УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Андрија Д. Урошевић

ХОМОТОПНА ТЕОРИЈА ТИПОВА

мастер рад

Београд, 2024.

Ментор:

др Сана Стојановић-Ђурђевић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Филип Марић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Лаза Лазић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: 29. februar 2024.

Мами, тати и деди

Наслов мастер рада: Хомотопна теорија типова

Резиме: Homotopy Type Theory/Univalent Foundations (HoTT/UF) is a revolutionary approach to the foundation of mathematics. Although it's revolutionary, HoTT/UF is very slowly gaining popularity among a broader circle of mathematicians and computer scientists. One of the reasons is that during formalization one requires both theoretical knowledge and proof-assistance skills. Acquiring those prerequisites is partially based on one's background. Mathematicians lack functional programming skills, on the other hand, computer scientists lack theoretical knowledge. A few materials tackle both areas, but they are lacking interactability. This thesis proposes a material that formalizes one theoretical area of HoTT/UF in Agda and is doing so while interacting with the user input.

Кључне речи: хомотопна теорија типова, интерактивно доказивање, агда

Садржај

Глава 1

Увод

- Хомотопна теорија типова = интуиционистичка теорија типова + високи индуктивни типови + аксиома унивалентности.
- Пер Мартин-Луф теорија типова се заснива на интиуционистичком програму који је настао по Брауверу.
- Математичко резтоновање је људска активност и математика је језик у коме се математичке идеје преносе.
- Фундаментална људска активност.
- Конструктивна теорија је *доказно релеваншна*, тј. доказ је математички објекат као и сваки други.
- Тврђења можемо интерпретирати као типове, те ће доказ представљати *проверу шийа*, тј. конструисање терма одређеног типа. (Јако битна уврнута идеја)
- Запажање: Хомотопна тероја и теорија типова представљају исту ствар.
- Хомотопна теорија се бави непрекидним пресликавањима која су *хомоШойна* између себе, тј. могу се "непрекидно деформисати" једна у друге.
- Тројство израчуњивости: Програмерска интерпретација, хомотопна интерпретација и логичка интерпретација.
- Типско расуђивање $t : T$ читамо као t је терм типа или терм t настањује T. У програмерској интерпретацији тип представља тип, док терм

некого типа представља израз тог типа. У хомотопној интерпретацији тип представља простор, док терм неког типа представља тачку у том простору.

- Пример јединичног типа $\mathbb{1}$: јединични (`unit` у програмерском смислу), јединствени (*The* у логичком смислу), и контрактибилни (у хомотопном смислу) тип.
- Интенционални и екстенционални типови? (нешто чуно, проучити)
- Раселов парадокс као мотивација за теорију типова.

1.1 Интуиционистичка теорија типова

Интуиционистичка теорија типова или Пер Мартин-Луф теорија типова је математичка теорија конструкција. Тип представља врсту конструкције. Елемент, терм или тачка представља резултат конструкције неког типа. Прецизније, елемент a типа A записујемо као $a : A$, и кажемо да елемент a настањује тип A. Битно је напоменути да терм не може да "живи самостално" тј. терм увек мора да настањује неки тип.

Конструкција типова се састоји из низа дедуктивних *правила закључивања.* Правило закључивања записујемо као

$$\frac{\mathcal{H}_1 \qquad \mathcal{H}_2 \qquad \dots \qquad \mathcal{H}_n}{\mathcal{C}}$$

где расуђивања $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_n$ називамо *премисе* или *хипотезе*, а расуђивање $\mathcal{C}$ називамо *закључак.*

Дефиниција 1.1.1. Свако *расуђивање* је облика $\Gamma \vdash \mathcal{J}$, где је Γ *контекст* и $\mathcal{J}$ *теза* расуђивања. Теза може имати четири врсте расуђивања и то су:

(i) A је *(добро-формиран) тип* у контексту Γ.

$$\Gamma \vdash A \text{ type}$$

(ii) A и B су *расуђивачки једнаки типови* у контексту Γ.

$$\Gamma \vdash A \equiv B \text{ type}$$

(iii) a је *елеменӣ* типа A у контексту Γ.

$$\Gamma \vdash a : A$$

(iv) a и b су *расуђивачки једнаки елеменӣи* типа A у контексту Γ.

$$\Gamma \vdash a \equiv_A b : A$$

користећи правила закључивања теорије типова.

