

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Андрија Д. Урошевић

ХОМОТОПНА ТЕОРИЈА ТИПОВА

мастер рад

Београд, 2024.

Ментор:

др Сана СТОЈАНОВИЋ-ЂУРЂЕВИЋ, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Филип МАРИЋ, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Лаза ЛАЗИЋ, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: 29. фебруар 2024.

Мами, пати и геги

Наслов мастер рада: Хомотопна теорија типова

Резиме: Напиши апстракт на крају

Кључне речи: хомотопна теорија типова, интерактивно доказивање, агда

Садржај

1	Увод	2
1.1	Интуиционистичка теорија типова	3
1.2	Tipovi identiteti	8
1.3	Homotopni nivoi	8
1.4	Ekvivalentnosti	8
1.5	Aksioma univalentnosti	8
2	Разрада	9
2.1	Neki deo HoTTa koji će se formalizovati	9
2.2	Neki drugi deo HoTTa koji će se formalizovati	9
3	Закључак	10
	Литература	11

Глава 1

Увод

- Хомотопна теорија типова = интуиционистичка теорија типова + високи индуктивни типови + аксиома унивалентности.
- Пер Мартин-Луф теорија типова се заснива на интуиционистичком програму који је настао по Брауверу.
- Математичко резтоновање је људска активност и математика је језик у коме се математичке идеје преносе.
- Фундаментална људска активност.
- Конструктивна теорија је *доказно релевантна*, тј. доказ је математички објекат као и сваки други.
- Тврђења можемо интерпретирати као типове, те ће доказ представљати *проверу типа*, тј. конструисање терма одређеног типа. (Јако битна уврнута идеја)
- Запажање: Хомотопна теорија и теорија типова представљају исту ствар.
- Хомотопна теорија се бави непрекидним пресликавањима која су *хомотопна* између себе, тј. могу се “непрекидно деформисати” једна у друге.
- Тројство израчуњивости: Програмерска интерпретација, хомотопна интерпретација и логичка интерпретација.
- Типско расуђивање $t : T$ читамо као t је терм типа T или терм t настањује T . У програмерској интерпретацији тип представља тип, док терм

неког типа представља израз тог типа. У хомотопној интерпретацији тип представља простор, док терм неког типа представља тачку у том простору.

- Пример јединичног типа **1**: јединични (**unit** у програмерском смислу), јединствени (*The* у логичком смислу), и контрактибилни (у хомотопном смислу) тип.
- Интенционални и екстенционални типови? (нешто чуно, проучити)
- Раселов парадокс као мотивација за теорију типова.

1.1 Интуиционистичка теорија типова

Интуиционистичка теорија типова или Пер Мартин-Луф теорија типова је математичка теорија конструкција. Тип представља врсту конструкције. Елемент, терм или тачка представља резултат конструкције неког типа. Прецизније, елемент a типа A записујемо као $a : A$, и кажемо да елемент a настањује тип A . Битно је напоменути да терм не може да “живи самостално” тј. терм увек мора да настањује неки тип.

Конструкција типова се састоји из низа дедуктивних *правила закључивања*. Правило закључивања записујемо као

$$\frac{\mathcal{H}_1 \quad \mathcal{H}_2 \quad \dots \quad \mathcal{H}_n}{C}$$

где расуђивања $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_n$ називамо *премисе* или *хипотезе*, а расуђивање C називамо *закључак*.

Дефиниција 1.1.1. Свако *расуђивање* је облика $\Gamma \vdash \mathcal{J}$, где је Γ *контекст* и \mathcal{J} *теза* расуђивања. Теза може имати четири врсте расуђивања и то су:

- (i) A је (*добро-формиран*) *тип* у контексту Γ .

$$\Gamma \vdash A \text{ type}$$

- (ii) A и B су *расуђивачки једнаки* *типови* у контексту Γ .

$$\Gamma \vdash A \equiv B \text{ type}$$

(iii) a је елементи типа A у контексту Γ .

$$\Gamma \vdash a : A$$

(iv) a и b су расуђивачки једнаки елементи типа A у контексту Γ .

$$\Gamma \vdash a \equiv_A b : A$$

користећи правила закључивања теорије типова.

Контекст је коначна листа *декларисаних променљивих* облика

$$x_1 : A_1, x_2 : A_2(x_1), \dots, x_n : A_n(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

под условом да за свако $1 \leq k \leq n$ можемо да изведемо расуђивање

$$x_1 : A_1, x_2 : A_2(x_1), \dots, x_{k-1} : A_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-2}) \vdash A_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}),$$

применом правила закључивања.

Правила закључивања

Пример неких правила закључивања:

$$\frac{\Gamma \vdash A \text{ type}}{\Gamma \vdash A \equiv A \text{ type}} \quad \frac{\Gamma \vdash A \equiv A' \text{ type}}{\Gamma \vdash A' \equiv A \text{ type}} \quad \frac{\Gamma \vdash A \equiv A' \text{ type} \quad \Gamma \vdash A' \equiv A'' \text{ type}}{\Gamma \vdash A \equiv A'' \text{ type}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash a \equiv_A a : A} \quad \frac{\Gamma \vdash a \equiv_A a' : A}{\Gamma \vdash a' \equiv_A a : A} \quad \frac{\Gamma \vdash a \equiv_A a' : A \quad \Gamma \vdash a' \equiv_A a'' : A}{\Gamma \vdash a \equiv_A a'' : A}$$

Исцрпна листа правила закључивања у интуиционистичкој теорији типова се може наћи у [2].

