



УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Андрија Д. Урошевић

ХОМОТОПНА ТЕОРИЈА ТИПОВА

мастер рад

Београд, 2024.



**Ментор:**

др Сана СТОЈАНОВИЋ-ЂУРЂЕВИЋ, доцент  
Универзитет у Београду, Математички факултет

**Чланови комисије:**

др Филип МАРИЋ, редовни професор  
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Лаза ЛАЗИЋ, доцент  
Универзитет у Београду, Математички факултет

**Датум одбране:** 29. фебруар 2024.



*Мами, пати и геги*

**Наслов мастер рада:** Хомотопна теорија типова

**Резиме:** Напиши апстракт на крају

**Кључне речи:** хомотопна теорија типова, интерактивно доказивање, агда

# Садржај

<b>1</b>	<b>Увод</b>	<b>2</b>
1.1	Интуиционистичка теорија типова . . . . .	3
1.2	Типови идентитети . . . . .	10
1.3	Homotopni nivoi . . . . .	10
1.4	Ekvivalentnosti . . . . .	10
1.5	Aksioma univalentnosti . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Разрада</b>	<b>11</b>
2.1	Neki deo HoTTa koji će se formalizovati . . . . .	11
2.2	Neki drugi deo HoTTa koji će se formalizovati . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Закључак</b>	<b>12</b>
	<b>Литература</b>	<b>13</b>





# Глава 1

## Увод

- Хомотопна теорија типова = интуиционистичка теорија типова + високи индуктивни типови + аксиома унивалентности.
- Пер Мартин-Луф теорија типова се заснива на интуиционистичком програму који је настао по Брауверу.
- Математичко резтоновање је људска активност и математика је језик у коме се математичке идеје преносе.
- Фундаментална људска активност.
- Конструктивна теорија је *доказно релевантна*, тј. доказ је математички објекат као и сваки други.
- Тврђења можемо интерпретирати као типове, те ће доказ представљати *проверу типа*, тј. конструисање терма одређеног типа. (Јако битна уврнута идеја)
- Запажање: Хомотопна теорија и теорија типова представљају исту ствар.
- Хомотопна теорија се бави непрекидним пресликавањима која су *хомотопна* између себе, тј. могу се “непрекидно деформисати” једна у друге.
- Тројство израчуњивости: Програмерска интерпретација, хомотопна интерпретација и логичка интерпретација.
- Типско расуђивање  $t : T$  читамо као  $t$  је терм типа  $T$  или терм  $t$  настањује  $T$ . У програмерској интерпретацији тип представља тип, док терм

неког типа представља израз тог типа. У хомотопној интерпретацији тип представља простор, док терм неког типа представља тачку у том простору.

- Пример јединичног типа **1**: јединични (**unit** у програмерском смислу), јединствени (*The* у логичком смислу), и контрактибилни (у хомотопном смислу) тип.
- Интенционални и екстенционални типови? (нешто чуно, проучити)
- Раселов парадокс као мотивација за теорију типова.

## 1.1 Интуиционистичка теорија типова

Интуиционистичка теорија типова или Пер Мартин-Луф теорија типова је математичка теорија конструкција. Тип представља врсту конструкције. Елемент, терм или тачка представља резултат конструкције неког типа. Прецизније, елемент  $a$  типа  $A$  записујемо као  $a : A$ , и кажемо да елемент  $a$  настањује тип  $A$ . Битно је напоменути да терм не може да “живи самостално” тј. терм увек мора да настањује неки тип.

Конструкција типова се састоји из низа дедуктивних *правила закључивања*. Правило закључивања записујемо као

$$\frac{\mathcal{H}_1 \quad \mathcal{H}_2 \quad \dots \quad \mathcal{H}_n}{C}$$

где расуђивања  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_n$  називамо *премисе* или *хипотезе*, а расуђивање  $C$  називамо *закључак*.

**Дефиниција 1.1.1.** Свако *расуђивање* је облика  $\Gamma \vdash \mathcal{J}$ , где је  $\Gamma$  *контекст* и  $\mathcal{J}$  *теза* расуђивања. Теза може имати четири врсте расуђивања и то су:

- (i)  $A$  је (*добро-формиран*) *тип* у контексту  $\Gamma$ .

$$\Gamma \vdash A \text{ type}$$

- (ii)  $A$  и  $B$  су *расуђивачки једнаки* *типови* у контексту  $\Gamma$ .

$$\Gamma \vdash A \equiv B \text{ type}$$

(iii)  $a$  је елементи типа  $A$  у контексту  $\Gamma$ .

$$\Gamma \vdash a : A$$

(iv)  $a$  и  $b$  су расуђивачки једнаки елементи типа  $A$  у контексту  $\Gamma$ .

$$\Gamma \vdash a \equiv_A b : A$$

користећи правила закључивања теорије типова.

