Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет)

Моделирование антенн и микроволновых устройств

«Метод конечных разностей во временной области (FDTD)»

Литература

John B. Schneider.
Understanding the Finite-Difference Time-Domain Method

http://www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd/

Материалы к лекциям

Исходные тексты программ:

https://github.com/Jenyay/modelling

Уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{x_0} & \mathbf{y_0} & \mathbf{z_0} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ст}}) = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{j}_{\text{ст}}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Оператор набла (∇) или оператор Гамильтона

$$\nabla \equiv \mathbf{x_0}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y_0}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{z_0}\frac{\partial}{\partial z}$$

Свойства оператора набла (∇)

$$\nabla \varphi = \mathbf{x_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{y_0} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{z_0} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = ?$$

φ - скалярное поле

Свойства оператора набла (∇)

$$\nabla \varphi = \mathbf{x_0}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{y_0}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{z_0}\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \mathrm{grad}\,\varphi$$

φ - скалярное поле

Свойства оператора набла (∇)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{a} = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z =$$

$$= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = ?$$

a — векторное поле

Свойства оператора набла (∇)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{a} = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z =$$

$$= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \operatorname{div} \boldsymbol{a}$$

a — векторное поле

Свойства оператора набла (∇)

$$\nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{a}$$

a — векторное поле

Уравнения Максвелла

$$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{j}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$$

$$\mathbf{j}=\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{E}_{\text{ст}})=$$

$$=\sigma\mathbf{E}+\mathbf{j}_{\text{ст}}$$

$$\mathbf{D}=\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$$

$$\mathbf{B}=\mu\mu_0\mathbf{H}$$

$$\nabla\times\mathbf{F}=\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=\mathrm{div}\,\mathbf{F}$$

Одномерный метод FDTD

FDTD. Одномерный случай. Закон Ампера

Пусть поле может меняться только вдоль оси x.

Пусть существуют только E_z и H_y компоненты поля, а $\mathbf{j} = 0$

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x_0} & \mathbf{y_0} & \mathbf{z_0} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{z_0} \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

FDTD. Одномерный случай. Закон Фарадея

Пусть поле может меняться только вдоль оси x.

Пусть существуют только E_z и H_y компоненты поля, а $\mathbf{j} = 0$

$$-\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x_0} & \mathbf{y_0} & \mathbf{z_0} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_z \end{vmatrix} = -\mathbf{y_0} \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

FDTD. Одномерный случай

Объединяем предыдущие уравнения

$$\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{y}_0 \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{z}_0 \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

FDTD. Одномерный случай

Или в скалярном виде:

$$\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

Численный расчет производной функции

Производная функции

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Правая разностная схема для численного дифференцирования

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta} + O(\delta)$$

$O(\delta)$ — погрешность вычислений

Ряд Тейлора

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}+R_n$$

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!},x_0<\xi<x$$

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора вблизи точки x_0 со смещением δ

$$x = x_0 + \delta$$

$$f\left(x_0 + \delta\right) = f\left(x_0\right) + \delta f'\left(x_0\right) + \frac{1}{2!}\delta^2 f''\left(x_0\right) + \frac{1}{3!}\delta^3 f'''\left(x_0\right) + \ldots,$$

Выражаем $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta} - \frac{1}{2}\delta f''(x_0) - \frac{1}{6}\delta^2 f'''(x_0) - \ldots,$$

$$O(\delta) = -\left(\frac{1}{2}\delta f''(x_0) + \ldots\right)$$

Погрешность сравнима с δ.

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора вблизи точки x_0 со смещением $\pm\delta/2$

$$x = x_0 \pm \frac{\delta}{2}, \quad x - x_0 = \pm\frac{\delta}{2}$$

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) = f(x_0) + \frac{\delta}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \ldots,$$

$$f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) = f(x_0) - \frac{\delta}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \ldots,$$

Вычтем первое выражение из второго

$$f\left(x_0+\frac{\delta}{2}\right)-f\left(x_0-\frac{\delta}{2}\right)=\delta f'(x_0)+\frac{2}{3!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0)+\ldots,$$

Вычтем первое выражение из второго

$$f\left(x_0+\frac{\delta}{2}\right)-f\left(x_0-\frac{\delta}{2}\right)=\delta f'(x_0)+\frac{2}{3!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0)+\ldots,$$

Поделим левую и правую части на δ

$$\frac{f\left(x_0+\frac{\delta}{2}\right)-f\left(x_0-\frac{\delta}{2}\right)}{\delta}=f'(x_0)+\frac{1}{3!}\frac{\delta^2}{2^2}f'''(x_0)+\ldots,$$

Центральная конечно-разностная схема

$$f'(x_0)=\frac{f\left(x_0+\frac{\delta}{2}\right)-f\left(x_0-\frac{\delta}{2}\right)}{\delta}+O\left(\delta^2\right)$$

Отбрасываем $O(\delta^2)$

$$\boxed{f'(x_0)\approx\frac{f\left(x_0+\frac{\delta}{2}\right)-f\left(x_0-\frac{\delta}{2}\right)}{\delta}}$$

Погрешность сравнима с δ^2.

Одномерный метод FDTD

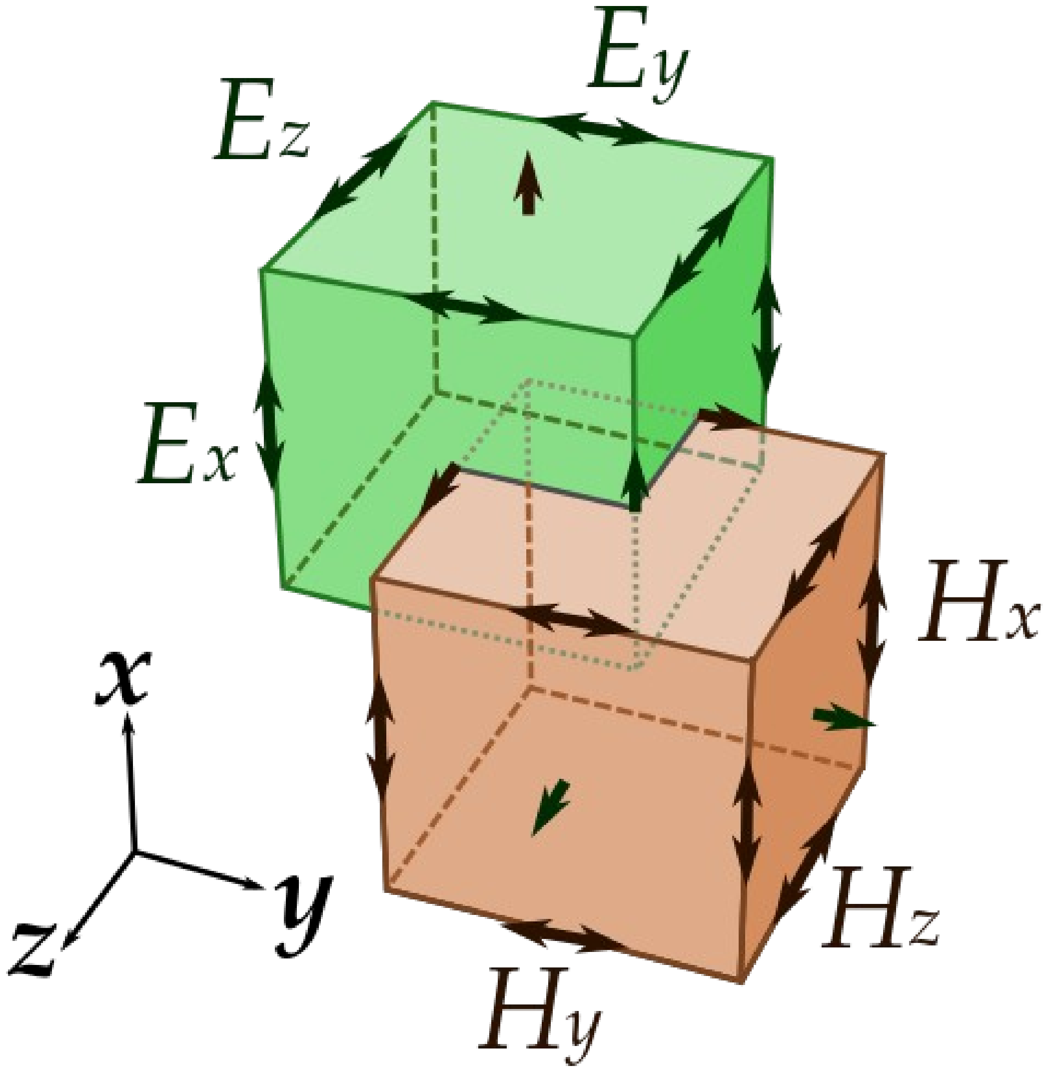
Дискретизация

$$E_z(x, t) = E_z(m\Delta x, q\Delta t) = E_z^q[m]$$

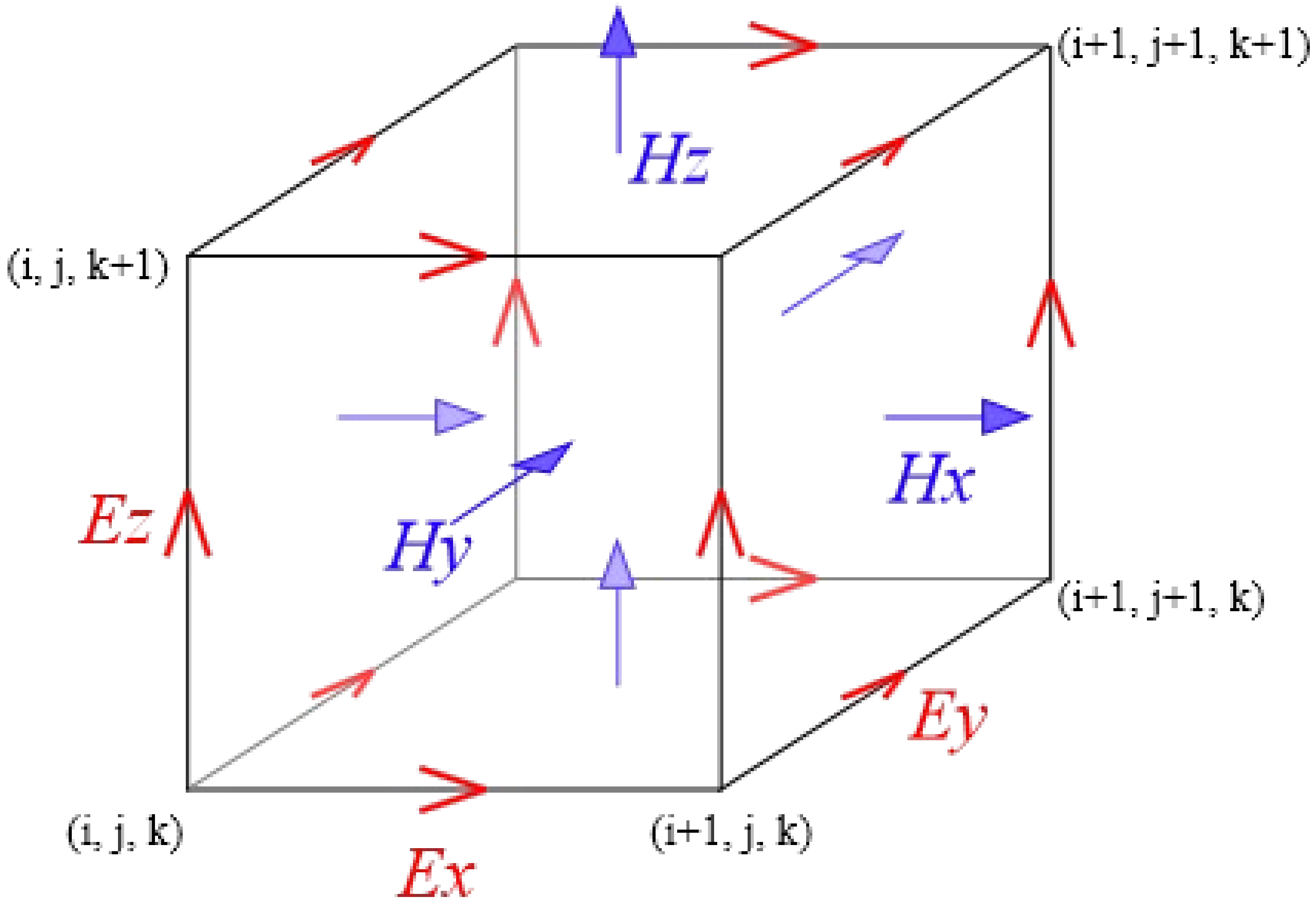
$$H_y(x, t) = H_y(m\Delta x, q\Delta t) = H_y^q[m]$$

Δx — пространственное смещение
Δt — временное смещение
m — пространственный шаг
q — временной шаг

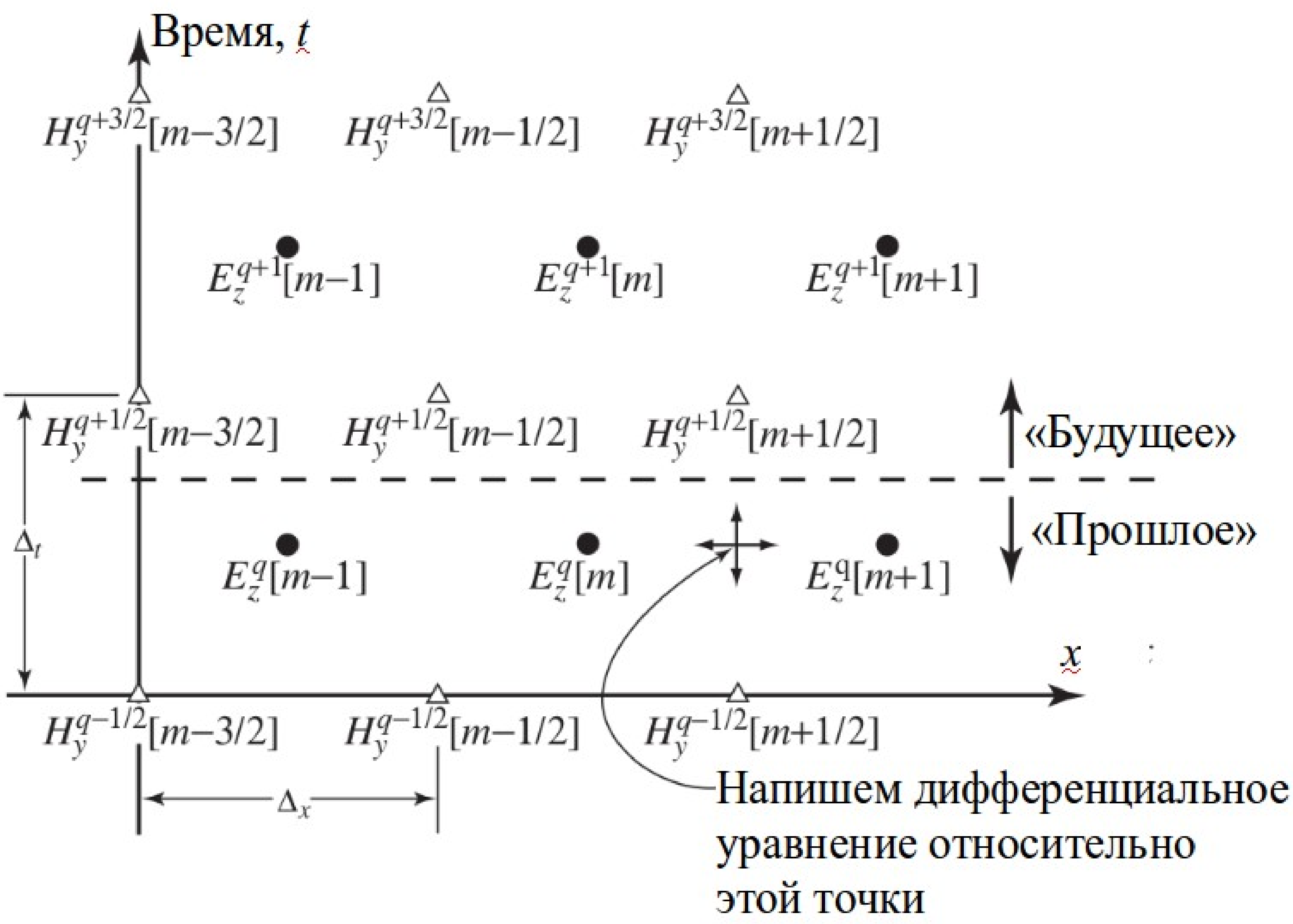
Трехмерная ячейка для метода FDTD



Ячейка для метода FDTD



Пространственно-временная сетка для одномерного случая



Переходим к конечным разностям. Закон Фарадея

$$\mu\mu_0 \left.\frac{\partial H_y}{\partial t}\right|_{(m+1/2)\Delta x,\, q\Delta t} = \left.\frac{\partial E_z}{\partial x}\right|_{(m+1/2)\Delta x,\, q\Delta t}$$

Переходим к конечным разностям. Закон Фарадея

$$\mu\mu_0 \frac{H_y^{q+1/2}\left[m+1/2\right]-H_y^{q-1/2}\left[m+1/2\right]}{\Delta_t}=$$

$$=\frac{E_z^q\left[m+1\right]-E_z^q\left[m\right]}{\Delta_x}$$

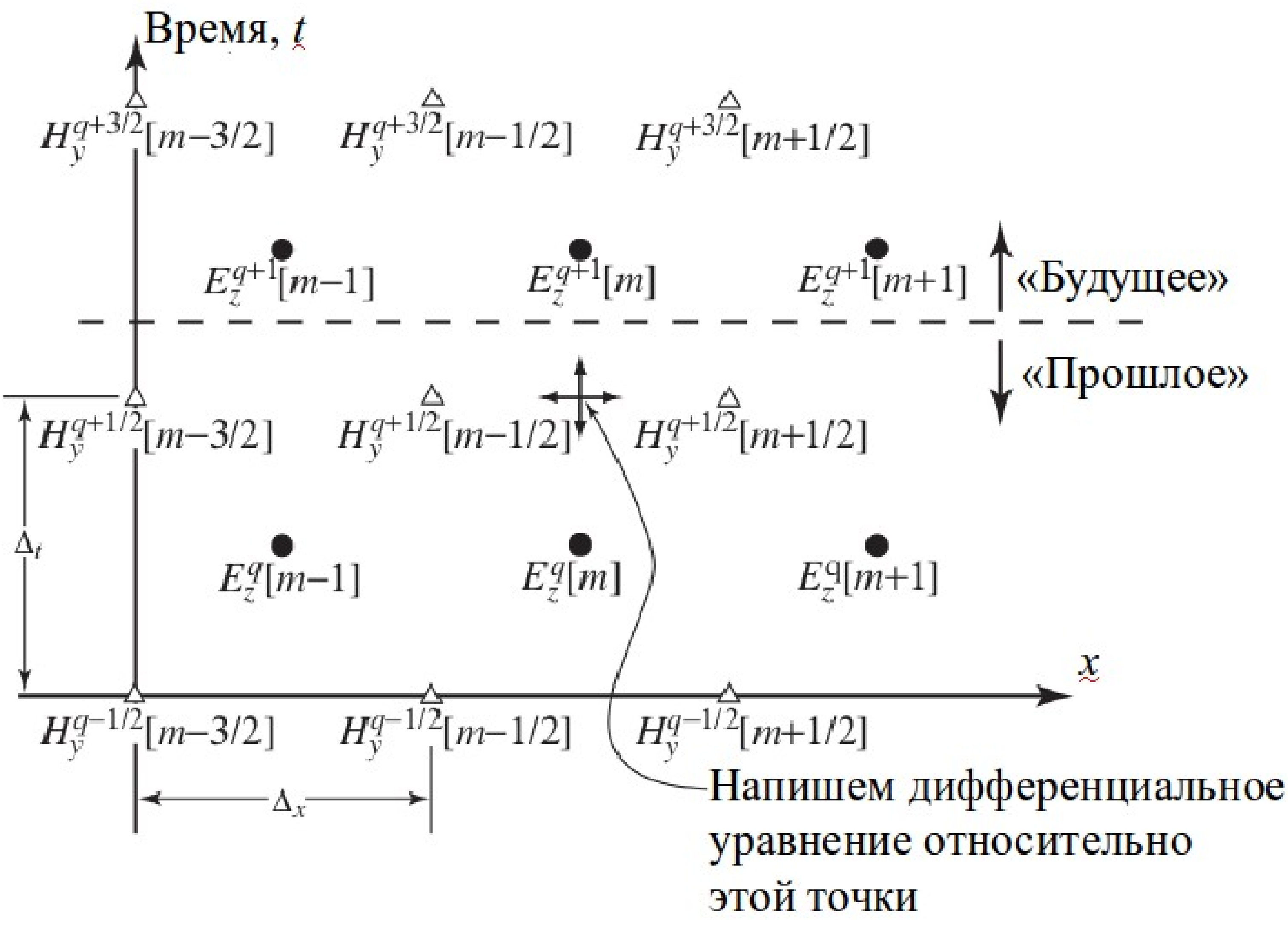
Переходим к конечным разностям. Закон Фарадея

