Algoritmica grafurilor

Tema 3

Mihăeş Andrei - Grupa A1

Moniry-Abyaneh Daniel - Grupa A1

5 Ianuarie 2016

Problema 1

a)

I.

Presupunem prin absurd că $|S| > |T|$.

Deorece graful bipartit G este fără noduri izolate $\Rightarrow$ din fiecare nod din S pleacă cel puţin o muchie întru-un nod din T.

Dacă din fiecare nod din S pleacă o singură muchie, întrucât $|S| > |T| \Rightarrow \exists v \in T$ astfel încât $d_G(v) > 1$ atunci ajungem la contradicţie, deoarece toate nodurile din S au $d_G(nod) = 1$.

Aşadar, dacă încercăm să reconstruim graful minimal, ar trebui să găsim nodurile din S la care să le mărim gradul adăugând muchii spre nodurile din T. Procedând astfel, ajugenm să mărim şi gradul acelor noduri, având ca efect dezechilibrarea altor noduri din S.

În cel mai bun caz nodurile dezechilibrate pot fi cele care erau dezechilibrate şi la pasul anterior, dar oricum la final va rămâne un singur nod dezechilibrat în graful bipartit G. Prin echilibrarea acestui ultim nod rămas în G, vom avea alte noduri dezechilibrate în S şi va trebui să reechilibrăm grafup bipartit G de la început.

Putem să adăuga muchii în acest fel până graful devine complet, caz în care:

- fiecare nod $v \in S$ are $d_G(v) = |T|$
- fiecare nod $w \in T$ are $d_G(w) = |S|$
  Aşadar $\forall v \in S$ şi $\forall w \in T$ avem $d_G(w) \geq d_G(v) \Rightarrow \frac{1}{d_G(w)} \leq \frac{1}{d_G(v)} \Rightarrow \sum_{(s,t)\in E} \leq \sum_{(s,t)\in E} \Rightarrow |S| \leq |T|$.
  Cum$|S| \geq |T|$ şi $|S| \leq |T| \Rightarrow |S| = |T|$.

II.

Este evident că fiecare componentă conexă a unui graf bipartit este tot un graf bipartit deoarece într-un graf bipartit nu există muchii între nodurile din aceaşi partiţie $\Rightarrow$ o componentă conexă va fi formată dintr-o submulţime de noduri din partiţia 2, respectiv orice componentă conexă la fel va fi graf bipartit. Pentru a demonstra că orice componentă conexă este şi regulată vom încerca pornind de la o componentă conexă regulată să construim una neregulată.

Dacă $|S|= |T| = k \in \mathbb{N}$ şi fiecare componentă conexă al grafului biparit G este un graf biparit regulat atunci toate nodurile au acelaşi grad.

Fie$d_G(D_1) = ... = d_G(D_k) = d_G(t_1) = ...d_G(t_k) = n.$

Pentru început vom adăuga cele 2 noduri s_{k+1} şi $t_{k+1} \Rightarrow |S| = |T| = k+1.$

Dacă $d_G(s_{k+1}) < n \Rightarrow d_G(s_{k+1}) < d_G(t_i)$, $\forall i \leq k$. Însă acest lucru este fals conform ipotezei:

$d_G(s) \geq d_G(t)$, $\forall (s,t) \in E$

Aşadar $d_G(s_{k+1}) = n.$

Deci alegând un nod oarecare$v \in S$ mărind astfel gradul $\Rightarrow$automat mărim gradul unui nod $w \in T$, întrucât $d_G(s) > d_G(t)$ $\forall s \in S$ şi $\forall t \in T \Rightarrow$

trebuie să mărim gradul tuturor vecinilor lui w mai puţin a nodului vecin v şi tot aşa recursiv o să mărim gradul tuturor nodurilor din componenta conexă.

$G = (S,T,E)$ cu $|S| = |T| = k+1$ are fiecare componentă conexă graf bipartit regulat.

Contradicţie

$\forall$ $G = (S,T,E)$ cu $|S| = |T| = k+1$ acesta are $|S| = |T|$ şi fiecare componentă conexă a lui G este un graf biparit regulat.

b)

Întrucât fiecare componentă conexă este un graf bipartit regulat, pentru a demonstra că G are cuplaj perfect trebuie să demonstram că fiecare graf bipartit regulat are cuplaj perfect.

Presupunem că avem un graf bipartit k-regulat, pentru a demonstra că G are cuplaj perfect vom utiliza teorema lui Hall:

T1: Fie G un graf bipartit cu partiţiile $(A, B) \Rightarrow \exists M - Cuplaj$ care acoperă A dacă şi numai dacă $|N(x)| \geq |X|, \forall X \subseteq A$, unde $N(x) = \{V \in V(G) \backslash X, \exists w \in X$ şi $(vw) \in E(G)\}$.