Контекст је коначна листа *декларисаних променљивих* облика

$$x_1 : A_1, x_2 : A_2(x_1), \dots, x_n : A_n(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

под условом да за свако  $1 \leq k \leq n$  можемо да изведемо расуђивање

$$x_1 : A_1, x_2 : A_2(x_1), \dots, x_{k-1} : A_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-2}) \vdash A_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}),$$

применом правила закључивања.

## Правила закључивања

Пример неких правила закључивања:

$$\frac{\Gamma \vdash A \text{ type}}{\Gamma \vdash A \equiv A \text{ type}} \quad \frac{\Gamma \vdash A \equiv A' \text{ type}}{\Gamma \vdash A' \equiv A \text{ type}} \quad \frac{\Gamma \vdash A \equiv A' \text{ type} \quad \Gamma \vdash A' \equiv A'' \text{ type}}{\Gamma \vdash A \equiv A'' \text{ type}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash a \equiv_A a : A} \quad \frac{\Gamma \vdash a \equiv_A a' : A}{\Gamma \vdash a' \equiv_A a : A} \quad \frac{\Gamma \vdash a \equiv_A a' : A \quad \Gamma \vdash a' \equiv_A a'' : A}{\Gamma \vdash a \equiv_A a'' : A}$$

Исцрпна листа правила закључивања у интуиционистичкој теорији типова се може наћи у [8].

## Зависни типови

Из дефиниције контекста можемо видети да неки типови зависе од других термова. На пример,  $A_2(x_1)$  зависи од  $x_1 : A_1$ , тј. за разне термове  $x_1 : A_1$  имамо разне типове  $A_2(x_1)$ . Ову идеју можемо уопштити помоћу следећих дефиниција:

**Дефиниција 1.1.2.** Нека је тип  $A$  у контексту  $\Gamma$ . *Фамилија* типова над  $A$  у контексту  $\Gamma$  је тип  $B(x)$  у контексту  $\Gamma, x : A$ , тј.

$$\Gamma, x : A \vdash B(x) \text{ type.}$$

Кажемо да је  $B$  фамилија типова над  $A$  у контексту  $\Gamma$ . Алтернативно, кажемо да је  $B(x)$  тип индексирани са  $x : A$  у контексту  $\Gamma$ .

**Дефиниција 1.1.3.** Нека је  $B$  фамилија типова над  $A$  у контексту  $\Gamma$ . *Секција* фамилије  $B$  над типом  $A$  у контексту  $\Gamma$  је елемент типа  $B(x)$  у контексту  $\Gamma, x : A$ , тј.

$$\Gamma, x : A \vdash b(x) : B(x).$$

Кажемо да је  $b$  секција фамилије  $B$  над  $A$  у контексту  $\Gamma$ . Алтернативно, кажемо да је  $b(x)$  елемент типа  $B(x)$  индексирани са  $x : A$  у контексту  $\Gamma, x : A$ .

**Дефиниција 1.1.4.** Нека је  $B$  фамилија типова над  $A$  у контексту  $\Gamma$ , и нека је  $a : A$ . Кажемо да је  $B[a/x]$  *влакно* од  $B$  за параметар  $a$ , где  $B[a/x]$  представља замену свих појављивања  $x$  у  $B$  са  $a$ . Нит од  $B$  за параметар  $a$  краће записујемо као  $B(a)$ .

**Дефиниција 1.1.5.** Нека је  $b$  секција фамилије типова  $B$  над  $A$  у контексту  $\Gamma$ . Кажемо да је  $b[a/x]$  *вредност* од  $b$  за параметар  $a$ , где  $b[a/x]$  представља замену свих појављивања  $x$  у  $b$  са  $a$ . Такође, вредност од  $b$  за параметар  $a$  краће записујемо као  $b(a)$ .