Из предыдущего уравнения

$$H_y^{q+1/2}\left[m+1/2\right]=$$

$$=H_y^{q-1/2}\left[m+1/2\right]+\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}\left(E_z^q\left[m+1\right]-E_z^q\left[m\right]\right)$$

Пространственно-временная сетка для одномерного случая



Переходим к конечным разностям. Закон Ампера

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}\bigg|_{m\Delta x,(q+1/2)\Delta t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}\bigg|_{m\Delta x,(q+1/2)\Delta t}$$

Переходим к конечным разностям. Закон Ампера

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^{q}[m]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x}$$

Переходим к конечным разностям. Закон Ампера

Из предыдущего уравнения

$$E_z^{q+1}[m] =$$

$$= E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x}\left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]\right)$$

Переходим к конечным разностям

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$=H_y^{q-1/2}[m+1/2]+\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}\left(E_z^q[m+1]-E_z^q[m]\right)$$

$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$=E_z^q[m]+\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\left(H_y^{q+1/2}[m+1/2]-H_y^{q+1/2}[m-1/2]\right)$$

Критерий устойчивости Куранта-Фридриха-Леви

$$v_{max}\Delta_t \leqslant \frac{1}{\sqrt{\Delta_x^{-2}+\Delta_y^{-2}+\Delta_z^{-2}}}$$

$$v_{max}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{min}\mu_{min}}}$$

$$\text{Если}\;\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=\Delta$$

$$v_{max}\Delta_t \leqslant \frac{\Delta}{\sqrt{N}}$$

N — размерность пространства (N = 1, 2, 3)

Критерий устойчивости для одномерной задачи

$c\Delta_t$ — максимальное расстояние, которое может пройти волна за один временной шаг Δ_t в вакууме.

Число Куранта

$$S_c = c\Delta_t / \Delta_x$$

Условие устойчивости

$$c\Delta_t \le \Delta_x$$

или

$$S_c \le 1$$

Коэффициенты в конечно-разностной схеме

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$=H_y^{q-1/2}[m+1/2]+\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}\left(E_z^q[m+1]-E_z^q[m]\right)$$

$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$=E_z^q[m]+\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\left(H_y^{q+1/2}[m+1/2]-H_y^{q+1/2}[m-1/2]\right)$$

Коэффициенты в конечно-разностной схеме

$$\frac{1}{\mu\mu_0}\frac{\Delta_t}{\Delta_x}=\frac{1}{\mu\mu_0}\frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{\Delta_t}{\Delta_x}=\frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{c\,\Delta_t}{\Delta_x}=\frac{1}{\mu W_0}S_c$$

$$W_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$$ - волновое сопротивление свободного пространства

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$ - скорость света в вакууме

Коэффициенты в конечно-разностной схеме

$$\frac{1}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\frac{\Delta_t}{\Delta_x}=\frac{1}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{\Delta_t}{\Delta_x}=\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{c\,\Delta_t}{\Delta_x}=\frac{W_0}{\varepsilon}S_c$$

$W_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ - волновое сопротивление свободного пространства

$c=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ - скорость света в вакууме

Коэффициенты в конечно-разностной схеме

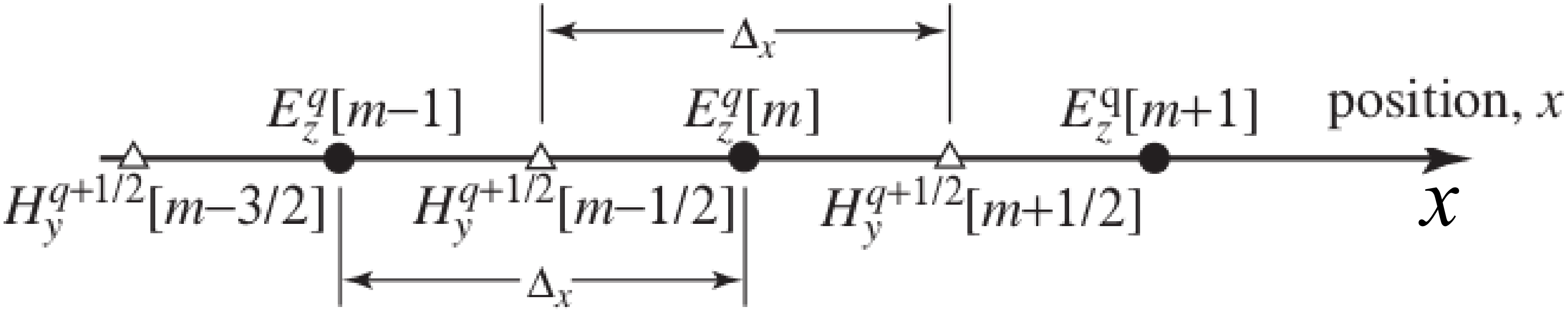
$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$=H_y^{q-1/2}[m+1/2]+\left(E_z^q[m+1]-E_z^q[m]\right)\frac{1}{\mu W_0}S_c$$

$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$=E_z^q[m]+\left(H_y^{q+1/2}[m+1/2]-H_y^{q+1/2}[m-1/2]\right)\frac{W_0}{\varepsilon}S_c$$

Одномерная пространственная сетка



Хранение компонент поля в реализации FDTD

Индекс →	1	2	3	4		M-3	M-2	M-1	M
Ez	?	E_2	E_3	E_4	• • •	$E_{M\text{-}3}$	$E_{M\text{-}2}$	$E_{M\text{-}1}$	E_M

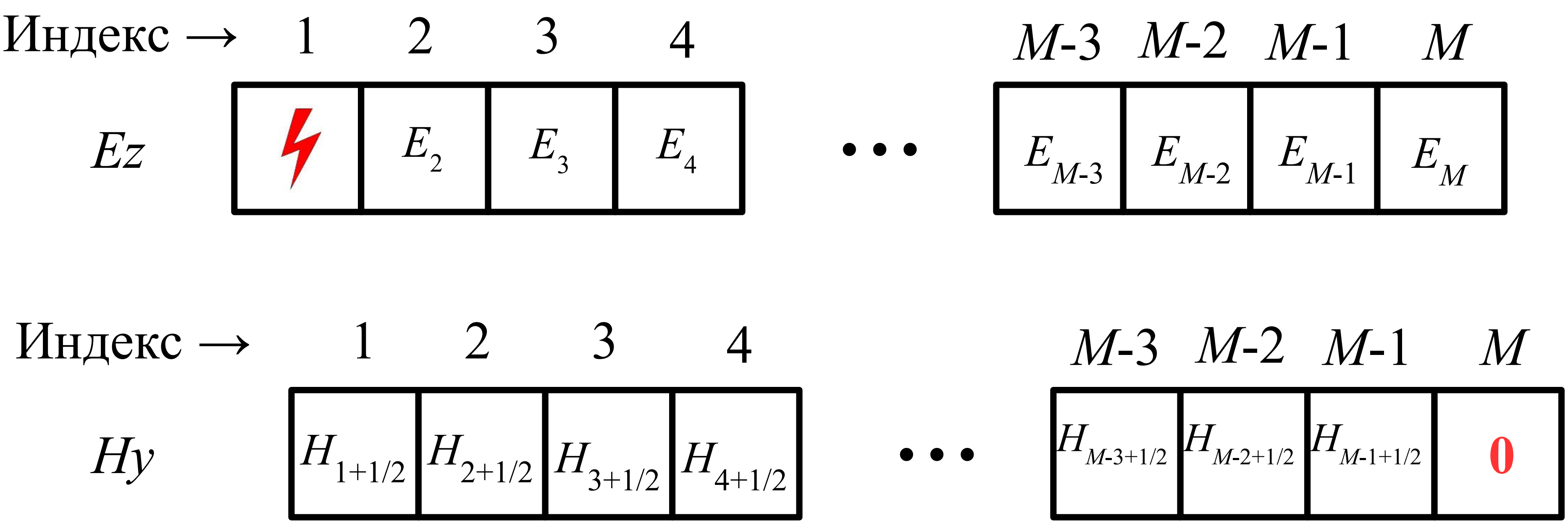
Индекс →	1	2	3	4		M-3	M-2	M-1	M
Hy	$H_{1+1/2}$	$H_{2+1/2}$	$H_{3+1/2}$	$H_{4+1/2}$	• • •	$H_{M\text{-}3+1/2}$	$H_{M\text{-}2+1/2}$	$H_{M\text{-}1+1/2}$	?

Хранение компонент поля в реализации FDTD

Индекс →	1	2	3	4		M-3	M-2	M-1	M
Ez	0	E_2	E_3	E_4	• • •	$E_{M\text{-}3}$	$E_{M\text{-}2}$	$E_{M\text{-}1}$	E_M

Индекс →	1	2	3	4		M-3	M-2	M-1	M
Hy	$H_{1+1/2}$	$H_{2+1/2}$	$H_{3+1/2}$	$H_{4+1/2}$	• • •	$H_{M\text{-}3+1/2}$	$H_{M\text{-}2+1/2}$	$H_{M\text{-}1+1/2}$	0

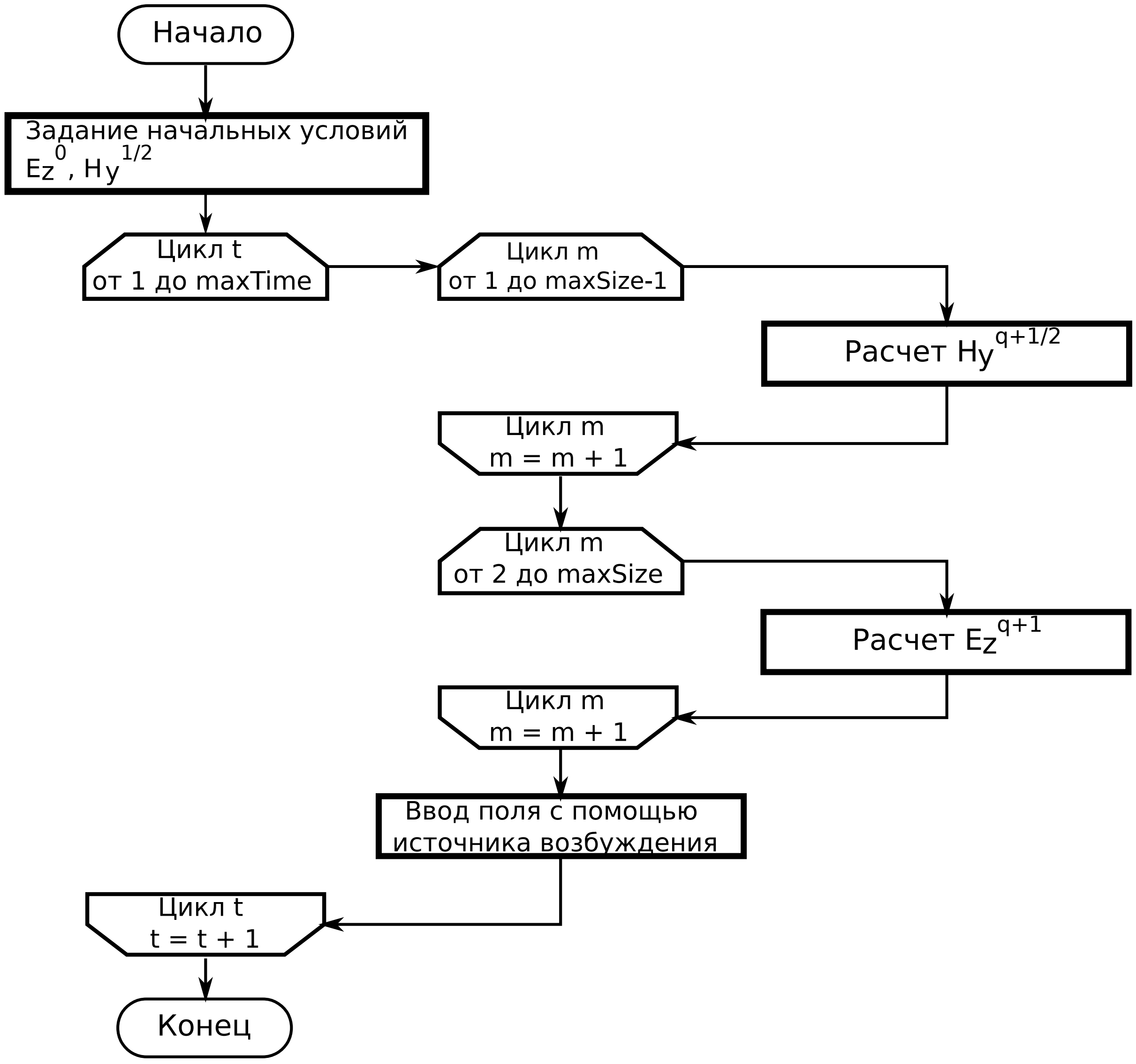
«Жесткий» источник возбуждения



Источник
в разностной схеме

$$f(t) = f(q\Delta_t) = e^{-\left(\frac{q\Delta_t - 30\Delta_t}{10\Delta_t}\right)^2} = e^{-\left(\frac{q-30}{10}\right)^2} = f[q]$$

Схема алгоритма FDTD



Реализация одномерного FDTD в MATLAB

Распространение импульса в свободном пространстве.

«Жесткий» источник.

Число Куранта равно 1.

fdtd_first_version_01.m
fdtd_first_version_02.m
fdtd_first_version_03.m
fdtd_first_version_04.m

Измерение скорости распространения волны

fdtd_first_version_speed.m

Отображение компонент поля E и H

fdtd_first_version_EH.m

Достоверность расчета

- Скорость распространение волны в вакууме равна скорости света.
- Коэффициент отражения электрической компоненты поля от PEC равен -1.
- Коэффициент отражения электрической компоненты поля от PMC равен +1.
- Коэффициент отражения магнитной компоненты поля от PEC равен +1.
- Коэффициент отражения магнитной компоненты поля от PMC равен -1.

«Жесткий» источник внутри области моделирования

fdtd_hard_source.m

Аддитивный («мягкий») источник

Аддитивный источник

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \mathbf{j}$$

Аддитивный источник в разностной схеме

$$E_z^{q+1}[m] =$$

$$= E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\Delta_x}\left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]\right) -$$

$$-\frac{\Delta_t}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\,\dot{j}_z^{q+1/2}[m]$$

Аддитивный источник в разностной схеме

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^{q}[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\Delta_x}\left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]\right)$$

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^{q+1}[m] - \frac{\Delta_t}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\,\dot{j}_z^{q+1/2}[m]$$

или

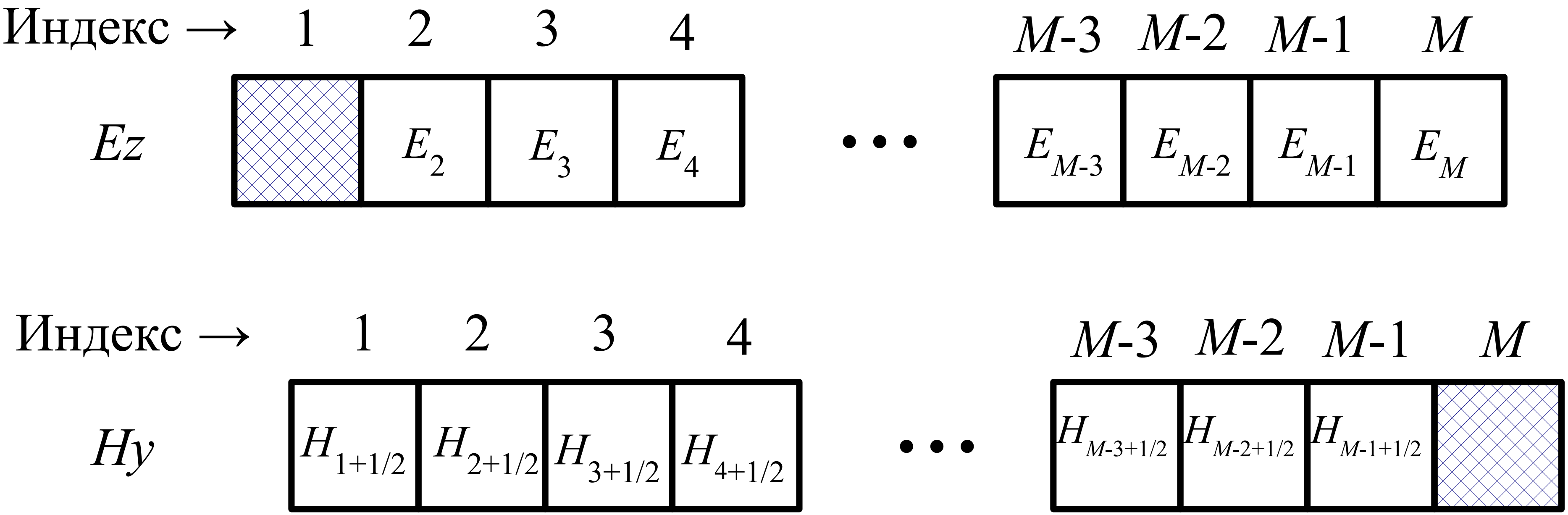
$$E_z^{q+1}[m] = E_z^{q+1}[m] + E_{z\,cm}^{q+1}[m]$$