Fie $X \subseteq A$şi t numărul de muchii ce pleacă din nodurile din X, întrucât fiecare nod are gradul $k$$\Rightarrow$$t = k * |X|$. La fel şi fiecare nod din $N(X)$ are gradul $k \Rightarrow t' = k * |N(X)|$- muchii pleacă din nodurile din $N(X)$, întrucât această mulţime de muchii include şi muchiile ce pleacă din $X \Rightarrow t' \geq t \Rightarrow k*|N(X)| \geq k*|X| \Rightarrow |N(X)| \geq |X|, \forall X \in A \Rightarrow$Conform T1, $\exists M$-Cuplaj care acoperă Asau altfel spus orice cuplaj maxim acoperă A.La fel se demonstrează că $\forall$ cuplaj maxim acoperă $B \Rightarrow \forall$cuplaj maxim acoperă A şi $B \Rightarrow G$ - are cuplaj perfect.

Problema 2

c)

Complexitatea timpului de execuţie de rezolvare a problemei fluxului maxim într-o reţea cu O(n) vârfuri şi O(m) arce:

- Există o singură buclă care se execută $[log(m+1)n(n-1)] = O(logn)$.
- Pasul dominant in buclă este min-cut,
- Reţeaua are $n + 2 = O(n)$ vârfuri şi $2m + 2n = O(n + m)$ muchii.

Concluzie

Timpul de execuţie este $O(M, (n + m)logn)$.

Problema 3

a)

Algoritmul are la bază pargurgerea DFS.

Fie următoarea problemă a colorării. Să se coloreze vârfurile lui D în roşu şi verde astfel încât:

- 2 vârfuri roşii nu sunt adiacente
- Pentru fiecare vârf, există un vârf roşu astfel încât este un drum de lunigime $\leq$2 de la un vârf roşu la el.

Algoritm:

1. Fiecare nod cu gradul intern 0 va fi colorat cu roşu.
2. Pargurgere DFS
   Fie U nodul curent
   Dacă un vecin a fost colorat cu roşu
   - colorare U cu verde

   Altfel
   - colorare U cu roşu
3. Mulţimea vârfurilor colorate cu roşu va fi chiar S

Dacă un nod este colorat cu roşu $\Rightarrow$ vecinii săi sunt coloraţi cu verde. Cum un vârf este colorat cu roşu $\Rightarrow$ nu există vecin deja colorat cu roşu $\Rightarrow$ 2 noduri adiacente nu pot fi colorate cu roşu $\Rightarrow$ S mulţime stabilă.

De asemenea, întotdeauna va exista un drum din S către celelate vărfuri, de lungime maxim 2 deoarece:

- Vărfurile cu gradul intern 0 sunt cele colorate cu roşu
- Dacă un vârf este roşu $\Rightarrow$ vecinul este verde $\Rightarrow$
  - există întotdeauna arcul (u, v) unde u este colorat cu roşu, iar v cu verde
  - există arcele (u, v) şi (v, w) astfel încât:
    * u este colorat cu roşu
    * v, w sunt colorate cu verde $\Rightarrow$ drum de lungime 2

Complexitatea este $O(n+m)$ deorece preprocesarea se realizează $O(m)$, iar DFS în $O(n+m)$.

b)

Vom demonstra că 3SAT$\leq$INDEPENDENT SET.

Problema INDEPENDENT SET (NP - completă):

- INPUT: un graf G şi un număr k
- OUTPUT: "DA" $\Leftrightarrow$ există o mulţime stabilă de noduri neadiacente de cardinal $\geq$ k.

Problema 3-SAT :

- INPUT: O formulă cu un număr finit de clauze, fiecare clauză cu exact 3 termeni în FNC.
- OUTPUT: "DA" $\Leftrightarrow$ există o asignare a termenilor astfel încât F să fie satisfiabilă.

Fie o instanţă 3-SAT: $F = (a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee c \vee d)$.

- Pentru fiecare clauză vom construi un "triunghi" astfel încât există arce între $\forall$ 2 vârfuri.
- Astfel vom asigura că atunci când va fi construită mulţimea S, un singur vârf din clauză va fi adăugat $\Rightarrow$ nu vor fi vârfuri adiacente.
- Adăugăm arce între oricare literal şi negaţia sa.

Pentru un vârf se va construi mulţimea S de cardinal k. În acest caz, avem vârful x $\Rightarrow$ $S = \{a, \neg c\}$ şi |S|=2. Deci este respinsă proprietatea de drum deoarece avem arc de la vârfurile din S spre cele din V $\setminus$ S.

Concluzie:

Având proprietatea de mulţime stabilă şi de asemenea cea a drumului de lungime maxim 2. Mulţimea S obţinută va fi "2-hops" stabilă.

Deoarece construirea grafului se realizează în timp polinomial $\Rightarrow$ 3-SAT se reduce polinomial la problema testării.