## Типови зависних функција

У математици заснованој на теорији скупова функција  $f : A \rightarrow B$  дефинисана је над одређеним доменом  $A$  и кодоменом  $B$ . У теорији типова то не мора да буде случај, тј. кодомен може зависити од елемента над којим се функција примељује. Прецизније, посматрајмо секцију  $b$  фамилије типова  $B$  над  $A$  у контексту  $\Gamma$ . Један начин је да  $b$  посматрамо као функцију  $x \mapsto b(x)$ . Тада  $b(x)$  настањује тип  $B(x)$  који зависи од  $x : A$ . Због тога за разне елементе  $x : A$  домена имамо разне кодомене, те има смисла говорити о типу *зависних функција*  $\prod_{(x:A)} B(x)$ .

Спецификација типа зависних функција  $\prod_{(x:A)} B(x)$  је дата следећим правилима закључивања:

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B(x) \text{ type}}{\Gamma \vdash \prod_{(x:A)} B(x) \text{ type}} \quad \frac{\Gamma, x : A \vdash b(x) : B(x)}{\Gamma \vdash \lambda x.b(x) : \prod_{(x:A)} B(x)} \quad \frac{\Gamma \vdash f : \prod_{(x:A)} B(x)}{\Gamma, x : A \vdash f(x) : B(x)}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b(x) : B(x)}{\Gamma \vdash (\lambda y.b(y))(x) \equiv b(x) : B(x)} \quad \frac{\Gamma \vdash f : \prod_{(x:A)} B(x)}{\Gamma \vdash \lambda x.f(x) \equiv f : \prod_{(x:A)} B(x)}$$

Специјала случај типа зависних функција је тип (уобичајених) *функција*  $A \rightarrow B$ . Уколико су типови  $A$  и  $B$  у контексту  $\Gamma$ , тј. тип  $B$  не зависи од елемената типа  $A$ , тада  $\prod_{(x:A)} B$  представља тип (уобичајених) функција.

**Дефиниција 1.1.6.** Тип (уобичајених) *функција*  $A \rightarrow B$  дефинишемо као:

$$A \rightarrow B := \prod_{(x:A)} B. \quad (1.1)$$

Ако је  $f : A \rightarrow B$  функција, тада је  $A$  *домен*, а  $B$  *кодомен* функције  $f$ .

**Дефиниција 1.1.7.** За сваки тип  $A$  дефинишемо *функцију идентитета*  $\text{id}_A : A \rightarrow A$  као  $\text{id}_A := \lambda x.x$ .

**Дефиниција 1.1.8.** За свака три типа  $A$ ,  $B$ , и  $C$  дефинишемо *композицију*  $\text{comp} : (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C$  као  $\text{comp} := \lambda g.\lambda f.\lambda x.g(f(x))$ .

Може се показати да је композиција асоцијативна, као и да је функција идентитета неутрал за композицију функција. Због сагласности типова имамо леви неутрал  $\text{id}_B$  и десни неутрал  $\text{id}_A$ .

## Индуктивни типови

Поред типова зависних функција постоји и класа *индуктивних типова*. Сваки индуктивни тип се дефинише помоћу следеће спецификације:

- (i) *Конструисања* типа описује како се формира тип, и на који начин се уводе нови канонични елементи.
- (ii) *Индуктивни принципи* описује податке који су потреби за конструкцију секције произвољне фамилије типова.

- (iii) Правила *израчунавања* захтевају да се индуктивно дефинисана секција слаже по конструкцији са подацима који је дефинишу.

Сада ће бити дате спецификације за неке уобичајене индуктивне типове.

