УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Андрија Д. Урошевић

ИНТУИЦИОНИСТИЧКА ТЕОРИЈА ТИПОВА КАО УВОД У ХОМОТОПНУ ТЕОРИЈУ ТИПОВА

мастер рад

Београд, 2024.

Ментор:

др Сана Стојановић-Ђурђевић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

проф. др Филип Марић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Иван Чукић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: 29. фебруар 2024.

Мами, тати и деди

Наслов мастер рада: Интуиционистичка теорија типова као увод у хомотопну теорију типова

Резиме: Homotopy Type Theory/Univalent Foundations (HoTT/UF) is a revolutionary approach to the foundation of mathematics. Although it's revolutionary, HoTT/UF is very slowly gaining popularity among a broader circle of mathematicians and computer scientists. One of the reasons is that during formalization one requires both theoretical knowledge and proof-assistance skills. Acquiring those prerequisites is partially based on one's background. Mathematicians lack functional programming skills, on the other hand, computer scientists lack theoretical knowledge. A few materials tackle both areas, but they are lacking interactability. This thesis proposes a material that formalizes one theoretical area of HoTT/UF in Agda and is doing so while interacting with the user input.

Кључне речи: хомотопна теорија типова, интерактивно доказивање, агда

Садржај

1 Увод **2**

2 Интуиционистичка теорија типова **4**

2.1 Правила закључивања 5
2.2 Зависни типови 6
2.3 Типови зависних функција 7
2.4 Индуктивни типови 8
2.5 Искази као типови 16
2.6 Хијерархија универзума и универзум типови 17
2.7 Типови идентитети 18
2.8 Ekvivalentnosti 25
2.9 Aksioma univalentnosti 25

3 Агда **26**

4 Закључак **27**

Глава 1

Увод

- Хомотопна теорија типова = интуиционистичка теорија типова + високи индуктивни типови + аксиома унивалентности.

- Пер Мартин-Луф теорија типова се заснива на интиуционистичком програму који је настао по Брауверу.

- Математичко резтоновање је људска активност и математика је језик у коме се математичке идеје преносе.

- Фундаментална људска активност.

- Конструктивна теорија је *доказно релевантна*, тј. доказ је математички објекат као и сваки други.

- Тврђења можемо интерпретирати као типове, те ће доказ представљати *проверу типа*, тј. конструисање терма одређеног типа. (Јако битна уврнута идеја)

- Запажање: Хомотопна тероја и теорија типова представљају исту ствар.

- Хомотопна теорија се бави непрекидним пресликавањима која су *хомотопна* између себе, тј. могу се ”непрекидно деформисати“ једна у друге.

- Тројство израчуњивости: Програмерска интерпретација, хомотопна интерпретација и логичка интерпретација.

- Типско расуђивање $t : T$ читамо као t је терм типа T или терм t настањује T. У програмерској интерпретацији тип представља тип, док терм неког типа представља израз тог типа. У хомотопној интерпретацији тип представља простор, док терм неког типа представља тачку у том простору.

- Пример јединичног типа $\mathbb{1}$: јединични (`unit` у програмерском смислу), јединствени (The у логичком смислу), и контрактибилни (у хомотопном смислу) тип.
- Интенционални и екстенционални типови? (нешто чуно, проучити)
- Раселов парадокс као мотивација за теорију типова.

Глава 2

Интуиционистичка теорија типова

Интуиционистичка теорија типова или Пер Мартин-Луф теорија типова је математичка теорија конструкција. Тип представља врсту конструкције. Елемент, терм или тачка представља резултат конструкције неког типа. Прецизније, елемент a типа A записујемо као $a : A$, и кажемо да елемент a настањује тип A. Битно је напоменути да терм не може да „живи самостално“ тј. терм увек мора да настањује неки тип.

Конструкција типова се састоји из низа дедуктивних *правила закључивања*. Правило закључивања записујемо као

$$\frac{\mathcal{H}_1 \qquad \mathcal{H}_2 \qquad \dots \qquad \mathcal{H}_n}{\mathcal{C}}$$

где расуђивања $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_n$ називамо *премисе* или *хипотезе*, а расуђивање $\mathcal{C}$ називамо *закључак*.

Дефиниција 2.0.1. Свако *расуђивање* је облика $\Gamma \vdash \mathcal{J}$, где је Γ *контекст* и $\mathcal{J}$ *теза* расуђивања.

Дефиниција 2.0.2. *Контекст расуђивања* је коначна листа узајамно зависних променљивих декларисаних на следећи начин

$$x_1 : A_1, x_2 : A_2(x_1), \dots, x_n : A_n(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

под условом да за свако $1 \leq k \leq n$ можемо да изведемо расуђивање

$$x_1 : A_1, x_2 : A_2(x_1), \dots, x_{k-1} : A_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-2}) \vdash A_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}).$$

Дефиниција 2.0.3. *Теза расуђивања* може имати четири врсте расуђивања и то су:

(i) A је *(добро-формиран) тип* у контексту Γ

$$\Gamma \vdash A \text{ type}$$

(ii) A и B су *расуђивачки једнаки типови* у контексту Γ

$$\Gamma \vdash A \equiv B \text{ type}$$

(iii) a је *елемент* типа A у контексту Γ

$$\Gamma \vdash a : A$$

(iv) a и b су *расуђивачки једнаки елементи* типа A у контексту Γ

$$\Gamma \vdash a \equiv_A b : A$$

2.1 Правила закључивања

Интуиционистичка теорија типова, као и други математички формализми, захтева скуп правила закључивања на којима ће се формализам заснивати. Та правила називамо *структурна правила*.

Пример структурних правила закључивања која описују да је расуђивачка једнакост релација еквиваленције:

$$\frac{\Gamma \vdash A \text{ type}}{\Gamma \vdash A \equiv A \text{ type}} \quad \frac{\Gamma \vdash A \equiv A' \text{ type}}{\Gamma \vdash A' \equiv A \text{ type}} \quad \frac{\Gamma \vdash A \equiv A' \text{ type} \qquad \Gamma \vdash A' \equiv A'' \text{ type}}{\Gamma \vdash A \equiv A'' \text{ type}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash a \equiv_A a : A} \quad \frac{\Gamma \vdash a \equiv_A a' : A}{\Gamma \vdash a' \equiv_A a : A} \quad \frac{\Gamma \vdash a \equiv_A a' : A \qquad \Gamma \vdash a' \equiv_A a'' : A}{\Gamma \vdash a \equiv_A a'' : A}$$

Исцрпна листа структурних правила закључивања у интуиционистичкој теорији типова се може наћи у [**rijke2022intro**]. Da li sada ovo raspisivati?

2.2 Зависни типови

Из дефиниције контекста можемо видети да неки типови могу зависити од неких термова. На пример, тип $A_2(x_1)$ зависи од терма $x_1 : A_1$, тј. за разне термове $x_1 : A_1$ имамо разне типове $A_2(x_1)$. Ову идеју можемо уопштити помоћу следећих дефиниција:

Дефиниција 2.2.1. Нека је тип A у контексту Γ. *Фамилија* типова над A у контексту Γ је тип $B(x)$ у контексту $\Gamma, x : A$, тј.

$$\Gamma, x : A \vdash B(x) \text{ type}.$$

Кажемо да је B фамилија типова над A у контексту Γ. Алтернативно, кажемо да је $B(x)$ тип индексиран са $x : A$ у контексту Γ.

Дефиниција 2.2.2. Нека је B фамилија типова над A у контексту Γ. *Секција* фамилије B над типом A у контексту Γ је елемент типа $B(x)$ у контексту $\Gamma, x : A$, тј.

$$\Gamma, x : A \vdash b(x) : B(x).$$

Кажемо да је b секција фамилије B над A у контексту Γ. Алтернативно, кажемо да да је $b(x)$ елемент типа $B(x)$ индексиран са $x : A$ у контексту $\Gamma, x : A$.

