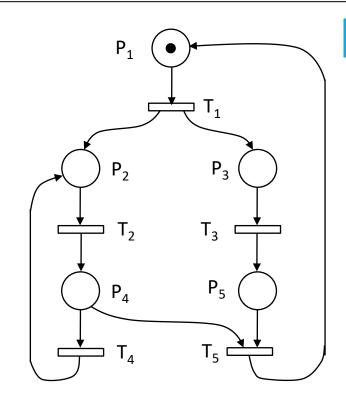
 $0 \ 0 \ 0$ 

#### W

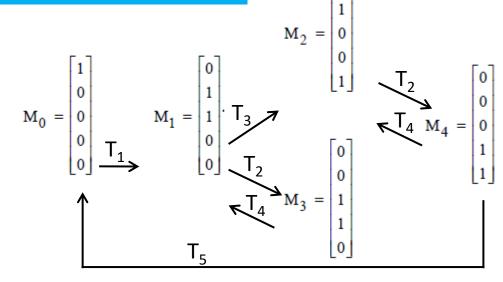
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

# $M_k = M_i + W S^T$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



## Graphe de marquage



$$M_0(S_1 \to M_4)$$
  $S_1 = T_1 T_3 T_2$   $S_1^T = (1,1,1,0,0)$ 

$$S_1 = T_1 T_2 T_2$$

$$S_1^T = (1.1.1.0.0)$$

$$M_0(S_1 \rightarrow M_4)$$

$$M_0(S_1 \to M_4)$$
  $S_2 = T_1 T_2 T_4 T_3 T_2$   $S_2^T = (1,2,1,1,0)$ 

$$S_2^T = (1,2,1,1,0)$$

#### Sortie

#### Entrée

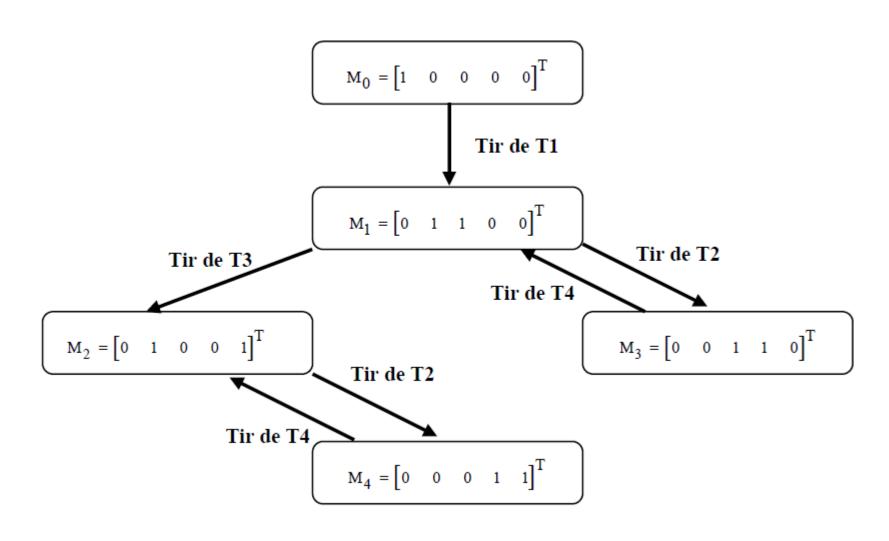
#### W

$$M_k = M_i + W S^T$$

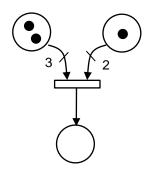
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ + \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Un rdp généralisé est un rdp dans lequel on associe à chaque arc « un poids ». Le poids implicite d'un arc est 1. La transition qui suit l'arc ne sera franchissable que si la place possède un marquage au moins égal au poids de l'arc.



Condition nécessaire pour le franchissement :

$$M(P_i) \ge Pre(P_i, T_j)$$

$$M(P_i) = M(P_i) - Pre(P_i, T_k)$$

$$M(P_j) = M(P_j) + Post(P_j, T_k)$$

Un rdp généralisé est un rdp dans lequel on associe à chaque arc « un poids ». Le poids implicite d'un arc est 1. La transition qui suit l'arc ne sera franchissable que si la place possède un marquage au moins égal au poids de l'arc.

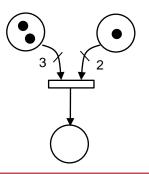
Condition nécessaire pour le franchissement :

$$M(P_i) \ge Pre(P_i, T_j)$$

Le franchissement de T<sub>k</sub> conduit au nouveau marquage :

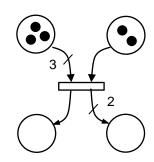
$$M(P_i) = M(P_i) - Pre(P_i, T_k)$$

$$M(P_i) = M(P_i) + Post(P_i, T_k)$$



Non franchissable

Un rdp généralisé est un rdp dans lequel on associe à chaque arc « un poids ». Le poids implicite d'un arc est 1. La transition qui suit l'arc ne sera franchissable que si la place possède un marquage au moins égal au poids de l'arc.



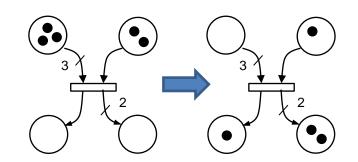
Condition nécessaire pour le franchissement :

$$M(P_i) \ge Pre(P_i, T_j)$$

$$M(P_i) = M(P_i) - Pre(P_i, T_k)$$

$$M(P_j) = M(P_j) + Post(P_j, T_k)$$

Un rdp généralisé est un rdp dans lequel on associe à chaque arc « un poids ». Le poids implicite d'un arc est 1. La transition qui suit l'arc ne sera franchissable que si la place possède un marquage au moins égal au poids de l'arc.



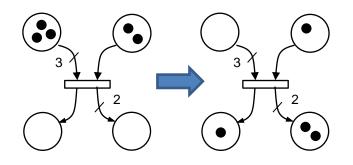
Condition nécessaire pour le franchissement :

$$M(P_i) \ge Pre(P_i, T_j)$$

$$M(P_i) = M(P_i) - Pre(P_i, T_k)$$

$$M(P_j) = M(P_j) + Post(P_j, T_k)$$

Un rdp généralisé est un rdp dans lequel on associe à chaque arc « un poids ». Le poids implicite d'un arc est 1. La transition qui suit l'arc ne sera franchissable que si la place possède un marquage au moins égal au poids de l'arc.

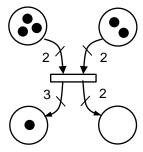


Condition nécessaire pour le franchissement :

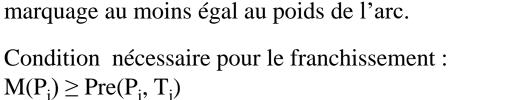
$$M(P_i) \ge Pre(P_i, \, T_j)$$

$$M(P_i) = M(P_i) - Pre(P_i, T_k)$$

$$M(P_i) = M(P_i) + Post(P_i, T_k)$$

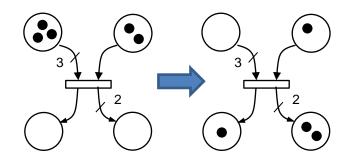


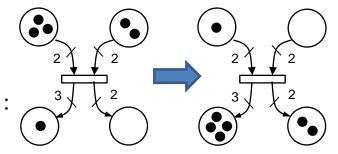
Un rdp généralisé est un rdp dans lequel on associe à chaque arc « un poids ». Le poids implicite d'un arc est 1. La transition qui suit l'arc ne sera franchissable que si la place possède un marquage au moins égal au poids de l'arc.

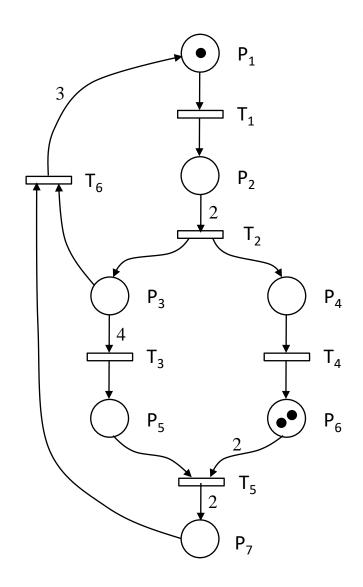


$$M(P_i) = M(P_i) - Pre(P_i, T_k)$$

$$M(P_j) = M(P_j) + Post(P_j, T_k)$$







- $\blacksquare$  Les places :  $P = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7)$
- Un marquage initial : M = (1, 0, 1, 0, 0, 2, 0)

# 

Matrice d'incidence W = Post - Pre

-1 0 0 0 0 3 1 -2 0 0 0 0 0 1 -4 0 0 -1 0 1 0 -1 0 0 0 0 1 0 -1 0 0 0 0 1 -2 0 0 0 0 0 2 -1

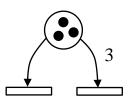
#### Rdp avec conflit

Un Rdp est dit « sans conflit » si et seulement si toute place a au plus une transition de sortie. Il y a un « conflit structurel » si une place est en amont de deux ou plusieurs transitions.

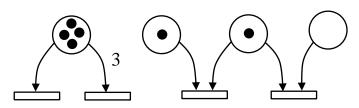
Deux transitions  $T_i$  et  $T_j$  sont en conflit structurel si :  $\exists P_k$  tel que  $Pre(P_k,T_i)$  x  $Pre(P_k,T_j) \neq 0$ . Cette situation de conflit correspond à la concurrence à la consommation des jetons à une place.

Un Rdp « à choix libre » est un réseau dans lequel pour tout conflit  $[P_i, \{T_1, T_2, ..., T_n\}]$  aucune des transitions  $T_1, T_2, ..., T_n$  ne possède aucune autre place d'entrée que  $P_i$ .

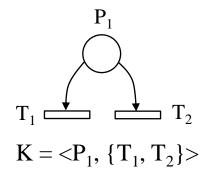
Dans un Rdp, deux transitions  $T_i$  et  $T_j$  sont en conflit effectif s'il y a assez de jetons pour que l'une des deux transitions soit franchie mais pas les deux à la fois.



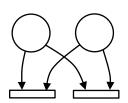
Rdp à conflit effectif



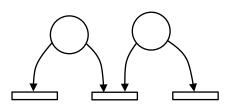
Rdp à conflit non effectif



Rdp à choix libre



Rdp à choix libre étendu



Rdp à choix non libre

Soit un système composé de deux processus A et B en compétition pour accéder à une unité de stockage

 $P_1$ : A en attente

P<sub>2</sub>: B en attente

 $P_3$ : A actif

P<sub>4</sub>: Clef disponible

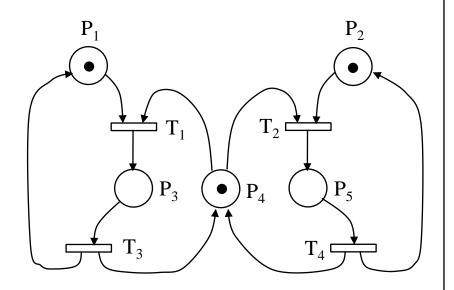
 $P_5$ : B actif

 $T_1$ : A prend la clef

T<sub>2</sub>: B prend la clef

 $T_3$ : A rend la clef

T<sub>4</sub>: B rend la clef



 $P_1$ : A en attente  $P_2$ : B en attente

 $P_3$ : A inactif  $P_4$ : A actif

P<sub>5</sub>: Clef disponible

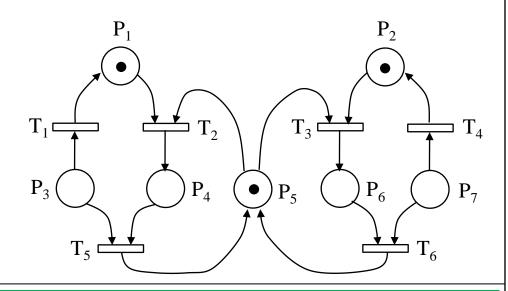
 $P_6$ : B actif  $P_7$ : B inactif

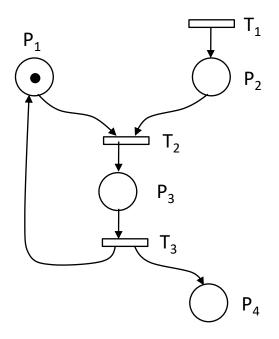
T<sub>1</sub>: Déclaration d'un besoin

 $T_2$ : A prend la clef  $T_3$ : B prend la clef

T<sub>4</sub>: Déclaration d'un besoin

 $T_5$ : A rend la clef  $T_6$ : B rend la clef





P<sub>1</sub> Machine libre

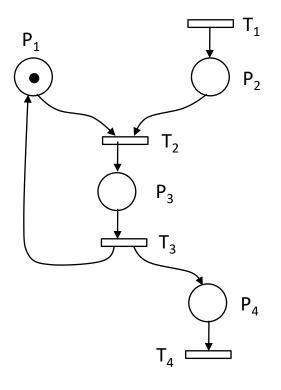
P<sub>2</sub> Stock des pièces avant traitement

P<sub>3</sub> Machine occupée

P<sub>4</sub> Stock des pièces traitées

T<sub>1</sub> Arrivée d'une pièce

T<sub>2</sub> Début du traitement



P<sub>1</sub> Machine libre

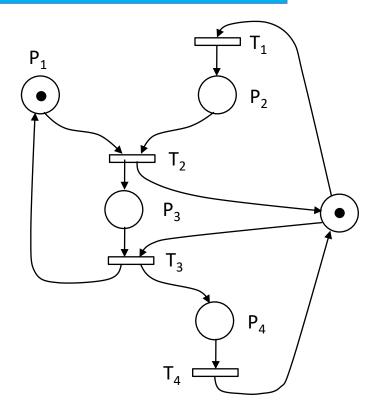
P<sub>2</sub> Stock des pièces avant traitement