### Тип природних бројева

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\mathbb{N}\text{-form}]}{\vdash \mathbb{N} \text{ type}} \qquad \frac{[\mathbb{N}\text{-intro}_{0_{\mathbb{N}}}] }{\vdash 0_{\mathbb{N}} : \mathbb{N}} \qquad \frac{[\mathbb{N}\text{-intro}_{\text{succ}_{\mathbb{N}}}] }{\vdash \text{succ}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}} \\
 \\
 \frac{\begin{array}{c} [\mathbb{N}\text{-ind}] \\ \Gamma, n : \mathbb{N} \vdash P(n) \text{ type} \\ \Gamma \vdash p_{0_{\mathbb{N}}} : P(0_{\mathbb{N}}) \\ \Gamma \vdash p_{\text{succ}_{\mathbb{N}}} : \prod_{(n:\mathbb{N})} P(n) \rightarrow P(\text{succ}_{\mathbb{N}}(n)) \end{array}}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\mathbb{N}}(p_{0_{\mathbb{N}}}, p_{\text{succ}_{\mathbb{N}}}) : \prod_{(n:\mathbb{N})} P(n)} \quad \frac{\begin{array}{c} [\mathbb{N}\text{-comp}_{0_{\mathbb{N}}}] \\ \Gamma, n : \mathbb{N} \vdash P(n) \text{ type} \\ \Gamma \vdash p_{0_{\mathbb{N}}} : P(0_{\mathbb{N}}) \\ \Gamma \vdash p_{\text{succ}_{\mathbb{N}}} : \prod_{(n:\mathbb{N})} P(n) \rightarrow P(\text{succ}_{\mathbb{N}}(n)) \end{array}}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\mathbb{N}}(p_{0_{\mathbb{N}}}, p_{\text{succ}_{\mathbb{N}}}, 0_{\mathbb{N}}) \equiv p_{0_{\mathbb{N}}} : P(0_{\mathbb{N}})} \\
 \\
 \frac{\begin{array}{c} [\mathbb{N}\text{-comp}_{\text{succ}_{\mathbb{N}}}] \\ \Gamma, n : \mathbb{N} \vdash P(n) \text{ type} \\ \Gamma \vdash p_{0_{\mathbb{N}}} : P(0_{\mathbb{N}}) \\ \Gamma \vdash p_{\text{succ}_{\mathbb{N}}} : \prod_{(n:\mathbb{N})} P(n) \rightarrow P(\text{succ}_{\mathbb{N}}(n)) \end{array}}{\Gamma, n : \mathbb{N} \vdash \text{ind}_{\mathbb{N}}(p_{0_{\mathbb{N}}}, p_{\text{succ}_{\mathbb{N}}}, \text{succ}_{\mathbb{N}}(n)) \equiv p_{\text{succ}_{\mathbb{N}}}(n, \text{ind}_{\mathbb{N}}(p_{0_{\mathbb{N}}}, p_{\text{succ}_{\mathbb{N}}}, n)) : P(\text{succ}_{\mathbb{N}}(n))}
 \end{array}$$

### Празни тип

$$\frac{[\mathbb{0}\text{-form}]}{\vdash \mathbb{0} \text{ type}} \quad \frac{[\mathbb{0}\text{-ind}]}{\vdash \mathbb{0} \text{ type}} \quad \frac{[\mathbb{1}\text{-ind}]}{\frac{\Gamma, x : \mathbb{0} \vdash P(x) \text{ type}}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\mathbb{0}} : \prod_{(x:\mathbb{0})} P(x)}}$$

### Јединични тип

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\mathbb{1}\text{-form}]}{\vdash \mathbb{1} \text{ type}} \qquad \frac{[\mathbb{1}\text{-intro}_{\star}]}{\vdash \star : \mathbb{1}} \\
 \\
 \frac{\begin{array}{c} [\mathbb{1}\text{-ind}] \\ \Gamma, x : \mathbb{1} \vdash P(x) \text{ type} \\ \Gamma \vdash p_{\star} : P(\star) \end{array}}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\mathbb{1}}(p_{\star}) : \prod_{(x:\mathbb{1})} P(x)} \quad \frac{\begin{array}{c} [\mathbb{1}\text{-comp}] \\ \Gamma, x : \mathbb{1} \vdash P(x) \text{ type} \\ \Gamma \vdash p_{\star} : P(\star) \end{array}}{\Gamma \vdash \text{ind}_{\mathbb{1}}(p_{\star}, \star) \equiv p_{\star} : P(x)}
 \end{array}$$