Демонстрация аддитивного источника

fdtd_additive_source.m

Простейшие поглощающие граничные условия

Хранение компонент поля в реализации FDTD



Простейшее поглощающие граничные условия

Работают только для $S_c = 1$

$$E_z^{q+1}[1] = E_z^q[2]$$

$$H_y^{q+1}[\text{end}] = H_y^q[\text{end}-1]$$

Демонстрация поглощающих условий

fdtd_abc_simple.m

Метод
Total-Field / Scattered-Field

Граничные условия Total-Field / Scattered-Field

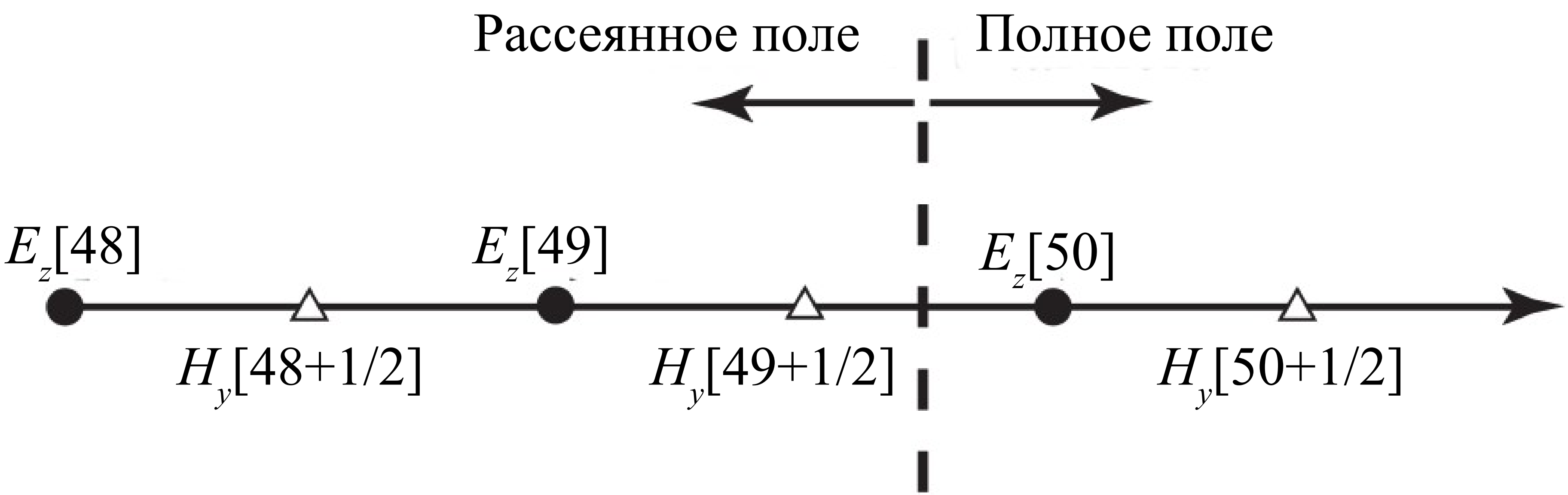
$$\mathbf{E}_{\text{полн}} = \mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{расс}}$$

$$\mathbf{H}_{\text{полн}} = \mathbf{H}_{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\text{расс}}$$

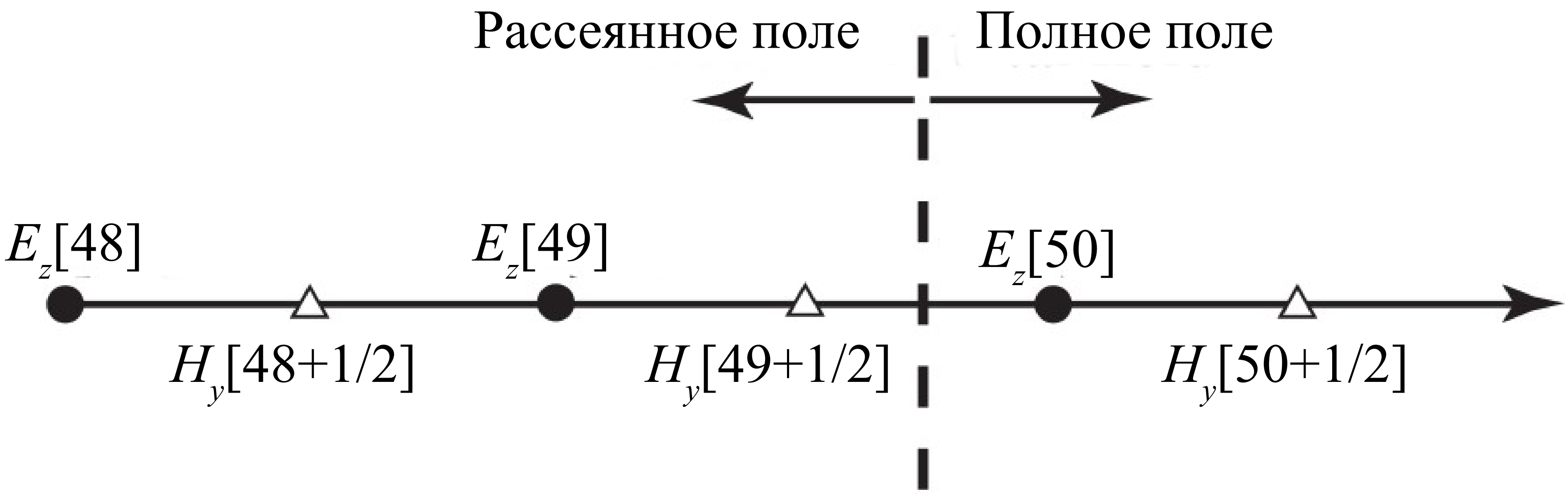
Граничные условия Total-Field / Scattered-Field

$$\mathbf{E}_{\text{полн}} = \mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{расс}}$$

$$\mathbf{H}_{\text{полн}} = \mathbf{H}_{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\text{расс}}$$



Граничные условия Total-Field / Scattered-Field



$H_y[49 + 1/2] = H_y[50 - 1/2]$ — последняя ячейка в области рассеянного поля.

$E_z[50]$ — первая ячейка в области полного поля.

Граничные условия Total-Field / Scattered-Field

Важно! Только рассеянное поле должно использоваться при обновлении ячеек в области рассеянного поля.

Только полное поле должно использоваться при обновлении ячеек в области полного поля

Поле на границе Total-Field / Scattered-Field

Рассмотрим электрическую компоненту поля E_z

проблема

$$\overbrace{E_z^{q+1}[50]}^{полн} = \overbrace{E_z^{q}[50]}^{полн} + \frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\left(\overbrace{H_y^{q+1/2}[50+1/2]}^{полн} - \overbrace{H_y^{q+1/2}[50-1/2]}^{расс}\right)$$

Поле на границе Total-Field / Scattered-Field

Введем дополнительный магнитный источник в точке (50 − 1/2)Δx для момента времени (q + 1/2)Δt

$$\overbrace{E_z^{q+1}[50]}^{полн} = \overbrace{E_z^{q}[50]}^{полн} +$$

$$+\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\left(\overbrace{H_y^{q+1/2}[50+1/2]}^{полн} - \overbrace{\left\{\overbrace{H_y^{q+1/2}[50-1/2]}^{расс} + \overbrace{\left(-\frac{1}{W}E_z^{inc}[50-1/2, q+1/2]\right)}^{пад}\right\}}^{полн}\right)$$

Total-Field / Scattered-Field

$$E_z^{q+1}[50] = E_z^q[50] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\Delta_x}\left(H_y^{q+1/2}[50+1/2] - H_y^{q+1/2}[50-1/2]\right)$$

$$\boxed{E_z^{q+1}[50] = E_z^{q+1}[50] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\Delta_x}\,\frac{1}{W}\,E_z^{inc}[50-1/2, q+1/2]}$$

Total-Field / Scattered-Field

$$E_z^{q+1}[50] = E_z^{q+1}[50] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\frac{1}{W}E_z^{inc}[50-1/2, q+1/2]$$

$$W = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = W_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x} = \frac{W_0 S_c}{\varepsilon}$$

$$E_z^{q+1}[50] = E_z^{q+1}[50] + \frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}E_z^{inc}[50-1/2, q+1/2]$$

Для свободного пространства и если $S_c = 1$:

$$E_z^{q+1}[50] = E_z^{q+1}[50] + E_z^{inc}[50\underline{-1/2}, q\underline{+1/2}]$$

Поле на границе Total-Field / Scattered-Field

проблема

$$\overbrace{H^{q}+1/2_{y}[50-1/2]}^{расс}=\overbrace{H^{q}-1/2_{y}[50-1/2]}^{расс}+\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}\left(\overbrace{E_z^q[50]}^{полн}-\overbrace{E_z^q[49]}^{расс}\right)$$

Поле на границе Total-Field / Scattered-Field

$$\overbrace{H_y^{q+1/2}\left[50-1/2\right]}^{расс}=\overbrace{H_y^{q-1/2}\left[50-1/2\right]}^{расс}+$$

$$+\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}\left(\overbrace{\left(\overbrace{E_z^q[50]}^{полн}-\overbrace{E_z^{inc}[50,q]}^{пад}\right)}^{расс}-\overbrace{E_z^q[49]}^{расс}\right)$$

Поле на границе
Total-Field / Scattered-Field

$$H_y^{q+1/2}[50-1/2]=H_y^{q-1/2}[50-1/2]+\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}\left(E_z^q[50]-E_y^q[49]\right)$$

$$\boxed{H_y^{q+1/2}[50-1/2]=H_y^{q+1/2}[50-1/2]-\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}E_z^{inc}[50,q]}$$

Поле на границе
Total-Field / Scattered-Field

Для свободного пространства и $S_c = 1$:

$$H_y^{q+1/2}[50-1/2] = H_y^{q-1/2}[50-1/2] + \frac{1}{W_0}\left(E_z^q[50] - E_z^q[49]\right)$$

$$H_y^{q+1/2}[50-1/2] = H_y^{q+1/2}[50-1/2] - \frac{1}{W_0} E_z^{inc}[50, q]$$

Уравнение плоской волны для гауссова сигнала

Волновое уравнение

Волновое уравнение при отсутствии сторонних токов:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

Одномерное волновое уравнение

f — одномерная функция

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

Решение одномерного волнового уравнения

$f(\xi)$ — решение волнового уравнения, если:

- $f(\xi)$ дважды дифференцируема
- ξ можно заменить на $t \pm x / v$ (для одномерного случая)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0}}$$

$$f(\xi) = f(t \pm x / v) = f(x, t)$$

Используемый источник

$$f(t) = f(q\Delta_t) = e^{-\left(\frac{q\Delta_t - 30\Delta_t}{10\Delta_t}\right)^2} = e^{-\left(\frac{q-30}{10}\right)^2} = f[q]$$

Граничные условия Total-Field / Scattered-Field

Делаем замену *t* на *t* - *x* / *v*

$$t-\frac{x}{v}=q\Delta_t-\frac{m\Delta_x}{v}=q\Delta_t-\frac{m\Delta_x\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}=$$

$$=\left(q-\frac{m\Delta_x\sqrt{\varepsilon\mu}}{c\Delta_t}\right)\Delta_t=\left(q-\frac{m\sqrt{\varepsilon\mu}}{S_c}\right)\Delta_t$$

Для свободного пространства и $S_c = 1$:

$$t-\frac{x}{c}=(q-m)\Delta_t$$

Граничные условия Total-Field / Scattered-Field

$$E_z^{\text{inc}}[m,q]=e^{-\left(\frac{\left(q-m\sqrt{\varepsilon\mu}/S_c\right)\Delta_t-30\Delta_t}{10\,\Delta_t}\right)^2}=$$

$$=e^{-\left(\frac{\left(q-m\sqrt{\varepsilon\mu}/S_c\right)-30}{10}\right)^2}$$

$$H_y^{\text{inc}}[m,q]=-\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}\,E_z^{\text{inc}}[m,q]=$$

$$=-\frac{1}{W}e^{-\left(\frac{\left(q-m\sqrt{\varepsilon\mu}/S_c\right)-30}{10}\right)^2}$$

Граничные условия Total-Field / Scattered-Field

Для свободного пространства и $S_c = 1$:

$$E_z^{\text{inc}}[m,q] = e^{-\left(\frac{(q-m)\Delta_t - 30\Delta_t}{10\,\Delta_t}\right)^2} = e^{-\left(\frac{(q-m)-30}{10}\right)^2}$$

$$H_y^{\text{inc}}[m,q] = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,E_z^{\text{inc}}[m,q] = -\frac{1}{W_0}\,e^{-\left(\frac{(q-m)-30}{10}\right)^2}$$

Поле на границе Total-Field / Scattered-Field

Пусть для введенного источника $x = 0$ соответствует 50-й ячейке

$$H_y^{q+1/2}[50-1/2] = H_y^{q+1/2}[50-1/2] - \frac{1}{W_0} E_z^{inc}[0, q]$$

$$E_z^{q+1}[50] = E_z^{q+1}[50] + E_z^{inc}[-1/2, q+1/2]$$

Граничные условия Total-Field / Scattered-Field

$$E_z^{\mathrm{inc}}\left[-1/2, q+1/2\right] = e^{-\left(\frac{((q+0.5)-(-0.5))-30}{10}\right)^2}$$

$$E_z^{\mathrm{inc}}\left[0, q\right] = e^{-\left(\frac{q-30}{10}\right)^2}$$

Демонстрация гауссова импульса, распространяющегося в одну сторону

fdtd_tfsf_gauss.m

Моделирование распространения электромагнитной волны в неоднородных средах

Конечно-разностная схема

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$=H_y^{q-1/2}[m+1/2]+\left(E_z^q[m+1]-E_z^q[m]\right)\underline{\frac{1}{\mu W_0}S_c}$$

$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$=E_z^q[m]+\left(H_y^{q+1/2}[m+1/2]-H_y^{q+1/2}[m-1/2]\right)\underline{\frac{W_0}{\varepsilon}S_c}$$

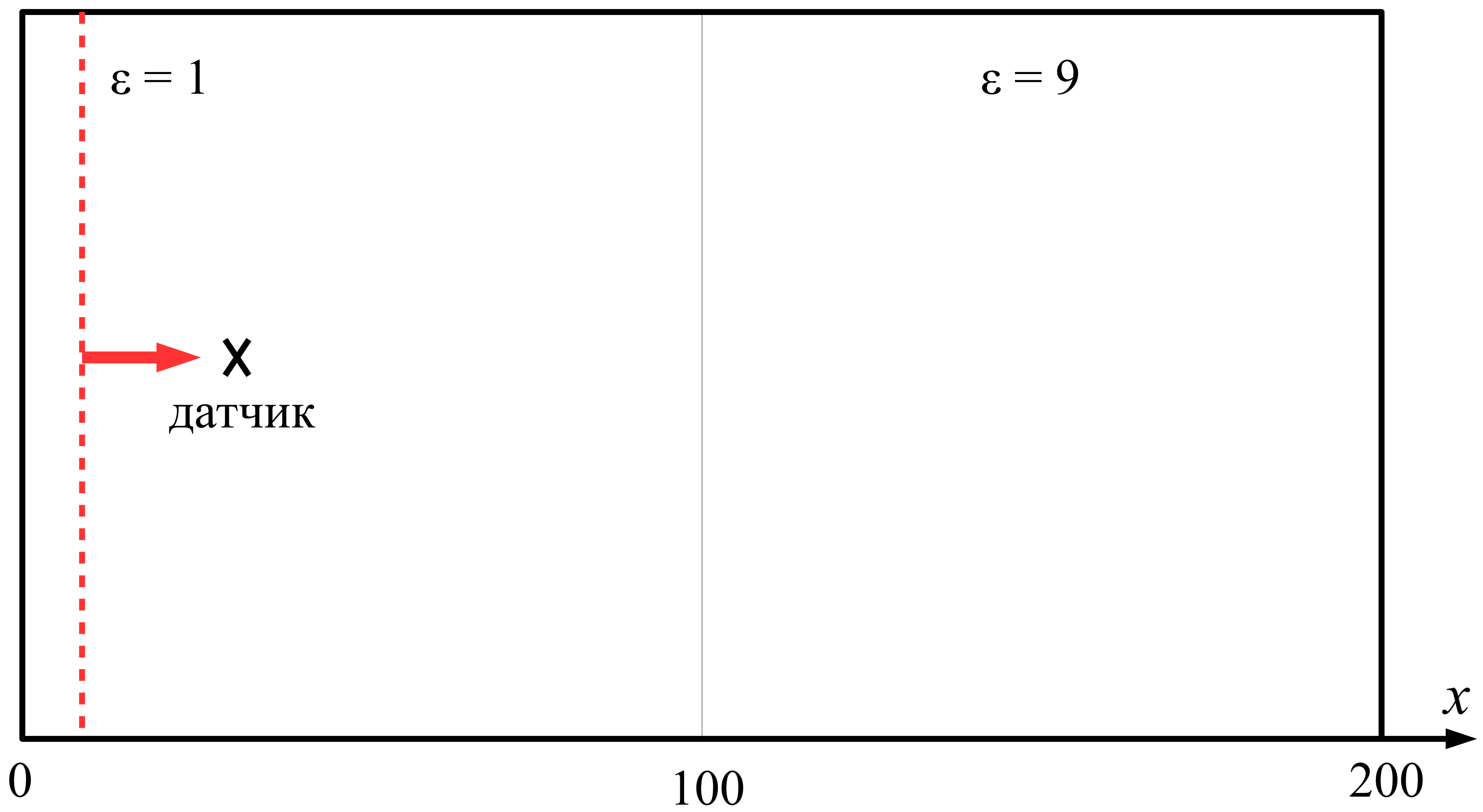
Учет параметров среды

Если $\varepsilon = f(x)$

```
Ez(m) = Ez(m) + (Hy(m) - Hy(m - 1)) * Sc * W0 / eps (m);

Hy(m) = Hy(m) + (Ez(m + 1) - Ez(m)) * Sc / (W0 * mu(m));
```