P<sub>3</sub> Machine occupée

P<sub>4</sub> Stock des pièces traitées

T<sub>1</sub> Arrivée d'une pièce

T<sub>2</sub> Début du traitement



P<sub>1</sub> Machine libre

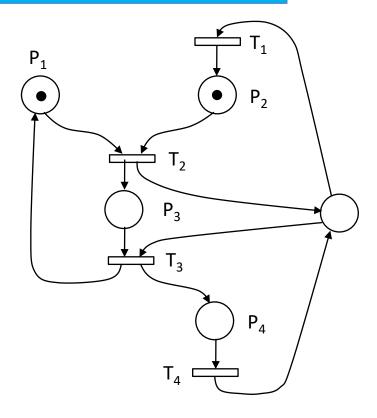
P<sub>2</sub> Stock des pièces avant traitement

P<sub>3</sub> Machine occupée

P<sub>4</sub> Stock des pièces traitées

T<sub>1</sub> Arrivée d'une pièce

T<sub>2</sub> Début du traitement



P<sub>1</sub> Machine libre

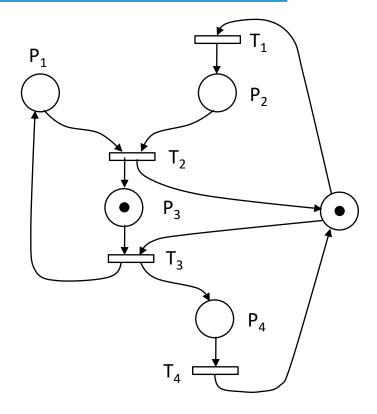
P<sub>2</sub> Stock des pièces avant traitement

P<sub>3</sub> Machine occupée

P<sub>4</sub> Stock des pièces traitées

T<sub>1</sub> Arrivée d'une pièce

T<sub>2</sub> Début du traitement



P<sub>1</sub> Machine libre

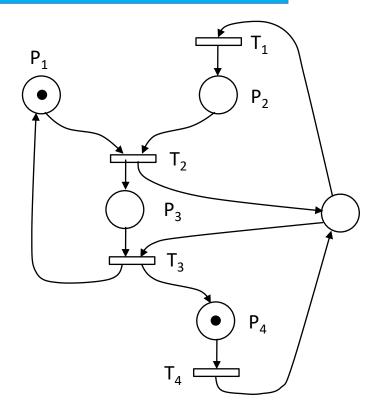
P<sub>2</sub> Stock des pièces avant traitement

P<sub>3</sub> Machine occupée

P<sub>4</sub> Stock des pièces traitées

T<sub>1</sub> Arrivée d'une pièce

T<sub>2</sub> Début du traitement



P<sub>1</sub> Machine libre

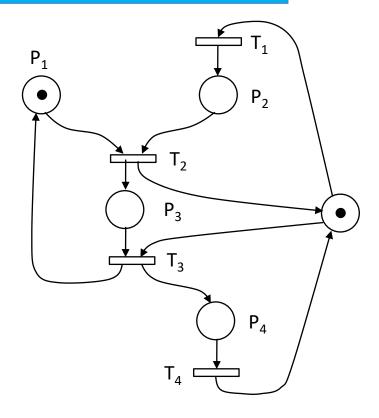
P<sub>2</sub> Stock des pièces avant traitement

P<sub>3</sub> Machine occupée

P<sub>4</sub> Stock des pièces traitées

T<sub>1</sub> Arrivée d'une pièce

T<sub>2</sub> Début du traitement



P<sub>1</sub> Machine libre

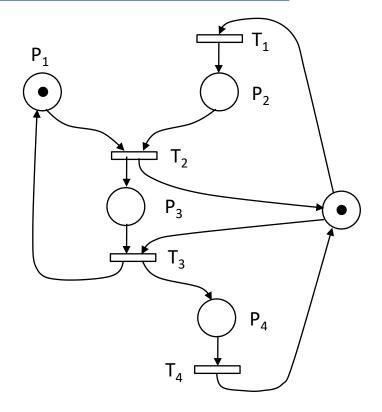
P<sub>2</sub> Stock des pièces avant traitement