### Типови копроизвода

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Gamma \vdash A \text{ type}, B \text{ type}}{\Gamma \vdash A + B \text{ type}} \quad \frac{\Gamma \vdash x : A}{\Gamma \vdash \text{inl}(x) : A + B} \quad \frac{\Gamma \vdash y : B}{\Gamma \vdash \text{inr}(y) : A + B} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \Gamma, z : A + B \vdash P(z) \text{ type} \\
 \Gamma \vdash p_{\text{inl}} : \prod_{(x:A)} P(\text{inl}(x)) \\
 \Gamma \vdash p_{\text{inr}} : \prod_{(y:B)} P(\text{inr}(y)) \\
 \hline
 \Gamma \vdash \text{ind}_+(p_{\text{inl}}, p_{\text{inr}}) : \prod_{(z:A+B)} P(z)
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \Gamma, z : A + B \vdash P(z) \text{ type} \\
 \Gamma \vdash p_{\text{inl}} : \prod_{(x:A)} P(\text{inl}(x)) \\
 \Gamma \vdash p_{\text{inr}} : \prod_{(y:B)} P(\text{inr}(y)) \\
 \hline
 \Gamma \vdash \text{ind}_+(p_{\text{inl}}, p_{\text{inr}}, \text{inl}(x)) = p_{\text{inl}}(x) : P(z) \\
 \Gamma \vdash \text{ind}_+(p_{\text{inl}}, p_{\text{inr}}, \text{inr}(y)) = p_{\text{inr}}(y) : P(z)
 \end{array}
 \end{array}$$

Специјални случај типа копроизвода је Буловски тип  $2 := 1 + 1$ , чије једине елементе дефинишемо као  $\text{true} := \text{inl}(\star)$ ,  $\text{false} := \text{inr}(\star)$ .

### Типови зависних парова

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Gamma, x : A \vdash B(x) \text{ type}}{\Gamma \vdash \sum_{(x:A)} B(x) \text{ type}} \quad \frac{\Gamma, x : A \vdash y(x) : B(x)}{\Gamma \vdash (x, y(x)) : \sum_{(x:A)} B(x)} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \Gamma, (x, y) : \sum_{(x:A)} B(x) \vdash P((x, y)) \text{ type} \\
 \Gamma \vdash p : \prod_{(x:A)} \prod_{(y:B(x))} P((x, y)) \\
 \hline
 \Gamma \vdash \text{ind}_\Sigma(p) : \prod_{(z:\sum_{(x:A)} B(x))} P(z)
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \Gamma, (x, y) : \sum_{(x:A)} B(x) \vdash P((x, y)) \text{ type} \\
 \Gamma \vdash p : \prod_{(x:A)} \prod_{(y:B(x))} P((x, y)) \\
 \hline
 \Gamma \vdash (x, y) : \sum_{(x:A)} B(x) \vdash \text{ind}_\Sigma(p, (x, y)) \equiv p(x, y) : P((x, y))
 \end{array}
 \end{array}$$

**Дефиниција 1.1.9.** Нека је  $B$  фамилија типова над  $A$ . Тада тип  $\text{pr}_1 : \sum_{(x:A)} B(x) \rightarrow A$  *пројекције на први елемент* дефинишемо као:

$$\text{pr}_1((a, b)) := a, \quad (1.2)$$

а тип  $\text{pr}_2 : \prod_{z:\sum_{(x:A)} B(x)} B(\text{pr}_1(z))$  *пројекције на други елемент* дефинишемо као:

$$\text{pr}_2((a, b)) := b. \quad (1.3)$$



Искази	Типови
$\perp$	$\emptyset$
$\top$	$\mathbb{1}$
$A \vee B$	$A + B$
$A \wedge B$	$A \times B$
$A \implies B$	$A \rightarrow B$
$A \iff B$	$(A \rightarrow B) \times (B \rightarrow A)$
$\neg A$	$A \rightarrow \emptyset$
$\forall x.P(x)$	$\prod_{(x:A)} P(x)$
$\exists x.P(x)$	$\sum_{(x:A)} P(x)$

Табела 1.1: Кари-Хавардова интерпретација

Специјални случај типа зависних парова је тип (независних) *парова* или (Декартов) *производ*  $A \times B := \sum_{(x:A)} B$ .

## Хијерархија универзума и универзум типови

Hmm, da li ovo raspisivati?

## Искази као типови

Кари-Хавардова интерпретација посматра исказе као типове, доказе као елементе типова, и предикате као фамилије типова. Да би показали да је исказ тачан у теорији типова треба конструисати елемент који настањује одговарајући тип. У табели 1.1 приказани су искази заједно са њиховим одговарајућом интерпретацијом у теорији типова.