Геометрия решаемой задачи

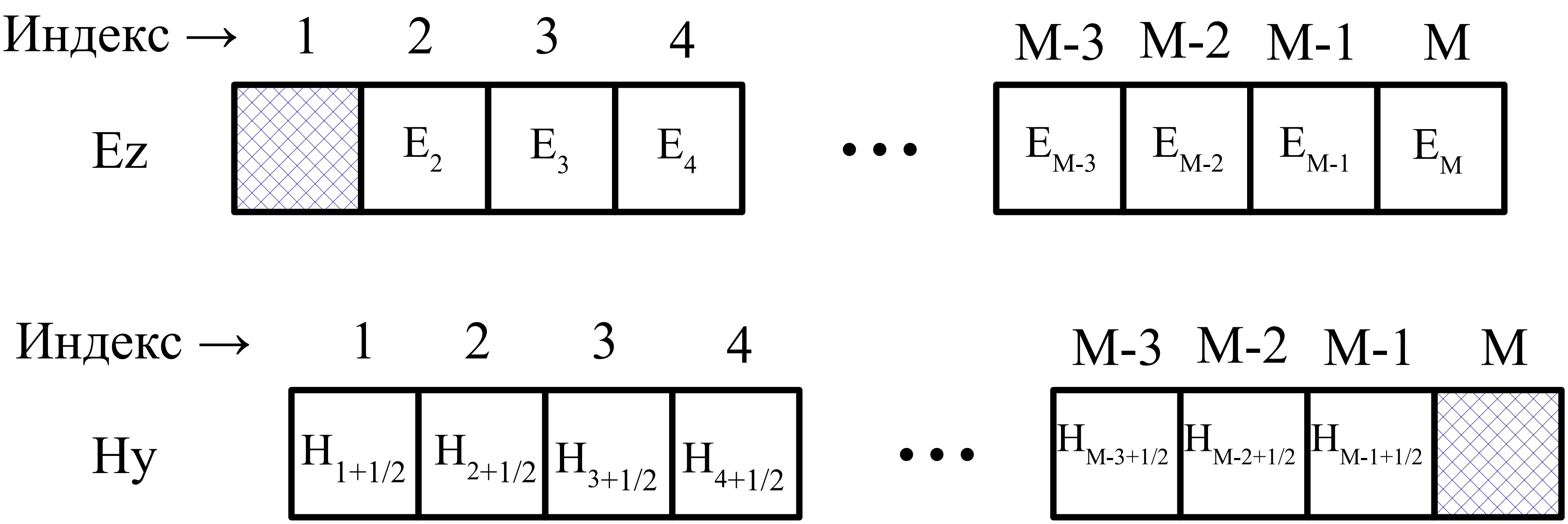


Демонстрация моделирования распространения электромагнитной волны в неоднородных средах

fdtd_heterogen_01.m

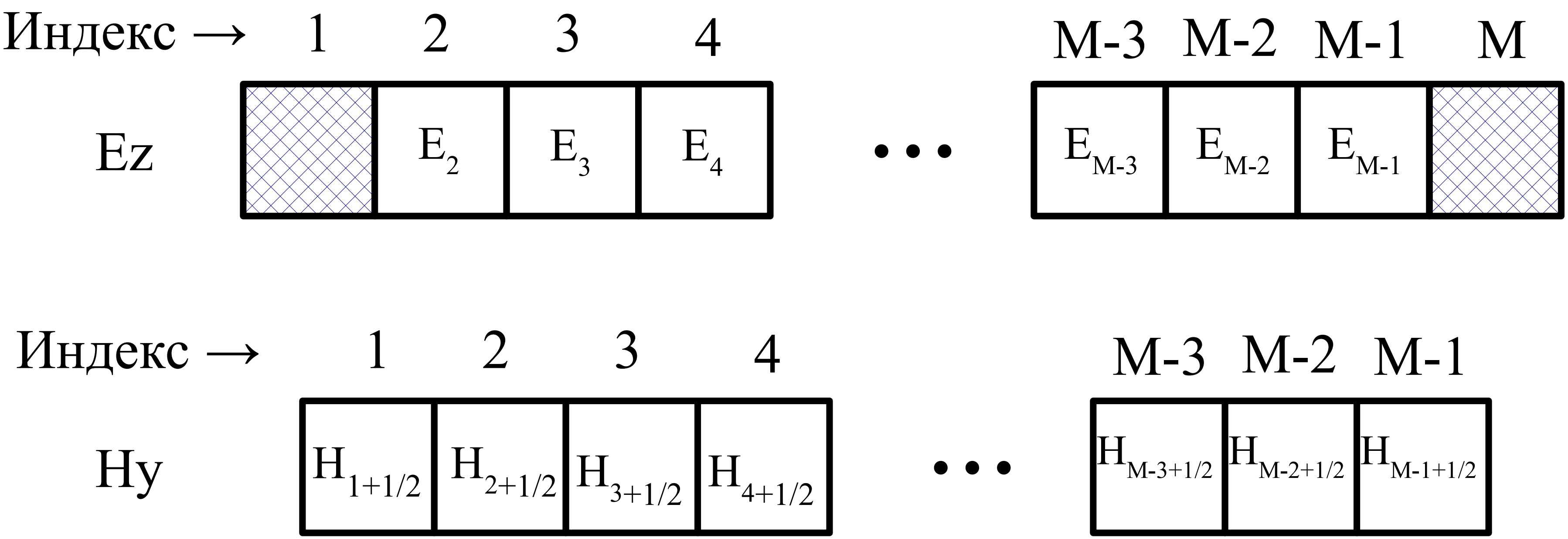
Структура массивов полей

Было в предыдущих примерах:



Структура массивов полей

Стало:



Демонстрация моделирования распространения электромагнитной волны в неоднородных средах

fdtd_heterogen_02.m

Коэффициенты отражения и прохождения

Для волны, падающей по нормали:

Коэффициент отражения: $$\Gamma = \frac{\mathbf{E}_{отр}}{\mathbf{E}_{пад}} = \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}$$

Коэффициент прохождения: $$T = \frac{\mathbf{E}_{пр}}{\mathbf{E}_{пад}} = \frac{2W_2}{W_2 + W_1}$$

$$W = ?$$

Коэффициенты отражения и прохождения

Для волны, падающей по нормали:

Коэффициент отражения:

$$\Gamma = \frac{\mathbf{E}_{отр}}{\mathbf{E}_{пад}} = \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}$$

Коэффициент прохождения:

$$T = \frac{\mathbf{E}_{пр}}{\mathbf{E}_{пад}} = \frac{2W_2}{W_2 + W_1}$$

$$W = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = W_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Коэффициенты отражения и прохождения

Для границы раздела свободное пространство - диэлектрик

$\mu = 1$

Коэффициент отражения: $$\Gamma = \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1} = ???$$

Коэффициент прохождения: $$T = \frac{2W_2}{W_2 + W_1} = ???$$

$$W = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = W_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Коэффициенты отражения и прохождения

Для границы раздела двух диэлектриков
$\mu = 1$

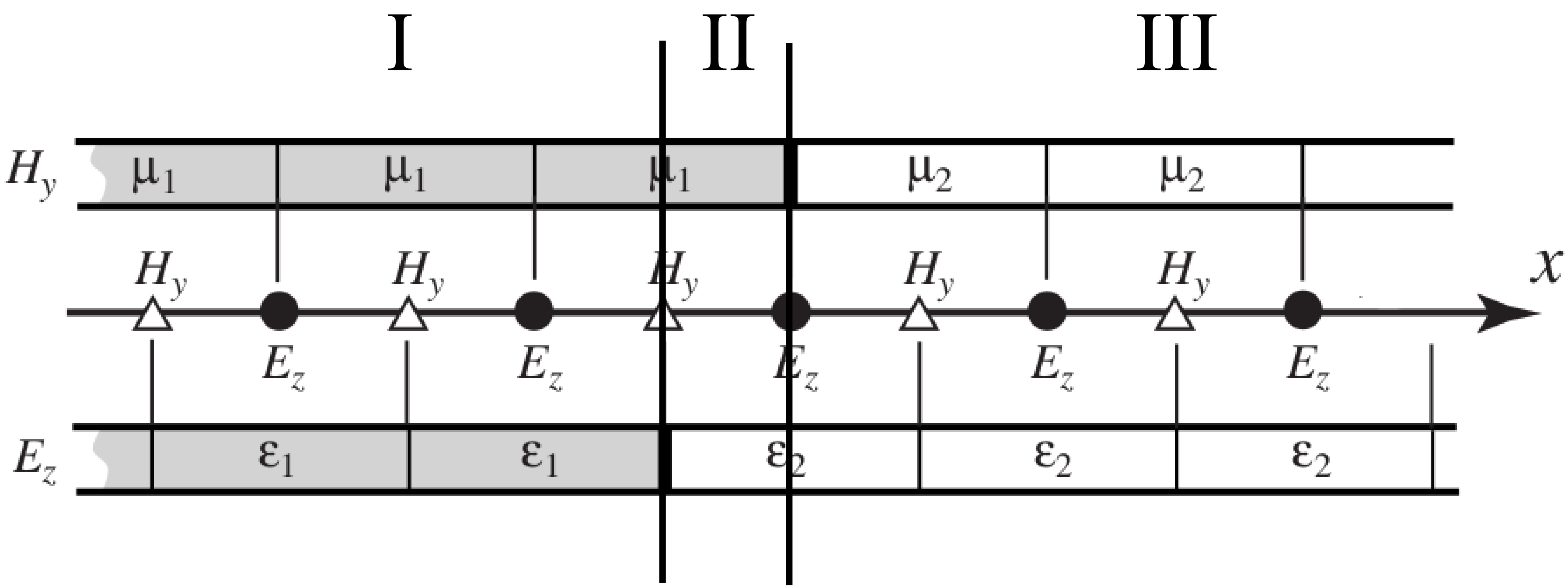
Коэффициент отражения:

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}}$$

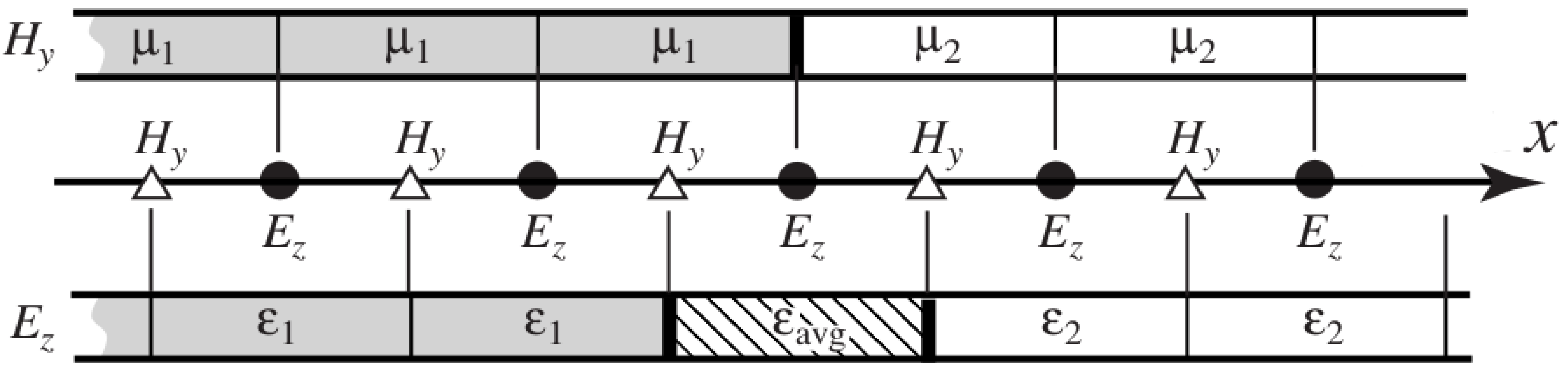
Коэффициент прохождения:

$$T = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}}$$

Погрешность из-за дискретной сетки



Погрешность из-за дискретной сетки



Демонстрация метода Total Field / Scattered Field в диэлектрике

fdtd_tfsf_medium_gauss.m

Моделирование распространения электромагнитной волны в среде с потерями

Закон Ампера для среды с потерями

$$\mathbf{j}+\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\nabla\times\mathbf{H}$$

или

$$\sigma\mathbf{E}+\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\nabla\times\mathbf{H}$$

Закон Ампера для среды с потерями

Для одномерного случая:

$$\sigma E_z + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

Закон Ампера для среды с потерями

Запишем производные в дискретном виде для точки ($m\Delta_x$; $(q + 1/2)\Delta_t$):

$$\sigma E_z^{q+1/2}[m] + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^{q}[m]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x}$$

Закон Ампера для среды с потерями

проблема

$$\sigma E_z^{q+1/2}[m] + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^{q}[m]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x}$$

Закон Ампера для среды с потерями

$$E_z^{q+1/2}[m] \approx \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^{q}[m]}{2}$$

Закон Ампера для среды с потерями

$$E_z^{q+1/2}[m] \approx \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^{q}[m]}{2}$$

тогда:

$$\sigma \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^{q}[m]}{2} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^{q}[m]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x}$$

Закон Ампера для среды с потерями

$$E_z^{q+1}[m] = \frac{1 - \dfrac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \dfrac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_z^q[m] +$$

$$+ \frac{\dfrac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x}}{1 + \dfrac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$

Закон Ампера для среды с потерями

$$E_z^{q+1}[m] = \frac{1 - \dfrac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \dfrac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_z^q[m] +$$

$$+ \frac{\dfrac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x}}{1 + \dfrac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$

Закон Ампера для среды с потерями

Для случая σ = 0 См/м:

$$E_z^{q+1}[m] =$$

$$= E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\Delta_x}\left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]\right)$$

Закон Фарадея для среды с потерями

$$-\mathbf{j}_m - \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}$$

или

$$-\sigma_m \mathbf{H} - \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}$$

Закон Фарадея для среды с потерями

Для одномерного случая:

$$\sigma_m H_y + \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

Закон Фарадея для среды с потерями

Запишем производные в дискретном виде:

проблема

$$\sigma_m H_y^q[m+1/2] + \mu\mu_0 \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{E_z^q[m+1] - E_z^q[m]}{\Delta_x}$$

Закон Фарадея для среды с потерями

$$H_y^q[m+1/2] \approx \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] + H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{2}$$

Закон Фарадея для среды с потерями

$$H_y^q[m+1/2] \approx \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] + H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{2}$$

$$\sigma_m \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] + H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{2} +$$

$$+\mu\mu_0 \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{E_z^q[m+1] - E_z^q[m]}{\Delta_x}$$

Закон Фарадея для среды с потерями

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=\frac{1-\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}H_y^{q-1/2}[m+1/2]+$$

$$+\frac{\dfrac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}\left(E_z^q[m+1]-E_z^q[m]\right)$$

Закон Фарадея для среды с потерями

Для случая $\sigma_m = 0$:

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2] =$$

$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x}\left(E_z^q[m+1] - E_z^q[m]\right)$$

Моделирование среды с потерями. Комментарии к реализации

Реализуем случай

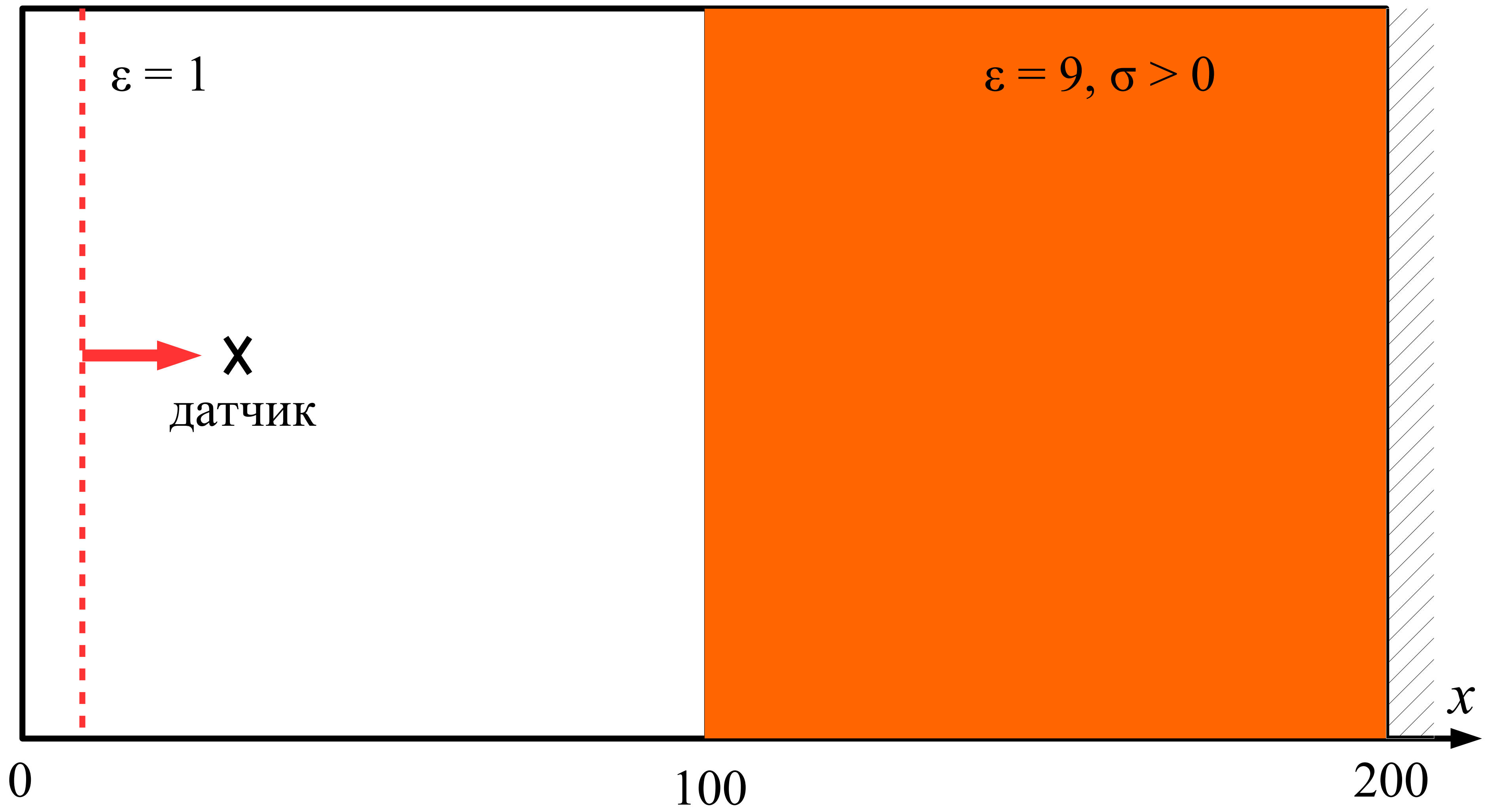
$\sigma_m = 0$, Sc = 1

$$loss = \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}$$

$$ceze = \frac{1 - loss}{1 + loss}$$

$$cezh = \frac{W_0 / \varepsilon}{1 + loss}$$

Геометрия решаемой задачи



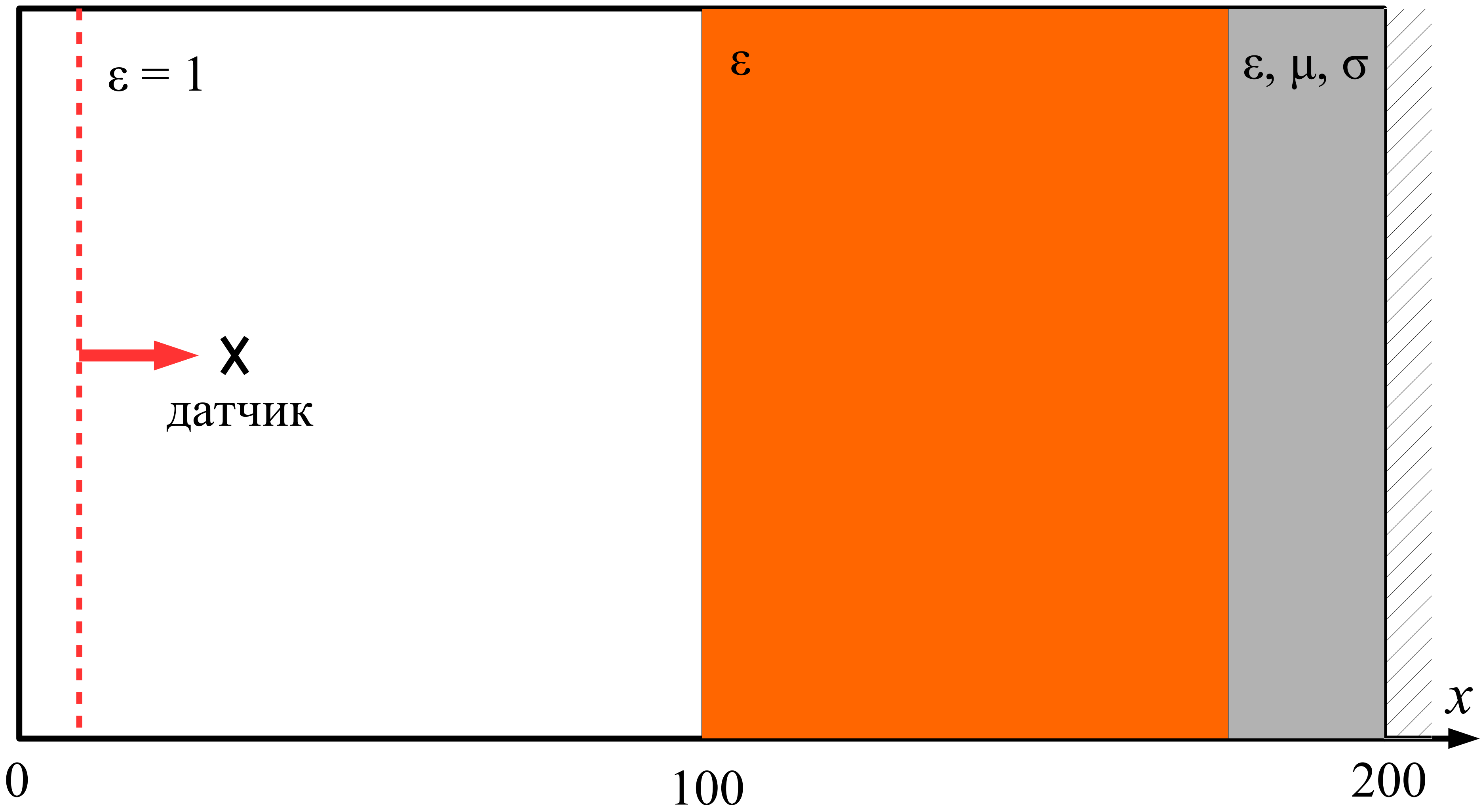
Реализация моделирования распространения электромагнитной волны в среде с потерями

fdtd_loss.m

Граничные условия

Граничное условие с использованием слоя с потерями

Геометрия решаемой задачи



Волновое сопротивление в среде с потерями

$$W=\sqrt{\frac{\mu\mu_0\left(1-i\,\frac{\sigma_m}{\omega\mu\mu_0}\right)}{\varepsilon\varepsilon_0\left(1-i\,\frac{\sigma}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\right)}}=W_0\sqrt{\frac{\mu\left(1-i\,\frac{\sigma_m}{\omega\mu\mu_0}\right)}{\varepsilon\left(1-i\,\frac{\sigma}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\right)}}$$

