Algoritmica grafurilor

Tema 1

Mihăeş Andrei - Grupa A1

Moniry-Abyaneh Daniel - Grupa A1

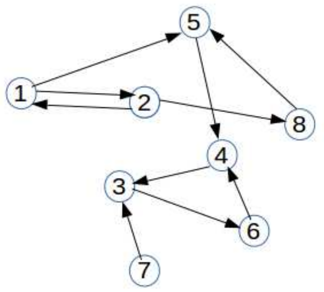
10 Noiembrie 2015

Problema 1

a) Fie A o mulţime nevidă. O colecţie de submulţimi nevide S=\{S_1,S_2,...,S_K\} constituie o partiţie a mulţimii A dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

- $S_i \cap S_j = \emptyset$ clasele partiţiei sunt disjuncte
- S_1U S_2 U ... U S_k = A - reuniunea claselor este mulţimea A

Fie următorul digraf D=(V, E) :



Pentru fiecare vârf v ∈ V, vom calcula:

- v^+, unde $v^+ = \{w \in V \mid (v, w) \in E\}$
- v^-, unde $v^- = \{w \in V \mid (w, v) \in E\}$

$1^+=\{2,5\}$ $1^-=\{2\}$

$2^+=\{1,8\}$ $2^-=\{1\}$

$3^+=\{6\}$ $3^-=\{4,7\}$

$4^+=\{3\}$ $4^-=\{5,6\}$

$5^+=\{4\}$ $5^-=\{1,8\}$

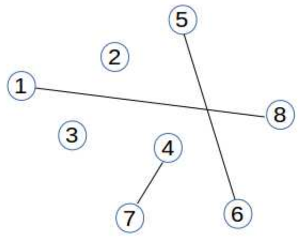
$6^+=\{4,7\}$ $6^-=\{3\}$

$7^+=\{3\}$ $7^-=\{6\}$

$8^+=\{5\}$ $8^-=\{2\}$

Asociem digrafului D cele două grafuri:

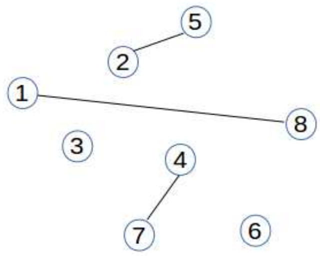
G_{cp}= (V, E_{cp})



B_1 = {1, 8} ⇒ $B_1{}^+$ = {2, 5}
B_2 = {4, 7} ⇒ $B_2{}^+$ = {3}
B_3 = {5, 6} ⇒ $B_3{}^+$ = {4, 7}
B_4 = {2} ⇒ $B_4{}^+$ = {1, 8}
B_5 = {3} ⇒ $B_5{}^+$= {6}

Similar pentru:

G_{ce}= (V, E_{ce})



A_1 = {1, 8} ⇒ $A_1{}^+$ = {2}
A_2 = {4, 7} ⇒ $A_2{}^+$ = {5, 6}
A_3 = {2, 5} ⇒ $A_3{}^+$ = {1, 8}
A_4 = {3} ⇒ $A_4{}^+$ = {4, 7}
A_5 = {6} ⇒ $A_5{}^+$ = {3}

Fie B_1, ... , B_p mulţimele de vârfuri ale componentelor conexe ale G_{cp}. Considerăm vârfurile x ∈ B_i şi y ∈ B_j(i ≠ j), unde x şi y sunt vârfuri în digraful D. Presupunem că există un nod z ∈ V, cu proprietatea că z ∈$B_i{}^+$şi z ∈$B_j{}^+$. Prin urmare avem muchiile (x, z) şi (y, z) ⇒(x, y) ∈ E_{cp} ⇒ muchia (x,y) face parte din aceeaşi componentă conexă ⇒ i = j.

Contrazice ipoteza, prin urmare putem trage concluzia că B_i cu i ∈ [1, p] sunt mulţimi distincte.

Cum din fiecare vârf al grafului va pleca cel puţin un arc şi va intra cel puţin un arc ⇒ $\cup B_{i\in[1,n]}$ va conţine toate vârfurile ⇒ $\cup\ B_{i\in[1,n]}$ = V.

Similar pentru A_1, ... , A_k.

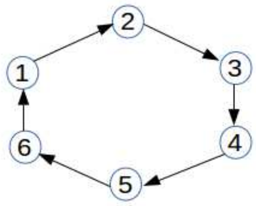
b) Din subpunctul anterior, am ajuns la concluzia că G_{cp} şi G_{ce} au acelaşi număr de componente conexe.

Muchia (v, w) $\in E_{cp} \Leftrightarrow$ există un vârf q $\in$ V astfel încât muchia (v, q) $\in$ E şi (w, q) $\in$ E.

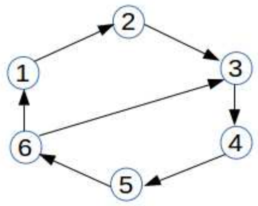
Muchia (v, w) $\in E_{ce} \Leftrightarrow$ există un vârf p $\in$ V astfel încât muchia (p, v) $\in$ E şi (p, w) Pr E.