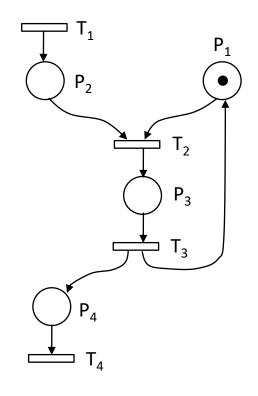
P<sub>3</sub> Machine occupée

P<sub>4</sub> Stock des pièces traitées

T<sub>1</sub> Arrivée d'une pièce

T<sub>2</sub> Début du traitement





P<sub>1</sub> Machine libre

P<sub>2</sub> Stock des pièces avant traitement

P<sub>3</sub> Machine occupée

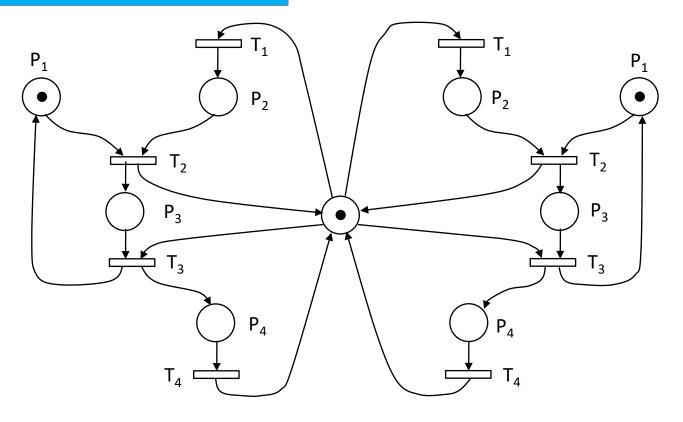
P<sub>4</sub> Stock des pièces traitées

T<sub>1</sub> Arrivée d'une pièce

T<sub>2</sub> Début du traitement

T<sub>3</sub> Fin du traitement

 $\mathsf{T}_4$ 



P<sub>1</sub> Machine libre

P<sub>2</sub> Stock des pièces avant traitement

P<sub>3</sub> Machine occupée

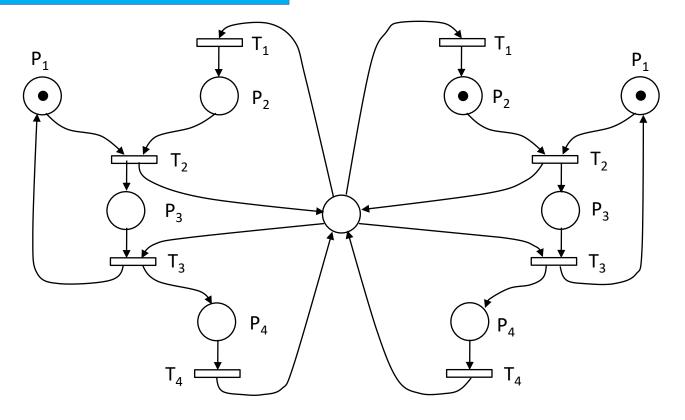
P<sub>4</sub> Stock des pièces traitées

T<sub>1</sub> Arrivée d'une pièce

T<sub>2</sub> Début du traitement

T<sub>3</sub> Fin du traitement

 $\mathsf{T}_4$ 



P<sub>1</sub> Machine libre

P<sub>2</sub> Stock des pièces avant traitement

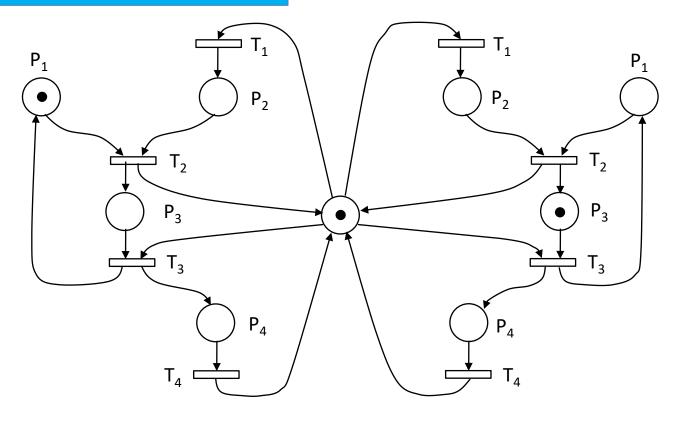
P<sub>3</sub> Machine occupée

P<sub>4</sub> Stock des pièces traitées

T<sub>1</sub> Arrivée d'une pièce

T<sub>2</sub> Début du traitement

T<sub>3</sub> Fin du traitement



P<sub>1</sub> Machine libre

P<sub>2</sub> Stock des pièces avant traitement

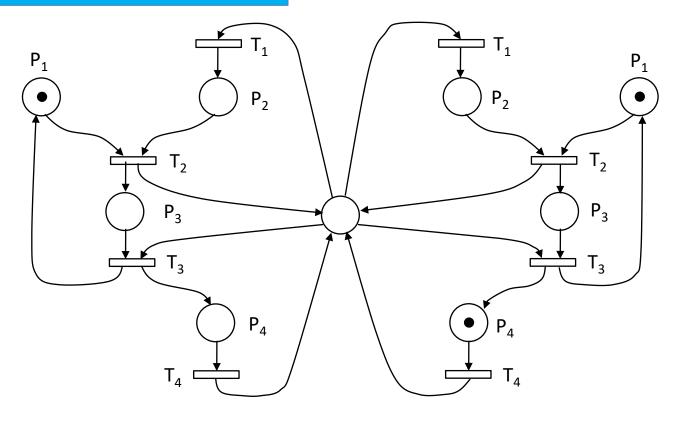
P<sub>3</sub> Machine occupée

P<sub>4</sub> Stock des pièces traitées

T<sub>1</sub> Arrivée d'une pièce

T<sub>2</sub> Début du traitement

T<sub>3</sub> Fin du traitement



P<sub>1</sub> Machine libre

P<sub>2</sub> Stock des pièces avant traitement

P<sub>3</sub> Machine occupée

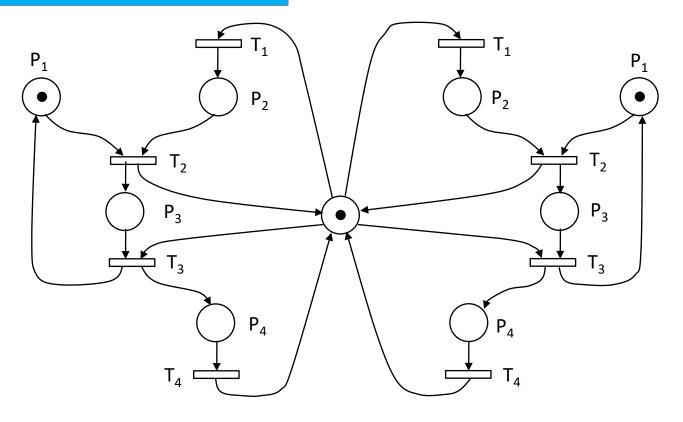
P<sub>4</sub> Stock des pièces traitées

T<sub>1</sub> Arrivée d'une pièce

T<sub>2</sub> Début du traitement

T<sub>3</sub> Fin du traitement

 $\mathsf{T}_4$ 



P<sub>1</sub> Machine libre

P<sub>2</sub> Stock des pièces avant traitement

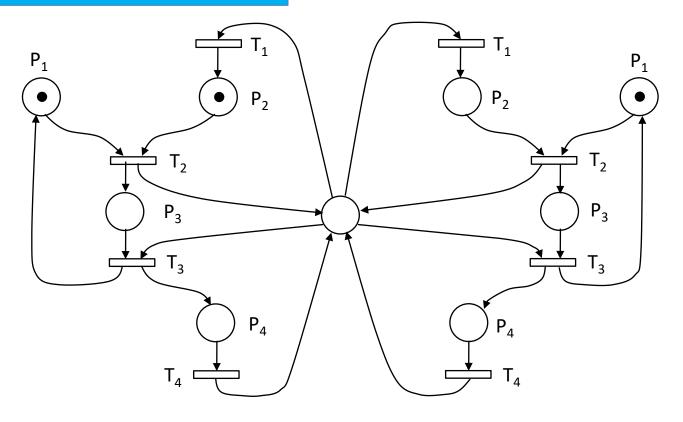
P<sub>3</sub> Machine occupée

P<sub>4</sub> Stock des pièces traitées

T<sub>1</sub> Arrivée d'une pièce

T<sub>2</sub> Début du traitement

T<sub>3</sub> Fin du traitement



P<sub>1</sub> Machine libre

P<sub>2</sub> Stock des pièces avant traitement

P<sub>3</sub> Machine occupée

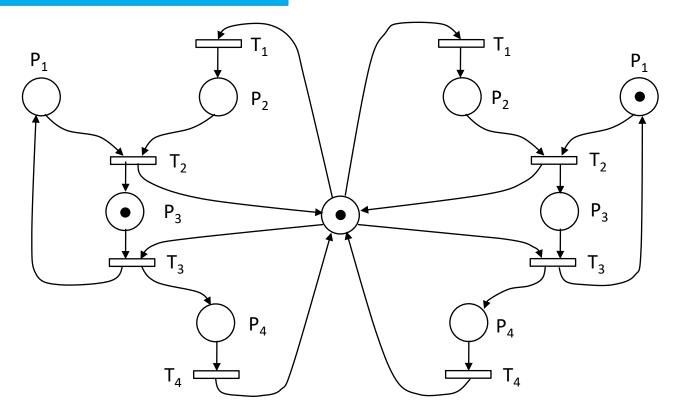
P<sub>4</sub> Stock des pièces traitées

T<sub>1</sub> Arrivée d'une pièce

T<sub>2</sub> Début du traitement

T<sub>3</sub> Fin du traitement

 $\mathsf{T}_4$ 



P<sub>1</sub> Machine libre

P<sub>2</sub> Stock des pièces avant traitement

P<sub>3</sub> Machine occupée

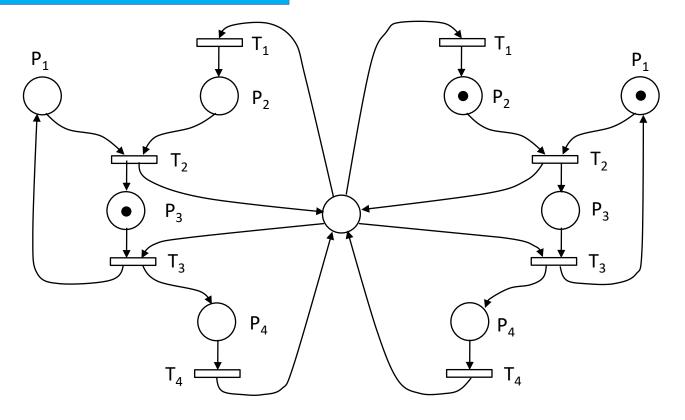
P<sub>4</sub> Stock des pièces traitées

T<sub>1</sub> Arrivée d'une pièce

T<sub>2</sub> Début du traitement

T<sub>3</sub> Fin du traitement

 $\mathsf{T}_4$ 



P<sub>1</sub> Machine libre

P<sub>2</sub> Stock des pièces avant traitement

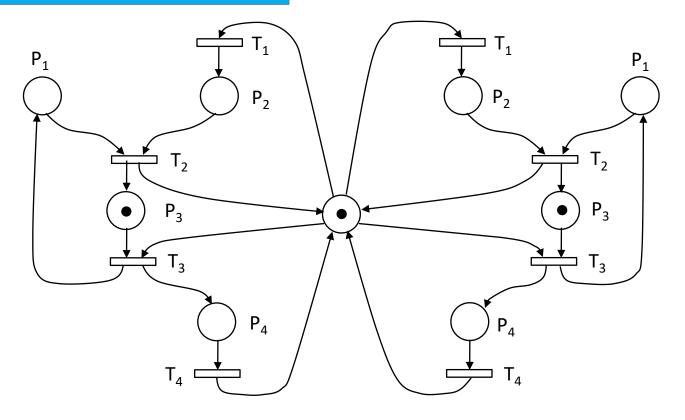
P<sub>3</sub> Machine occupée

P<sub>4</sub> Stock des pièces traitées

T<sub>1</sub> Arrivée d'une pièce

T<sub>2</sub> Début du traitement

T<sub>3</sub> Fin du traitement



P<sub>1</sub> Machine libre

P<sub>2</sub> Stock des pièces avant traitement

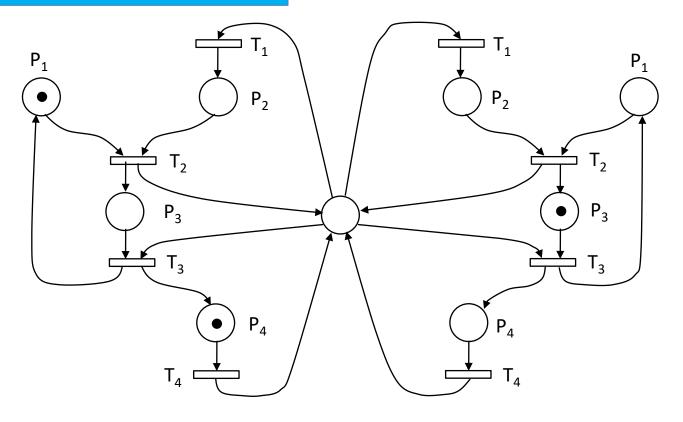
P<sub>3</sub> Machine occupée

P<sub>4</sub> Stock des pièces traitées

T<sub>1</sub> Arrivée d'une pièce

T<sub>2</sub> Début du traitement

T<sub>3</sub> Fin du traitement



P<sub>1</sub> Machine libre

P<sub>2</sub> Stock des pièces avant traitement

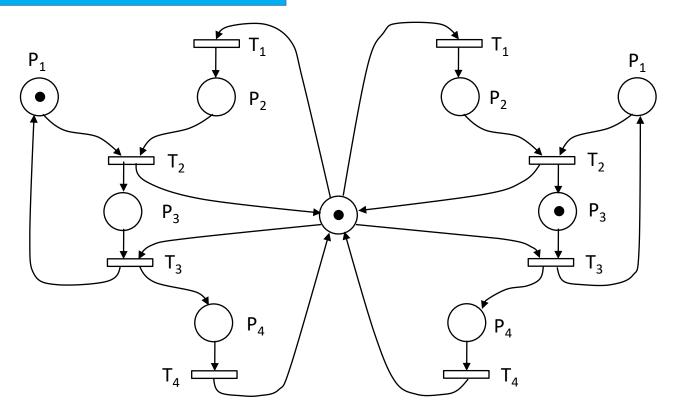
P<sub>3</sub> Machine occupée

P<sub>4</sub> Stock des pièces traitées

T<sub>1</sub> Arrivée d'une pièce

T<sub>2</sub> Début du traitement

T<sub>3</sub> Fin du traitement



P<sub>1</sub> Machine libre

P<sub>2</sub> Stock des pièces avant traitement

P<sub>3</sub> Machine occupée

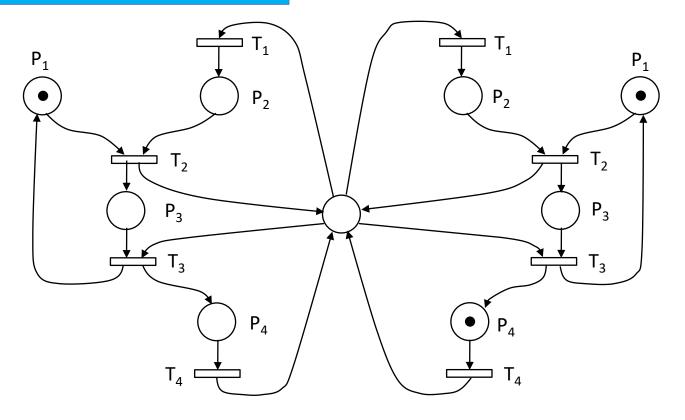
P<sub>4</sub> Stock des pièces traitées

T<sub>1</sub> Arrivée d'une pièce

T<sub>2</sub> Début du traitement

T<sub>3</sub> Fin du traitement

 $\mathsf{T}_4$ 



P<sub>1</sub> Machine libre

P<sub>2</sub> Stock des pièces avant traitement

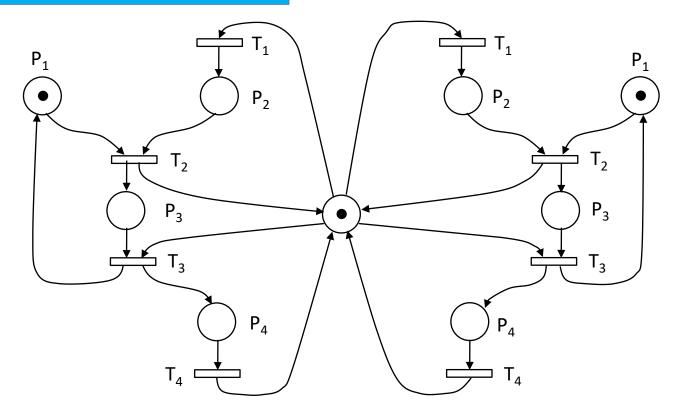
P<sub>3</sub> Machine occupée

P<sub>4</sub> Stock des pièces traitées

T<sub>1</sub> Arrivée d'une pièce

T<sub>2</sub> Début du traitement

T<sub>3</sub> Fin du traitement



P<sub>1</sub> Machine libre

P<sub>2</sub> Stock des pièces avant traitement

P<sub>3</sub> Machine occupée

P<sub>4</sub> Stock des pièces traitées

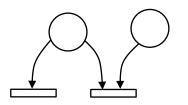
T<sub>1</sub> Arrivée d'une pièce

T<sub>2</sub> Début du traitement

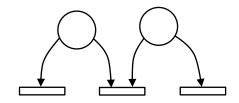
T<sub>3</sub> Fin du traitement

# Rdp simple

Un rdp est simple si chaque transition ne peut être concernée que par un seul conflit à la fois.



Rdp simple



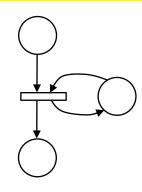
Rdp non simple

### Rdp pur

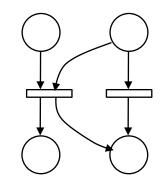
Un rdp pur est tel qu'il n'existe pas de transition ayant une place d'entrée qui soit aussi une place de sortie de cette transition.

Tout rdp impur peut être transformé en rdp pur en décomposant la transition impure en deux transitions  $(t_d \text{ et } t_f)$ .

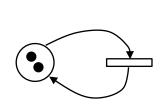
D'abord, on substitue à la transition impure  $T_1$  deux transitions  $T_d$  et  $T_f$  et une place, dont  $T_d$  est la transition d'entrée, et  $T_f$  la transition de sortie. Ensuite on ajoute  $P_0$  dont le rôle est d'assurer que les transitions  $T_d$  et  $T_f$  seront franchies en séquence.

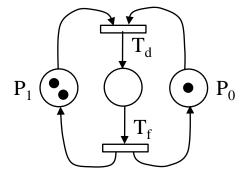


Rdp impur



Rdp pur

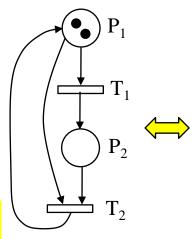


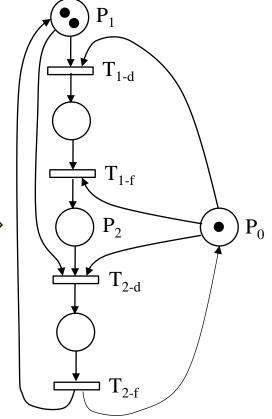


### Rdp impur → Rdp pur

D'une manière générale, la transformation d'un Rdp impur consiste à substituer toute transition  $T_j$  par deux transitions  $T_{j-d}$  et  $T_{j-f}$  avec une place intermédiaire. Ensuite, on ajoute une place  $P_0$ , contenant une marque. Ainsi le franchissement de  $T_j$  est remplacé par le franchissement en séquence de  $T_{j-d}$ , puis  $T_{j-f}$ .

Pourquoi est-il nécessaire de transformer un rdp impur en rdp pur ?

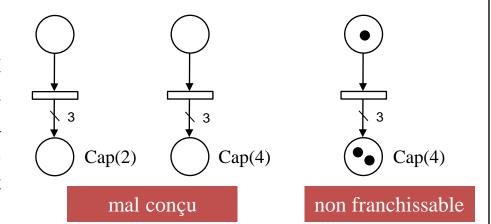




$$T_1$$
 $P_1$ 
 $P_2$ 
 $P_3$ 
 $T_4$ 
 $T_4$ 

$$\mathbf{T}_{5} \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

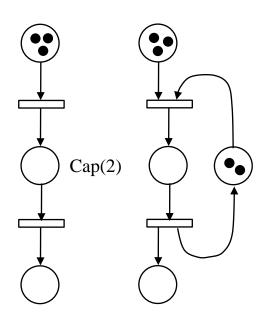
A chaque place est associée une capacité de marquage maximum. La transition ne sera franchissable que si la capacité de la place en sortie de la transition n'est pas dépassée par le nombre de jetons arrivant du tir de la transition.



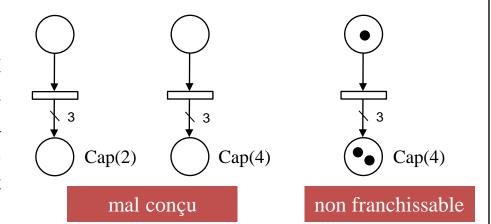
#### Rdp à capacité → Rdp ordinaire

Tout rdp à capacité peut être transformé en un rdp ordinaire. La transformation consiste à ajouter une place complémentaire.

Quel est l'intérêt de la transformation d'un rdp à capacité en rdp ordinaire ?



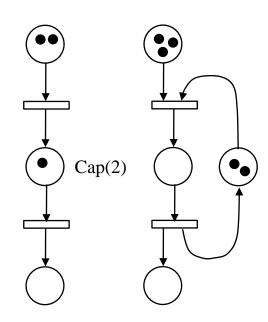
A chaque place est associée une capacité de marquage maximum. La transition ne sera franchissable que si la capacité de la place en sortie de la transition n'est pas dépassée par le nombre de jetons arrivant du tir de la transition.



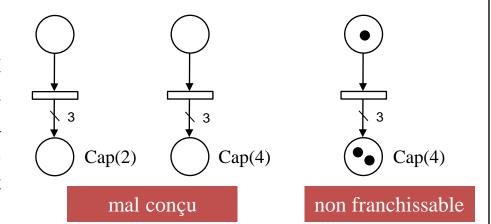
#### Rdp à capacité → Rdp ordinaire

Tout rdp à capacité peut être transformé en un rdp ordinaire. La transformation consiste à ajouter une place complémentaire.

Quel est l'intérêt de la transformation d'un rdp à capacité en rdp ordinaire ?