Зависни типови

Из дефиниције контекста можемо видети да неки типови зависе од других термова. На пример, $A_2(x_1)$ зависи од $x_1 : A_1$, тј. за разне термове $x_1 : A_1$ имамо разне типове $A_2(x_1)$. Ову идеју можемо уопштити помоћу следећих дефиниција:

Дефиниција 1.1.2. Нека је тип A у контексту Γ . *Фамилија* типова над A у контексту Γ је тип $B(x)$ у контексту $\Gamma, x : A$, тј.

$$\Gamma, x : A \vdash B(x) \text{ type.}$$

Кажемо да је B фамилија типова над A у контексту Γ . Алтернативно, кажемо да је $B(x)$ тип индексирани са $x : A$ у контексту Γ .

Дефиниција 1.1.3. Нека је B фамилија типова над A у контексту Γ . *Секција* фамилије B над типом A у контексту Γ је елемент типа $B(x)$ у контексту $\Gamma, x : A$, тј.

$$\Gamma, x : A \vdash b(x) : B(x).$$

Кажемо да је b секција фамилије B над A у контексту Γ . Алтернативно, кажемо да је $b(x)$ елемент типа $B(x)$ индексирани са $x : A$ у контексту $\Gamma, x : A$.

Дефиниција 1.1.4. Нека је B фамилија типова над A у контексту Γ , и нека је $a : A$. Кажемо да је $B[a/x]$ *влакно* од B за параметар a , где $B[a/x]$ представља замену свих појављивања x у B са a . Нит од B за параметар a краће записујемо као $B(a)$.

Дефиниција 1.1.5. Нека је b секција фамилије типова B над A у контексту Γ . Кажемо да је $b[a/x]$ *вредност* од b за параметар a , где $b[a/x]$ представља замену свих појављивања x у b са a . Такође, вредност од b за параметар a краће записујемо као $b(a)$.

Типови зависних функција

У математици заснованој на теорији скупова функција $f : A \rightarrow B$ дефинисана је над одређеним доменом A и кодоменом B . У теорији типова то не мора да буде случај, тј. кодомен може зависити од елемента над којим се функција примењује. Прецизније, посматрајмо секцију b фамилије типова B над A у контексту Γ . Један начин је да b посматрамо као функцију $x \mapsto b(x)$. Тада $b(x)$ настањује тип $B(x)$ који зависи од $x : A$. Због тога за разне елементе $x : A$ домена имамо разне кодомене, те има смисла говорити о типу *зависних функција* $\prod_{(x:A)} B(x)$.

Спецификација типа зависних функција $\prod_{(x:A)} B(x)$ је дата следећим правилима закључивања:

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B(x) \text{ type}}{\Gamma \vdash \prod_{(x:A)} B(x) \text{ type}} \quad \frac{\Gamma, x : A \vdash b(x) : B(x)}{\Gamma \vdash \lambda x.b(x) : \prod_{(x:A)} B(x)} \quad \frac{\Gamma \vdash f : \prod_{(x:A)} B(x)}{\Gamma, x : A \vdash f(x) : B(x)}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b(x) : B(x)}{\Gamma \vdash (\lambda y.b(y))(x) \equiv b(x) : B(x)} \quad \frac{\Gamma \vdash f : \prod_{(x:A)} B(x)}{\Gamma \vdash \lambda x.f(x) \equiv f : \prod_{(x:A)} B(x)}$$

Специјала случај типа зависних функција је тип (уобичајених) *функција* $A \rightarrow B$. Уколико су типови A и B у контексту Γ , тј. тип B не зависи од елемената типа A , тада $\prod_{(x:A)} B$ представља тип (уобичајених) функција.

Дефиниција 1.1.6. Тип (уобичајених) *функција* $A \rightarrow B$ дефинишемо као:

$$A \rightarrow B := \prod_{(x:A)} B. \quad (1.1)$$

Ако је $f : A \rightarrow B$ функција, тада је A *домен*, а B *кодомен* функције f .

Дефиниција 1.1.7. За сваки тип A дефинишемо *функцију идентитета* $\text{id}_A : A \rightarrow A$ као $\text{id}_A := \lambda x.x$.

Дефиниција 1.1.8. За свака три типа A , B , и C дефинишемо *композицију* $\text{comp} : (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C$ као $\text{comp} := \lambda g.\lambda f.\lambda x.g(f(x))$.

Може се показати да је композиција асоцијативна, као и да је функција идентитета неутрал за композицију функција. Због сагласности типова имамо леви неутрал id_B и десни неутрал id_A .