Având un digraf simplu D, cu un număr minim de muchii pentru a îndeplini condiţia că din fiecare vârf v $\in$ V să intre şi să iasă cel puţin un arc. ($E_{cp} = \emptyset$, $E_{ce} = \emptyset$)

Fie următorul exemplu:



Atunci G_{cp} = G_{ce}= { {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6} } - *componenxte conexe.*
Dacă adăugăm arcul (6, 3), atunci graful va arată în felul următor:



În acest caz avem:

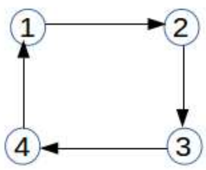
- muchia (2, 6) $\in E_{cp}$ şi muchia (1, 3) $\in E_{ce}$
- G_{cp}: { {2, 6}, {1}, {3}, {4}, {5} }
- G_{ce}: { {1, 3}, {2}, {4}, {5}, {6} }

Introducerea oricărui arc (x, y) cu x, y $\in$ V, duce la unirea componentelor conexe în G_{cp} şi G_{ce}. În G_{cp} se va uni componenta conexă care îl conţine pe x cu componenta conexă care îl conţine pe w, unde (x, w) $\in$ E.

Se poate observa astfel că G_{cp} şi G_{ce} vor avea acelaşi număr de componente conexe.

Problema 2

a) Fie digraful D = (V, E). Numim mulţime pară de vârfuri o mulţime nevida S $\subseteq$ V astfel încât | $v^+ \cap$ S | $\equiv$ 0 (mod 2), $\forall$ v $\in$ V.



$V^+ = \cup_{v \in V}\ v^+ = \{\ 1^+ = \{\ 2\ \}, 2^+ = \{\ 3\ \}, 3^+ = \{\ 4\ \}, 4^+ = \{\ 1\ \}\ \}$

Fie digraful D = (V, E) cu proprietatea că în orice vârf intră exact un arc şi din orice vârf iese exact un arc $\Rightarrow$ D este un graf circular (sau un digraf format din mai multe componente conexe care la rândul lor sunt grafuri circulare).

În urma acestei proprietăţi, putem afirma că $|v^+| = 1$, $\forall$ v $\in$ V. Aşadar, pentru ca | $v^+ \cap$ S | $\equiv$ 0 (mod 2), este nevoie ca v^+să nu aparţină mulţimii S. Acest lucru conduce la faptul că mulţimea S nu este inclusă în mulţimea V, ceea ce contrazice ipoteza.

Fie S_k o mulţime nevidă ($S_k \subseteq$ V), de forma:
$S_k = \{\ v_1, v_2, \ldots\ , v_k\}$, unde 1 $\leq$ k $\leq$ | V |.

Prin urmare, structura mulţimii S_k denotă următorul lucru : $\forall$ $S_k \subseteq$ V şi $\forall$ v^+(v $\in$ V), există cel puţin un vârf v $\in$ V pentru care | $v^+ \cap S_k$ | $\equiv$ 1 (mod 2), deoarece în S_k se află sigur cel puţin un element din V, iar cum digraful este unul circular, acel vărf v se regăseşte în w^+, unde w $\in$ V.

Concluzie, nu există în digraful D o mulţime pară de vârfuri.

b) Presupunem că digraful $D_{x\circ y}$ admite "mulţime pară de vârfuri" S $\subseteq$ V.
Pentru simplificare, vom nota $D_{x\circ y}$ cu D' (x $\in$ V $\mapsto$ x' $\in$ V').
Aşadar, există o mulţime pară de vârfuri $\Rightarrow\forall$ $v'^{+}\in$ V avem relaţia
$|v'^{+}\cap$ S$| = 0$ (mod 2).

Avem 2 cazuri:

1. $|x'^{+}\cap$ S$| = 0$, $\forall$ x' $\in$ V' $\Rightarrow$ $x^{+}\cap$ S $= y^{+}\cap$ S

   Pentru ca relaţia $|x'^{+}\cap$ S$| = 0$ să fie adevărată atunci $x^{+}\cap$ S $= y^{+}\cap$ S $= \oslash$, iar în caz contrar $x^{+}\cap$ S $= y^{+}\cap$ S $\neq \oslash$ (datorită modului cum e creată mulţimea x'^{+} din x^{+} şi y^{+}).

   Din $x^{+}\cap$ S $= y^{+}\cap$ S $\Rightarrow$ $|x^{+}\cap$ S$| = |y^{+}\cap$ S$|$ (relaţia <1>).

   Dary^{+} nu se modifcă in D', atunci $|y^{+}\cap$ S$| = |y'^{+}\cap$ S$|$ (relaţia <2>).

   Din <1> şi <2> $\Rightarrow$ $|x^{+}\cap$ S$| = |y^{+}\cap$ S$| = 0$ (mod 2) deoarece $|y'^{+}\cap$ S$| = 0$ (mod 2).