Контекст је коначна листа *декларисаних ӣромењивих* облика

$$x_1 : A_1, x_2 : A_2(x_1), \ldots, x_n : A_n(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

под условом да за свако $1 \leq k \leq n$ можемо да изведемо расуђивање

$$x_1 : A_1, x_2 : A_2(x_1), \ldots, x_{k-1} : A_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-2}) \vdash A_k(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}),$$

применом правила закључивања.

Правила закључивања

Пример неких правила закључивања:

$$\frac{\Gamma \vdash A \text{ type}}{\Gamma \vdash A \equiv A \text{ type}} \quad \frac{\Gamma \vdash A \equiv A' \text{ type}}{\Gamma \vdash A' \equiv A \text{ type}} \quad \frac{\Gamma \vdash A \equiv A' \text{ type} \qquad \Gamma \vdash A' \equiv A'' \text{ type}}{\Gamma \vdash A \equiv A'' \text{ type}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash a \equiv_A a : A} \quad \frac{\Gamma \vdash a \equiv_A a' : A}{\Gamma \vdash a' \equiv_A a : A} \quad \frac{\Gamma \vdash a \equiv_A a' : A \qquad \Gamma \vdash a' \equiv_A a'' : A}{\Gamma \vdash a \equiv_A a'' : A}$$

Исцрпна листа правила закључивања у интуиционистичкој теорији типова се може наћи у [**rijke2022intro**].

Зависни типови

Из дефиниције контекста можемо видети да неки типови зависе од других термова. На пример, $A_2(x_1)$ зависи од $x_1 : A_1$, тј. за разне термове $x_1 : A_1$ имамо разне типове $A_2(x_1)$. Ову идеју можемо уопштити помоћу следећих дефиниција:

Дефиниција 1.1.2. Нека је тип A у контексту Γ. *Фамилија* типова над A у контексту Γ је тип $B(x)$ у контексту $\Gamma, x : A$, тј.

$$\Gamma, x : A \vdash B(x) \text{ type}.$$

Кажемо да је B фамилија типова над A у контексту Γ. Алтернативно, кажемо да је $B(x)$ тип индексиран са $x : A$ у контексту Γ.

Дефиниција 1.1.3. Нека је B фамилија типова над A у контексут Γ. *Секција* фамилије B над типом A у контексту Γ је елемент типа $B(x)$ у контексту $\Gamma, x : A$, тј.

$$\Gamma, x : A \vdash b(x) : B(x).$$

Кажемо да је b секција фамилије B над A у контексту Γ. Алтернативно, кажемода да је $b(x)$ елемент типа $B(x)$ индексиран са $x : A$ у контексту $\Gamma, x : A$.

Дефиниција 1.1.4. Нека је B фамилија типова над A у контексту Γ, и нека је $a : A$. Кажемо да је $B[a/x]$ *влакно* од B за параметар a, где $B[a/x]$ представља замену свих појављивања x у B са a. Нит од B за параметар a краће записујемо као $B(a)$.

Дефиниција 1.1.5. Нека је b секција фамилије типова B над A у контексту Γ. Кажемо да је $b[a/x]$ *вредносӣ* од b за параметар a, где $b[a/x]$ представља замену свих појављивања x у b са a. Такође, вредност од b за параметар a краће записујемо као $b(a)$.

Типови зависних функција

У математици заснованој на теорији скупова функција $f : A \to B$ дефинисана је над одређеним доменом A и кодоменом B. У теорији типова то не мора да буде случај, тј. кодомен може зависити од елемента над којим се функција примењује. Прецизније, посматрајмо секцију b фамилије типова B над A у контексту Γ. Један начин је да b посматрамо као функцију $x \mapsto b(x)$. Тада $b(x)$ настањује тип $B(x)$ који зависи од $x : A$. Због тога за разне елементе $x : A$ домена имамо разне кодомене, те има смисла говорити о типу *зависних функција* $\prod_{(x:A)} B(x)$.

Спецификација типа зависних функција $\prod_{(x:A)} B(x)$ је дата следећим правилима закључивања:

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B(x) \text{ type}}{\Gamma \vdash \prod_{(x:A)} B(x) \text{ type}}\,[\textstyle\prod\text{-form}] \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash b(x) : B(x)}{\Gamma \vdash \lambda x.b(x) : \prod_{(x:A)} B(x)}\,[\textstyle\prod\text{-intro}] \qquad \frac{\Gamma \vdash f : \prod_{(x:A)} B(x)}{\Gamma, x : A \vdash f(x) : B(x)}\,[\textstyle\prod\text{-elim}]$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b(x) : B(x)}{\Gamma \vdash (\lambda y.b(y))(x) \equiv b(x) : B(x)}\,[\textstyle\prod\text{-comp}_1] \qquad \frac{\Gamma \vdash f : \prod_{(x:A)} B(x)}{\Gamma \vdash \lambda x.f(x) \equiv f : \prod_{(x:A)} B(x)}\,[\textstyle\prod\text{-comp}_2]$$

Специјала случај типа зависних функција је тип (уобичајених) *функција* $A \to B$. Уколико су типови A и B у контексту Γ, тј. тип B не зависи од елемената типа A, тада $\prod_{(x:A)} B$ представља тип (уобичајених) функција.