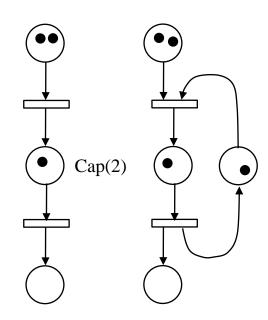
A chaque place est associée une capacité de marquage maximum. La transition ne sera franchissable que si la capacité de la place en sortie de la transition n'est pas dépassée par le nombre de jetons arrivant du tir de la transition.



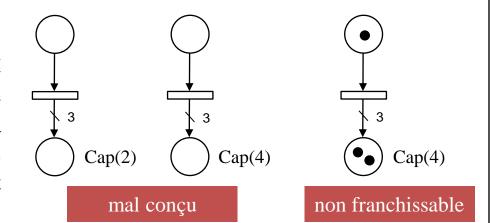
#### Rdp à capacité → Rdp ordinaire

Tout rdp à capacité peut être transformé en un rdp ordinaire. La transformation consiste à ajouter une place complémentaire.

Quel est l'intérêt de la transformation d'un rdp à capacité en rdp ordinaire ?



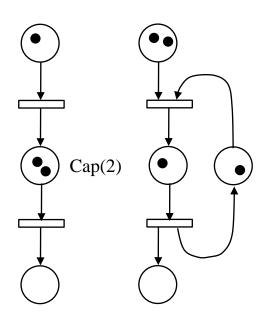
A chaque place est associée une capacité de marquage maximum. La transition ne sera franchissable que si la capacité de la place en sortie de la transition n'est pas dépassée par le nombre de jetons arrivant du tir de la transition.



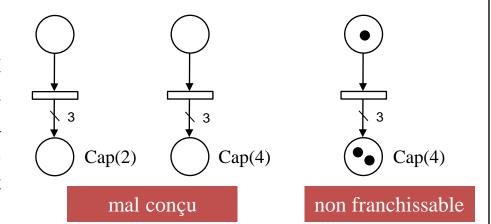
#### Rdp à capacité → Rdp ordinaire

Tout rdp à capacité peut être transformé en un rdp ordinaire. La transformation consiste à ajouter une place complémentaire.

Quel est l'intérêt de la transformation d'un rdp à capacité en rdp ordinaire ?



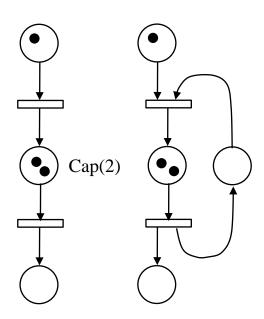
A chaque place est associée une capacité de marquage maximum. La transition ne sera franchissable que si la capacité de la place en sortie de la transition n'est pas dépassée par le nombre de jetons arrivant du tir de la transition.



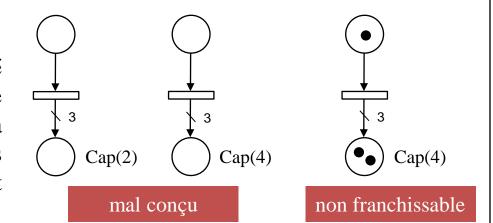
#### Rdp à capacité → Rdp ordinaire

Tout rdp à capacité peut être transformé en un rdp ordinaire. La transformation consiste à ajouter une place complémentaire.

Quel est l'intérêt de la transformation d'un rdp à capacité en rdp ordinaire ?



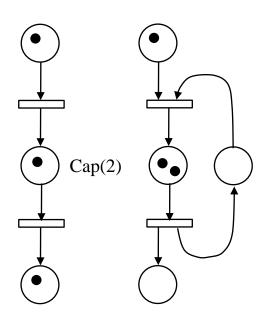
A chaque place est associée une capacité de marquage maximum. La transition ne sera franchissable que si la capacité de la place en sortie de la transition n'est pas dépassée par le nombre de jetons arrivant du tir de la transition.



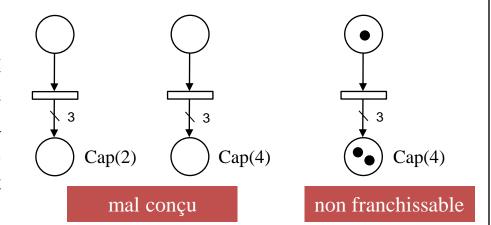
#### Rdp à capacité → Rdp ordinaire

Tout rdp à capacité peut être transformé en un rdp ordinaire. La transformation consiste à ajouter une place complémentaire.

Quel est l'intérêt de la transformation d'un rdp à capacité en rdp ordinaire ?



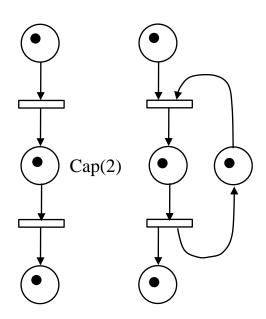
A chaque place est associée une capacité de marquage maximum. La transition ne sera franchissable que si la capacité de la place en sortie de la transition n'est pas dépassée par le nombre de jetons arrivant du tir de la transition.



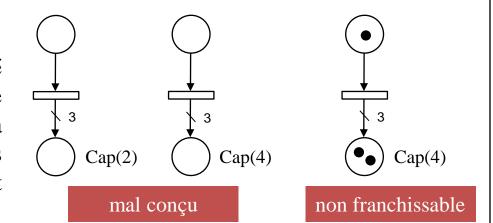
#### Rdp à capacité → Rdp ordinaire

Tout rdp à capacité peut être transformé en un rdp ordinaire. La transformation consiste à ajouter une place complémentaire.

Quel est l'intérêt de la transformation d'un rdp à capacité en rdp ordinaire ?



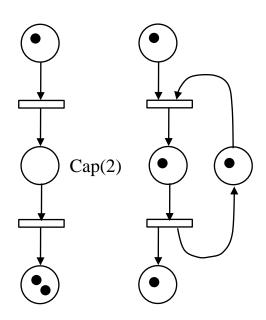
A chaque place est associée une capacité de marquage maximum. La transition ne sera franchissable que si la capacité de la place en sortie de la transition n'est pas dépassée par le nombre de jetons arrivant du tir de la transition.



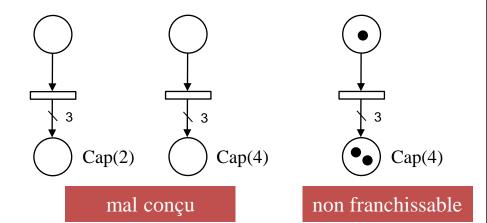
#### Rdp à capacité → Rdp ordinaire

Tout rdp à capacité peut être transformé en un rdp ordinaire. La transformation consiste à ajouter une place complémentaire.

Quel est l'intérêt de la transformation d'un rdp à capacité en rdp ordinaire ?



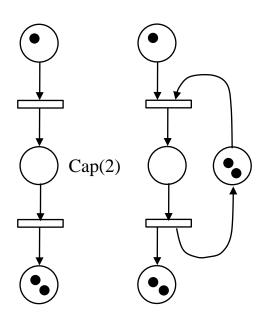
A chaque place est associée une capacité de marquage maximum. La transition ne sera franchissable que si la capacité de la place en sortie de la transition n'est pas dépassée par le nombre de jetons arrivant du tir de la transition.



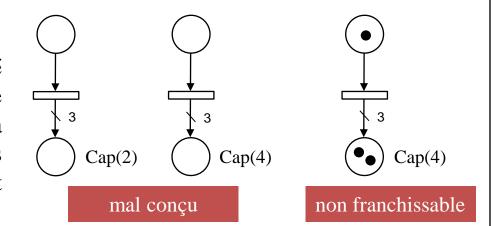
#### Rdp à capacité → Rdp ordinaire

Tout rdp à capacité peut être transformé en un rdp ordinaire. La transformation consiste à ajouter une place complémentaire.

Quel est l'intérêt de la transformation d'un rdp à capacité en rdp ordinaire ?



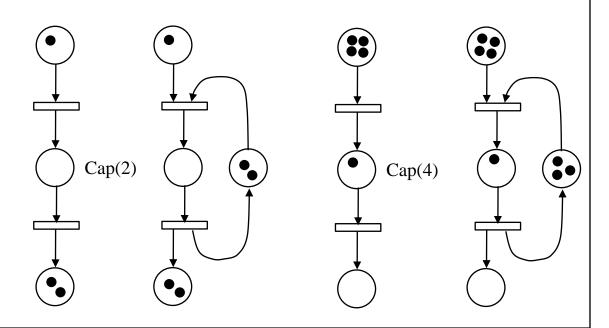
A chaque place est associée une capacité de marquage maximum. La transition ne sera franchissable que si la capacité de la place en sortie de la transition n'est pas dépassée par le nombre de jetons arrivant du tir de la transition.



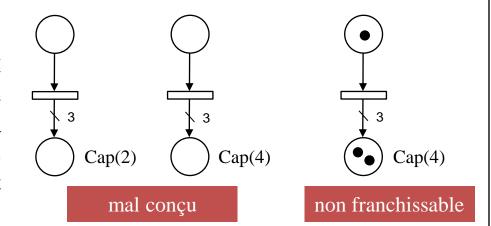
#### Rdp à capacité → Rdp ordinaire

Tout rdp à capacité peut être transformé en un rdp ordinaire. La transformation consiste à ajouter une place complémentaire.

Quel est l'intérêt de la transformation d'un rdp à capacité en rdp ordinaire ?



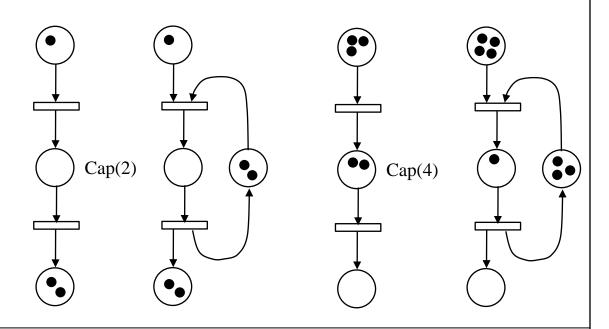
A chaque place est associée une capacité de marquage maximum. La transition ne sera franchissable que si la capacité de la place en sortie de la transition n'est pas dépassée par le nombre de jetons arrivant du tir de la transition.



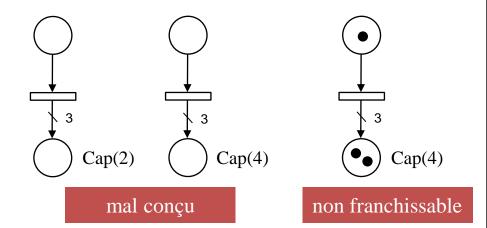
#### Rdp à capacité → Rdp ordinaire

Tout rdp à capacité peut être transformé en un rdp ordinaire. La transformation consiste à ajouter une place complémentaire.

Quel est l'intérêt de la transformation d'un rdp à capacité en rdp ordinaire ?



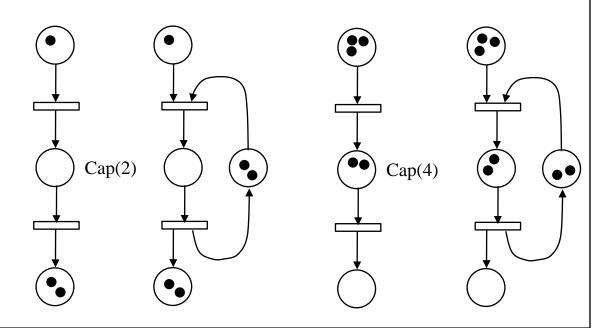
A chaque place est associée une capacité de marquage maximum. La transition ne sera franchissable que si la capacité de la place en sortie de la transition n'est pas dépassée par le nombre de jetons arrivant du tir de la transition.



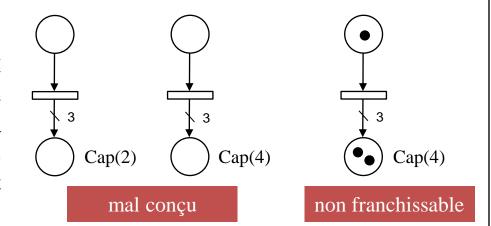
#### Rdp à capacité → Rdp ordinaire

Tout rdp à capacité peut être transformé en un rdp ordinaire. La transformation consiste à ajouter une place complémentaire.

Quel est l'intérêt de la transformation d'un rdp à capacité en rdp ordinaire ?



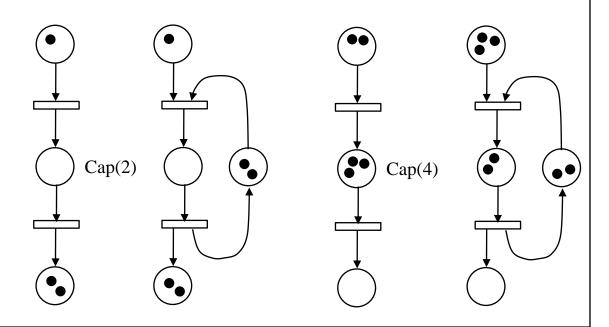
A chaque place est associée une capacité de marquage maximum. La transition ne sera franchissable que si la capacité de la place en sortie de la transition n'est pas dépassée par le nombre de jetons arrivant du tir de la transition.



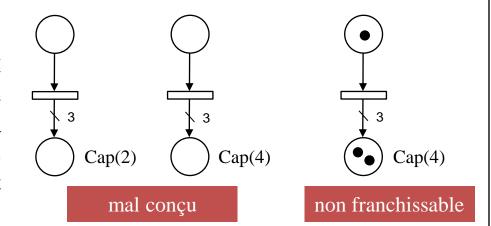
#### Rdp à capacité → Rdp ordinaire

Tout rdp à capacité peut être transformé en un rdp ordinaire. La transformation consiste à ajouter une place complémentaire.