   Cum toate vârfurile din V', mai puţin x sunt identice cu cele din V, atunci restul nodurilor satisfac proprietatea $|v^{+}\cap$ S$| = 0$ (mod 2) cu $\forall$ v $\in$ V$\setminus\{$x$\}$ şi $|x^{+}\cap$ S$| = 0$ (mod 2), înseamnă că dacă $D_{x\circ y}$ admite S, atunci şi D admite S.

2. $|x'^{+}\cap$ S$|$ = 2k, k $\geq$1, $\forall$ x' $\in$ V' atunci ne putem afla în una din situaţiile urmatoare:

   (a) $|x^{+}\cap$ S$| = 0$ şi $|y^{+}\cap$ S$|$ = 2k, k $\geq$1

   (b) $|x^{+}\cap$ S$|$ = 2k şi $|y^{+}\cap$ S$| = 0$, k $\geq$1

   (c) $|x^{+}\cap$ S$|$ = 2k şi $|y^{+}\cap$ S$|$ = 2l, k $\geq$1, l $\geq$1

   Dacă (a) atunci $|x'^{+}\cap$ S$| = |y^{+}\cap$ S$| = 0$ (mod 2) (datorită modului cum e creată mulţimea x'^{+} din x^{+} şi y^{+}).

   Dacă (b) atunci $|x'^{+}\cap$ S$| = |x^{+}\cap$ S$| = 0$ (mod 2) (datorită modului cum e creată mulţimea x'^{+} din x^{+} şi y^{+}).

   Dacă (c) atunci $|x'^{+}\cap$ S$|$ = $|$ ($x^{+}\cap$ S) $\triangle$ ($y^{+}\cap$ S) $|$ = 0 (mod 2) (datorită modului cum e creată mulţimea x'^{+} din x^{+} şi y^{+}şi pentru că se păstrează proprietatea în urma operaţiei de diferenţă simetrică).

   Cum toate vârfurile din V'(mai puţin x) sunt identice cu cele din V(mai puţin x) şi restul vârfurilor satisfac proprietatea $|v^{+}\cap$ S$| = 0$ (mod 2) cu $\forall$ v $\in$ V$\setminus\{$x$\}$ în toate cazurile (a,b,c) $\Rightarrow$ $|x^{+}\cap$ S$| = 0$ (mod 2) , înseamnă că dacă $D_{x\circ y}$ admite S, atunci şi D admite S.

c) Clasa P reprezintă clasa problemelor care pot fi rezolvate de algoritmi determinişti în timp polinomial. Pentru a demonstra că problema noastră aparţine clasei P va trebui să o reducem la o problemă care face parte din această clasă. Problema noastră se reduce la problema celei mai mari secvenţe comune (LCS) care aparţine clasei P, deci şi problema noastră apartine P.

Problema 3

a)

Linia 1: Algoritmul R-COV(G,k) returnează YES, dacă digraful G nu are arce, atunci T ar fi format din 0 vărfuri, în acest caz.

Linia 2: Considerăm o mulţime de vârfuri cu cardinalul k. Atunci fiecare nod poate fi conectat la maxim n-1 vârfuri. Deci, un set de k vârfuri poate acoperi cel mult k(n-1) arce. În concluzie, răspunsul este NO dacă graful G are mai mult de k(n-1) arce.

Linia 3: Considerăm muchia (u,v) în digraful G şi mulţimea T formată din k vârfuri ca fiind vertex-cover pentru digraful G. Prin urmare, cel puţin unul dintre vârfurile u si v se află în mulţimea T. Dacă ştergem fie vârful u, fie vârful v din digraful G, atunci ştergem toate arcele din care u, respectiv v fac parte în digraful G, formând astfel noul graf G'. Aşadar, este posibilă ştergerea vârfului u, fie a vârfului v din mulţimea T, iar în urma acestei operaţii, multimea T de cardinal k-1 este vertex-cover pentru G'. Prin urmare, dacă oricare dintre R-COV(G-u, k-1) sau R-COV(G-v,k-1) returnează YES, atunci şi R-COV(G,k) returneaza YES.

Dacă R-COV(G-u, k-1) şi R-COV(G-v, k-1), ambele returnează NO, atunci vârful u, cât şi vârful v nu se regăsesc în mulţimea T => arcul (u,v) nu este acoperit de mulţimea T. Deci T nu este vertex-cover pentru digraful G, răspunsul final fiind NO.

b)

Să considerăm funcţia R-COV, când parametrul k nu este un input, ci o constantă.

Prin propoziţia *Let {u, v}* $\in$ *E(G);* înţelegem o iteraţie peste toate muchiile digrafului G. Numărul maxim de muchii = $\binom{n}{2} \approx \mathrm{O}(n^2)$. La fiecare iteraţie, sunt cel mult 2 apeluri recursive (pentru vârful u, respectiv vârful v). Aceste apeluri recursive formează un arbore binar de înălţime k-1(cu rădăcina pe nivelul 0). Numărul maxim de noduri(apeluri recursive) în arbore este 2k $-$ 1.

În concluzie, complexitatea algoritmului este $\mathrm{O}(2^k n^2)$ sau $\mathrm{O}(n^2)$, dacă k este o constantă şi este aproximativ egală cu n.