Прокоментаришимо неке интерпретације из табеле 1.1. Да би показали да важи  $A \implies B$  треба претпоставити да важи  $A$  и доказати да важи  $B$ . У теорији типова треба конструисати елемент типа  $A \rightarrow B$ , тј. треба конструисати елемент типа  $B$  који потенцијално користи претпостављени елемент типа  $A$ . Слично, да би показали  $\exists x.P(x)$  у теорији типова треба конструисати елемент типа  $\sum_{(x:A)} P(x)$ . У овом случају теорија типова нам даје и више од тога. Наиме,  $P$  је фамилија типова, што значи да  $P(x)$  не мора да буде типа  $\mathbb{2}$ , тј.  $P$  не мора да буде предикат. Поред тога, тип  $\sum_{(x:A)} P(x)$  можемо схватити као тип свих елемената  $x : A$  за које  $P(x)$ .

## 1.2 Типови идентитети

Homotopna invarijantnost

Transport

Indukcija putanje

Akcije nad putanjama

## 1.3 Homotopni nivoi

Kontraktibilnost

n types

Osobina vs. struktura

Trunkacija

Logika

## 1.4 Ekvivalentnosti

Functional extentionality

Ekvivalentnosti i univerzalna osobina

## 1.5 Aksioma univalentnosti

Neke posledice univalentnosti

## Глава 2

### Разрада

2.1 Neki deo HoTTa koji će se formalizovati

2.2 Neki drugi deo HoTTa koji će se  
formalizovati

## Глава 3

## Закључак

# Литература

- [1] Guillaume Brunerie и др. *Homotopy Type Theory in Agda*. URL: <https://github.com/HoTT/HoTT-Agda>.
- [2] Cyril Cohen и др. *Cubical Type Theory: a constructive interpretation of the univalence axiom*. 2016. arXiv: 1611.02108 [cs.LO].
- [3] Thierry Coquand, Simon Huber и Anders Mörtberg. *On Higher Inductive Types in Cubical Type Theory*. 2018. arXiv: 1802.01170 [cs.LO].
- [4] Martín Hötzel Escardó. „Introduction to univalent foundations of mathematics with Agda”. У: *arXiv preprint arXiv:1911.00580* (2019).
- [5] Jackson Macor. *A brief introduction to type theory and the univalence axiom*. 2015.
- [6] Per Martin-Löf и Giovanni Sambin. *Intuitionistic type theory*. Св. 9. Bibliopolis Naples, 1984.
- [7] Ulf Norell. „Dependently typed programming in Agda”. У: *Proceedings of the 4th international workshop on Types in language design and implementation*. 2009, стр. 1–2.
- [8] Egbert Rijke. *Introduction to Homotopy Type Theory*. 2022. arXiv: 2212.11082 [math.LO].
- [9] The Univalent Foundations Program. *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. Institute for Advanced Study: <https://homotopytypetheory.org/book>, 2013.
- [10] Andrea Vezzosi, Anders Mörtberg и Andreas Abel. „Cubical Agda: A dependently typed programming language with univalence and higher inductive types”. У: *Journal of Functional Programming* 31 (2021), e8.

- [11] Vladimir Voevodsky, Benedikt Ahrens, Daniel Grayson и др. *UniMath — a computer-checked library of univalent mathematics*. available at <http://unimath.org>. DOI: 10.5281/zenodo.7848572. URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.7848572>.
- [12] Philip Wadler. „Propositions as Types”. У: *Commun. ACM* 58.12 (НОВ. 2015), стр. 75–84. ISSN: 0001-0782. DOI: 10.1145/2699407. URL: <https://doi.org/10.1145/2699407>.

## *ЛИТЕРАТУРА*

---

# Биографија аутора

**Вук Стефановић Караџић** (*Трипић, 26. октобар/6. новембар 1787. — Беч, 7. фебруар 1864.*) био је српски филолог, реформатор српског језика, сакупљач народних умотворина и писац првог речника српског језика. Вук је најзначајнија личност српске књижевности прве половине XIX века. Стекао је и неколико почасних доктората. Учествовао је у Првом српском устанку као писар и чиновник у Неготинској крајини, а након слома устанка преселио се у Беч, 1813. године. Ту је упознао Јернеја Kopитара, цензора словенских књига, на чији је подстицај кренуо у прикупљање српских народних песама, реформу ћирилице и борбу за увођење народног језика у српску књижевност. Вуковим реформама у српски језик је уведен фонетски правопис, а српски језик је потиснуо славеносрпски језик који је у то време био језик образованих људи. Тако се као најважније године Вукове реформе истичу 1818., 1836., 1839., 1847. и 1852.