Setul de probleme 1

soluţiile se primesc

marti 10 noiembrie între orele 10 şi 12, la cabinetul C-402

1 noiembrie 2015

Problema 1. Fie $D = (V, E)$ un digraf cu proprietatea că în orice vârf intră cel puţin un arc şi din orice vârf pleacă cel puţin un arc. Pentru $v \in V$ notăm $v^+ = \{w \in V \mid (v, w) \in E\}$ şi $v^- = \{w \in V \mid (w, v) \in E\}$. Pentru $S \subseteq V$, definim $S^+ = \cup_{v \in S} v^+$ şi $S^- = \cup_{v \in S} v^-$.

Asociem digrafului D două grafuri $G_{cp} = (V, E_{cp})$ şi $G_{ce} = (V, E_{ce})$, unde pentru orice două vârfui distincte $v, w \in V$ avem $vw \in E_{cp}$ dacă şi numai dacă $v^+ \cap w^+ \neq \emptyset$ (*cp* vine de la "common prey")şi $vw \in E_{ce}$ dacă şi numai dacă $v^- \cap w^- \neq \emptyset$ (*ce* vine de la "common enemy"). Fie $B_1, \ldots, B_p$ mulţimile de vârfuri ale componentelor conexe ale grafului G_{cp} şi $A_1, \ldots, A_k$ mulţimile de vârfuri ale componentelor conexe ale grafului G_{ce}.
a) Demonstraţi că $(A_1^-, \ldots, A_k^-)$ şi $(B_1^+, \ldots, B_p^+)$ formează partiţii ale mulţimii V.
b) Demonstraţi că cele două grafuri G_{cp} şi G_{ce} au acelaşi număr de componente conexe (adică $p = k$). **(2+2 = 4 puncte)**

Problema 2. Fie $D = (V, E)$ un digraf. Numim **mulţime pară de vârfuri** în $D = (V, E)$, o multime nevidă $S \subseteq V$ cu proprietatea că

$$|v^+ \cap S| \equiv 0 \pmod 2, \forall v \in V.$$

a) Demonstraţi că dacă digraful $D = (V, E)$ are proprietatea că în orice vârf intră exact un arc şi din orice vârf iese exact un arc, atunci în D nu există o multime pară.
b) Fie două vârfuri distincte $u, w \in V$. Notăm cu $D_{u \circ w}$ digraful obţinut din D prin ştergerea tuturor arcelor de la vârful u la vârfurile din $u^+ \cap w^+$ şi adăugarea tuturor arcelor de la vârful u la vârfurile din $w^+ - u^+$. Demonstraţi că există o mulţime pară de vârfuri în D dacă şi numai dacă există o mulţime pară de vârfuri în $D_{u \circ w}$.
c) Arătaţi că problema de decizie *"Dat D, există o mulţime pară de vârfuri în D?"* face parte din clasa **P**.
d) Fie A matricea de adiacenţă a lui D cu elemente din corpul $GF(2)$ (elementele acestui corp sunt 0 şi 1, operaţiile de adunare şi înmulţire sunt **modulo** 2). Deci elementul $A_{uv} = 1$ dacă $uv \in E$ şi $A_{uv} = 0$, dacă $uv \notin E$. E posibil ca în digraf să avem bucle, deci e posibil să avem $A_{uu} = 1$. Să observăm că pentru orice matrice

pătrată cu elemente 0 şi 1, există un digraf cu matricea de adiacenţă acea matrice. Arătaţi că o astfel de matrice are determinantul nul (operatiile se fac în GF(2)) dacă şi numai dacă digraful asociat are o mulţime pară de vârfuri.

(**1+1+2+2= 6 puncte**)

Problema 3. Dacă $G = (V, E)$ este un graf, o mulţime $T \subseteq V$ de vârfuri se numeşte **vertex cover** dacă orice muchie $e \in E$ are cel puţin o extremitate în T. Problema de decizie

MVC

Input: $G = (V, E)$ graf cu n vârfuri; $k \in \mathbf{N}, k \leq n$.

Output: Yes dacă $\exists T$ vertex cover cu $|T| \leq k$, No altfel.

este NP-completă.

a) Demonstraţi corectitudinea următorului algoritm pentru rezolvarea problemei **MVC**

R-COV(G, k)
if $E(G) = \emptyset$ **then return ("Yes",** $\emptyset$**)**;
if $|E(G)| > k(|V(G)| - 1)$ **then return ("No")**;
Let $\{u, v\} \in E(G)$;
if *R-COV*$(G - u, k - 1)$ return ("Yes",T) **then return ("Yes",** $T \cup \{u\}$**)**
  else if *R-COV*$(G - v, k - 1)$ return ("Yes",T) **then return ("Yes",** $T \cup \{v\}$**)**
    else return ("No")

b) Determinaţi timpul de lucru $T(n, k)$ al acestui algoritm şi demonstraţi că dacă parametrul k este o constantă, atunci algoritmul are timp de lucru polinomial.

(**2+2 puncte**)

Precizări

1. Este încurajată asocierea în echipe formate din 2 studenţi care să realizeze în comun tema.
2. Depistarea unor soluţii copiate între echipe diferite conduce la anularea punctajelor tuturor acestor echipe.
3. Nu e nevoie să se rescrie enunţul problemelor. Nu uitaţi să treceţi numele şi grupele din care fac parte membrii echipei la începutul lucrarii.
4. Este încurajată redactarea latex a soluţiilor.
5. Nu se primesc soluţii prin e-mail.