Quel est l'intérêt de la transformation d'un rdp à capacité en rdp ordinaire ?



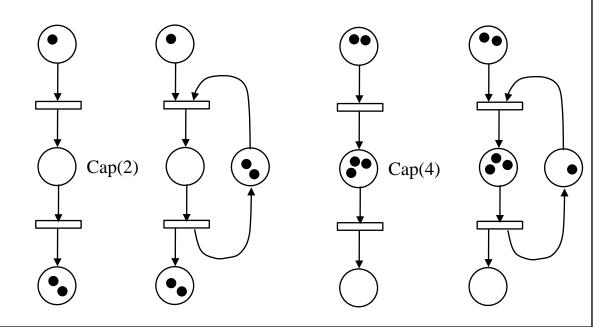
A chaque place est associée une capacité de marquage maximum. La transition ne sera franchissable que si la capacité de la place en sortie de la transition n'est pas dépassée par le nombre de jetons arrivant du tir de la transition.



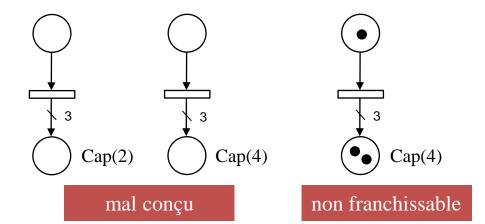
#### Rdp à capacité → Rdp ordinaire

Tout rdp à capacité peut être transformé en un rdp ordinaire. La transformation consiste à ajouter une place complémentaire.

Quel est l'intérêt de la transformation d'un rdp à capacité en rdp ordinaire ?



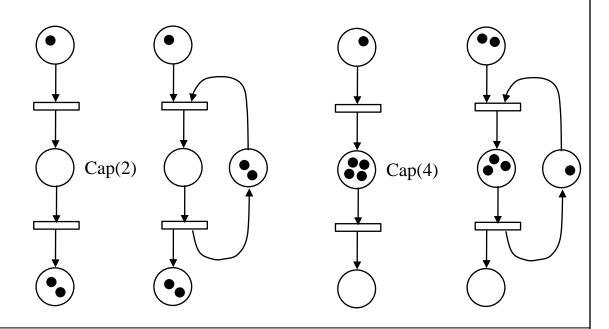
A chaque place est associée une capacité de marquage maximum. La transition ne sera franchissable que si la capacité de la place en sortie de la transition n'est pas dépassée par le nombre de jetons arrivant du tir de la transition.



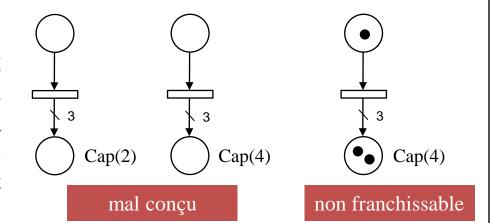
#### Rdp à capacité → Rdp ordinaire

Tout rdp à capacité peut être transformé en un rdp ordinaire. La transformation consiste à ajouter une place complémentaire.

Quel est l'intérêt de la transformation d'un rdp à capacité en rdp ordinaire ?



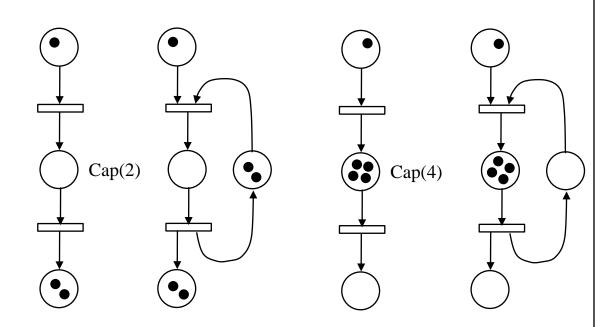
A chaque place est associée une capacité de marquage maximum. La transition ne sera franchissable que si la capacité de la place en sortie de la transition n'est pas dépassée par le nombre de jetons arrivant du tir de la transition.



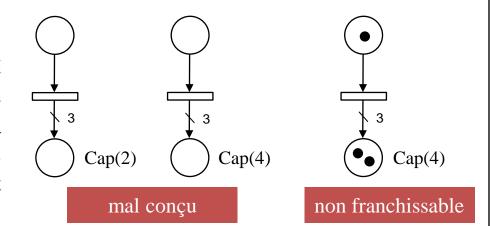
#### Rdp à capacité → Rdp ordinaire

Tout rdp à capacité peut être transformé en un rdp ordinaire. La transformation consiste à ajouter une place complémentaire.

Quel est l'intérêt de la transformation d'un rdp à capacité en rdp ordinaire ?



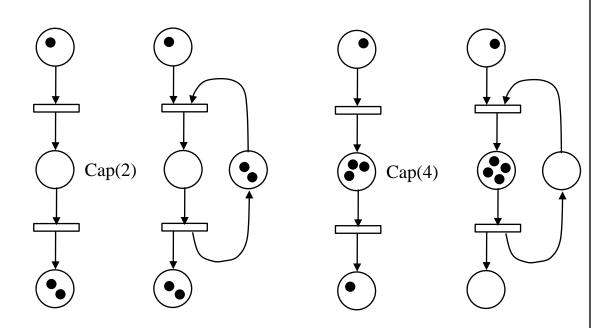
A chaque place est associée une capacité de marquage maximum. La transition ne sera franchissable que si la capacité de la place en sortie de la transition n'est pas dépassée par le nombre de jetons arrivant du tir de la transition.



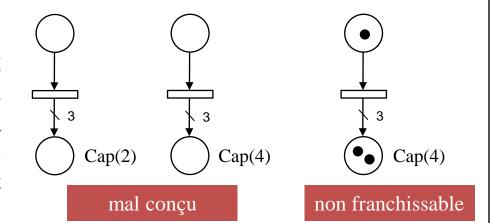
#### Rdp à capacité → Rdp ordinaire

Tout rdp à capacité peut être transformé en un rdp ordinaire. La transformation consiste à ajouter une place complémentaire.

Quel est l'intérêt de la transformation d'un rdp à capacité en rdp ordinaire ?



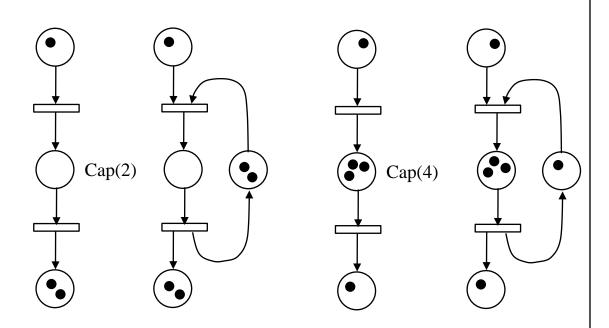
A chaque place est associée une capacité de marquage maximum. La transition ne sera franchissable que si la capacité de la place en sortie de la transition n'est pas dépassée par le nombre de jetons arrivant du tir de la transition.



#### Rdp à capacité → Rdp ordinaire

Tout rdp à capacité peut être transformé en un rdp ordinaire. La transformation consiste à ajouter une place complémentaire.

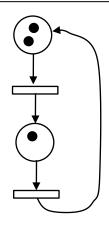
Quel est l'intérêt de la transformation d'un rdp à capacité en rdp ordinaire ?



Une place  $P_i$  est « **bornée** » pour  $M_0$  si,  $\forall M_i \in *M_0$  accessible à partir de  $M_0$ , le nombre de marques dans  $P_i$  est fini.

 $P_i$  est « **k-bornée** » pour un marquage initial  $M_0$  s'il existe un entier naturel k, tel que pour tout marquage accessible à partir de  $M_0$ ,  $m(P_i) \le k$ 

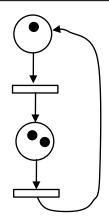
Un rdp est « k-borné » pour un marquage initial  $M_0$  si toutes places sont bornées pour  $M_0$ 



Une place  $P_i$  est « **bornée** » pour  $M_0$  si,  $\forall M_i \in *M_0$  accessible à partir de  $M_0$ , le nombre de marques dans  $P_i$  est fini.

 $P_i$  est « **k-bornée** » pour un marquage initial  $M_0$  s'il existe un entier naturel k, tel que pour tout marquage accessible à partir de  $M_0$ ,  $m(P_i) \le k$ 

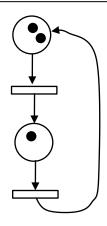
Un rdp est « k-borné » pour un marquage initial  $M_0$  si toutes places sont bornées pour  $M_0$ 



Une place  $P_i$  est « **bornée** » pour  $M_0$  si,  $\forall M_i \in *M_0$  accessible à partir de  $M_0$ , le nombre de marques dans  $P_i$  est fini.

 $P_i$  est « **k-bornée** » pour un marquage initial  $M_0$  s'il existe un entier naturel k, tel que pour tout marquage accessible à partir de  $M_0$ ,  $m(P_i) \le k$ 

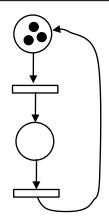
Un rdp est « k-borné » pour un marquage initial  $M_0$  si toutes places sont bornées pour  $M_0$ 



Une place  $P_i$  est « **bornée** » pour  $M_0$  si,  $\forall M_i \in *M_0$  accessible à partir de  $M_0$ , le nombre de marques dans  $P_i$  est fini.

 $P_i$  est « **k-bornée** » pour un marquage initial  $M_0$  s'il existe un entier naturel k, tel que pour tout marquage accessible à partir de  $M_0$ ,  $m(P_i) \le k$ 

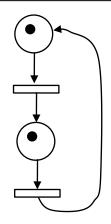
Un rdp est « k-borné » pour un marquage initial  $M_0$  si toutes places sont bornées pour  $M_0$ 



Une place  $P_i$  est « **bornée** » pour  $M_0$  si,  $\forall M_i \in *M_0$  accessible à partir de  $M_0$ , le nombre de marques dans  $P_i$  est fini.

 $P_i$  est « **k-bornée** » pour un marquage initial  $M_0$  s'il existe un entier naturel k, tel que pour tout marquage accessible à partir de  $M_0$ ,  $m(P_i) \le k$ 

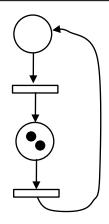
Un rdp est « k-borné » pour un marquage initial  $M_0$  si toutes places sont bornées pour  $M_0$ 



Une place  $P_i$  est « **bornée** » pour  $M_0$  si,  $\forall M_i \in *M_0$  accessible à partir de  $M_0$ , le nombre de marques dans  $P_i$  est fini.

 $P_i$  est « **k-bornée** » pour un marquage initial  $M_0$  s'il existe un entier naturel k, tel que pour tout marquage accessible à partir de  $M_0$ ,  $m(P_i) \le k$ 

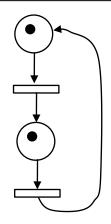
Un rdp est « k-borné » pour un marquage initial  $M_0$  si toutes places sont bornées pour  $M_0$ 



Une place  $P_i$  est « **bornée** » pour  $M_0$  si,  $\forall M_i \in *M_0$  accessible à partir de  $M_0$ , le nombre de marques dans  $P_i$  est fini.

 $P_i$  est « **k-bornée** » pour un marquage initial  $M_0$  s'il existe un entier naturel k, tel que pour tout marquage accessible à partir de  $M_0$ ,  $m(P_i) \le k$ 

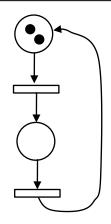
Un rdp est « k-borné » pour un marquage initial  $M_0$  si toutes places sont bornées pour  $M_0$ 



Une place  $P_i$  est « **bornée** » pour  $M_0$  si,  $\forall M_i \in *M_0$  accessible à partir de  $M_0$ , le nombre de marques dans  $P_i$  est fini.

 $P_i$  est « **k-bornée** » pour un marquage initial  $M_0$  s'il existe un entier naturel k, tel que pour tout marquage accessible à partir de  $M_0$ ,  $m(P_i) \le k$ 

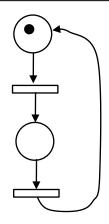
Un rdp est « k-borné » pour un marquage initial  $M_0$  si toutes places sont bornées pour  $M_0$ 



Une place  $P_i$  est « **bornée** » pour  $M_0$  si,  $\forall M_i \in *M_0$  accessible à partir de  $M_0$ , le nombre de marques dans  $P_i$  est fini.

 $P_i$  est « **k-bornée** » pour un marquage initial  $M_0$  s'il existe un entier naturel k, tel que pour tout marquage accessible à partir de  $M_0$ ,  $m(P_i) \le k$ 

Un rdp est « k-borné » pour un marquage initial  $M_0$  si toutes places sont bornées pour  $M_0$ 

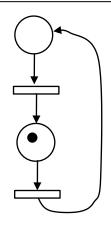


si  $M_0 = (2,1)$  le rdp est 3-borné si  $M_0 = (1,1)$  le rdp est 2-borné si  $M_0 = (1,0)$  le rdp est 1-borné

Une place  $P_i$  est « **bornée** » pour  $M_0$  si,  $\forall M_i \in *M_0$  accessible à partir de  $M_0$ , le nombre de marques dans  $P_i$  est fini.