Дефиниција 2.2.3. Нека је B фамилија типова над A у контексту Γ, и нека је $a : A$. Кажемо да је $B[a/x]$ *влакно* од B за параметар a, где $B[a/x]$ представља замену свих појављивања x у B са a. Нит од B за параметар a краће записујемо као $B(a)$.

Дефиниција 2.2.4. Нека је b секција фамилије типова B над A у контексту Γ. Кажемо да је $b[a/x]$ *вредност* од b за параметар a, где $b[a/x]$ представља замену свих појављивања x у b са a. Такође, вредност од b за параметар a краће записујемо као $b(a)$.

2.3 Типови зависних функција

У математици заснованој на теорији скупова функција $f : A \to B$ дефинисана је над одређеним доменом A и кодоменом B. У теорији типова то не мора да буде случај, тј. кодомен може зависити од елемента над којим се функција примењује. Прецизније, посматрајмо секцију b фамилије типова B над A у контексту Γ. Један начин је да b посматрамо као функцију $mapstob(x)$. Тада $b(x)$ настањује тип $B(x)$ који зависи од $x : A$. Због тога за разне елементе $x : A$ домена имамо разне кодомене, те има смисла говорити о типу *зависних функција* $\prod_{(x:A)} B(x)$.

Спецификација типа зависних функција $\prod_{(x:A)} B(x)$ је дата следећим правилима закључивања:

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B(x)\ \text{type}}{\Gamma \vdash \prod_{(x:A)} B(x)\ \text{type}}\,[\textstyle\prod\text{-form}] \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash b(x) : B(x)}{\Gamma \vdash \lambda x.b(x) : \prod_{(x:A)} B(x)}\,[\textstyle\prod\text{-intro}] \qquad \frac{\Gamma \vdash f : \prod_{(x:A)} B(x)}{\Gamma, x : A \vdash f(x) : B(x)}\,[\textstyle\prod\text{-elim}]$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b(x) : B(x)}{\Gamma \vdash (\lambda y.b(y))(x) \equiv b(x) : B(x)}\,[\textstyle\prod\text{-comp}_1] \qquad \frac{\Gamma \vdash f : \prod_{(x:A)} B(x)}{\Gamma \vdash \lambda x.f(x) \equiv f : \prod_{(x:A)} B(x)}\,[\textstyle\prod\text{-comp}_2]$$

Специјалан случај типа зависних функција је тип (уобичајених) *функција* $A \to B$. Уколико су типови A и B у контексту Γ, тј. тип B не зависи од елемената типа A, тада $\prod_{(x:A)} B$ представља тип (уобичајених) функција.

Дефиниција 2.3.1. Тип (уобичајених) *функција* $A \to B$ дефинишемо као:

$$A \to B := \prod_{(x:A)} B.$$

Ако је $f : A \to B$ функција, тада је A *домен*, а B *кодомен* функције f.

Дефиниција 2.3.2. За сваки тип A дефинишемо *функцију идентитета* $\mathsf{id}_A : A \to A$ као $\mathsf{id}_A :\equiv \lambda x.x$.

Дефиниција 2.3.3. За свака три типа A, B, и C дефинишемо *композицију* $\mathsf{comp} : (B \to C) \to (A \to B) \to A \to C$ као $\mathsf{comp} :\equiv \lambda g.\lambda f.\lambda g(f(x))$.

Може се показати да је композиција асоцијативна, као и да је функција идентитета неутрал за композицију функција. Због сагласности типова имамо леви неутрал id_B и десни неутрал id_A.

2.4 Индуктивни типови

Поред типова зависних функција постоји и класа *индуктивних типова*. Сваки индуктивни тип се дефинише помоћу следеће спецификације:

(i) *Формирање* типа описује начин на који се дати тип формира.

(ii) *Конструисање* описује на који начин се уводе нови канонични термови датог типа.

(iii) *Индуктивни принцип* описује податке који су потребни да би се конструисала секција произвољне фамилије типова над датим типом.

(iv) *Правила израчунавања* захтевају да се индуктивно дефинисана секција произвољне фамилије типова над датим типом слаже по конструкторима који уводе нове канонични термове.

Обично се, поред ових спецификација, уводи и *правило рекурзије* које је специјални случај правила индукције. Код правила рекурзије не конструишемо секцију произвољне фамилије типова над датим типом, већ само константну фамилију над датим типом.

У наставку су наведене спецификације за уобичајене индуктивне типове: тип природних бројева $\mathbb{N}$, празни тип $\mathbb{0}$, јединични тип $\mathbb{1}$, типови копроизвода $A + B$, тип зависних парова $\sum_{(x:A)} B(x)$, као и специјални случајеви ових типова. Поред њих, у засебном поглављу ће бити представљени типови идентитети $x =_A y$.

Тип природних бројева

Тип природних бројева $\mathbb{N}$ представља тип кога настањују природни бројеви $0_{\mathbb{N}}, 1_{\mathbb{N}}, 2_{\mathbb{N}}, \ldots$. Прецизније, тип природних бројева $\mathbb{N}$ дефинишемо следећом спецификацијом:

$$\frac{[\mathbb{N}\text{-form}]}{\vdash \mathbb{N}\ \text{type}} \qquad \frac{[\mathbb{N}\text{-intro}_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}}]}{\vdash \mathsf{0}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N}} \qquad \frac{[\mathbb{N}\text{-intro}_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}}]}{\vdash \mathsf{succ}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}}$$

$$[\mathbb{N}\text{-ind}]\quad \frac{\begin{array}{l}\Gamma, n : \mathbb{N} \vdash P(n)\ \text{type}\\ \Gamma \vdash p_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}} : P(\mathsf{0}_{\mathbb{N}})\\ \Gamma \vdash p_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}} : \prod_{(n:\mathbb{N})} P(n) \to P(\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(n))\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\mathbb{N}}(p_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}}, p_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}}) : \prod_{(n:\mathbb{N})} P(n)}$$

$$[\mathbb{N}\text{-comp}^{\mathsf{ind}_{\mathbb{N}}}_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}}]\quad \frac{\begin{array}{l}\Gamma, n : \mathbb{N} \vdash P(n)\ \text{type}\\ \Gamma \vdash p_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}} : P(\mathsf{0}_{\mathbb{N}})\\ \Gamma \vdash p_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}} : \prod_{(n:\mathbb{N})} P(n) \to P(\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(n))\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\mathbb{N}}(p_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}}, p_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}}, \mathsf{0}_{\mathbb{N}}) \equiv p_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}} : P(\mathsf{0}_{\mathbb{N}})}$$

$$[\mathbb{N}\text{-comp}^{\mathsf{ind}_{\mathbb{N}}}_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}}]\quad \frac{\begin{array}{l}\Gamma, n : \mathbb{N} \vdash P(n)\ \text{type}\\ \Gamma \vdash p_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}} : P(\mathsf{0}_{\mathbb{N}})\\ \Gamma \vdash p_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}} : \prod_{(n:\mathbb{N})} P(n) \to P(\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(n))\end{array}}{\Gamma,\ n : \mathbb{N} \vdash \mathsf{ind}_{\mathbb{N}}(p_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}}, p_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}}, \mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(n)) \equiv p_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}}(n, \mathsf{ind}_{\mathbb{N}}(p_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}}, p_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}}, n)) : P(\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(n))}$$

$$[\mathbb{N}\text{-rec}_{\mathbb{N}}]\quad \frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash A\ \text{type}\\ \Gamma \vdash a_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}} : A\\ \Gamma \vdash a_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}} : \mathbb{N} \to A \to A\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{rec}_{\mathbb{N}}(a_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}}, a_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}}) : \mathbb{N} \to A}$$

$$[\mathbb{N}\text{-comp}^{\mathsf{rec}_{\mathbb{N}}}_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}}]\quad \frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash A\ \text{type}\\ \Gamma \vdash a_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}} : A\\ \Gamma \vdash a_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}} : \mathbb{N} \to A \to A\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{rec}_{\mathbb{N}}(a_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}}, a_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}}, \mathsf{0}_{\mathbb{N}}) \equiv a_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}} : A}$$

$$[\mathbb{N}\text{-comp}^{\mathsf{rec}_{\mathbb{N}}}_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}}]\quad \frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash A\ \text{type}\\ \Gamma \vdash a_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}} : A\\ \Gamma \vdash a_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}} : \mathbb{N} \to A \to A\end{array}}{\Gamma, n : \mathbb{N} \vdash \mathsf{rec}_{\mathbb{N}}(a_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}}, a_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}}, \mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(n)) \equiv a_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}}(n, \mathsf{rec}_{\mathbb{N}}(a_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}}, a_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}}, n)) : A}$$