Волновое сопротивление в среде с потерями

$$W=\sqrt{\frac{\mu\mu_0\left(1-i\dfrac{\sigma_m}{\omega\mu\mu_0}\right)}{\varepsilon\varepsilon_0\left(1-i\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\right)}}=W_0\sqrt{\frac{\mu\left(1-i\dfrac{\sigma_m}{\omega\mu\mu_0}\right)}{\varepsilon\left(1-i\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\right)}}$$

Если $\dfrac{\sigma_m}{\omega\mu\mu_0}=\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}$, то это равносильно среде без потерь с точки зрения волнового сопротивления

Волновое сопротивление в среде с потерями

$$W\Big|_{\frac{\sigma_m}{\omega\mu\mu_0}=\frac{\sigma}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}} = W\Big|_{\substack{\sigma_m=0\\ \sigma=0}} = W_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\Gamma = \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}$$

Реализация поглощающих граничных условий

$$loss_m = \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0} \qquad loss_e = \frac{\sigma \Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$

Если

$$\frac{\sigma_m}{\omega\mu\mu_0} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$\frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0} = \frac{\sigma \Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$

Реализация поглощающих граничных условий

$$loss = loss_e = loss_m = \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0} = \frac{\sigma \Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0} = 0.02$$

$$ceze = \frac{1 - loss}{1 + loss}$$

$$cezh = \frac{W_0 / \varepsilon}{1 + loss}$$

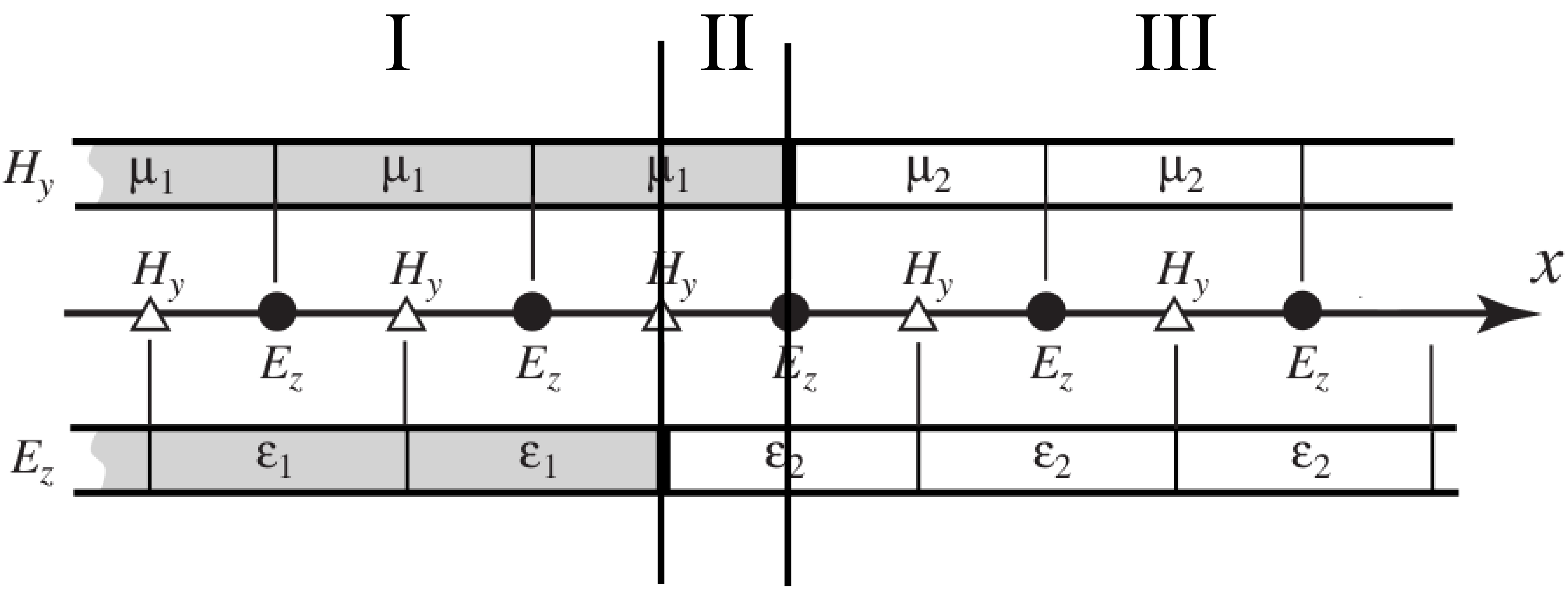
$$chye = \frac{1 / W_0}{1 + loss}$$

$$chyh = \frac{1 - loss}{1 + loss}$$

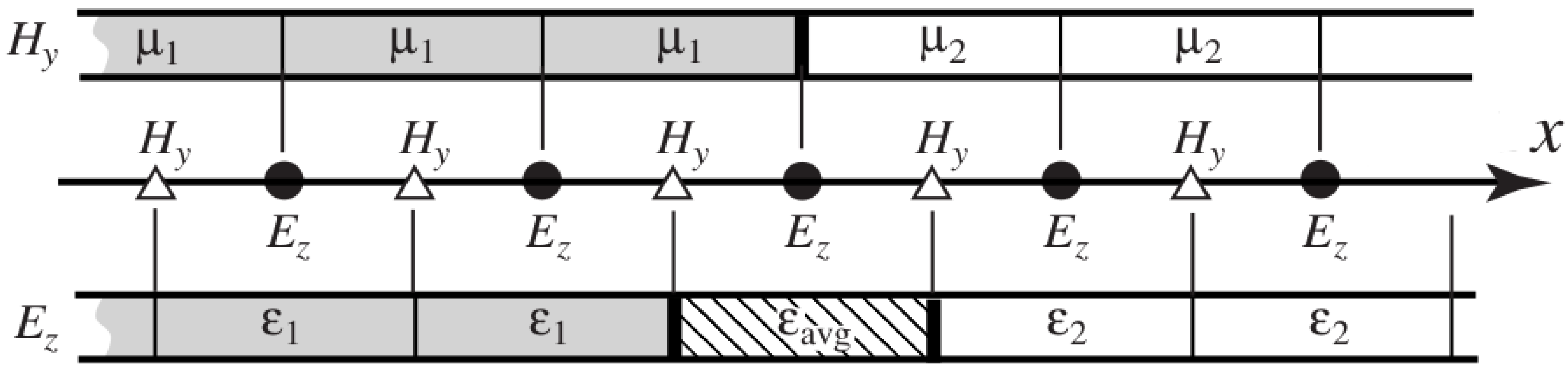
Демонстрация граничных условий с использованием поглощающего слоя

fdtd_loss_boundary.m

Погрешность из-за дискретной сетки



Погрешность из-за дискретной сетки



Демонстрация граничных условий с использованием поглощающего слоя с усреднением параметров среды на границе с поглощающим слоем

fdtd_loss_boundary_2.m

Поглощающие граничные условия (Absorbing boundary condition - ABC)

Типы поглощающих граничных условий

Поглощающие граничные условия можно разделить на две группы:

- Условия, аннигилирующие вытекающие волны.
- Условия, аппроксимирующие уравнение волны, распространяющейся только в одном направлении.

Волновое уравнение в одномерном случае

$$\nabla^2 E_z - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

Волновое уравнение в одномерном случае

Перепишем волновое уравнение в операторном виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \varepsilon\,\varepsilon_0\,\mu\,\mu_0\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E_z = 0$$

Волновое уравнение в одномерном случае

Полученный оператор может быть разложен на произведение двух операторов:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\mu\,\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\mu\,\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_z=0$$

Уравнения адвекции

Любая функция E_z, которая удовлетворяет хотя бы одному из следующих уравнений, является решением волнового уравнения:

I. $$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}\,\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

II. $$\frac{\partial E_z}{\partial x} + \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}\,\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

Уравнения адвекции

$$E_z\left(t + x/v\right) = E_z\left(t + \sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\mu\,\mu_0}\,x\right)$$

- волна, распространяющаяся влево, удовлетворяет первому уравнению адвекции, но не второму.

Покажем это.

Уравнения адвекции

Сделаем замену $$\xi = t + \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}\, x$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}$$

Уравнения адвекции

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi}\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi}$$

Уравнения адвекции

Полученные выражения подставляем в первое уравнение адвекции

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} - \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} = 0$$

$$0 = 0$$

Уравнение удовлетворяется

Уравнения адвекции

Полученные выражения подставляем во второе уравнение адвекции

$$\frac{\partial E_z}{\partial x}+\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\mu\,\mu_0}\frac{\partial E_z}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial \xi}\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\mu\,\mu_0}+\frac{\partial E_z}{\partial \xi}\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\mu\,\mu_0}=0$$

$$2\frac{\partial E_z}{\partial \xi}\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\mu\,\mu_0}\neq 0$$

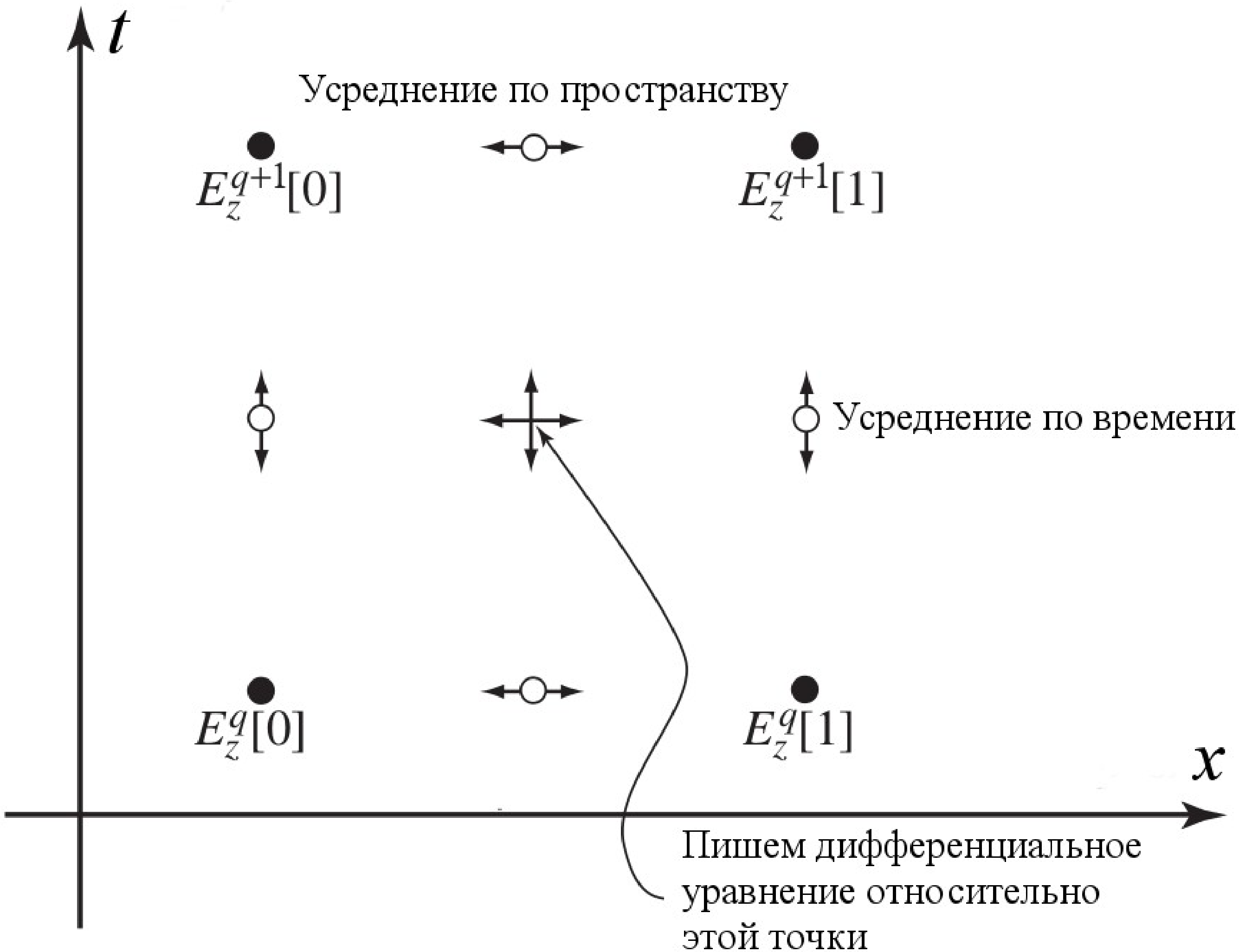
Уравнение не удовлетворяется

Поглощающие граничные условия. Постановка задачи

Известны значения полей $E_z^{q+1}[1]$, $E_z^q[0]$ и $E_z^q[1]$

Рассчитать поле $E_z^{q+1}[0]$ таким образом,
чтобы волна распространялась только влево

Поглощающие граничные условия



Поглощающие граничные условия

Запишем производные в уравнении адвекции через конечно-разностную схему

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\,\frac{\partial E_z}{\partial t}\bigg|_{\Delta_x/2,\left(q+\frac{1}{2}\right)\Delta_t} =$$

???

$$= \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\,\frac{E_z^{q+1}[1/2]-E_z^{q}[1/2]}{\Delta_t}$$

Поглощающие граничные условия

$$E_z^{q+1}[1/2] \approx \frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1]}{2}$$

$$E_z^{q}[1/2] \approx \frac{E_z^{q}[0] + E_z^{q}[1]}{2}$$

Поглощающие граничные условия

$$\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\mu\,\mu_0}\,\frac{\partial E_z}{\partial t}\bigg|_{\Delta_x/2,\left(q+\frac{1}{2}\right)\Delta_t} \approx$$

$$\approx \sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\mu\,\mu_0}\,\frac{\dfrac{E_z^{q+1}[0]+E_z^{q+1}[1]}{2}-\dfrac{E_z^{q}[0]+E_z^{q}[1]}{2}}{\Delta_t}$$

Поглощающие граничные условия

Аналогично поступаем со вторым слагаемым в первом уравнении адвекции

$$\left.\frac{\partial E_z}{\partial x}\right|_{\Delta_x/2,\left(q+\frac{1}{2}\right)\Delta_t} =$$

$$= \frac{E_z^{q+1/2}[1] - E_z^{q+1/2}[0]}{\Delta_x} \approx$$

$$\approx \frac{\dfrac{E_z^{q+1}[1] + E_z^{q}[1]}{2} - \dfrac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q}[0]}{2}}{\Delta_x}$$

Поглощающие граничные условия

Подставляем полученные выражения в первое уравнение адвекции

$$\frac{\dfrac{E_z^{q+1}[1]+E_z^{q}[1]}{2}-\dfrac{E_z^{q+1}[0]+E_z^{q}[0]}{2}}{\Delta_x}-$$

$$-\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\mu\,\mu_0}\,\frac{\dfrac{E_z^{q+1}[0]+E_z^{q+1}[1]}{2}-\dfrac{E_z^{q}[0]+E_z^{q}[1]}{2}}{\Delta_t}=0$$

Поглощающие граничные условия

Из полученного уравнения выражаем $E_x^{q+1}[0]$ и учитываем, что:

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}=\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c},\qquad S_c=\frac{c\Delta_t}{\Delta_x}$$

$$\boxed{E_z^{q+1}[0]=E_z^q[1]+\frac{\dfrac{S_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}-1}{\dfrac{S_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}+1}\left(E_z^{q+1}[1]-E_z^q[0]\right)}$$

Поглощающие граничные условия

Аналогично можно вывести условие для правой границы

$$E_z^{q+1}[M] = E_z^q[M-1] + \frac{\frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - 1}{\frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} + 1}\left(E_z^{q+1}[M-1] - E_z^q[M]\right)$$

Поглощающие граничные условия

Для свободного пространства и $S_c = 1$ выражения сводятся к виду:

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1]$$

$$E_z^{q+1}[M] = E_z^q[M-1]$$

Демонстрация поглощающих граничных условий (ABC) первой степени

fdtd_abc_first.m
fdtd_abc_first_2.m

Формулировка граничных условий АВС первой степени с использованием операторной записи

Операторы для граничных условий ABC

Введем несколько новых операторов:

I — оператор идентичности.

$$I\, E_z^q[m] = E_z^q[m]$$

$s_x^{\,1}$ — оператор <u>пространственного</u> сдвига (сдвиг вправо).

$$s_x^1 E_z^q[m] = E_z^q[m+1]$$

s_t^{-1} — оператор обратного <u>временного</u> сдвига.

$$s_t^{-1} E_z^{q+1}[m] = E_z^q[m]$$

Линейные операторы

Оператор A называются линейным, если выполняются следующие условия:

- $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2$
- $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}$

Свойства линейных операторов

Для двух линейных операторов A и B выполняется условия:

$$(A+B)(x) = A(x) + B(x)$$
$$(AB)(x) = A(B(x))$$

Введенные операторы коммутативны (можно менять порядок их применения)

$$s_x^1 s_t^{-1} = s_t^{-1} s_x^1$$

$$I s_x^1 = s_x^1$$

$$I I = I$$

Поглощающие граничные условия с использованием операторной записи

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\frac{\partial E_z}{\partial t}\bigg|_{\Delta_x/2,\left(q+\frac{1}{2}\right)\Delta_t}\approx$$

$$\approx\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\frac{\dfrac{E_z^{q+1}[0]+E_z^{q+1}[1]}{2}-\dfrac{E_z^{q}[0]+E_z^{q}[1]}{2}}{\Delta_t}$$

Использование операторов для граничных условий ABC первого порядка

Пространственное усреднение с помощью введенных операторов записывается следующим образом:

$$\frac{E_z^{q+1}[m]+E_z^{q+1}[m+1]}{2}=\left(\frac{I+s_x^1}{2}\right)E_z^{q+1}[m]$$