 $P_i$  est « **k-bornée** » pour un marquage initial  $M_0$  s'il existe un entier naturel k, tel que pour tout marquage accessible à partir de  $M_0$ ,  $m(P_i) \le k$ 

Un rdp est « k-borné » pour un marquage initial  $M_0$  si toutes places sont bornées pour  $M_0$ 

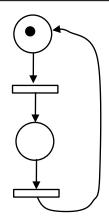


si  $M_0 = (2,1)$  le rdp est 3-borné si  $M_0 = (1,1)$  le rdp est 2-borné si  $M_0 = (1,0)$  le rdp est 1-borné

Une place  $P_i$  est « **bornée** » pour  $M_0$  si,  $\forall M_i \in *M_0$  accessible à partir de  $M_0$ , le nombre de marques dans  $P_i$  est fini.

 $P_i$  est « **k-bornée** » pour un marquage initial  $M_0$  s'il existe un entier naturel k, tel que pour tout marquage accessible à partir de  $M_0$ ,  $m(P_i) \le k$ 

Un rdp est « k-borné » pour un marquage initial  $M_0$  si toutes places sont bornées pour  $M_0$ 

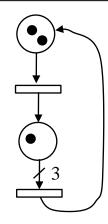


si  $M_0 = (2,1)$  le rdp est 3-borné si  $M_0 = (1,1)$  le rdp est 2-borné si  $M_0 = (1,0)$  le rdp est 1-borné

Une place  $P_i$  est « **bornée** » pour  $M_0$  si,  $\forall M_i \in *M_0$  accessible à partir de  $M_0$ , le nombre de marques dans  $P_i$  est fini.

 $P_i$  est « **k-bornée** » pour un marquage initial  $M_0$  s'il existe un entier naturel k, tel que pour tout marquage accessible à partir de  $M_0$ ,  $m(P_i) \le k$ 

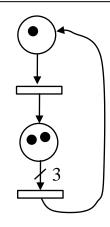
Un rdp est « k-borné » pour un marquage initial  $M_0$  si toutes places sont bornées pour  $M_0$ 



Une place  $P_i$  est « **bornée** » pour  $M_0$  si,  $\forall M_i \in *M_0$  accessible à partir de  $M_0$ , le nombre de marques dans  $P_i$  est fini.

 $P_i$  est « **k-bornée** » pour un marquage initial  $M_0$  s'il existe un entier naturel k, tel que pour tout marquage accessible à partir de  $M_0$ ,  $m(P_i) \le k$ 

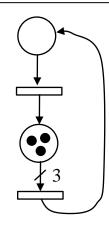
Un rdp est « k-borné » pour un marquage initial  $M_0$  si toutes places sont bornées pour  $M_0$ 



Une place  $P_i$  est « **bornée** » pour  $M_0$  si,  $\forall M_i \in *M_0$  accessible à partir de  $M_0$ , le nombre de marques dans  $P_i$  est fini.

 $P_i$  est « **k-bornée** » pour un marquage initial  $M_0$  s'il existe un entier naturel k, tel que pour tout marquage accessible à partir de  $M_0$ ,  $m(P_i) \le k$ 

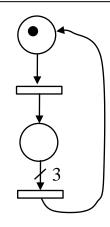
Un rdp est « k-borné » pour un marquage initial  $M_0$  si toutes places sont bornées pour  $M_0$ 



Une place  $P_i$  est « **bornée** » pour  $M_0$  si,  $\forall M_i \in *M_0$  accessible à partir de  $M_0$ , le nombre de marques dans  $P_i$  est fini.

 $P_i$  est « **k-bornée** » pour un marquage initial  $M_0$  s'il existe un entier naturel k, tel que pour tout marquage accessible à partir de  $M_0$ ,  $m(P_i) \le k$ 

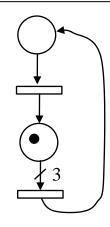
Un rdp est « k-borné » pour un marquage initial  $M_0$  si toutes places sont bornées pour  $M_0$ 



Une place  $P_i$  est « **bornée** » pour  $M_0$  si,  $\forall M_i \in *M_0$  accessible à partir de  $M_0$ , le nombre de marques dans  $P_i$  est fini.

 $P_i$  est « **k-bornée** » pour un marquage initial  $M_0$  s'il existe un entier naturel k, tel que pour tout marquage accessible à partir de  $M_0$ ,  $m(P_i) \le k$ 

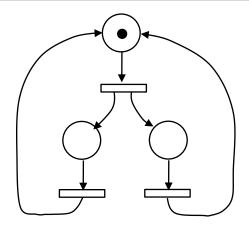
Un rdp est « k-borné » pour un marquage initial  $M_0$  si toutes places sont bornées pour  $M_0$ 



Une place  $P_i$  est « **bornée** » pour  $M_0$  si,  $\forall M_i \in *M_0$  accessible à partir de  $M_0$ , le nombre de marques dans  $P_i$  est fini.

 $P_i$  est « **k-bornée** » pour un marquage initial  $M_0$  s'il existe un entier naturel k, tel que pour tout marquage accessible à partir de  $M_0$ ,  $m(P_i) \le k$ 

Un rdp est « k-borné » pour un marquage initial  $M_0$  si toutes places sont bornées pour  $M_0$ 

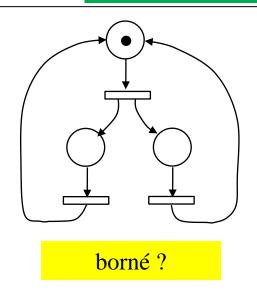


borné?

Une place  $P_i$  est « **bornée** » pour  $M_0$  si,  $\forall M_i \in *M_0$  accessible à partir de  $M_0$ , le nombre de marques dans  $P_i$  est fini.

 $P_i$  est « **k-bornée** » pour un marquage initial  $M_0$  s'il existe un entier naturel k, tel que pour tout marquage accessible à partir de  $M_0$ ,  $m(P_i) \le k$ 

Un rdp est « k-borné » pour un marquage initial  $M_0$  si toutes places sont bornées pour  $M_0$ 



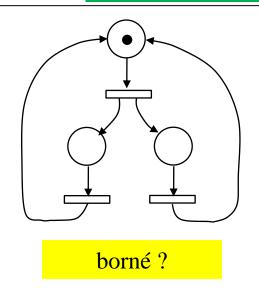
Rdp sauf ou binaire

Un rdp est sauf s'il est 1-borné, c-à-d toutes les places sont 1-bornées, où chaque place contient au plus une marque.

Une place  $P_i$  est « **bornée** » pour  $M_0$  si,  $\forall M_i \in *M_0$  accessible à partir de  $M_0$ , le nombre de marques dans  $P_i$  est fini.

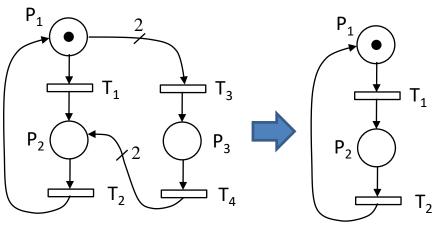
 $P_i$  est « **k-bornée** » pour un marquage initial  $M_0$  s'il existe un entier naturel k, tel que pour tout marquage accessible à partir de  $M_0$ ,  $m(P_i) \le k$ 

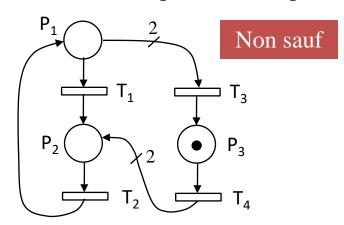
Un rdp est « k-borné » pour un marquage initial  $M_0$  si toutes places sont bornées pour  $M_0$ 



#### Rdp sauf ou binaire

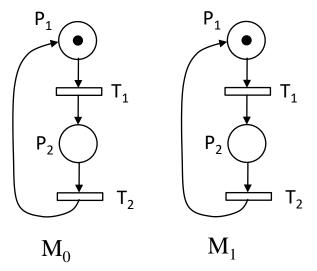
Un rdp est sauf s'il est 1-borné, c-à-d toutes les places sont 1-bornées, où chaque place contient au plus une marque.





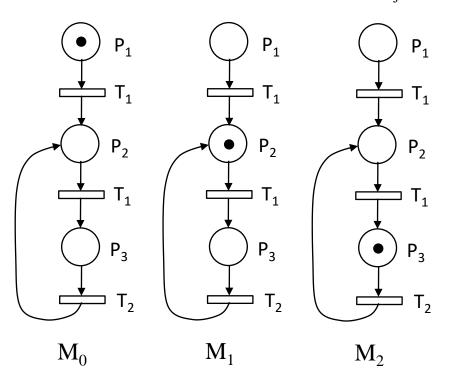
#### Rdp vivant

Une transition  $T_j$  est « vivante » pour un marquage initial  $M_0$  si pour tout marquage accessible  $M_i$  ( $M_i \in {}^*M_0$ ) il existe une séquence de franchissements qui contient  $T_j$  à partir de  $M_i$ . Quelle que soit l'évolution du rdp on aura toujours la possibilité de franchir  $T_j$ 



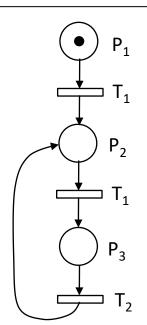
 $T_1$  est vivante pour  $M_0 = (1,0)$   $M_0 (T_1 > M_1 \text{ et } M_1 (T_2 > M_0)$  $\Rightarrow M_0 (T_1 T_2 > M_0 \text{ et } M_1 (T_2 T_1 > M_1)$ 

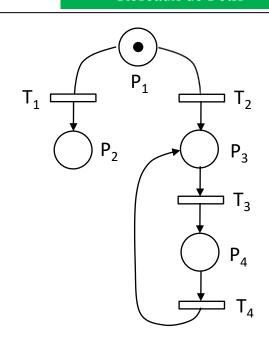
Un rdp est vivant pour un marquage initial  $M_0$  si toutes ses transitions sont vivantes.



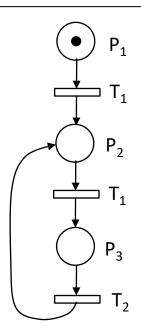
 $T_2$  et  $T_3$  sont vivantes alors que  $T_1$  n'est pas vivante

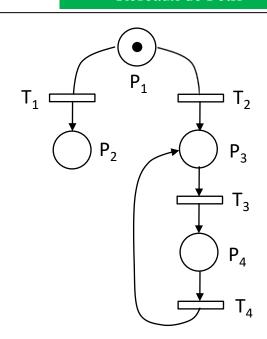
Une transition  $T_j$  est « quasi-vivante » pour un marquage initial  $M_0$  s'il existe une séquence de franchissements s telle que  $T_j \in s$ , à partir de  $M_0$ .



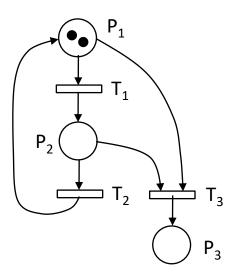


Une transition  $T_j$  est « quasi-vivante » pour un marquage initial  $M_0$  s'il existe une séquence de franchissements s telle que  $T_j \in s$ , à partir de  $M_0$ .



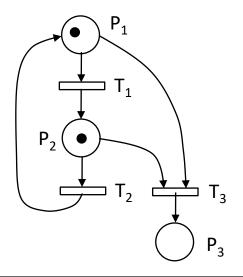


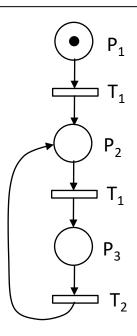
### Rdp avec blocage

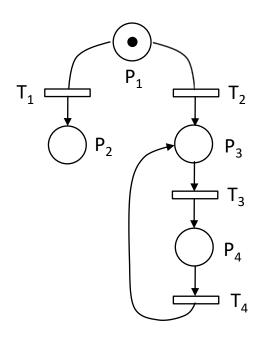


Une transition  $T_j$  est « quasi-vivante » pour un marquage initial  $M_0$  s'il existe une séquence de franchissements s telle que  $T_j \in s$ , à partir de  $M_0$ .

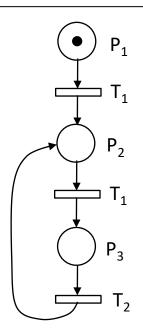
### Rdp avec blocage

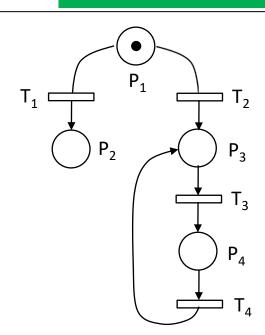




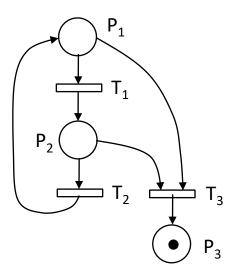


Une transition  $T_j$  est « quasi-vivante » pour un marquage initial  $M_0$  s'il existe une séquence de franchissements s telle que  $T_j \in s$ , à partir de  $M_0$ .

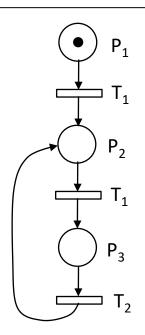


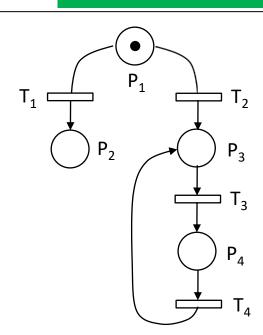


### Rdp avec blocage

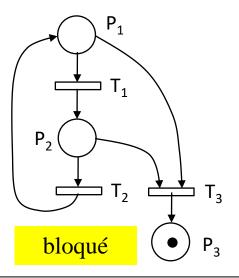


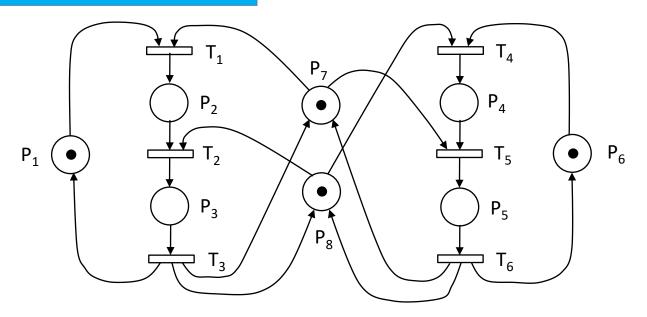
Une transition  $T_j$  est « quasi-vivante » pour un marquage initial  $M_0$  s'il existe une séquence de franchissements s telle que  $T_j \in s$ , à partir de  $M_0$ .