Дефиниција 1.1.6. Тип (уобичајених) *функција* $A \to B$ дефинишемо као:

$$A \to B := \prod_{(x:A)} B. \tag{1.1}$$

Ако је $f : A \to B$ функција, тада је A *домен*, а B *кодомен* функције f.

Дефиниција 1.1.7. За сваки тип A дефинишемо *функцију идентитета* $\mathsf{id}_A : A \to A$ као $\mathsf{id}_A := \lambda x.x$.

Дефиниција 1.1.8. За свака три типа A, B, и C дефинишемо *композицију* $\mathsf{comp} : (B \to C) \to (A \to B) \to A \to C$ као $\mathsf{comp} := \lambda g.\lambda f.\lambda x.g(f(x))$.

Може се показати да је композиција асоцијативна, као и да је функција идентитета неутрал за композицију функција. Због сагласности типова имамо леви неутрал id_B и десни неутрал id_A.

Индуктивни типови

Поред типова зависних функција постоји и класа *индуктивних типова*. Сваки индуктивни тип се дефинише помоћу следеће спецификације:

(i) *Конструисања* типа описује како се формира тип, и на који начин се уводе нови канонични елементи.

(ii) *Индуктивни принцип* описује податке који су потреби за конструкцију секције произвољне фамилије типова.

(iii) Правила *израчунавања* захтевају да се индуктивно дефинисана секција слаже по конструкцији са подацима који је дефинишу.

Сада ће бити дате спецификације за неке уобичајене индуктивне типове.

Тип природних бројева

$$[\mathbb{N}\text{-form}]\;\frac{}{\vdash \mathbb{N}\ \mathrm{type}} \qquad [\mathbb{N}\text{-intro}_{0_{\mathbb{N}}}]\;\frac{}{\vdash \mathsf{0}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N}} \qquad [\mathbb{N}\text{-intro}_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}}]\;\frac{}{\vdash \mathsf{succ}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}}$$

$$[\mathbb{N}\text{-ind}]\;\frac{\Gamma, n : \mathbb{N} \vdash P(n)\ \mathrm{type} \quad \Gamma \vdash p_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}} : P(\mathsf{0}_{\mathbb{N}}) \quad \Gamma \vdash p_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}} : \prod_{(n:\mathbb{N})} P(n) \to P(\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(n))}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\mathbb{N}}(p_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}}, p_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}}) : \prod_{(n:\mathbb{N})} P(n)}$$

$$[\mathbb{N}\text{-comp}_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}}]\;\frac{\Gamma, n : \mathbb{N} \vdash P(n)\ \mathrm{type} \quad \Gamma \vdash p_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}} : P(\mathsf{0}_{\mathbb{N}}) \quad \Gamma \vdash p_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}} : \prod_{(n:\mathbb{N})} P(n) \to P(\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(n))}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\mathbb{N}}(p_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}}, p_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}}, \mathsf{0}_{\mathbb{N}}) \equiv p_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}} : P(\mathsf{0}_{\mathbb{N}})}$$

$$[\mathbb{N}\text{-comp}_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}}]\;\frac{\Gamma, n : \mathbb{N} \vdash P(n)\ \mathrm{type} \quad \Gamma \vdash p_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}} : P(\mathsf{0}_{\mathbb{N}}) \quad \Gamma \vdash p_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}} : \prod_{(n:\mathbb{N})} P(n) \to P(\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(n))}{\Gamma,\ n : \mathbb{N} \vdash \mathsf{ind}_{\mathbb{N}}(p_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}}, p_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}}, \mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(n)) \equiv p_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}}(n, \mathsf{ind}_{\mathbb{N}}(p_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}}, p_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}}, n)) : P(\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(n))}$$