Индуктивни типови

Тип природних бројева

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\mathbb{N}\text{-form}]}{\vdash \mathbb{N} \text{ type}} \qquad \frac{[\mathbb{N}\text{-intro}_{0_{\mathbb{N}}}] }{\vdash 0_{\mathbb{N}} : \mathbb{N}} \qquad \frac{[\mathbb{N}\text{-intro}_{\text{succ}_{\mathbb{N}}}] }{\vdash \text{succ}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \frac{[\mathbb{N}\text{-ind}]}{\Gamma, n : \mathbb{N} \vdash P(n) \text{ type}} \qquad \frac{[\mathbb{N}\text{-comp}_{0_{\mathbb{N}}}] }{\Gamma, n : \mathbb{N} \vdash P(n) \text{ type}} \\
 \Gamma \vdash p_{0_{\mathbb{N}}} : P(0_{\mathbb{N}}) \qquad \Gamma \vdash p_{0_{\mathbb{N}}} : P(0_{\mathbb{N}}) \\
 \Gamma \vdash p_{\text{succ}_{\mathbb{N}}} : \prod_{(n:\mathbb{N})} P(n) \rightarrow P(\text{succ}_{\mathbb{N}}(n)) \quad \Gamma \vdash p_{\text{succ}_{\mathbb{N}}} : \prod_{(n:\mathbb{N})} P(n) \rightarrow P(\text{succ}_{\mathbb{N}}(n)) \\
 \hline
 \Gamma \vdash \text{ind}_{\mathbb{N}}(p_{0_{\mathbb{N}}}, p_{\text{succ}_{\mathbb{N}}}) : \prod_{(n:\mathbb{N})} P(n) \qquad \Gamma \vdash \text{ind}_{\mathbb{N}}(p_{0_{\mathbb{N}}}, p_{\text{succ}_{\mathbb{N}}}, 0_{\mathbb{N}}) \equiv p_{0_{\mathbb{N}}} : P(0_{\mathbb{N}})
 \end{array} \\
 \\
 \frac{[\mathbb{N}\text{-comp}_{\text{succ}_{\mathbb{N}}}] }{\Gamma, n : \mathbb{N} \vdash P(n) \text{ type}} \\
 \Gamma \vdash p_{0_{\mathbb{N}}} : P(0_{\mathbb{N}}) \\
 \Gamma \vdash p_{\text{succ}_{\mathbb{N}}} : \prod_{(n:\mathbb{N})} P(n) \rightarrow P(\text{succ}_{\mathbb{N}}(n)) \\
 \hline
 \Gamma \vdash n : \mathbb{N} \vdash \text{ind}_{\mathbb{N}}(p_{0_{\mathbb{N}}}, p_{\text{succ}_{\mathbb{N}}}, \text{succ}_{\mathbb{N}}(n)) \equiv p_{\text{succ}_{\mathbb{N}}}(n, \text{ind}_{\mathbb{N}}(p_{0_{\mathbb{N}}}, p_{\text{succ}_{\mathbb{N}}}, n)) : P(\text{succ}_{\mathbb{N}}(n))
 \end{array}$$

Prazni tipovi

Jedinični tipovi

Boolean tipovi

Nat tipovi

Hijerarhija univerzuma i univerzum tipovi

Типови зависних парова

1.2 Tipovi identiteti

Homotopna invarijantnost

Transport

Indukcija putanje

Akcije nad putanjama

1.3 Homotopni nivoi

Kontraktibilnost

n types

Osobina vs. struktura

Trunkacija

Logika

1.4 Ekvivalentnosti

Functional extentionality

Ekvivalentnosti i univerzalna osobina

1.5 Aksioma univalentnosti

Neke posledice univalentnosti

Глава 2

Разрада

2.1 Neki deo HoTTa koji će se formalizovati

2.2 Neki drugi deo HoTTa koji će se
formalizovati

Глава 3

Закључак

Литература

- [1] Jackson Macor. *A brief introduction to type theory and the univalence axiom*. 2015.
- [2] Egbert Rijke. *Introduction to Homotopy Type Theory*. 2022. arXiv: 2212.11082 [math.LO].
- [3] The Univalent Foundations Program. *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. Institute for Advanced Study: <https://homotopytypetheory.org/book>, 2013.

ЛИТЕРАТУРА

Биографија аутора

Вук Стефановић Караџић (*Тршић, 26. октобар/6. новембар 1787. — Беч, 7. фебруар 1864.*) био је српски филолог, реформатор српског језика, сакупљач народних умотворина и писац првог речника српског језика. Вук је најзначајнија личност српске књижевности прве половине XIX века. Стекао је и неколико почасних доктората. Учествовао је у Првом српском устанку као писар и чиновник у Неготинској крајини, а након слома устанка преселио се у Беч, 1813. године. Ту је упознао Јернеја Копитара, цензора словенских књига, на чији је подстицај кренуо у прикупљање српских народних песама, реформу ћирилице и борбу за увођење народног језика у српску књижевност. Вуковим реформама у српски језик је уведен фонетски правопис, а српски језик је потиснуо славеносрпски језик који је у то време био језик образованих људи. Тако се као најважније године Вукове реформе истичу 1818., 1836., 1839., 1847. и 1852.