По правилу $\mathbb{N}$-form, тип природних бројева $\mathbb{N}$ може да се формира из празног контекста. Другим речима, постојање типа природних бројева $\mathbb{N}$ не зависи од постојања других типова. Даље, имамо два конструктора помоћу којих конструишемо све каноничке термове типа $\mathbb{N}$. Први конструктор је константа $\mathsf{0}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N}$ и он говори да је $\mathsf{0}_{\mathbb{N}}$ канонични терм типа $\mathbb{N}$. Други конструктор је функција $\mathsf{succ}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и она говори да ће $\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(n)$ бити канонични терм типа $\mathbb{N}$ ако је $n : \mathbb{N}$ канонични терм. Због тога су $\mathsf{0}_\mathbb{N}, \mathsf{succ}_\mathbb{N}(\mathsf{0}_\mathbb{N}), \mathsf{succ}_\mathbb{N}(\mathsf{succ}_\mathbb{N}(\mathsf{0}_\mathbb{N})), \ldots$ канонични термови који настањују тип $\mathbb{N}$.

Правила формирања и конструкције нам говоре о томе под којим условима се може формирати тип, и како конструисати каноничне термове тог типа. Потребно је још дефинисати и начин на који се тип и елементи тог типа користе. Због тога се уводи индуктивно правило и правила израчунавања. Да би конструисали елемент $\mathsf{ind}_\mathbb{N}(p_{\mathsf{0}_\mathbb{N}}, p_{\mathsf{succ}_\mathbb{N}}) : \prod_{(n:\mathbb{N})} P(n)$ потребно је конструисати елемент $p_{\mathsf{0}_\mathbb{N}} : P(\mathsf{0}_\mathbb{N})$ (*база индукције*) i $p_{\mathsf{succ}_\mathbb{N}} : \prod_{n:\mathbb{N}} P(n) \to P(\mathsf{succ}_\mathbb{N}(n))$ (*индуктивни корак*). Даље, за сваки од конструктора треба увести правило израчунавања у складу са зависном функцијом $\mathsf{ind}_\mathbb{N}(p_{\mathsf{0}_\mathbb{N}}, p_{\mathsf{succ}_\mathbb{N}}) : \prod_{(n:\mathbb{N})} P(n)$. Због тога имамо два правила израчунавања $\mathbb{N}\text{-comp}_{\mathsf{0}_\mathbb{N}}$ i $\mathbb{N}\text{-comp}_{\mathsf{succ}_\mathbb{N}}$.

Специјални случај индукције типа природних бројева је рекурзија типа природних бројева, у којој тип P не зависи од $\mathbb{N}$. Тада добијамо функцију $\mathsf{rec}_\mathbb{N}(a_{\mathsf{0}_\mathbb{N}}, a_{\mathsf{succ}_\mathbb{N}}) : \mathbb{N} \to A$, под условом да имамо елементе $a_{\mathsf{0}_\mathbb{N}} : A$ и $a_{\mathsf{succ}_\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to A \to A$.

Правило индукције, заједно са правилом рекурзије, омогућава дефинисање разних функција над природним бројевима. Да би дефинисали операцију сабирања природних бројева $+_\mathbb{N} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ можемо искористити правило рекурзије, тј. функцију $\mathsf{rec}_\mathbb{N} : A \to (\mathbb{N} \to A \to A) \to \mathbb{N} \to A$. За тип A узећемо $\mathbb{N}$. Због тога, сабирање природних бројева дефинишемо као:

$$m +_\mathbb{N} n :\equiv \mathsf{rec}_\mathbb{N}(m, \lambda n.\lambda r.\mathsf{succ}_\mathbb{N}(r), n).$$

Заиста, за овако дефинисану операцију сабирања важи:

$$m +_\mathbb{N} \mathsf{0}_\mathbb{N} \equiv m;$$
$$m +_\mathbb{N} \mathsf{succ}_\mathbb{N}(n) \equiv \mathsf{succ}_\mathbb{N}(m +_\mathbb{N} n).$$

Слично, множење природних бројева $\times_\mathbb{N} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ можемо дефинисати као

$$m \times_\mathbb{N} n :\equiv \mathsf{rec}_\mathbb{N}(\mathsf{0}_\mathbb{N}, \lambda n.\lambda r.m +_\mathbb{N} r, n).$$

Такође, за овако дефинисану операцију множења важи:

$$m \times_\mathbb{N} \mathsf{0}_\mathbb{N} \equiv \mathsf{0}_\mathbb{N};$$
$$m \times_\mathbb{N} \mathsf{succ}_\mathbb{N}(n) \equiv (m +_\mathbb{N} (m \times_N n)).$$

Можемо приметити шаблон између дефинисања операција преко рекурзивног правила и правила која захтевамо да важе по конструкторима. Наиме, уколико желимо да дефинишемо функцију $f : \mathbb{N} \to A$ за коју важи:

$$f(\mathsf{0}_{\mathbb{N}}) \equiv \Phi_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}};$$
$$f(\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(n)) \equiv \Phi_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}},$$

где је $\Phi_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}}$ израз типа A, и $\Phi_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}}$ израз типа A који може садржати n и $f(n)$. Тада функцију $f : \mathbb{N} \to A$ дефинишемо као:

$$f :\equiv \mathsf{rec}_{\mathbb{N}}(\Phi_{\mathsf{0}_{\mathbb{N}}}, \lambda n.\lambda r.\Phi'_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}}),$$

где $\Phi'_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}}$ добијемо из $\Phi_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}}$ тако што сва појављивања $f(n)$ заменимо са r. Овај поступак дефинисања можемо уопштити и на индуктивно правило, и тада се он назива *уйаривање шаблона* (енгл. *pattern matching*).

Празни тип

Празни тип $\mathbb{0}$ је дегенерисани пример индуктивног типа кога не настањује ни један елемент. Прецизније, празни тип $\mathbb{0}$ дефинишемо следећом спецификацијом.

$$[\mathbb{0}\text{-form}]\ \frac{}{\vdash \mathbb{0}\ \text{type}} \qquad [\mathbb{0}\text{-ind}]\ \frac{\Gamma, 0 \vdash P(x)\ \text{type}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\mathbb{0}} : \prod_{(x:\mathbb{0})} P(x)} \qquad [\mathbb{0}\text{-rec}]\ \frac{\Gamma \vdash A\ \text{type}}{\Gamma \vdash \mathsf{rec}_{\mathbb{0}} : \mathbb{0} \to A}$$

Како празан тип $\mathbb{0}$ не настањује ни један елемент, за њега не постоји ни један конструктор, и самим тим нема ни једно правило израчунавања. Може да се формира из празног контекста, а његово правило индукције тврди да за било коју фамилију типова P над $\mathbb{0}$ постоји елемент $\mathsf{ind}_{\mathbb{0}} : \prod_{(x:\mathbb{0})} P(x)$. Чешће се користи правило рекурзије које тврди да уколико конструишемо елемент $x : \mathbb{0}$, онда можемо да конструишемо елемент $\mathsf{rec}_{\mathbb{0}}(x) : A$ било ког типа A. Правило рекурзије за празни тип $\mathbb{0}$ се обично назива и *йравило конйрадикције* или *йравило йройивречносйи*.