Празни тип

$$[\mathbb{0}\text{-form}]\;\frac{}{\vdash \mathbb{0}\ \mathrm{type}} \qquad [\mathbb{0}\text{-ind}]\;\frac{}{\vdash \mathbb{0}\ \mathrm{type}} \qquad [\mathbb{1}\text{-ind}]\;\frac{\Gamma, x : \mathbb{0} \vdash P(x)\ \mathrm{type}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\mathbb{0}} : \prod_{(x:\mathbb{0})} P(x)}$$

Јединични тип

$$[\mathbb{1}\text{-form}]\;\frac{}{\vdash \mathbb{1}\ \mathrm{type}} \qquad [\mathbb{1}\text{-intro}_{\star}]\;\frac{}{\vdash \star : \mathbb{1}}$$

$$[\mathbb{1}\text{-ind}]\;\frac{\Gamma, x : \mathbb{1} \vdash P(x)\ \mathrm{type} \quad \Gamma \vdash p_{\star} : P(\star)}{\Gamma\ x : \mathbb{1} \vdash \mathsf{ind}_{\mathbb{1}}(p_{\star}) : \prod_{(x:\mathbb{1})} P(x)} \qquad [\mathbb{1}\text{-comp}]\;\frac{\Gamma, x : \mathbb{1} \vdash P(x)\ \mathrm{type} \quad \Gamma \vdash p_{\star} : P(\star)}{\Gamma\ x : \mathbb{1} \vdash \mathsf{ind}_{\mathbb{1}}(p_{\star}, \star) \equiv p_{\star} : P(x)}$$

Типови копроизвода

$$\frac{\Gamma \vdash A \text{ type}, B \text{ type}}{\Gamma \vdash A + B \text{ type}}\,[+\text{-form}] \qquad \frac{\Gamma \vdash x : A}{\Gamma \vdash \mathsf{inl}(x) : A + B}\,[+\text{-intro}_{\mathsf{inl}}] \qquad \frac{\Gamma \vdash y : B}{\Gamma \vdash \mathsf{inr}(y) : A + B}\,[+\text{-intro}_{\mathsf{inr}}]$$

$$[+\text{-ind}]\ \frac{\begin{array}{l}\Gamma, z : A + B \vdash P(z) \text{ type}\\ \Gamma \vdash p_{\mathsf{inl}} : \prod_{(x:A)} P(\mathsf{inl}(x))\\ \Gamma \vdash p_{\mathsf{inr}} : \prod_{(y:B)} P(\mathsf{inr}(y))\end{array}}{\Gamma\ z : A + B \vdash \mathsf{ind}_{+}(p_{\mathsf{inl}}, p_{\mathsf{inr}}) : \prod_{(z:A+B)} P(z)}$$

$$[+\text{-comp}]\ \frac{\begin{array}{l}\Gamma, z : A + B \vdash P(z) \text{ type}\\ \Gamma \vdash p_{\mathsf{inl}} : \prod_{(x:A)} P(\mathsf{inl}(x))\\ \Gamma \vdash p_{\mathsf{inr}} : \prod_{(y:B)} P(\mathsf{inr}(y))\end{array}}{\begin{array}{l}\Gamma\ z : A + B \vdash \mathsf{ind}_{+}(p_{\mathsf{inl}}, p_{\mathsf{inr}}, \mathsf{inl}(x)) = p_{\mathsf{inl}}(x) : P(z)\\ \Gamma\ z : A + B \vdash \mathsf{ind}_{+}(p_{\mathsf{inl}}, p_{\mathsf{inr}}, \mathsf{inr}(y)) = p_{\mathsf{inr}}(y) : P(z)\end{array}}$$

Специјални случај типа копроизвода је Буловски тип $\mathbb{2} := \mathbb{1}+\mathbb{1}$, чије једине елементе дефинишемо као $\mathsf{true} := \mathsf{inl}(\star)$, $\mathsf{false} := \mathsf{inr}(\star)$.

Типови зависних парова

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B(x) \text{ type}}{\Gamma \vdash \sum_{(x:A)} B(x) \text{ type}}\,[\textstyle\sum\text{-form}] \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash y(x) : B(x)}{\Gamma \vdash (x, y(x)) : \sum_{(x:A)} B(x)}\,[\textstyle\sum\text{-intro}]$$

$$[\textstyle\sum\text{-ind}]\ \frac{\begin{array}{l}\Gamma, (x, y) : \sum_{(x:A)} B(x) \vdash P((x, y)) \text{ type}\\ \Gamma \vdash p : \prod_{(x:A)} \prod_{(y:B(a))} P((x, y))\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\sum}(p) : \prod_{(z:\sum_{(x:A)} B(x))} P(z)}$$

$$[\textstyle\sum\text{-comp}]\ \frac{\begin{array}{l}\Gamma, (x, y) : \sum_{(x:A)} B(x) \vdash P((x, y)) \text{ type}\\ \Gamma \vdash p : \prod_{(x:A)} \prod_{(y:B(a))} P((x, y))\end{array}}{\Gamma\ (x, y) : \sum_{(x:A)} B(x) \vdash \mathsf{ind}_{\sum}(p, (x, y)) \equiv p(x, y) : P((x, y))}$$