Временное усреднение с помощью введенных операторов записывается следующим образом:

$$\frac{E_z^{q+1}[m]+E_z^{q}[m]}{2}=\left(\frac{I+s_t^{-1}}{2}\right)E_z^{q+1}[m]$$

Поглощающие граничные условия с использованием операторной записи

В операторном виде указанные действия выглядят следующим образом:

$$\left.\frac{\partial E_z}{\partial t}\right|_{\Delta_x/2,\left(q+\frac{1}{2}\right)\Delta_t} \approx \frac{\left(\frac{I+s_x^1}{2}\right) E_z^{q+1}[0] - \left(\frac{I+s_x^1}{2}\right) s_t^{-1} E_z^{q+1}[0]}{\Delta_t} =$$

$$= \left(\frac{I+s_x^1}{2}\right)\left(\frac{I-s_t^{-1}}{\Delta_t}\right) E_z^{q+1}[0] =$$

$$= \frac{1}{2\Delta_t}\left(I - s_t^{-1} + s_x^1 - s_x^1 \cdot s_t^{-1}\right) E_z^{q+1}[0] =$$

$$= \frac{1}{2\Delta_t}\left(E_z^{q+1}[0] - E_z^{q}[0] + E_z^{q+1}[1] - E_z^{q}[1]\right)$$

Поглощающие граничные условия с использованием операторной записи

Аналогично можем поступить с расчетом производной по пространству:

$$\left.\frac{\partial E_z}{\partial x}\right|_{\Delta_x/2,\left(q+\frac{1}{2}\right)\Delta_t} \approx$$

$$\approx\left(\frac{s_x^1 - I}{\Delta_x}\right)\left(\frac{I + s_t^{-1}}{2}\right)E_z^{q+1}[0] =$$

$$= \frac{1}{2\Delta_x}\left(-I + s_x^1 - s_t^{-1} + s_t^{-1}\cdot s_x^1\right)E_z^{q+1}[0] =$$

$$= \frac{1}{2\Delta_x}\left(-E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1] - E_z^q[0] + E_z^q[1]\right)$$

Поглощающие граничные условия с использованием операторной записи

Запишем конечно-разностное выражение для уравнения адвекции:

$$\left\{\left(\frac{s_x^1 - I}{\Delta_x}\right)\left(\frac{I + s_t^{-1}}{2}\right) - \sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{I + s_x^1}{2}\right)\left(\frac{I - s_t^{-1}}{\Delta_t}\right)\right\} E_z^{q+1}[0] = 0$$

Решение этого уравнения для $E_z^{q+1}[0]$ даст выражение

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1] + \frac{\dfrac{S_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - 1}{\dfrac{S_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} + 1}\left(E_z^{q+1}[1] - E_z^q[0]\right)$$

Поглощающие граничные условия (Absorbing boundary condition — ABC) второй степени

Волновое уравнение в одномерном случае

Мы получим более точное решение уравнения адвекции и уменьшим отражение, если применим оператор адвекции дважды:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\mu\,\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\mu\,\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_z=0$$

Волновое уравнение в одномерном случае

Конечно-разностная схема для оператора адвекции второй степени в операторном виде:

$$\left[\left\{\left(\frac{s_x^1 - I}{\Delta_x}\right)\left(\frac{I + s_t^{-1}}{2}\right) - \sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{I + s_x^1}{2}\right)\left(\frac{I - s_t^{-1}}{\Delta_t}\right)\right\}\times\right.$$

$$\left.\left\{\left(\frac{s_x^1 - I}{\Delta_x}\right)\left(\frac{I + s_t^{-1}}{2}\right) - \sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{I + s_x^1}{2}\right)\left(\frac{I - s_t^{-1}}{\Delta_t}\right)\right\}\right] E_z^{q+1}[0] = 0$$

Поглощающее граничное условие второй степени

Если раскрыть скобки и решить это уравнение относительно $E_z^{q+1}[0]$, то мы получим

$$E_z^{q+1}[0]=\underbrace{\frac{-1}{1/S'_c+2+S'_c}}_{k_1}\left\{\underbrace{\left(\frac{1}{S'_c}-2+S'_c\right)}_{k_2}\left(\underline{E_z^{q+1}[2]}+E_z^{q-1}[0]\right)+\right.$$

$$+2\underbrace{\left(S'_c-\frac{1}{S'_c}\right)}_{k_3}\left(E_z^{q}[0]+\underline{E_z^{q}[2]}-E_z^{q+1}[1]-E_z^{q-1}[1]\right)-$$

$$\left.-4\underbrace{\left(\frac{1}{S'_c}+S'_c\right)}_{k_4}E_z^{q}[1]\right\}-\underline{E_z^{q-1}[2]}$$

Волновое уравнение в одномерном случае

В предыдущем выражении:

$$S'_c = \frac{\Delta_t}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}\,\Delta_x} = \frac{S_c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Волновое уравнение в одномерном случае

Для свободного пространства и $S_c = 1$ граничное условие преобразуется к виду:

$$E_z^{q+1}[0] = 2E_z^q[1] - E_z^{q-1}[2]$$

Волновое уравнение в одномерном случае

Граничные условия справа выглядят аналогично, только они отражены «зеркально». Преобразуются пространственные координаты:

$$0 \rightarrow M$$
$$1 \rightarrow M-1$$
$$2 \rightarrow M-2$$

В индексации MATLAB:

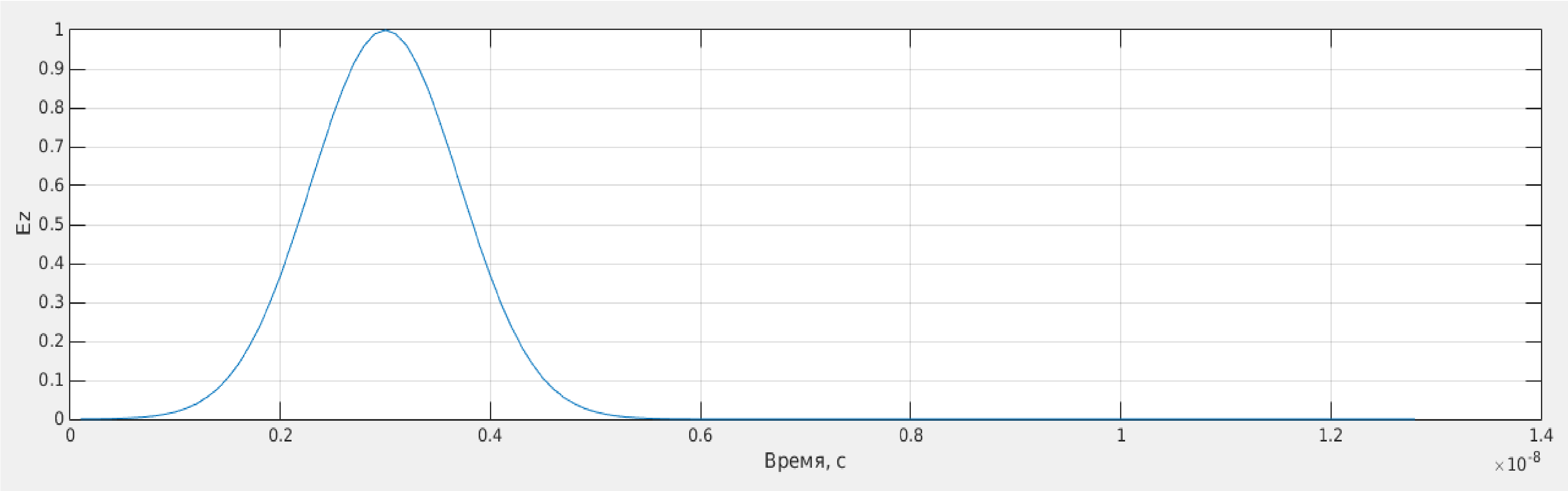
$$1 \rightarrow \mathrm{end}$$
$$2 \rightarrow \mathrm{end}-1$$
$$3 \rightarrow \mathrm{end}-2$$

Демонстрация поглощающих граничных условий (ABC) второй степени

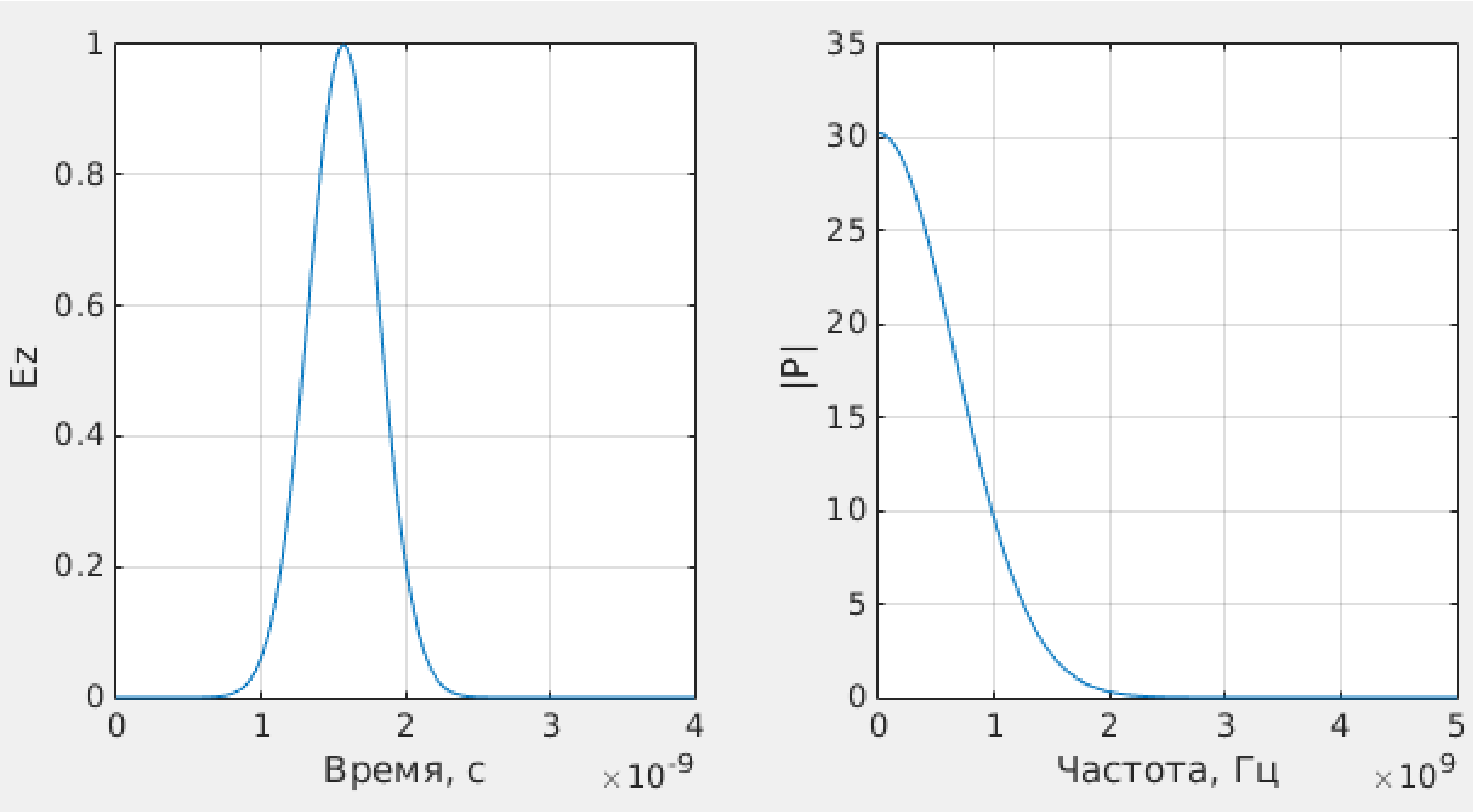
Источники возбуждения

Гауссов импульс

$$f_g(t) = A e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$



Спектр гауссова импульса



Спектр гауссова импульса

Если заданы требования к сигналу:

- A_0 — уровень ослабления сигнала в момент времени $t = 0$ ($A_0 > 1$).
- F_{max} — «максимальная» частота в спектре сигнала.
- A_{max} — уровень ослабления спектра сигнала на частоте F_{max} ($A_{max} > 1$).

$$f_g(t) = A e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$w_g = \frac{\sqrt{\ln\left(A_{max}\right)}}{\pi F_{max}}$$

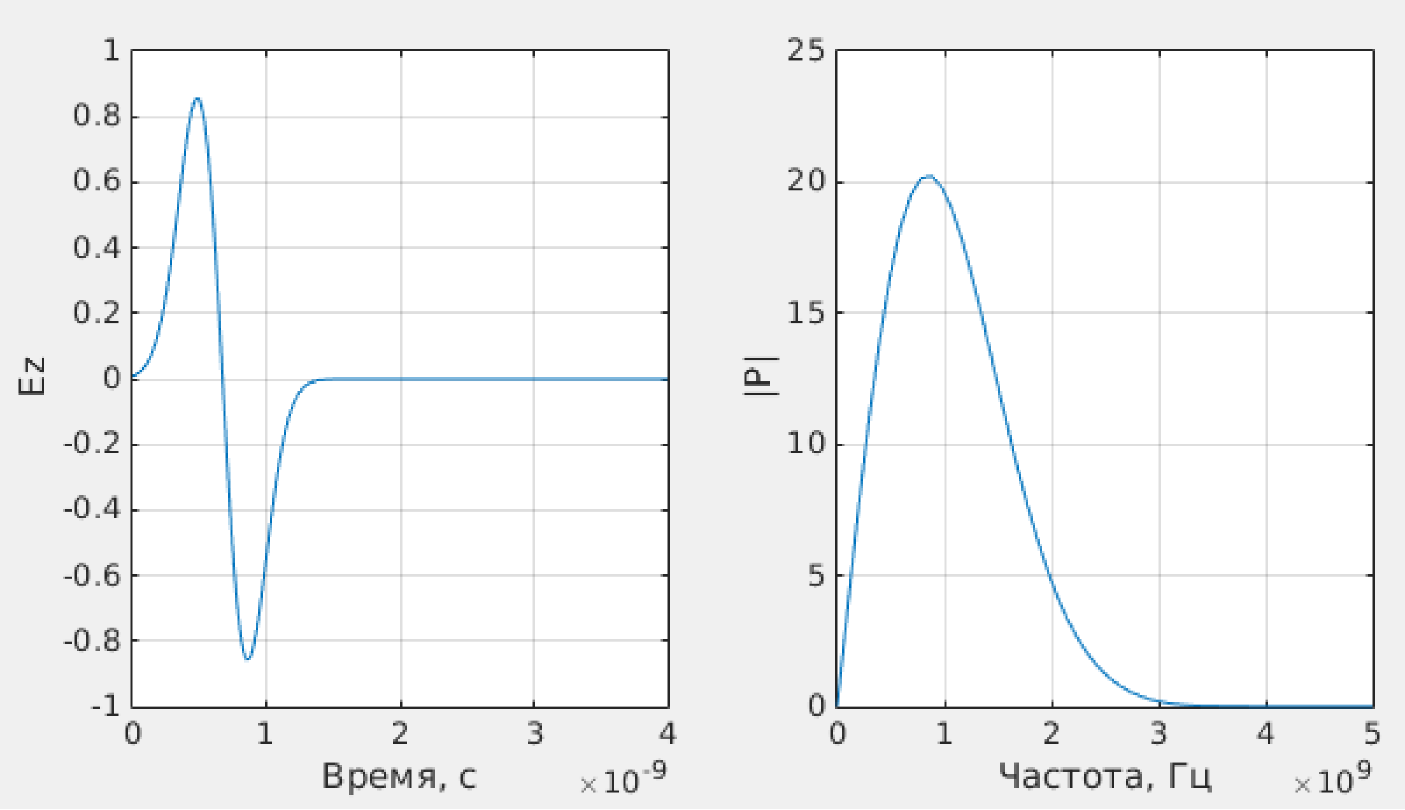
$$d_g = w_g \sqrt{\ln\left(A_0\right)}$$

Недостатки гауссова импульса

- В спектре присутствует постоянная составляющая.
- Максимальное значение спектра всегда на частоте 0 ГГц.
- Сигнал с постоянной составляющей нельзя излучить.

Дифференцированный гауссов импульс

$$f_g(t) = -2A\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$



Спектр дифференцированного гауссова импульса

Если заданы требования к сигналу:

- $F_{\max}$ — «максимальная» частота в спектре сигнала.
- $A_{\max}$ — уровень ослабления спектра сигнала на частоте $F_{\max}$ и ослабление в момент времени $t = 0$ ($A_{\max} > 1$).