Дефиниција 2.4.1. За сваки тип A дефинишемо тип *неїације* od A као $\neg A := A \to \mathbb{0}$. Поред тога, кажемо да је тип A *йразан* ако његову негацију настањује неки елемент, тј. $\mathsf{empty}(A) := A \to \mathbb{0}$.

Приметимо да је *дуйла неїација* од A дефинисана као $\neg\neg A := (A \to \mathbb{0}) \to \mathbb{0}$. Због тога, не мора да важи $\neg\neg A \to A$, те није могуће изводити доказе контрадикцијом.

Јединични тип

Јединични тип $\mathbb{1}$ је индуктивни тип кога настањује само елемент $\star$. Прецизније, јединични тип $\mathbb{1}$ дефинишемо следећом спецификацијом.

$$[\mathbb{1}\text{-form}]\ \frac{}{\vdash \mathbb{1}\ \text{type}} \qquad [\mathbb{1}\text{-intro}_\star]\ \frac{}{\vdash \star : \mathbb{1}}$$

$$[\mathbb{1}\text{-ind}]\ \frac{\Gamma, x : \mathbb{1} \vdash P(x)\ \text{type} \quad \Gamma \vdash p_\star : P(\star)}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\mathbb{1}}(p_\star) : \prod_{(x:\mathbb{1})} P(x)} \qquad [\mathbb{1}\text{-comp}]\ \frac{\Gamma, 1 \vdash P(x)\ \text{type} \quad \Gamma \vdash p_\star : P(\star)}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\mathbb{1}}(p_\star, \star) \equiv p_\star : P(\star)}$$

$$[\mathbb{1}\text{-rec}]\ \frac{\Gamma \vdash A\ \text{type} \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \mathsf{rec}_{\mathbb{1}}(a) : \mathbb{1} \to A}$$

Јединични тип $\mathbb{1}$ може да се формира из празног контекста, а његово правило индукције тврди да за било коју фамилију типова P над $\mathbb{1}$ постоји елемент $\mathsf{ind}_{\mathbb{1}}(p_\star) : \prod_{(x:\mathbb{1})} P(x)$ уколико постоји елемент $p_\star : P(\star)$. Како постоји само један конструктор $\star : \mathbb{1}$, имамо једно правило израчунавања које треба да се сложи са индуктивним правилом. Због тога, $\mathsf{ind}_{\mathbb{1}}(p_\star, \star) \equiv p_\star : P(\star)$.

Специјални случај правила индукције типа $\mathbb{1}$ је правило рекурзије типа $\mathbb{1}$, које добијамо када фамилија типова P над $\mathbb{1}$ не зависи од $x : \mathbb{1}$. Тада за сваки елемент $a : A$ имамо функцију $\mathsf{rec}_{\mathbb{1}}(a) : \mathbb{1} \to A$.

Дефиниција 2.4.2. За сваки тип A дефинишемо тип *јединствене функције* од A као $!\mathbb{1}(A) := A \to \mathbb{1}$. Специјално, јединствена функција од $\mathbb{0}$, тј. $\mathbb{0} \to \mathbb{1}$, се назива *вакумска функција*.

У хомотопној теорији типова за вакумску функцију важи да је јединствена.

Типови копроизвода

За типове A и B из контекста Γ можемо дефинисати тип копроизвода $A+B$ кога ће настањивати елементи или из типа A (ако $a : A$, онда $\mathsf{inl}(a) : A + B$) или из типа B (ако $b : B$, онда $\mathsf{inr}(b) : A + B$).

$$\frac{\Gamma \vdash A \text{ type}, B \text{ type}}{\Gamma \vdash A + B \text{ type}}\,[+\text{-form}] \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{inl} : A \to A + B}\,[+\text{-intro}_{\mathsf{inl}}] \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{inr} : B \to A + B}\,[+\text{-intro}_{\mathsf{inr}}]$$

$$[+\text{-ind}]\ \frac{\begin{array}{l}\Gamma, z : A + B \vdash P(z) \text{ type} \\ \Gamma \vdash p_{\mathsf{inl}} : \prod_{(a:A)} P(\mathsf{inl}(a)) \\ \Gamma \vdash p_{\mathsf{inr}} : \prod_{(b:B)} P(\mathsf{inr}(b))\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{+}(p_{\mathsf{inl}}, p_{\mathsf{inr}}) : \prod_{(z:A+B)} P(z)}$$

$$[+\text{-comp}]\ \frac{\begin{array}{l}\Gamma, z : A + B \vdash P(z) \text{ type} \\ \Gamma \vdash p_{\mathsf{inl}} : \prod_{(a:A)} P(\mathsf{inl}(a)) \\ \Gamma \vdash p_{\mathsf{inr}} : \prod_{(b:B)} P(\mathsf{inr}(b))\end{array}}{\begin{array}{l}\Gamma, a : A \vdash \mathsf{ind}_{+}(p_{\mathsf{inl}}, p_{\mathsf{inr}}, \mathsf{inl}(a)) \equiv p_{\mathsf{inl}}(a) : P(\mathsf{inl}(a)) \\ \Gamma, b : B \vdash \mathsf{ind}_{+}(p_{\mathsf{inl}}, p_{\mathsf{inr}}, \mathsf{inr}(b)) \equiv p_{\mathsf{inr}}(b) : P(\mathsf{inr}(b))\end{array}}$$

$$[+\text{-rec}]\ \frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \mathit{type} \\ \Gamma \vdash f : A \to X \\ \Gamma \vdash g : B \to X\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{rec}_{+}(f, g) : A + B \to X}$$

Тип копроизвода $A + B$ због своје природе има два конструктора $\mathsf{inl} : A \to A + B$ і $\mathsf{inr} : B \to A + B$. Правило индукције тврди да за било коју фамилију типова P над $A + B$ постоји елемент $\mathsf{ind}_{+}(p_{\mathsf{inl}}, p_{\mathsf{inr}}) : \prod_{(z:A+B)} P(z)$ уколико постоје елементи $p_{\mathsf{inl}} : \prod_{(a:A)} P(\mathsf{inl}(a))$ и $p_{\mathsf{inr}} : \prod_{(b:B)} P(\mathsf{inr}(b))$. Како постоје два конструктора, имамо два правила израчунавања која треба да се сложе са правилом индукције. Због тога $\mathsf{ind}_{+}(p_{\mathsf{inl}}, p_{\mathsf{inr}}, \mathsf{inl}(a)) \equiv p_{\mathsf{inl}}(a) : P(\mathsf{inl}(a))$ и $\mathsf{ind}_{+}(p_{\mathsf{inl}}, p_{\mathsf{inr}}, \mathsf{inr}(b)) \equiv p_{\mathsf{inr}}(b) : P(\mathsf{inr}(b))$.

Специјални случај правила индукције типа $A + B$ је правило рекурзије типа $A + B$, које добијамо када фамилија типова P над $A + B$ не зависи од $z : A + B$. Тада за сваку функцију $f : A \to X$ и за сваку функцију $g : B \to X$ имамо функцију $\mathsf{rec}_{+}(f, g) : A + B \to X$. Из правила индукције, за свако $f : A \to X$ и за свако $g : B \to Y$, имамо функцију $f + g : A + B \to X + Y$.