Дефиниција 1.1.9. Нека је B фамилија типова над A. Тада тип $\mathsf{pr}_1 : \sum_{(x:A)} B(x) \to A$ *пројекције на први елемент* дефинишемо као:

$$\mathsf{pr}_1((a, b)) := a, \tag{1.2}$$

а тип $\mathsf{pr}_2 : \prod_{z:\sum_{(x:A)} B(x)} B(\mathsf{pr}_1(z))$ *пројекције на други елемент* дефинишемо као:

$$\mathsf{pr}_2((a, b)) := b. \tag{1.3}$$

Искази	Типови
$\bot$	$\mathbb{0}$
$\top$	$\mathbb{1}$
$A \vee B$	$A + B$
$A \wedge B$	$A \times B$
$A \implies B$	$A \to B$
$A \iff B$	$(A \to B) \times (B \to A)$
$\neg A$	$A \to \mathbb{0}$
$\forall x.P(x)$	$\prod_{(x:A)} P(x)$
$\exists x.P(x)$	$\sum_{(x:A)} P(x)$

Табела 1.1: Кари-Хавардова интерпретација

Специјални случај типа зависних парова је тип (независних) *парова* или *(Декартов) производ* $A \times B := \sum_{(x:A)} B$.

Хијерархија универзума и универзум типови

Hmm, da li ovo raspisivati?

Искази као типови

Кари-Хавардова интерпретација посматра исказе као типове, доказе као елементе типова, и предикате као фамилије типова. Да би показали да је исказ тачан у теорији типова треба конструисати елемент који настањује одговарајући тип. У табели 1.1 приказани су искази заједно са њиховим одговарајућом интерпретацијом у теорији типова.

Прокоментаришимо неке интерпретације из табеле 1.1. Да би показали да важи $A \implies B$ треба претпоставити да важи A и доказати да важи B. У теорији типова треба конструисати елемент типа $A \to B$, тј. треба конструисати елемент типа B који потенцијално користи претпостављени елемент типа A. Слично, да би показали $\exists x.P(x)$ у теорији типова треба конструисати елемент типа $\sum_{(x:A)} P(x)$. У овом случају теорија типова нам даје и више од тога. Наиме, P је фамилија типова, што значи да $P(x)$ не мора да буде типа 2, тј. P не мора да буде предикат. Поред тога, тип $\sum_{(x:A)} P(x)$ можемо схватити као тип свих елемената $x : A$ za koje $P(x)$.

1.2 Типови идентитети

Homotopna invarijantnost

Transport

Indukcija putanje

Akcije nad putanjama

1.3 Homotopni nivoi

Kontraktibilnost

n types

Osobina vs. struktura

Trunkacija

Logika

1.4 Ekvivalentnosti

Functional extentionality

Ekvivalentnosti i univerzalna osobina

1.5 Aksioma univalentnosti

Neke posledice univalentnosti

Глава 2

Разрада

2.1 Neki deo HoTTa koji će se formalizovati

2.2 Neki drugi deo HoTTa koji će se formalizovati

Глава 3

Закључак

Биографија аутора

Вук Стефановић Караџић (*Тршић, 26. октобар/6. новембар 1787. — Беч, 7. фебруар 1864.*) био је српски филолог, реформатор српског језика, сакупљач народних умотворина и писац првог речника српског језика. Вук је најзначајнија личност српске књижевности прве половине XIX века. Стекао је и неколико почасних доктората. Учествовао је у Првом српском устанку као писар и чиновник у Неготинској крајини, а након слома устанка преселио се у Беч, 1813. године. Ту је упознао Јернеја Копитара, цензора словенских књига, на чији је подстицај кренуо у прикупљање српских народних песама, реформу ћирилице и борбу за увођење народног језика у српску књижевност. Вуковим реформама у српски језик је уведен фонетски правопис, а српски језик је потиснуо славеносрпски језик који је у то време био језик образованих људи. Тако се као најважније године Вукове реформе истичу 1818., 1836., 1839., 1847. и 1852.