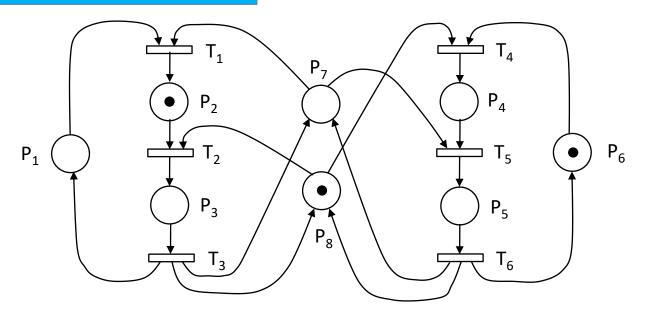


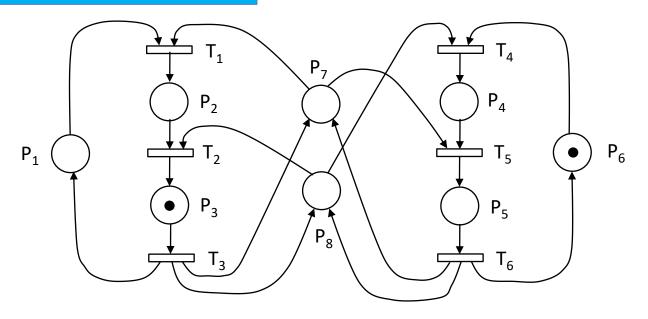


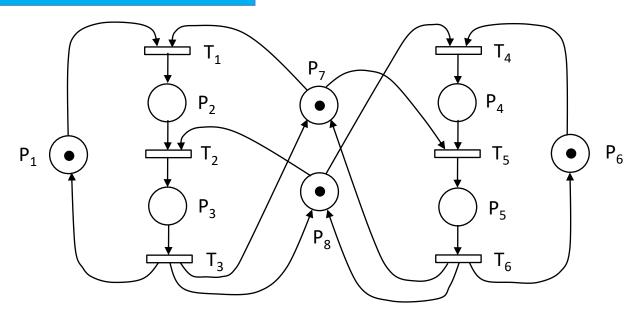
### Rdp avec blocage

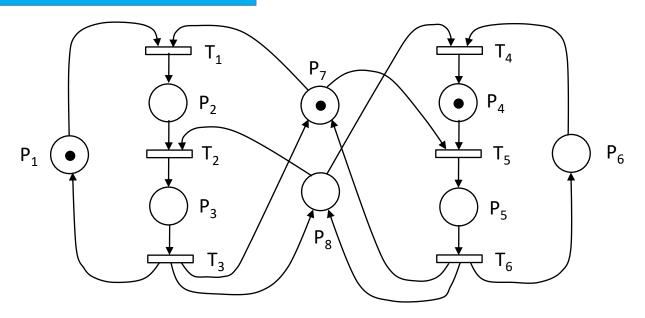


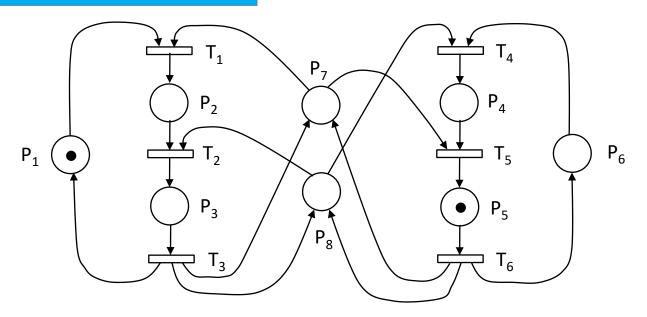


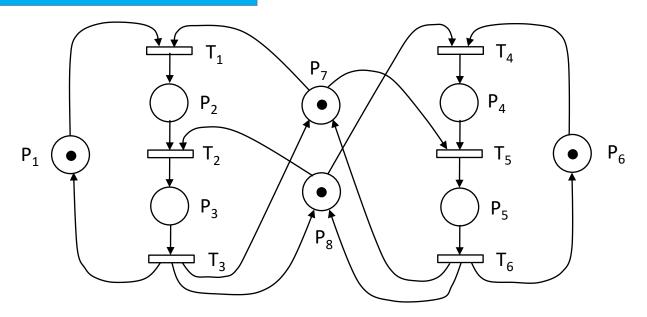


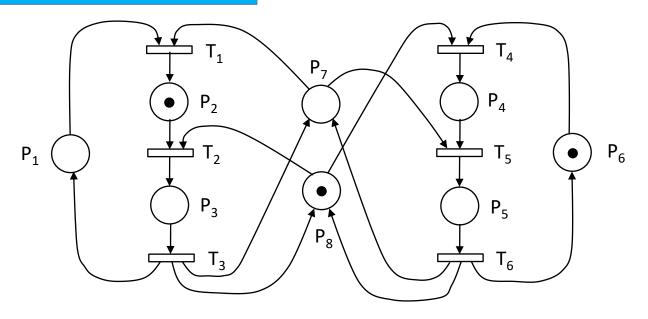


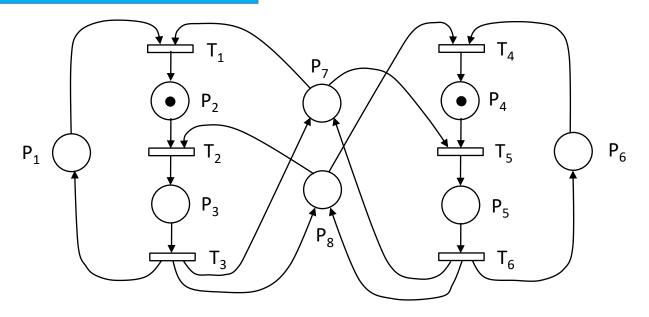


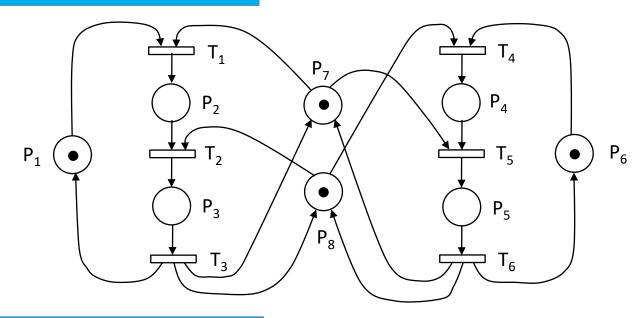


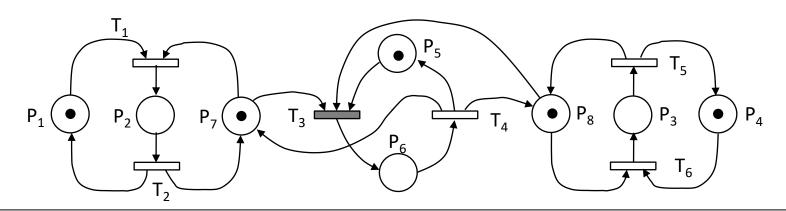


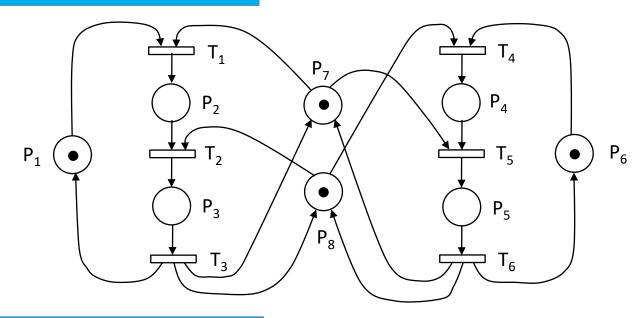


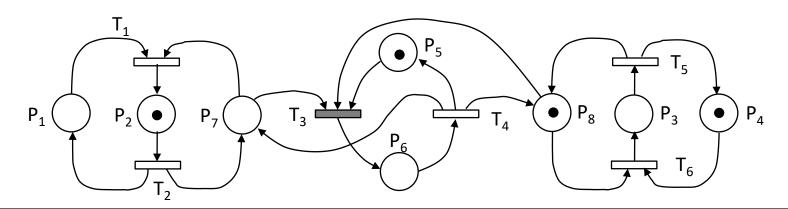


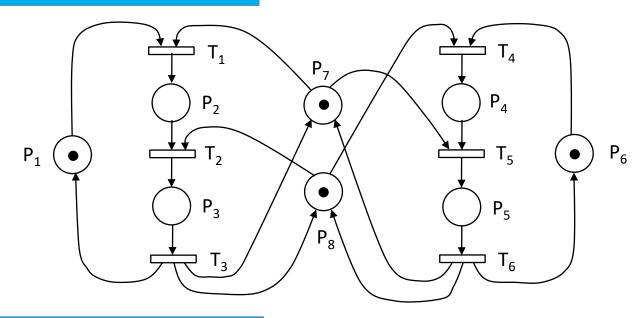


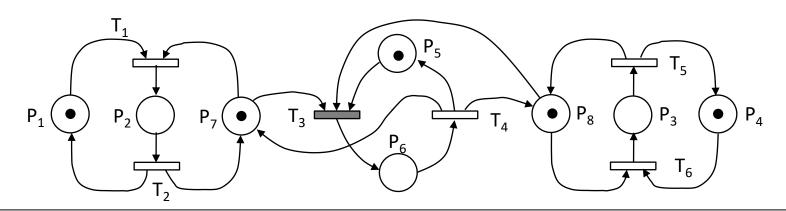


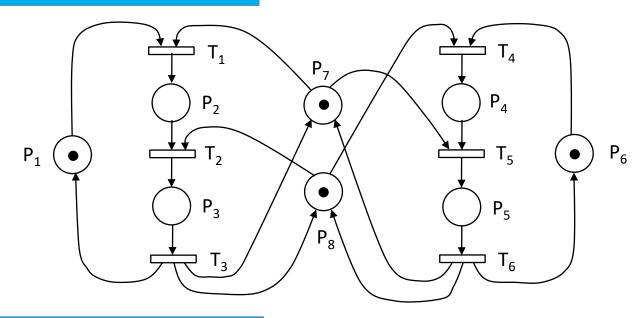


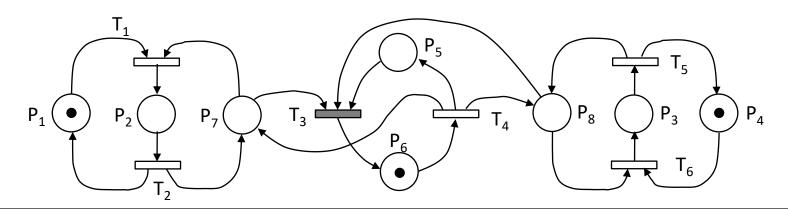


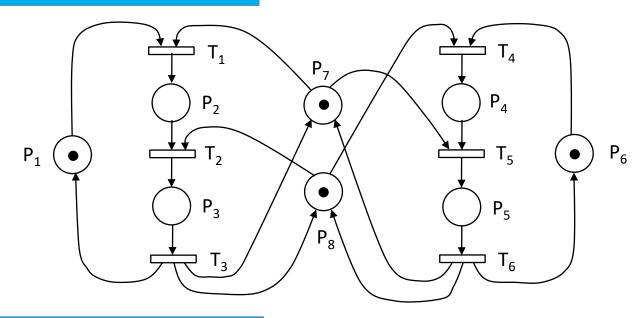


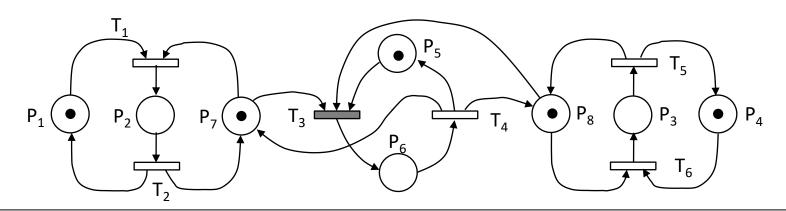


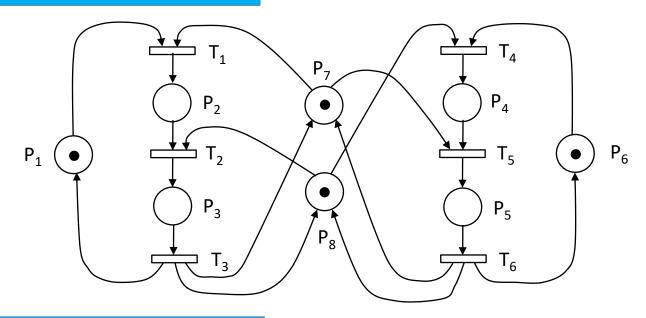


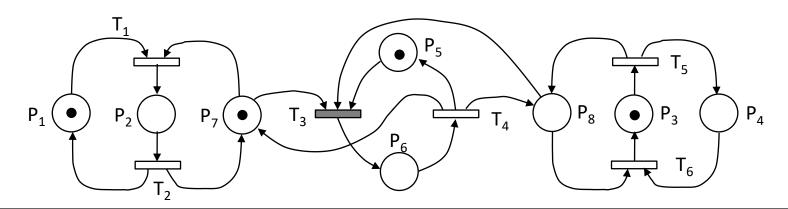




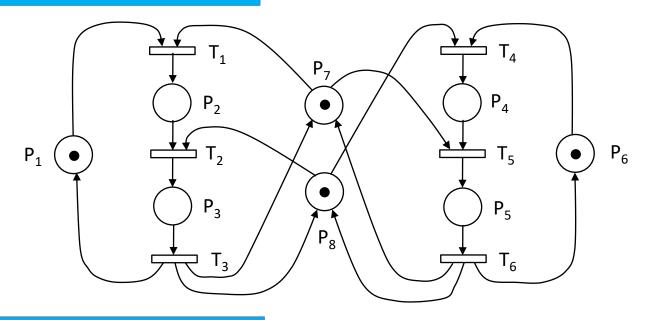




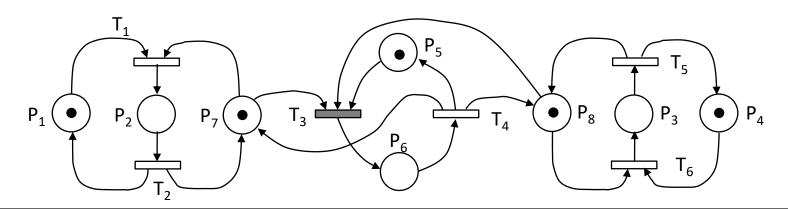




# Exemple de Rdp avec blocage



## Exemple de Rdp avec famine



Un arc inhibiteur est un arc orienté d'une place vers une transition (terminé par un cercle au lieu d'une flèche) qui est franchissable si la place correspondante n'est pas marquée (c'est un test à zéro).

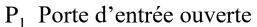
Version 1.0 2022

Un arc inhibiteur est un arc orienté d'une place vers une transition (terminé par un cercle au lieu d'une flèche) qui est franchissable si la place correspondante n'est pas marquée (c'est un test à zéro).

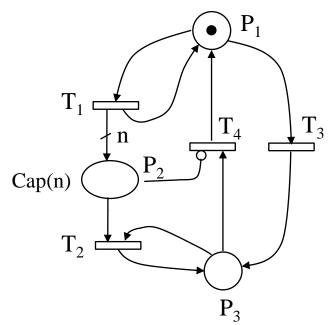
Soit le système « service client » où une administration fait entrer des clients puis ferme la porte d'entrée avant de commencer le service. Au fur et à mesure qu'ils sont servis les clients sortent par une autre porte. La porte d'entrée ne sera ré-ouverte que lorsque tous les clients étaient entrés seront sortis.

Version 1.0 2022

Un arc inhibiteur est un arc orienté d'une place vers une transition (terminé par un cercle au lieu d'une flèche) qui est franchissable si la place correspondante n'est pas marquée (c'est un test à zéro).

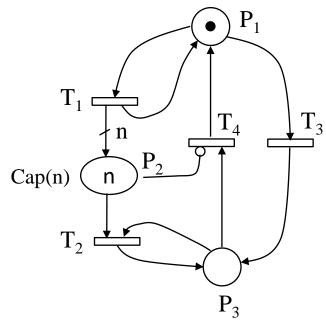


- P<sub>2</sub> Nb de clients en attente ou en cour de service
- P<sub>3</sub> Porte d'entrée fermée
- T<sub>1</sub> Entrée de clients
- T<sub>2</sub> Sortie de client
- T<sub>3</sub> Ferme la porte d'entrée
- T<sub>4</sub> Ouvre la porte d'entrée



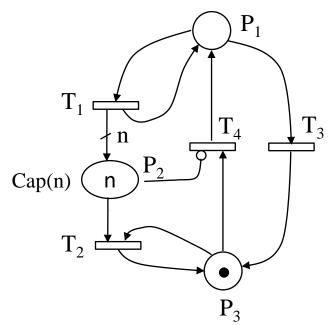
Un arc inhibiteur est un arc orienté d'une place vers une transition (terminé par un cercle au lieu d'une flèche) qui est franchissable si la place correspondante n'est pas marquée (c'est un test à zéro).

- P<sub>1</sub> Porte d'entrée ouverte
- P<sub>2</sub> Nb de clients en attente ou en cour de service
- P<sub>3</sub> Porte d'entrée fermée
- T<sub>1</sub> Entrée de clients
- T<sub>2</sub> Sortie de client
- T<sub>3</sub> Ferme la porte d'entrée
- T<sub>4</sub> Ouvre la porte d'entrée



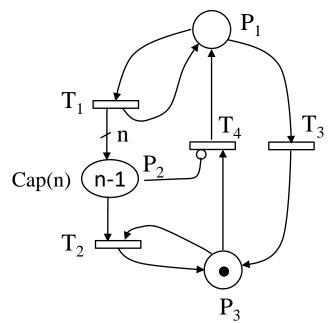
Un arc inhibiteur est un arc orienté d'une place vers une transition (terminé par un cercle au lieu d'une flèche) qui est franchissable si la place correspondante n'est pas marquée (c'est un test à zéro).

- P<sub>1</sub> Porte d'entrée ouverte
- P<sub>2</sub> Nb de clients en attente ou en cour de service
- P<sub>3</sub> Porte d'entrée fermée
- T<sub>1</sub> Entrée de clients
- T<sub>2</sub> Sortie de client
- T<sub>3</sub> Ferme la porte d'entrée
- T<sub>4</sub> Ouvre la porte d'entrée



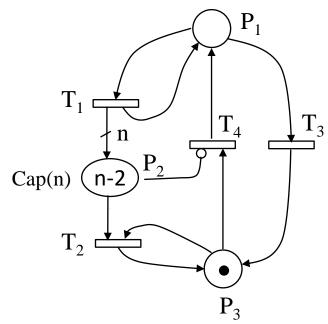
Un arc inhibiteur est un arc orienté d'une place vers une transition (terminé par un cercle au lieu d'une flèche) qui est franchissable si la place correspondante n'est pas marquée (c'est un test à zéro).

- P<sub>1</sub> Porte d'entrée ouverte
- P<sub>2</sub> Nb de clients en attente ou en cour de service
- P<sub>3</sub> Porte d'entrée fermée
- T<sub>1</sub> Entrée de clients
- T<sub>2</sub> Sortie de client
- T<sub>3</sub> Ferme la porte d'entrée
- T<sub>4</sub> Ouvre la porte d'entrée



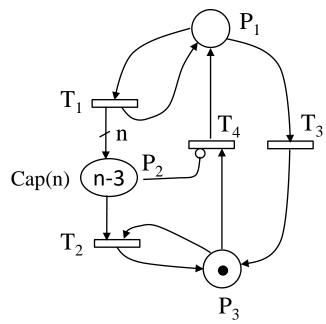