Специјални случај типа копроизвода је *буловски тип* $\mathbb{2} := \mathbb{1}+\mathbb{1}$, чије једине елементе дефинишемо као $\mathsf{true} :\equiv \mathsf{inl}(\star)$ и $\mathsf{false} :\equiv \mathsf{inr}(\star)$. Из спецификације типа копроизвода можемо извући правило индукције и правило израчунавања, за буловски тип $\mathbb{2}$. Правило индукције $\mathbb{2}$-ind се назива и *if-then-else*.

$$[\mathbb{2}\text{-ind}]\quad \frac{\begin{array}{l}\Gamma, x : \mathbb{2} \vdash P(x)\ \text{type}\\ \Gamma \vdash p_{\mathsf{true}} : P(\mathsf{true})\\ \Gamma \vdash p_{\mathsf{false}} : P(\mathsf{false})\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\mathbb{2}}(p_{\mathsf{true}}, p_{\mathsf{false}}) : \prod_{(x:\mathbb{2})} P(x)}$$

$$[\mathbb{2}\text{-comp}]\quad \frac{\begin{array}{l}\Gamma, x : \mathbb{2} \vdash P(x)\ \text{type}\\ \Gamma \vdash p_{\mathsf{true}} : P(\mathsf{true})\\ \Gamma \vdash p_{\mathsf{false}} : P(\mathsf{false})\end{array}}{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\mathbb{2}}(p_{\mathsf{true}}, p_{\mathsf{false}}, \mathsf{true}) \equiv p_{\mathsf{true}} : P(\mathsf{true})\\ \Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\mathbb{2}}(p_{\mathsf{true}}, p_{\mathsf{false}}, \mathsf{false}) \equiv p_{\mathsf{false}} : P(\mathsf{true})\end{array}}$$

Типови зависних парова

Ако је B фамилија типова над A из контекста Γ, онда можемо формирати тип зависних парова $\sum_{(x:A)} B(x)$ кога ће настањивати *парови* $(x, y(x))$, где је $x : A$ и $y(x) : B(x)$. Прецизније, тип зависних парова $\sum_{(x:A)} B(x)$ дефинишемо следећом спецификацијом.

$$\begin{array}{c}[\textstyle\sum\text{-form}]\\ \dfrac{\Gamma, x : A \vdash B(x)\ \text{type}}{\Gamma \vdash \sum_{(x:A)} B(x)\ \text{type}}\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{c}[\textstyle\sum\text{-intro}]\\ \dfrac{\Gamma, x : A \vdash y(x) : B(x)}{\Gamma \vdash (x, y(x)) : \sum_{(x:A)} B(x)}\end{array}$$

$$[\textstyle\sum\text{-ind}]\quad \frac{\begin{array}{l}\Gamma, (x,y) : \sum_{(x:A)} B(x) \vdash P((x,y))\ \text{type}\\ \Gamma \vdash f : \prod_{(x:A)} \prod_{(y:B(x))} P((x,y))\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\sum}(f) : \prod_{(p:\sum_{(x:A)} B(x))} P(p)}$$

$$[\textstyle\sum\text{-comp}]\quad \frac{\begin{array}{l}\Gamma, (x,y) : \sum_{(x:A)} B(x) \vdash P((x,y))\ \text{type}\\ \Gamma \vdash f : \prod_{(x:A)} \prod_{(y:B(x))} P((x,y))\end{array}}{\Gamma, (x,y) : \sum_{(x:A)} B(x) \vdash \mathsf{ind}_{\sum}(f, (x,y)) \equiv f(x,y) : P((x,y))}$$

Тип зависних парова $\sum_{(x:A)} B(x)$ има један конструктор помоћу кога се могу формирати елементи који га настањују, и то једноставним упаривањем елемената $x : A$ и $y(x) : B(x)$. Правило индукције тврди да за било коју фамилију типова P над $\sum_{(x:A)} B(x)$ постоји елемент $\mathsf{ind}_{\sum}(f) : \prod_{p:\sum_{(x:A)} B(x)} P(p)$

уколико постоји елемент $f : \prod_{(x:A)} \prod_{(y:B(x))} P((x,y))$. Како постоји само један конструктор, имамо само једно правило израчунавања које треба да се сложи са правилом индукције. Због тога важи $\mathsf{ind}_{\sum}(f,(x,y)) \equiv f(x,y) : P((x,y))$.

Правило индукције нам омогућава да дефинишемо функције у нставку.

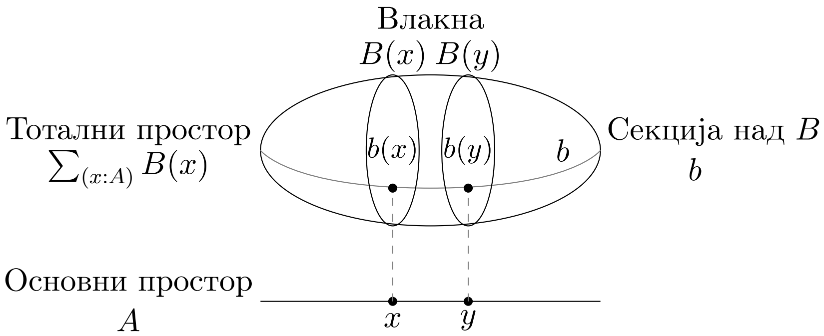
Дефиниција 2.4.3. Нека је B фамилија типова над A. Тада елемент $\mathsf{pr}_1 : \sum_{(x:A)} B(x) \to A$ *пројекције на први елемент* дефинишемо као:

$$\mathsf{pr}_1((a,b)) :\equiv \ a, \tag{2.1}$$

а елемент $\mathsf{pr}_2 : \prod_{p:\sum_{(x:A)} B(x)} B(\mathsf{pr}_1(p))$ *пројекције на други елемент* дефинишемо као:

$$\mathsf{pr}_2((a,b)) :\equiv \ b. \tag{2.2}$$

Ако претпоставимо да имамо елемент $f : \prod_{((x,y):\sum_{(x:A)} B(x))} P((x,y))$ тада конструишемо елемент типа $\prod_{(x:A)} \prod_{(y:B(x))} P((x,y))$ као $\lambda x.\lambda y.f((x,y))$. Ова конструкција се назива *каријевање*, и како је супротна правилу $\sum$-ind, правило $\sum$-ind често наивамо *одкаријевање* (енгл. *uncarry*).



Слика 2.1: Геометријска репрезентација типа зависних парова.

Специјални случај типа зависних парова је тип (независних) *парова* или *(Декартов) производ* $A \times B$. Уколико су типови A и B у контексту Γ, тј. тип B не зависи од елемената типа A, тада $\sum_{(x:A)} B$ представља тип (независних) парова.

Дефиниција 2.4.4. Тип (независних) *парова* $A \times B$ дефинишемо као:

$$A \times B := \sum_{(x:A)} B.$$

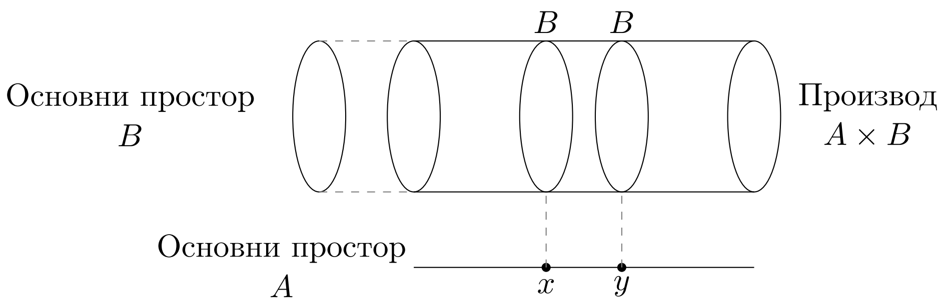
Такође, *пројекцију на први елемент* $\mathsf{fst} : A \times B \to A$ и *пројекцију на други елемент* $\mathsf{snd} : A \times B \to B$ дефинишемо као:

$$\mathsf{fst}((a, b)) :\equiv a, \quad \mathsf{snd}((a, b)) :\equiv b.$$

Правило индукције и израчунавања за тип (независних) парова $A \times B$ директно добијамо из правила индукције и израчунавања за тип зависних парова $\sum_{(x:A)} B(x)$.

$$[\times\text{-ind}] \quad \frac{\begin{array}{l}\Gamma, (x, y) : A \times B \vdash P((x, y)) \text{ type} \\ \Gamma \vdash f : \prod_{(x:A)} \prod_{(y:B)} P((x, y))\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_{\times}(f) : \prod_{(p:A \times B)} P(p)}$$

$$[\times\text{-comp}] \quad \frac{\begin{array}{l}\Gamma, (x, y) : A \times B \vdash P((x, y)) \text{ type} \\ \Gamma \vdash f : \prod_{(x:A)} \prod_{(y:B)} P((x, y))\end{array}}{\Gamma, (x, y) : A \times B \vdash \mathsf{ind}_{\times}(f, (x, y)) \equiv f(x, y) : P((x, y))}$$



Слика 2.2: Геометријска репрезентација типа независних парова.