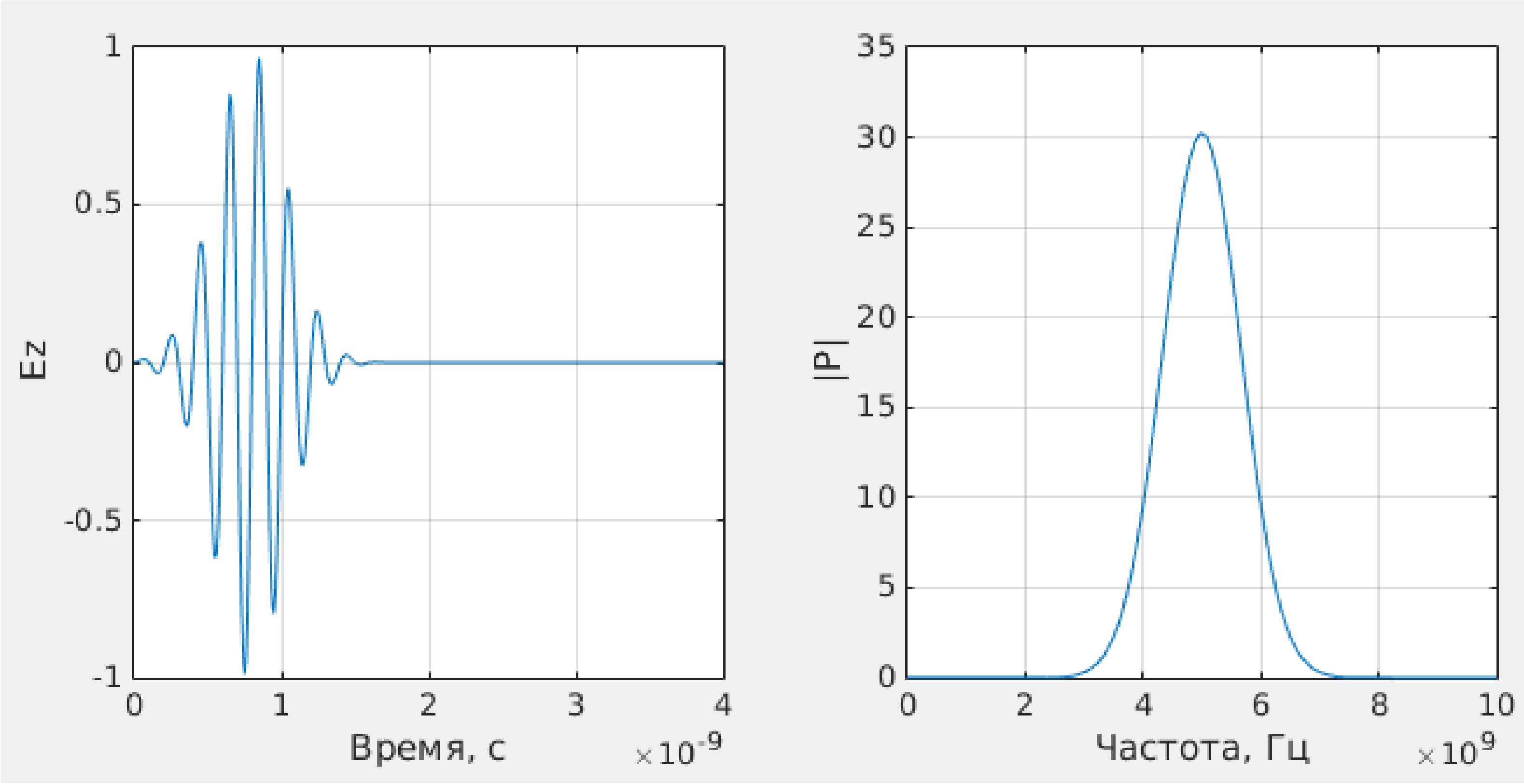
$$f_g(t) = -2A\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$w_g = \frac{\sqrt{\ln\left(5.5A_{\max}\right)}}{\pi F_{\max}}$$

$$d_g = w_g\sqrt{\ln\left(2.5A_{max}\sqrt{\ln\left(2.5A_{max}\right)}\right)}$$

Модулированный гауссов импульс

$$f_g(t)=\sin(2\pi f_0 t)\,e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$



Спектр модулированного гауссова импульса

Если заданы требования к сигналу:

- f_0 — центральная частота в спектре сигнала.
- $A_{\max}$ — уровень ослабления спектра сигнала на частоте $F_{\max}$ ($A_{\max} > 1$).
- A_0 — ослабление огибающей сигнала в момент времени $t = 0$
- ΔF — ширина спектра по уровню ослабления $A_{\max}$.

$$f_g(t) = \sin(2\pi f_0 t) e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$w_g = 2\sqrt{\ln(A_{\max})} / (\pi \Delta F) \qquad d_g = w_g \sqrt{\ln(A_0)}$$

Модулированный гауссов импульс при использовании метода Total Field / Scattered Field

Поле на границе Total-Field / Scattered-Field

$$H_y^{q+1/2}[50-1/2]=H_y^{q+1/2}[50-1/2]-\frac{1}{W_0}E_z^{inc}[0,q]$$

$$E_z^{q+1}[50]=E_z^{q+1}[50]+E_z^{inc}[-1/2,q+1/2]$$

Модулированный гауссов импульс для метода Total Field / Scattered Field

$f(\xi)$ — решение волнового уравнения, если:

- $f(\xi)$ дважды дифференцируема
- ξ можно заменить на $t \pm x / v$ (для одномерного случая)

Модулированный гауссов импульс для метода Total Field / Scattered Field

В выражении для модулированного гауссова импульса заменим t на $t \pm x / c$

$$f_g(t) = \sin(2\pi f_0 t) e^{-\left(\frac{t - d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$f_g(t) = \sin\left(2\pi f_0 \left(t \pm \frac{x}{c}\right)\right) e^{-\left(\frac{t \pm \frac{x}{c} - d_g}{w_g}\right)^2}$$

Модулированный гауссов импульс для метода Total Field / Scattered Field

Запишем предыдущее выражение через число Куранта и длину волны, учитывая, что

$$\frac{x}{c}=\frac{m\Delta_x}{c}=\frac{m\Delta_t}{S_c},$$

$$f_0=\frac{S_c}{N_\lambda \Delta_t},$$

$$d_g=N_{dg}\Delta_t,$$

$$w_g=N_{wg}\Delta_t$$

Модулированный гауссов импульс для метода Total Field / Scattered Field

$$f_g[m,q]=\sin\left(\frac{2\pi S_c}{N_\lambda \Delta_t}\left(q\Delta_t \pm \frac{m\Delta_t}{S_c}\right)\right)e^{-\left(\frac{q\Delta_t \pm \frac{m\Delta_t}{S_c} - N_{dg}\Delta_t}{N_{wg}\Delta_t}\right)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$f_g[m,q]=\sin\left(\frac{2\pi}{N_\lambda}\left(\frac{q}{S_c} \pm m\right)\right)e^{-\left(\frac{q \pm \frac{m}{S_c} - N_{dg}}{N_{wg}}\right)^2}$$

Демонстрация модулированного гауссова импульса при использовании метода Total Field / Scattered Field

fdtd_tfsf_gauss_mod.m

Гармонический сигнал при использовании метода Total Field / Scattered Field

Гармонический сигнал

$$f_h(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

или в дискретном виде

$$f_h(q\Delta_t) = A\cos(\omega q\Delta_t + \varphi_0)$$

Гармонический сигнал в терминах длин волн

Если задана длина волны в виде: $\lambda = N_\lambda \cdot \Delta_x$, то

$$f = \frac{c}{\lambda}, \quad \omega t = \frac{2\pi c}{\lambda} t$$

$$f_h(q\Delta_t) = A\cos\left(\frac{2\pi c}{N_\lambda \Delta_x} q\Delta_t + \varphi_0\right)$$

$$f_h[q] = A\cos\left(\frac{2\pi S_c}{N_\lambda} q + \varphi_0\right)$$

Уравнение плоской волны в дискретном виде

$$T = \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{c} = \frac{N_\lambda \Delta_x}{c}$$

Количество временных шагов на период:

$$\frac{T}{\Delta_t} = \frac{N_\lambda \Delta_x}{c\Delta_t} = \frac{N_\lambda}{S_c}$$

Уравнение плоской волны в дискретном виде

$$f_h(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0) = A\cos\left(\omega\left(t - \frac{k}{\omega}x\right) + \varphi_0\right)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}$$

$$x = m\Delta_x$$

Уравнение плоской волны в дискретном виде

тогда:

$$\omega\left(t-\frac{k}{\omega}x\right)=\frac{2\pi c}{N_\lambda \Delta_x}\left(q\Delta_t-\frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}m\Delta_x\right)$$

Уравнение плоской волны в дискретном виде

тогда:

$$\omega\left(t-\frac{k}{\omega}x\right)=\frac{2\pi c}{N_\lambda \Delta_x}\left(q\Delta_t-\frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}m\Delta_x\right)$$

Вынесем за скобки Δ_x / с

$$\omega\left(t-\frac{k}{\omega}x\right)=\frac{2\pi}{N_\lambda}\left(q\frac{\Delta_t c}{\Delta_x}-\sqrt{\mu\varepsilon}\,m\right)=\frac{2\pi}{N_\lambda}\left(S_c q-\sqrt{\mu\varepsilon}\,m\right)$$

Уравнение плоской волны в дискретном виде

В дискретном виде:

$$f_h[m,q] = A\cos\left(\frac{2\pi}{N_\lambda}\left(S_c q - \sqrt{\mu\varepsilon}\, m\right) + \varphi_0\right)$$

Обычно используют:

$$f_h[m,q] = A\sin\left(\frac{2\pi}{N_\lambda}\left(S_c q - \sqrt{\mu\varepsilon}\, m\right) + \varphi_0\right)$$

Демонстрация гармонического сигнала при использовании метода Total Field / Scattered Field

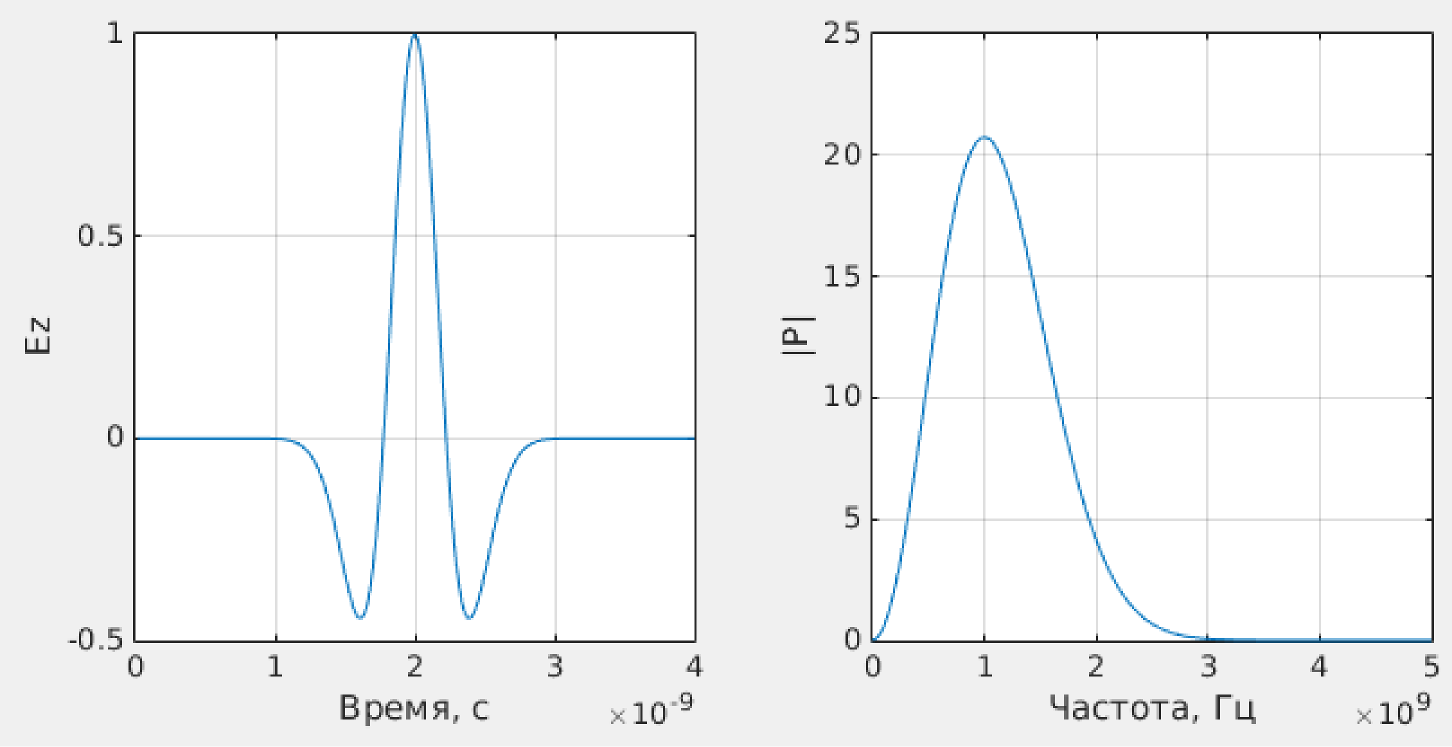
fdtd_tfsf_sin.m

Демонстрация стоячей волны

fdtd_tfsf_sin.m

Вейвлет Рикера

$$f_r(t) = \left(1 - 2\{\pi f_p[t - d_r]\}^2\right) e^{-\{\pi f_p[t - d_r]\}^2}$$



Вейвлет Рикера

Если заданы требования к сигналу:

- f_P — «пиковая» частота в спектре сигнала.

$$f_r(t) = \left(1 - 2\left\{\pi f_p\left[t - d_r\right]\right\}^2\right) e^{-\left\{\pi f_p\left[t - d_r\right]\right\}^2}$$

$$d_r = M_d \frac{1}{f_p}$$

M_d — коэффициент задержки

Спектр вейвлета Рикера

$$F_r(\omega) = -\frac{2}{f_p\sqrt{\pi}}\left(\frac{\omega}{2\pi f_p}\right)^2 \exp\left(-jd_r\omega - \left(\frac{\omega}{2\pi f_p}\right)^2\right)$$

Вейвлет Рикера в терминах длин волн

$$\lambda_p = N_p \Delta_x, \quad f_p = \frac{c}{\lambda_p} = \frac{c}{N_p \Delta_x}$$

Вейвлет Рикера в терминах длин волн

$$\lambda_p = N_p \Delta_x, \quad f_p = \frac{c}{\lambda_p} = \frac{c}{N_p \Delta_x}$$

$$S_c = \frac{c\,\Delta_t}{\Delta_x} \Rightarrow \Delta_x = \frac{c\,\Delta_t}{S_c}$$

$$f_p = \frac{S_c}{N_p \Delta_t}$$

Вейвлет Рикера в терминах длин волн

$$f_p = \frac{S_c}{N_p \Delta_t}$$

Тогда задержка может быть представлена как:

$$d_r = M_d \frac{1}{f_p} = M_d \frac{N_p \Delta_t}{S_c}$$

Вейвлет Рикера в дискретном виде

$$f_r[q] = \left(1 - 2\pi^2\left[\frac{S_c q}{N_p} - M_d\right]^2\right)\exp\left(-\pi^2\left[\frac{S_c q}{N_p} - M_d\right]^2\right)$$

Вейвлет Рикера при использовании метода Total Field / Scattered Field

Вейвлет Рикера для метода Total Field / Scattered Field

В выражении для вейвлета Рикера заменим t на $t \pm x / c$

$$f_r\left(t \pm \frac{x}{c}\right) = f_r(x, t) = \left(1 - 2\pi^2 f_p^2 \left(t \pm \frac{x}{c} - d_r\right)^2\right) e^{-\pi^2 f_p^2 \left(t \pm \frac{x}{c} - d_r\right)^2}$$

Вейвлет Рикера для метода Total Field / Scattered Field

Запишем предыдущее выражение через число Куранта и длину волны, учитывая, что

$$\frac{x}{c}=\frac{m\Delta_x}{c}=\frac{m\Delta_t}{S_c}, \qquad f_p=\frac{S_c}{N_p\Delta_t}, \qquad d_r=M_d\frac{1}{f_p}=M_d\frac{N_p\Delta_t}{S_c}$$

$$\Downarrow$$

$$f_r[m,q]=\left(1-2\pi^2\left[\frac{S_c q\pm m}{N_p}-M_d\right]^2\right)e^{-\pi^2\left[\frac{S_c q\pm m}{N_p}-M_d\right]^2}$$

Демонстрация вейвлета Рикера при использовании метода Total Field / Scattered Field

fdtd_tfsf_ricker.m

Погрешности метода FDTD

Источники погрешностей метода FDTD

- Численная дисперсия.
- Отражение от границ области моделирования.
- Ступенчатая аппроксимация границ объектов.
- Численный шум.
- Постоянная составляющая тока может создавать остаточные электрические заряды (емкость ячеек сетки).

Численная дисперсия

Дисперсия — зависимость фазовой скорости распространения волны от частоты.

Численная дисперсия

$$\frac{\tilde{c}}{c} = \frac{\pi\sqrt{\varepsilon\mu}}{N_\lambda \arcsin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{S_c}\sin\left(\frac{\pi S_c}{N_\lambda}\right)\right)}$$

$\tilde{c}$ – скорость распространения волны в дискретном пространстве

N_λ – Количество ячеек сетки на длину волны

Демонстрация численной дисперсии

dispersion.m
fdtd_dispersion.m

Коэффициенты отражения и прохождения

Для границы раздела двух диэлектриков

$\mu = 1$

Коэффициент прохождения: $$T = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}}$$

Коэффициент отражения: $$\Gamma = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}}$$

Коэффициенты прохождения и отражения в дискретном пространстве

$$\tilde{T} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\left(\frac{\tilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}$$

$$\tilde{\Gamma} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\left(\frac{\tilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) - \sqrt{\varepsilon_2}\cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\left(\frac{\tilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}$$

где

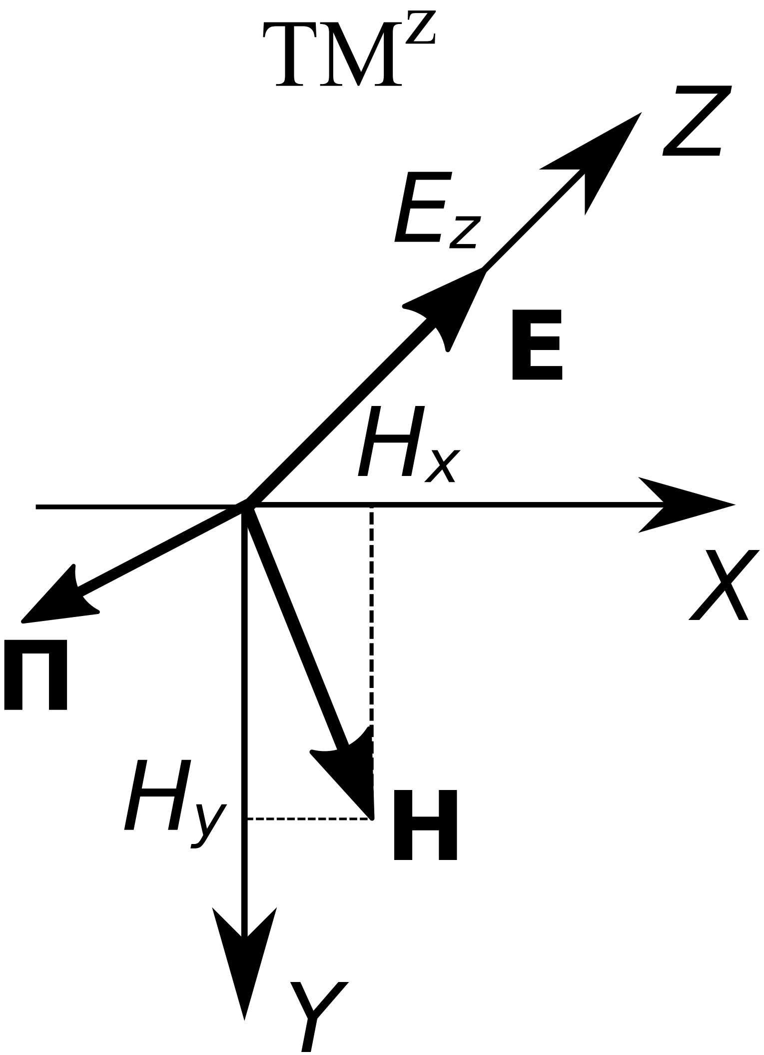
$$\frac{\tilde{\beta}_i \Delta_x}{2} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_i \mu_i}}{S_c}\sin\left(\frac{\pi S_c}{N_\lambda}\right)\right)$$

