УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Андрија Д. Урошевић

ХОМОТОПНА ТЕОРИЈА ТИПОВА

мастер рад

Београд, 2024.

Ментор:

др Сана Стојановић-Ђурђевић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Филип Марић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Лаза Лазић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: 29. фебруар 2024.

Мами, тати и деди

Наслов мастер рада: Хомотопна теорија типова

Резиме: Напиши апстракт на крају

Кључне речи: хомотопна теорија типова, интерактивно доказивање, агда

Садржај

Глава 1

Увод

- Хомотопна теорија типова = интуиционистичка теорија типова + високи индуктивни типови + аксиома унивалентности.
- Пер Мартин-Луф теорија типова се заснива на интиуционистичком програму који је настао по Брауверу.
- Математичко резтоновање је људска активност и математика је језик у коме се математичке идеје преносе.
- Фундаментална људска активност.
- Конструктивна теорија је *доказно релевантна*, тј. доказ је математички објекат као и сваки други.
- Тврђења можемо интерпретирати као типове, те ће доказ представљати *проверу типа*, тј. конструисање терма одређеног типа. (Јако битна уврнута идеја)
- Запажање: Хомотопна тероја и теорија типова представљају исту ствар.
- Хомотопна теорија се бави непрекидним пресликавањима која су *хомотопна* између себе, тј. могу се "непрекидно деформисати" једна у друге.
- Тројство израчуњивости: Програмерска интерпретација, хомотопна интерпретација и логичка интерпретација.
- Типско расуђивање $t : T$ читамо као t је терм типа или терм t настањује T. У програмерској интерпретацији тип представља тип, док терм

некег типа представља израз тог типа. У хомотопној интерпретацији тип представља простор, док терм неког типа представља тачку у том простору.

- Пример јединичног типа $\mathbb{1}$: јединични (`unit` у програмерском смислу), јединствени (*The* у логичком смислу), и контрактибилни (у хомотопном смислу) тип.
- Интенционални и екстенционални типови? (нешто чуно, проучити)
- Раселов парадокс као мотивација за теорију типова.

1.1 Интуиционистичка теорија типова

Интуиционистичка теорија типова или Пер Мартин-Луф теорија типова је математичка теорија конструкција. Тип представља врсту конструкције. Елемент, терм или тачка представља резултат конструкције неког типа. Прецизније, елемент a типа A записујемо као $a : A$, и кажемо да елемент a настањује тип A. Битно је напоменути да терм не може да "живи самостално" тј. терм увек мора да настањује неки тип.

Конструкција типова се састоји из низа дедуктивних *правила закључивања*. Правило закључивања записујемо као

$$\frac{\mathcal{H}_1 \qquad \mathcal{H}_2 \qquad \dots \qquad \mathcal{H}_n}{\mathcal{C}}$$

где расуђивања $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_n$ називамо *премисе* или *хипотезе*, а расуђивање $\mathcal{C}$ називамо *закључак*.

Definicija 1.1.1. Свако *расуђивање* је облика $\Gamma \vdash \mathcal{J}$, где је Γ *контекст* и $\mathcal{J}$ *теза* расуђивања. Теза може имати четири врсте расуђивања и то су:

(i) A је *(добро-формиран) тип* у контексту Γ.

$$\Gamma \vdash A \text{ type}$$

(ii) A и B су *расуђивачки једнаки типови* у контексту Γ.

$$\Gamma \vdash A \doteq B \text{ type}$$

(iii) a је *елеменӣ* типа A у контексту Γ.

$$\Gamma \vdash a : A$$

(iv) a и b су *расуђивачки једнаки елеменӣи* типа A у контексту Γ.

$$\Gamma \vdash a \doteq_A b : A$$

користећи правила закључивања теорије типова.

Контекст је коначна листа *декларисаних ӣромењљивих* облика

$$x_1 : A_1, x_2 : A_2(x_1), \ldots, x_n : A_n(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

под условом да за свако $1 \leq k \leq n$ можемо да изведемо расуђивање

$$x_1 : A_1, x_2 : A_2(x_1), \ldots, x_{k-1} : A_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-2}) \vdash A_k(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}),$$

применом правила закључивања.

Из дефиниције контекста можемо видети да неки типови зависе од других термова. На пример, $A_2(x_1)$ зависи од $x_1 : A_1$, тј. за разне термове $x_1 : A_1$ имамо разне типове $A_2(x_1)$. Ову идеју можемо уопштити помоћу следеће две дефиниције:

Definicija 1.1.2. Нека је тип A у контексту Γ. *Фамилија* типова над A у контексту Γ је тип $B(x)$ у контексту $\Gamma, x : A$, тј.

$$\Gamma, x : A \vdash B(x) \text{ type}.$$

Кажемо да је B фамилија типова над A у контексту Γ. Алтернативно, кажемо да је $B(x)$ тип индексиран са $x : A$ у контексту Γ.

Definicija 1.1.3. Нека је B фамилија типова над A у контексут Γ. *Секција* фамилије B над типом A у контексту Γ је елемент типа $B(x)$ у контексту $\Gamma, x : A$, тј.

$$\Gamma, x : A \vdash b(x) : B(x).$$

Кажемо да је b секција фамилије B над A у контексту Γ. Алтернативно, кажемода да је $b(x)$ елемент типа $B(x)$ индексиран са $x : A$ у контексту $\Gamma, x : A$.

Правила закључивања

Нека правила закључивања:

$$\frac{\Gamma \vdash A \text{ type}}{\Gamma \vdash A \doteq A \text{ type}} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \doteq A' \text{ type}}{\Gamma \vdash A' \doteq A \text{ type}} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \doteq A' \text{ type} \qquad \Gamma \vdash A' \doteq A'' \text{ type}}{\Gamma \vdash A \doteq A'' \text{ type}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash a \doteq a : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash a \doteq a' : A}{\Gamma \vdash a' \doteq a : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash a \doteq a' : A \qquad \Gamma \vdash a' \doteq a'' : A}{\Gamma \vdash a \doteq a'' : A}$$

Зависни типови

1.2 Аксиома унивалентности

Глава 2

Разрада

Глава 3

Закључак

Литература

[1] Jackson Macor. *A brief introduction to type theory and the univalence axiom.* 2015.

[2] Egbert Rijke. *Introduction to Homotopy Type Theory*. 2022. arXiv: `2212.11082 [math.LO]`.

[3] The Univalent Foundations Program. *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. Institute for Advanced Study: `https://homotopytypetheory.org/book`, 2013.

Биографија аутора

Вук Стефановић Караџић (*Тршић, 26. октобар/6. новембар 1787. — Беч, 7. фебруар 1864.*) био је српски филолог, реформатор српског језика, сакупљач народних умотворина и писац првог речника српског језика. Вук је најзначајнија личност српске књижевности прве половине XIX века. Стекао је и неколико почасних доктората. Учествовао је у Првом српском устанку као писар и чиновник у Неготинској крајини, а након слома устанка преселио се у Беч, 1813. године. Ту је упознао Јернеја Копитара, цензора словенских књига, на чији је подстицај кренуо у прикупљање српских народних песама, реформу ћирилице и борбу за увођење народног језика у српску књижевност. Вуковим реформама у српски језик је уведен фонетски правопис, а српски језик је потиснуо славеносрпски језик који је у то време био језик образованих људи. Тако се као најважније године Вукове реформе истичу 1818., 1836., 1839., 1847. и 1852.