Тип независних парова можемо уопштити на тип k-*торки* $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$.

2.5 Искази као типови

Кари-Хавардова интерпретација неформално посматра исказе као типове, доказе као елементе типова, и предикате као фамилије типова. Да би показали да је исказ тачан у теорији типова треба конструисати елемент који настањује одговарајући тип. Прецизније, за дати исказ A (добро-формирани тип) уколико конструишемо елемент $x : A$ (кога често називамо и *сведок* за A) тада сматрамо да је исказ A тачан. Приметимо да исказ није тачан или

Искази	Типови
$\bot$	$\mathbb{0}$
$\top$	$\mathbb{1}$
$A \vee B$	$A + B$
$A \wedge B$	$A \times B$
$A \implies B$	$A \to B$
$A \iff B$	$(A \to B) \times (B \to A)$
$\neg A$	$A \to \mathbb{0}$
$\forall x.P(x)$	$\prod_{(x:A)} P(x)$
$\exists x.P(x)$	$\sum_{(x:A)} P(x)$

Табела 2.1: Кари-Хавардова интерпретација

нетачан, већ да представља колекцију својих сведока који могу да потрврде његову истинитост. Због тога су и сами докази математички објекти. У табели 2.1 приказани су искази заједно са њиховом одговарајућом интерпретацијом у теорији типова.

Прокоментаришимо неке интерпретације из табеле 2.1. Да би показали да важи $A \implies B$ треба претпоставити да важи A и доказати да важи B. У теорији типова треба конструисати елемент типа $A \to B$, тј. треба конструисати елемент типа B који користи претпоставку дату постојањем елемент типа A. Слично, да би показали $\exists x.P(x)$ у теорији типова треба конструисати елемент типа $\sum_{(x:A)} P(x)$. У овом случају теорија типова нам даје и више од тога. Наиме, P је фамилија типова, што значи да $P(x)$ не мора да буде типа $\mathbb{2}$, тј. P не мора да буде предикат. Поред тога, тип $\sum_{(x:A)} P(x)$ можемо схватити као тип свих елемената $x : A$ za koje $P(x)$.

2.6 Хијерархија универзума и универзум типови

Универзум типови се могу посматрати као типови које настањују други типови. Универзум тип $\mathcal{U}$ омогућава да се исказ „A type“ запише формално као $A : \mathcal{U}$. Поред тога, омогућава да се фамилија типова B над типом A дефинише као функција $B : A \to \mathcal{U}$.

Желимо да типови који могу да се формирају из празног контекста настањују универзум $\mathcal{U}$ (то су, на пример, $\mathbb{0}$, $\mathbb{1}$, и $\mathbb{N}$). Штавише, како универзум

$\mathcal{U}$ настањују и други типови, желимо да универзум $\mathcal{U}$ буде затворен по свим конструкторима који користе типове универзума $\mathcal{U}$. На пример, ако $A : \mathcal{U}$ и $B : A \to \mathcal{U}$, онда $\prod_{(x:A)} B(x) : \mathcal{U}$. Међутим, не сме доћи то тога да универзум настањује сам себе, тј. не сме да важи $\mathcal{U} : \mathcal{U}$. Другим речима, не смемо обезбедити услове настанка раселовог парадокса.

У многим случајевима довољно је постојање једног универзума $\mathcal{U}$, међутим, некада желимо да универзум настањује неки други универзум. Како би избегли Раселов парадокс захтевамо постојање *хијерархије универзума*

$$\mathcal{U}_0, \quad \mathcal{U}_1, \quad \mathcal{U}_2, \quad \ldots \tag{2.3}$$

за коју важе следећа правила:

$$[\mathcal{U}\text{-intro}] \ \frac{}{\Gamma \vdash \mathcal{U}_i : \mathcal{U}_{i+1}} \qquad\qquad [\mathcal{U}\text{-cumul}] \ \frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_{i+1}}$$

Универзум $\mathcal{U}_0$ називамо *базни универзум*. Базни универзум настањују типови који могу да се формирају из празног контекста, као и сви типови чији конструктори користе типове који се већ налазе у базном универзуму. За универзум $\mathcal{U}_i$ има смисла посматрати и $\mathcal{U}_{i+1}$ кога називамо и *универзум следбеник*. Често није битно знати редни број универзума у хијерархији, те се следбеник универзума $\mathcal{U}$ обележава са $\mathcal{U}^+$. За два универзума $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ можемо дефинисати њихову најмању горњу границу $\mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}$. На пример, за $\mathcal{U}_0$ і $\mathcal{U}_1$, најмања горња граница $\mathcal{U}_0 \sqcup \mathcal{U}_1$ је $\mathcal{U}_1$.

2.7 Типови идентитети

Подсетимо се да из дефиниције операције $+_{\mathbb{N}}$ важи $m +_{\mathbb{N}} 0_{\mathbb{N}} \equiv m$. Природно се намеће питање: Да ли важи $0_{\mathbb{N}} +_{\mathbb{N}} m \equiv m$? Јасно је да одговор на ово питање треба да буде позитиван, али то није случај у интуиционистичкој теорији типова. Тиме долазимо до фундаменталног проблема интуиционистичке теорије типова: Шта значи да су елементи неког типа једнаки?

$$\overset{[=\text{-form}]}{\frac{\Gamma \vdash A \text{ type} \qquad \Gamma \vdash x : A \qquad \Gamma \vdash y : A}{\Gamma \vdash x =_A y \text{ type}}} \qquad [=\text{-intro}] \ \frac{\Gamma \vdash A \text{ type} \qquad \Gamma \vdash x : A}{\Gamma \vdash \mathsf{refl}_x : x =_A x}$$

Индукција путање

$$[=\text{-ind}]\quad \frac{\begin{array}{l}\Gamma, x : A, y : A, p : x =_A y \vdash P(x,y,p) \text{ type} \\ \Gamma \vdash f : \prod_{(x:A)} P(x,x,\mathsf{refl}_x)\end{array}}{\Gamma \vdash \mathsf{ind}_= : \prod_{(x,y:A)} \prod_{(p:x=_A y)} P(x,y,p)}$$

$$[=\text{-comp}]\quad \frac{\begin{array}{l}\Gamma, x : A, y : A, p : x =_A y \vdash P(x,y,p) \text{ type} \\ \Gamma \vdash f : \prod_{(x:A)} P(x,x,\mathsf{refl}_x)\end{array}}{\Gamma, x : A \vdash \mathsf{ind}_=(x,x,\mathsf{refl}_x) \equiv f(x) : P(x,x,\mathsf{refl}_x)}$$

Особине типова идентитета

Лема 1. *Нека је A тип у контексту Γ. Тада можемо конструисати функцију*

$$\mathsf{inv}_A : \prod_{(x,y:A)} (x =_A y) \to (y =_A x)$$

индукцијом путање $p : x =_A y$ као $\mathsf{inv}_A(x,x,\mathsf{refl}_x) :\equiv \mathsf{refl}_x$. Функцију inv_A називамо инверз путањи. *Често, за дату путању $p : x =_A y$, њен инверз означавамо са $p^{-1} :\equiv \mathsf{inv}_A(x,y,p)$.*

Доказ. Да би конструисали елемент типа $\prod_{(x,y:A)}(x =_A y) \to (y =_A x)$, конструишемо функцију

$$f(x) : \prod_{(y:A)} (x =_A y) \to (y =_A x)$$

за било који елемент $x : A$. По индукцији путање $p : x =_A y$ довољно је конструисати путању

$$f(x,x,\mathsf{refl}_x) : x =_A x$$

за било који елемент $x : A$. Конструкција ове путање је тривијална и због тога узимамо да је $f(x,x,\mathsf{refl}_x) :\equiv \mathsf{refl}_x$. Коначно, имамо да је

$$\mathsf{inv}_A(x,x,\mathsf{refl}_x) :\equiv \mathsf{refl}_x$$

. □

Лема 2. *Нека је A тип у контексту Γ. Тада можемо конструисати функцију*

$$\mathsf{conc}_A : \prod_{(x,y,z:A)} (x =_A y) \to (y =_A z) \to (x =_A z)$$

индукцијом путање $p : x =_A y$ *као* $\mathsf{conc}_A(x, x, z, \mathsf{refl}_x, q) :\equiv q$. *Функцију* conc_A *називамо* надовезивање путања. *Често, за дате путање* $p : x =_A y$ *и* $q : y =_A z$, *надовезану путању означавамо са* $p \cdot q :\equiv \mathsf{conc}_A(x, y, z, p, q)$.