Un arc inhibiteur est un arc orienté d'une place vers une transition (terminé par un cercle au lieu d'une flèche) qui est franchissable si la place correspondante n'est pas marquée (c'est un test à zéro).

- P<sub>1</sub> Porte d'entrée ouverte
- P<sub>2</sub> Nb de clients en attente ou en cour de service
- P<sub>3</sub> Porte d'entrée fermée
- T<sub>1</sub> Entrée de clients
- T<sub>2</sub> Sortie de client
- T<sub>3</sub> Ferme la porte d'entrée
- T<sub>4</sub> Ouvre la porte d'entrée



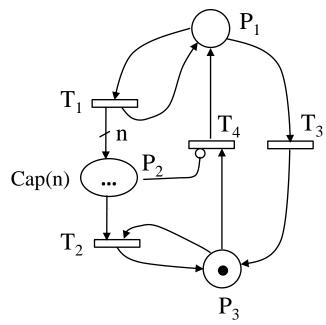
Un arc inhibiteur est un arc orienté d'une place vers une transition (terminé par un cercle au lieu d'une flèche) qui est franchissable si la place correspondante n'est pas marquée (c'est un test à zéro).

- P<sub>1</sub> Porte d'entrée ouverte
- P<sub>2</sub> Nb de clients en attente ou en cour de service
- P<sub>3</sub> Porte d'entrée fermée
- T<sub>1</sub> Entrée de clients
- T<sub>2</sub> Sortie de client
- T<sub>3</sub> Ferme la porte d'entrée
- T<sub>4</sub> Ouvre la porte d'entrée



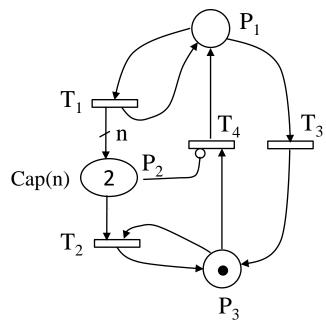
Un arc inhibiteur est un arc orienté d'une place vers une transition (terminé par un cercle au lieu d'une flèche) qui est franchissable si la place correspondante n'est pas marquée (c'est un test à zéro).

- P<sub>1</sub> Porte d'entrée ouverte
- P<sub>2</sub> Nb de clients en attente ou en cour de service
- P<sub>3</sub> Porte d'entrée fermée
- T<sub>1</sub> Entrée de clients
- T<sub>2</sub> Sortie de client
- T<sub>3</sub> Ferme la porte d'entrée
- T<sub>4</sub> Ouvre la porte d'entrée



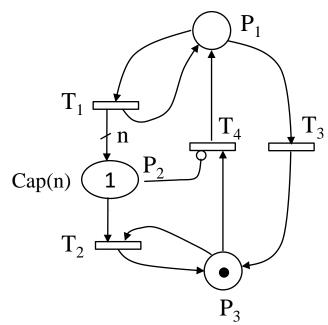
Un arc inhibiteur est un arc orienté d'une place vers une transition (terminé par un cercle au lieu d'une flèche) qui est franchissable si la place correspondante n'est pas marquée (c'est un test à zéro).

- P<sub>1</sub> Porte d'entrée ouverte
- P<sub>2</sub> Nb de clients en attente ou en cour de service
- P<sub>3</sub> Porte d'entrée fermée
- T<sub>1</sub> Entrée de clients
- T<sub>2</sub> Sortie de client
- T<sub>3</sub> Ferme la porte d'entrée
- T<sub>4</sub> Ouvre la porte d'entrée



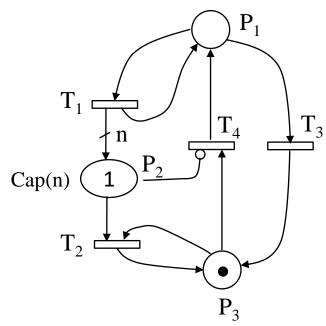
Un arc inhibiteur est un arc orienté d'une place vers une transition (terminé par un cercle au lieu d'une flèche) qui est franchissable si la place correspondante n'est pas marquée (c'est un test à zéro).

- P<sub>1</sub> Porte d'entrée ouverte
- P<sub>2</sub> Nb de clients en attente ou en cour de service
- P<sub>3</sub> Porte d'entrée fermée
- T<sub>1</sub> Entrée de clients
- T<sub>2</sub> Sortie de client
- T<sub>3</sub> Ferme la porte d'entrée
- T<sub>4</sub> Ouvre la porte d'entrée



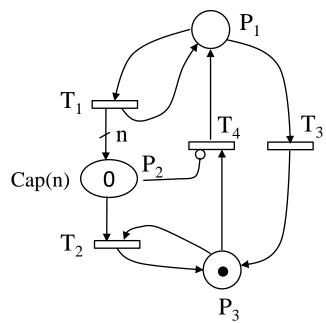
Un arc inhibiteur est un arc orienté d'une place vers une transition (terminé par un cercle au lieu d'une flèche) qui est franchissable si la place correspondante n'est pas marquée (c'est un test à zéro).

- P<sub>1</sub> Porte d'entrée ouverte
- P<sub>2</sub> Nb de clients en attente ou en cour de service
- P<sub>3</sub> Porte d'entrée fermée
- T<sub>1</sub> Entrée de clients
- T<sub>2</sub> Sortie de client
- T<sub>3</sub> Ferme la porte d'entrée
- T<sub>4</sub> Ouvre la porte d'entrée



Un arc inhibiteur est un arc orienté d'une place vers une transition (terminé par un cercle au lieu d'une flèche) qui est franchissable si la place correspondante n'est pas marquée (c'est un test à zéro).

- P<sub>1</sub> Porte d'entrée ouverte
- P<sub>2</sub> Nb de clients en attente ou en cour de service
- P<sub>3</sub> Porte d'entrée fermée
- T<sub>1</sub> Entrée de clients
- T<sub>2</sub> Sortie de client
- T<sub>3</sub> Ferme la porte d'entrée
- T<sub>4</sub> Ouvre la porte d'entrée



Un arc inhibiteur est un arc orienté d'une place vers une transition (terminé par un cercle au lieu d'une flèche) qui est franchissable si la place correspondante n'est pas marquée (c'est un test à zéro).

- P<sub>1</sub> Porte d'entrée ouverte
- P<sub>2</sub> Nb de clients en attente ou en cour de service
- P<sub>3</sub> Porte d'entrée fermée
- T<sub>1</sub> Entrée de clients
- T<sub>2</sub> Sortie de client
- T<sub>3</sub> Ferme la porte d'entrée
- T<sub>4</sub> Ouvre la porte d'entrée