Доказ. Прво конструишемо функцију

$$f(x) : \prod_{(y:A)} (x =_A y) \to \prod_{(z:A)} (y =_A z) \to (x =_A z)$$

за било који елемент $x : A$. По индукцији путање $p : (x =_A y)$ довољно је конструисати функцију

$$f(x, x, \mathsf{refl}_x) : \prod_{(z:A)} (x =_A z) \to (x =_A z)$$

за било који елемент $x : A$. Даље, довољно је конструисати функцију

$$f(x, x, \mathsf{refl}_x, z) : (x =_A z) \to (x =_A z)$$

за било које елементе $x, z : A$. Конструисање ове функције је тривијална и због тога имамо да је $f(x, x, \mathsf{refl}_x, z, q) :\equiv q$. Коначно, имамо да је

$$\mathsf{conc}_A(x, x, z, \mathsf{refl}_x, q) :\equiv f(x, x, \mathsf{refl}_x, z, q) :\equiv q.$$

□

Лема 3. *Нека је* A *тип, нека су елементи* $x, y, z, w : A$ *и нека су путање* $p : x =_A y$, $q : y =_A z$ *и* $r : z =_A w$ *у контексту* Γ. *Тада важи:*

(i) $\mathsf{refl}_x \cdot p = p$ *и* $p \cdot \mathsf{refl}_y = p$

(ii) $p^{-1} \cdot p = \mathsf{refl}_y$ *и* $p \cdot p^{-1} = \mathsf{refl}_x$

(iii) $(p^{-1})^{-1} = p$

(iv) $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$

(i) *Доказ.* Желимо да конструишемо путању

$$\mathsf{unit_l}(p) : \mathsf{refl}_x \cdot p = p,$$
$$\mathsf{unit_r}(p) : p \cdot \mathsf{refl}_y = p.$$

Индукцијом по путањи $p : x =_A y$ довољно је конструисати

$$\mathsf{unit_l}(\mathsf{refl}_x) : \mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x = \mathsf{refl}_x,$$
$$\mathsf{unit_r}(\mathsf{refl}_x) : \mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x = \mathsf{refl}_x.$$

Обе путање је тривијално конструисати као $\mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_x}$. □

(ii) *Доказ.* Желимо да конструишемо путању

$$\mathsf{inv_l}(p) : p^{-1} \cdot p = \mathsf{refl}_y,$$
$$\mathsf{inv_r}(p) : p \cdot p^{-1} = \mathsf{refl}_x.$$

Индукцијом по путањи $p : x =_A y$ довољно је конструисати путању

$$\mathsf{inv_l}(\mathsf{refl}_x) : \mathsf{refl}_x^{-1} \cdot \mathsf{refl}_x = \mathsf{refl}_x,$$
$$\mathsf{inv_r}(\mathsf{refl}_x) : \mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x^{-1} = \mathsf{refl}_x.$$

Али како је $\mathsf{refl}_x^{-1} \equiv \mathsf{refl}_x$ претходне путање се своде на оне као и у претходном доказу. Због тога обе путање тривијално конструишемо као $\mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_x}$. □

(iii) *Доказ.* Желимо да конструишемо путању

$$\mathsf{doubleInv}(p) : (p^{-1})^{-1} = p.$$

Индукцијом по путањи $p : x =_A y$ довољно је конструисати путању

$$\mathsf{doubleInv}(\mathsf{refl}_x) : (\mathsf{refl}_x^{-1})^{-1} = \mathsf{refl}_x.$$

Али како је $(\mathsf{refl}_x^{-1})^{-1} \equiv \mathsf{refl}_x^{-1} \equiv \mathsf{refl}_x$ претходна путања се своди на $\mathsf{refl}_x = \mathsf{refl}_x$. Због тога путању тривијално конструишемо као $\mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_x}$. □

(iv) *Доказ.* Желимо да конструишемо путању

$$\mathsf{assoc}_A(p, q, r) : (p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r).$$

Индукцијом по путањи $p : x =_A y$ довољно је конструисати путању

$$\mathsf{assoc}_A(\mathsf{refl}_x, q, r) : (\mathsf{refl}_x \cdot q) \cdot r = \mathsf{refl}_x \cdot (q \cdot r)$$

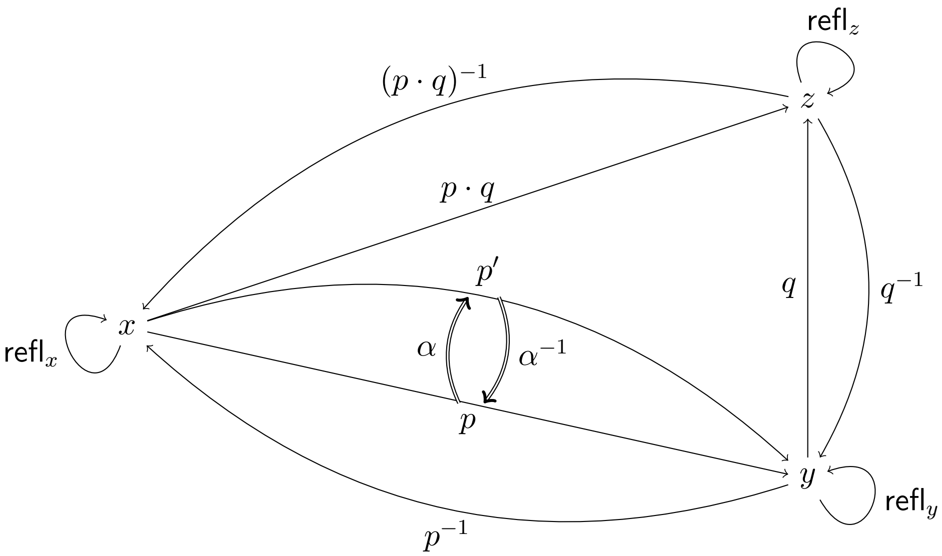
Али како је $\mathsf{refl}_x \cdot q \equiv q$ и $\mathsf{refl}_x \cdot (q \cdot r) \equiv q \cdot r$ претходна путања се своди на

$$\mathsf{assoc}_A(\mathsf{refl}_x, q, r) : q \cdot r = q \cdot r.$$

Због тога путању тривијално конструишемо као $\mathsf{assoc}_A(\mathsf{refl}_x, q, r) :\equiv \mathsf{refl}_{q \cdot r}$.
□

Једнакости	Хомотопија	∞-Групоид
рефлексивност	константна путања	идентички морфизам
симетричност	обртање путања	инверз морфизма
транзитивност	надовезивање путања	композиција морфизама

Табела 2.2: Разне интерпретације особина типова идентитета



Слика 2.3: Групоидална структура типова.

Акције над путањама

Лема 4. *Нека су A и B типови, и нека је $f : A \to B$ функција у контексту Γ. Тада можемо конструисати функцију*

$$\mathsf{ap}_f : \prod_{(x,y:A)} (x =_A y) \to (f(x) =_B f(y))$$

индукцијом путање $p : x =_A y$ као $\mathsf{ap}_f(\mathsf{refl}_x) = \mathsf{refl}_{f(x)}$. Функцију ap_f називамо акција над путањама *функције $f : A \to B$.*

Доказ. Индукцијом по путањи $p : x =_A y$ треба конструисати путању

$$\mathsf{ap}_f(x, x, \mathsf{refl}_x) : f(x) =_B f(x).$$

Тривијално конструишемо ову путању као $\mathsf{ap}_f(x, x, \mathsf{refl}_x) :\equiv \mathsf{refl}_{f(x)}$. □

Лема 5. *Нека су A, B и C типови, нека су елементи $x, y, z : A$ и нека су путање $p : x =_A y$ и $q : y =_A z$ у контексту Γ. Тада важи:*

(i) $\mathsf{ap}_f(p \cdot q) = \mathsf{ap}_f(p) \cdot \mathsf{ap}_f(q)$

(ii) $\mathsf{ap}_f(p^{-1}) = \mathsf{ap}_f(p)^{-1}$

(iii) $\mathsf{ap}_g(\mathsf{ap}_f(p)) = \mathsf{ap}_{g \circ f}(p)$

(iv) $\mathsf{ap}_{\mathsf{id}_A}(p) = p$

Доказ. Доказ изостављамо како је сличан претходним. □

Транспорт

Лема 6. *Нека је A тип и B фамилија типова над A у контексту Γ. Тада можемо конструисати функцију*

$$\mathsf{tr}_B : \prod_{(x,y:A)} (x =_A y) \to B(x) \to B(y)$$

индукцијом путање $p : x =_A y$ као $\mathsf{tr}_B(\mathsf{refl}_x) :\equiv \mathsf{id}_{B(x)}$. Функцију tr_B називамо транспорт *над B.*

Доказ. □

Друге врсте једнакости

Дефиниција 2.7.1. *Простор кодова* над природним бројевима $\mathbb{N}$ се може дефинисати као бинарна релација $\mathsf{code}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathcal{U}_0$ тако да задовољава следеће расуђивачке једнакости:

$$\begin{aligned}
\mathsf{code}_{\mathbb{N}}(0_{\mathbb{N}}, 0_{\mathbb{N}}) &\equiv \mathbb{1} \\
\mathsf{code}_{\mathbb{N}}(0_{\mathbb{N}}, \mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(m)) &\equiv \mathbb{0} \\
\mathsf{code}_{\mathbb{N}}(\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(n), 0_{\mathbb{N}}) &\equiv \mathbb{0} \\
\mathsf{code}_{\mathbb{N}}(\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(n), \mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(m)) &\equiv \mathsf{code}_{\mathbb{N}}(n, m)
\end{aligned}$$

Лема 7. *Простор кодова је рефлексивна релација, тј. можемо конструисати функцију*

$$\mathsf{reflcode}_{\mathbb{N}} : \prod_{(n:\mathbb{N})} \mathsf{code}_{\mathbb{N}}(n, n).$$

Доказ. Функцију конструишемо индукцијом по $n : \mathbb{N}$ као

$$\begin{aligned}\mathsf{reflcode}_{\mathbb{N}}(0_{\mathbb{N}}) &:\equiv \star \\ \mathsf{reflcode}_{\mathbb{N}}(\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(n)) &:\equiv \mathsf{reflcode}_{\mathbb{N}}(n).\end{aligned}$$

□

Лема 8. *За било које природне бројеве $n, m : \mathbb{N}$ важи $m =_{\mathbb{N}} n \to \mathsf{code}_{\mathbb{N}}(m, n)$ и $\mathsf{code}_{\mathbb{N}}(m, n) \to m =_{\mathbb{N}} n$.*

Доказ. Прво конструишемо

$$\mathsf{encode}_{\mathbb{N}} : \prod_{(m,n:\mathbb{N})} m =_{\mathbb{N}} n \to \mathsf{code}_{\mathbb{N}}(m, n).$$

Индукцијом по путањи $p : m =_{\mathbb{N}} n$ треба конструисати

$$\mathsf{encode}_{\mathbb{N}}(m, m, \mathsf{refl}_m) : \mathsf{code}_{\mathbb{N}}(m, m).$$

Што смо констуисали у претходној леми, тако да $\mathsf{encode}_{\mathbb{N}}(m, m, \mathsf{refl}_m) :\equiv \mathsf{reflcode}_{\mathbb{N}}(m)$. Даље конструишемо

$$\mathsf{decode}_{\mathbb{N}} : \prod_{(m,n:\mathbb{N})} \mathsf{code}_{\mathbb{N}}(m, n) \to m =_{\mathbb{N}} n$$

индукцијом по $m : \mathbb{N}$ и $n : \mathbb{N}$. У случају када су оба природна броја нуле, онда $\mathsf{decode}_{\mathbb{N}}(0_{\mathbb{N}}, 0_{\mathbb{N}}, c) : 0_{\mathbb{N}} =_{\mathbb{N}} 0_{\mathbb{N}}$ конструишемо као $\mathsf{decode}_{\mathbb{N}}(0_{\mathbb{N}}, 0_{\mathbb{N}}, c) :\equiv \mathsf{refl}_{0_{\mathbb{N}}}$. У случају када је тачно један од њих нула, тада конструишемо елемент типа $\mathbb{0} \to m =_{\mathbb{N}} n$. Овај елемент је тривијално конструисати правилом индукције празног типа. На крају, у случају када су оба различита од нуле, треба конструисати

$$\mathsf{code}_{\mathbb{N}}(\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(m), \mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(n)) \to \mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(m) =_{\mathbb{N}} \mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(n).$$

Ову конструкцију изводимо на следећи начин:

$$\begin{aligned}\mathsf{code}_{\mathbb{N}}(\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(m), \mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(n)) &\equiv \mathsf{code}_{\mathbb{N}}(m, n) && \text{(by 2.7.1)} \\ &\to m =_{\mathbb{N}} n && (\text{by } \mathsf{decode}_{\mathbb{N}}(m, n)) \\ &\to \mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(m) =_{\mathbb{N}} \mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(n). && (\text{by } \mathsf{ap}_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}})\end{aligned}$$

Коначно, завршавамо конструкцију са

$$\mathsf{decode}_{\mathbb{N}}(\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(m), \mathsf{succ}_{\mathbb{N}}(n), c) :\equiv \mathsf{ap}_{\mathsf{succ}_{\mathbb{N}}}(\mathsf{decode}_{\mathbb{N}}(m, n, c)).$$

□

2.8 Ekvivalentnosti

Functional extentionality

Ekvivalentnosti i univerzalna osobina

2.9 Aksioma univalentnosti

Neke posledice univalentnosti

Глава 3

Агда

Глава 4

Закључак

Биографија аутора

Вук Стефановић Караџић (*Тршић, 26. октобар/6. новембар 1787. — Беч, 7. фебруар 1864.*) био је српски филолог, реформатор српског језика, сакупљач народних умотворина и писац првог речника српског језика. Вук је најзначајнија личност српске књижевности прве половине XIX века. Стекао је и неколико почасних доктората. Учествовао је у Првом српском устанку као писар и чиновник у Неготинској крајини, а након слома устанка преселио се у Беч, 1813. године. Ту је упознао Јернеја Копитара, цензора словенских књига, на чији је подстицај кренуо у прикупљање српских народних песама, реформу ћирилице и борбу за увођење народног језика у српску књижевност. Вуковим реформама у српски језик је уведен фонетски правопис, а српски језик је потиснуо славеносрпски језик који је у то време био језик образованих људи. Тако се као најважније године Вукове реформе истичу 1818., 1836., 1839., 1847. и 1852.