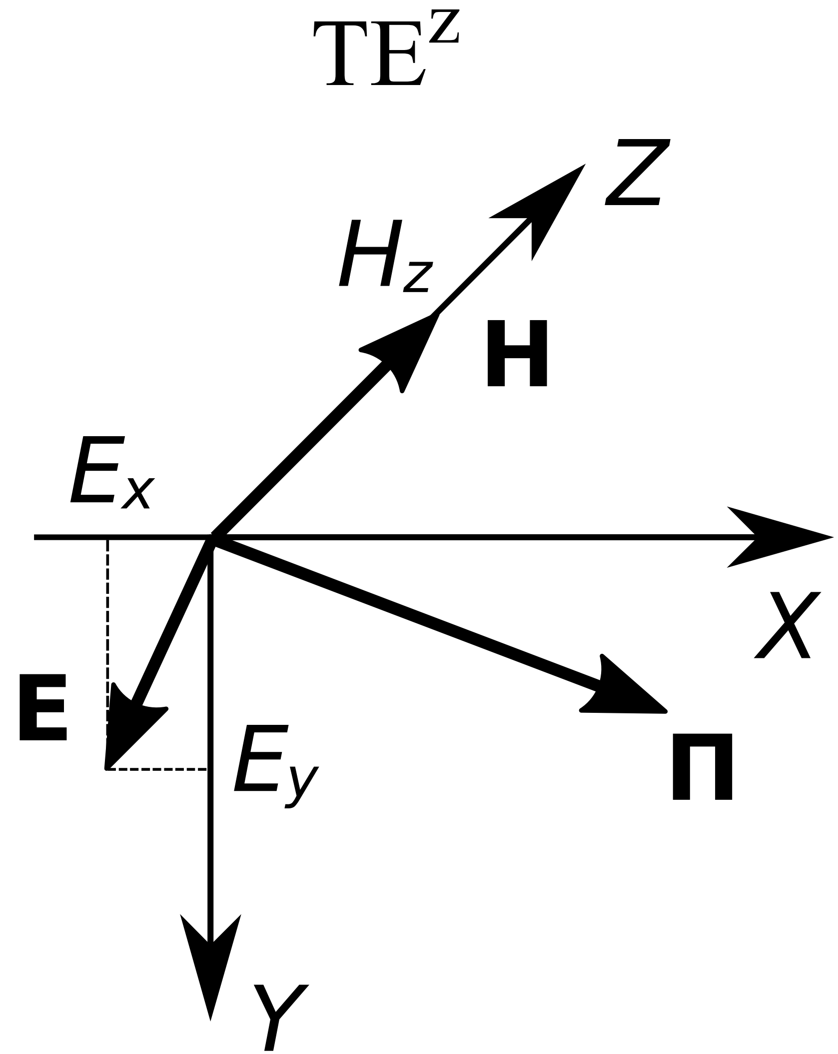
Демонстрация погрешностей при расчете коэффициента отражения

reflection_error.m

Двумерный метод конечных разностей во временной области

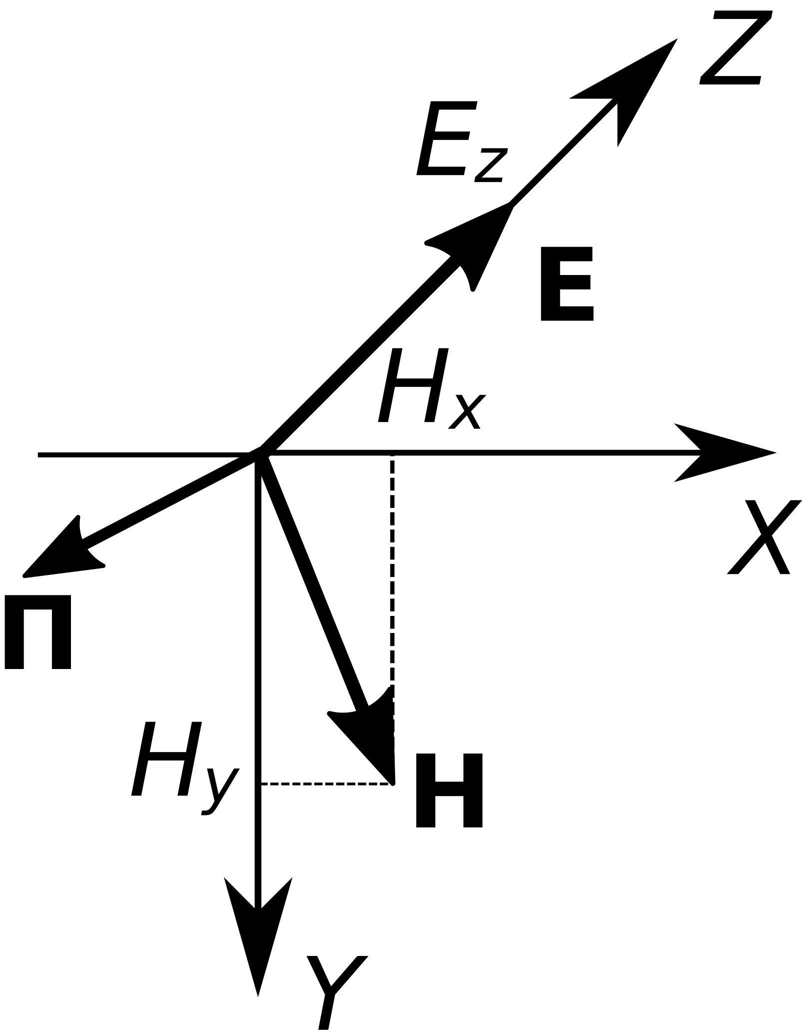
Виды поляризации для двумерного случая





Двумерный метод конечных разностей во временной области для поляризации TM^z

Поляризация TM^z



Существуют следующие компоненты ЭМ поля:

- E_z
- H_x
- H_y

Метод FDTD для поляризации TM^z. Закон Фарадея

$$-\sigma_m \mathbf{H} - \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x_0} & \mathbf{y_0} & \mathbf{z_0} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & E_z \end{vmatrix} = \mathbf{x}_0 \frac{\partial E_z}{\partial y} - \mathbf{y}_0 \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

Метод FDTD для поляризации TM^z. Закон Ампера

$$\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x_0} & \mathbf{y_0} & \mathbf{z_0} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{z_0} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

Метод FDTD для поляризации TM^z. Законы Фарадея и Ампера в скалярном виде

$$-\sigma_m H_x - \mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$\sigma_m H_y + \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\sigma E_z + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

Дискретизация величин E и H

$$H_x(x,y,t)=H_x(m\Delta_x,n\Delta_y,q\Delta_t)=H_x^q[m,n]$$

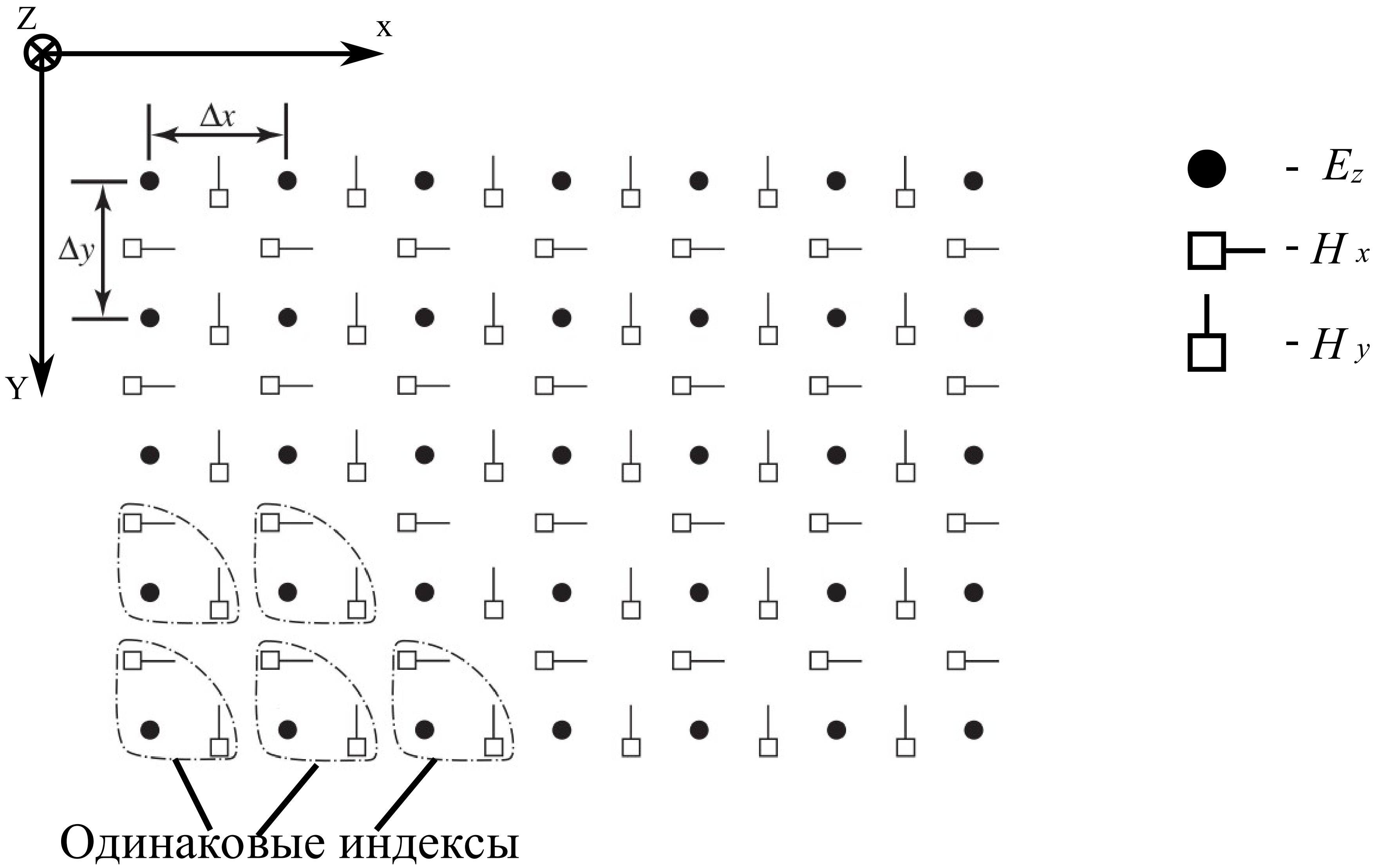
$$H_y(x,y,t)=H_y(m\Delta_x,n\Delta_y,q\Delta_t)=H_y^q[m,n]$$

$$E_z(x,y,t)=E_z(m\Delta_x,n\Delta_y,q\Delta_t)=E_z^q[m,n]$$

m — индекс по пространству вдоль оси X.
n — индекс по пространству вдоль оси Y.
q — индекс по времени.

Δ_x, Δ_y — размер сетки по осям X и Y соответственно.

Пространственная сетка для двумерного метода FDTD



Особенности реализации двумерного метода FDTD

- Размер массива для компоненты E_z — $M \times N$
- Размер массива для компоненты H_x — $M \times (N - 1)$
- Размер массива для компоненты H_y — $(M - 1) \times N$

Конечно-разностная аппроксимация для закона Фарадея

Запишем конечно-разностную аппроксимацию для точки $(m\Delta_x, (n + 1/2)\Delta_y, q\Delta_t)$

$$-\sigma_m \frac{H_x^{q+1/2}[m,n+1/2]+H_x^{q-1/2}[m,n+1/2]}{2} -$$

$$-\mu\mu_0 \frac{H_x^{q+1/2}[m,n+1/2]+H_x^{q-1/2}[m,n+1/2]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{E_z^q[m,n+1]-E_z^q[m,n]}{\Delta_y}$$

Конечно-разностная аппроксимация для закона Фарадея

Из полученного уравнения выражаем $H_x^{q+1/2}[m, n+1/2]$:

$$H_x^{q+1/2}[m,n+1/2]=\frac{1-\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}H_x^{q-1/2}[m,n+1/2]-$$

$$-\frac{1}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_y}\left(E_z^q[m,n+1]-E_z^q[m,n]\right)$$

Конечно-разностная аппроксимация для закона Фарадея

Подобным образом выражаем $H_y^{q+1/2}[m+1/2,n]$:

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2,n]=\frac{1-\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}H_y^{q-1/2}[m+1/2,n]+$$

$$+\frac{1}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}\left(E_z^q[m+1,n]-E_z^q[m,n]\right)$$

Конечно-разностная аппроксимация для закона Ампера

Подобным образом выражаем $E_z^{q+1}[m, n]$ из закона Ампера:

$$E_z^{q+1}[m,n]=\frac{1-\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}{1+\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}E_z^q[m,n]+$$

$$+\frac{1}{1+\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}\Big(\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\left\{H_y^{q+1/2}[m+1/2,n]-H_y^{q+1/2}[m-1/2,n]\right\}-$$

$$-\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_y}\left\{H_x^{q+1/2}[m,n+1/2]-H_x^{q+1/2}[m,n-1/2]\right\}\Big)$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{hxh}(m, n+1/2) = \left. \frac{1 - \dfrac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \dfrac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \right|_{m\delta, (n+1/2)\delta}$$

$$C_{hxe}(m, n+1/2) = \left. \frac{1}{1 + \dfrac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \delta} \right|_{m\delta, (n+1/2)\delta}$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{hyh}(m+1/2,n)=\left.\frac{1-\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}\right|_{(m+1/2)\delta,\,n\delta}$$

$$C_{hye}(m+1/2,n)=\left.\frac{1}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\delta}\right|_{(m+1/2)\delta,\,n\delta}$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{eze}(m,n) = \left. \frac{1 - \dfrac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \dfrac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \right|_{m\delta,\, n\delta}$$

$$C_{ezh}(m,n) = \left. \frac{1}{1 + \dfrac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \delta} \right|_{m\delta,\, n\delta}$$

Программная реализация конечно-разностной схемы

```
Hx(m, n) = Chxh(m, n) * Hx(m, n) - ...
           Chxe(m, n) * (Ez(m, n + 1) - Ez(m, n));

Hy(m, n) = Chyh(m, n) * Hy(m, n) + ...
           Chye(m, n) * (Ez(m + 1, n) - Ez(m, n));

Ez(m, n) = Ceze(m, n) * Ez(m, n) + ...
           Cezh(m, n) * (Hy(m, n) – Hy(m – 1, n)) - ...
           (Hx(m, n) – Hx(m, n – 1));
```

Стабильность двумерного метода FDTD

Критерий устойчивости Куранта-Фридриха-Леви

$$v_{max}\Delta_t \leqslant \frac{1}{\sqrt{\Delta_x^{-2}+\Delta_y^{-2}+\Delta_z^{-2}}}$$

$$v_{max} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{min}\mu_{min}}}$$

$$\text{Если}\ \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \Delta$$

$$v_{max}\Delta_t \leqslant \frac{\Delta}{\sqrt{N}}$$

N — размерность пространства (1, 2, 3)

Стабильность двумерного метода FDTD

Критерий стабильности для одномерного пространства:

$$S_c = \frac{v\,\Delta_t}{\Delta_x} \leq 1$$

Стабильность двумерного метода FDTD

Критерий стабильности для одномерного пространства:

$$S_c = \frac{v\Delta_t}{\Delta_x} \leq 1$$

Критерий стабильности для N-мерного пространства:

$$S_c = v\Delta_t \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\Delta_n^2}} \leq 1$$

Стабильность двумерного метода FDTD

Критерий стабильности для одномерного пространства:

$$S_c = \frac{v\,\Delta_t}{\Delta_x} \leq 1$$

Критерий стабильности для N-мерного пространства:

$$S_c = v\,\Delta_t \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\Delta_n^2}} \leq 1$$

Критерий стабильности для двумерного пространства:

$$S_c = v\,\Delta_t \sqrt{\frac{1}{\Delta_x^2} + \frac{1}{\Delta_y^2}} \leq 1$$

Стабильность двумерного метода FDTD

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то

$$S_c = v\Delta_t\sqrt{\frac{1}{\delta^2}+\frac{1}{\delta^2}} \le 1 \quad \rightarrow \quad Sc = \frac{v\Delta_t\sqrt{2}}{\delta} \le 1$$

Критерий стабильности для N-мерного пространства:

$$Sc = \frac{v\Delta_t\sqrt{N}}{\delta} \le 1$$

или

$$Sc = \frac{v\Delta_t}{\delta} \le \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Стабильность двумерного метода FDTD

Введем коэффициент — аналог одномерного числа Куранта для двумерного случая

$$\boxed{Cdtds = \frac{v\,\Delta_t}{\delta} \le \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Критерий устойчивости для двумерного FDTD:

$$\boxed{\Delta_t \le \frac{\delta}{c\sqrt{2}}}$$

Демонстрация двумерного метода FDTD для поляризации TM^z. Источник цилиндрической волны.

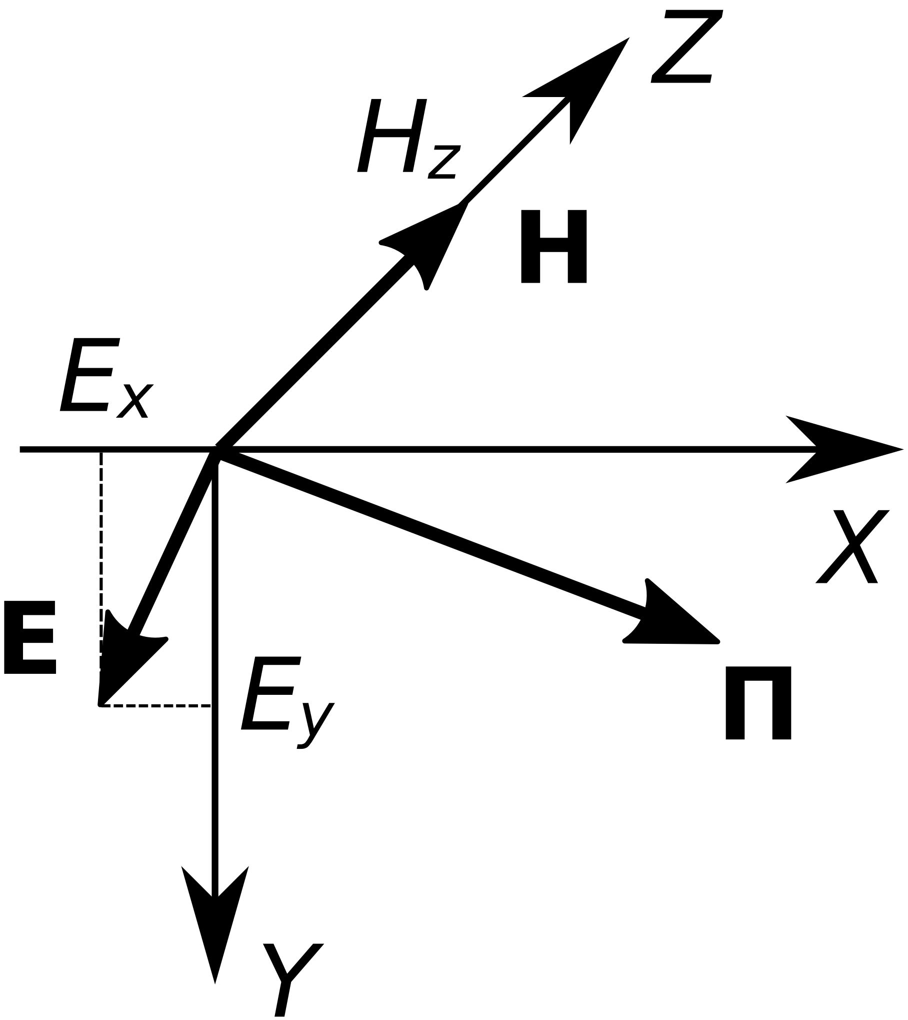
fdtd_2d_TM_first.m

Демонстрация двумерного метода FDTD для поляризации TM^z. Источник плоской волны.

fdtd_2d_TM_plainwave.m

Двумерный метод конечных разностей во временной области для поляризации TE^z

Поляризация TE^z



Существуют следующие компоненты ЭМ поля:

- E_x
- E_y
- H_z

Закон Фарадея

$$-\sigma_m \mathbf{H} - \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x_0} & \mathbf{y_0} & \mathbf{z_0} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{z_0}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

Закон Фарадея

В скалярном виде предыдущее выражение записывается как:

$$-\sigma_m H_z - \mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

Закон Ампера

$$\sigma\mathbf{E}+\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\nabla\times\mathbf{H}=$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{x_0} & \mathbf{y_0} & \mathbf{z_0}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & H_z\end{vmatrix}=\mathbf{x}_0\frac{\partial H_z}{\partial y}-\mathbf{y}_0\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

Закон Ампера

В скалярном виде предыдущее выражение записывается как:

$$\sigma E_x + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$\sigma E_y + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

Дискретизация величин E и H

$$E_x(x,y,t)=E_x(m\Delta_x,n\Delta_y,q\Delta_t)=E_x^q[m,n]$$

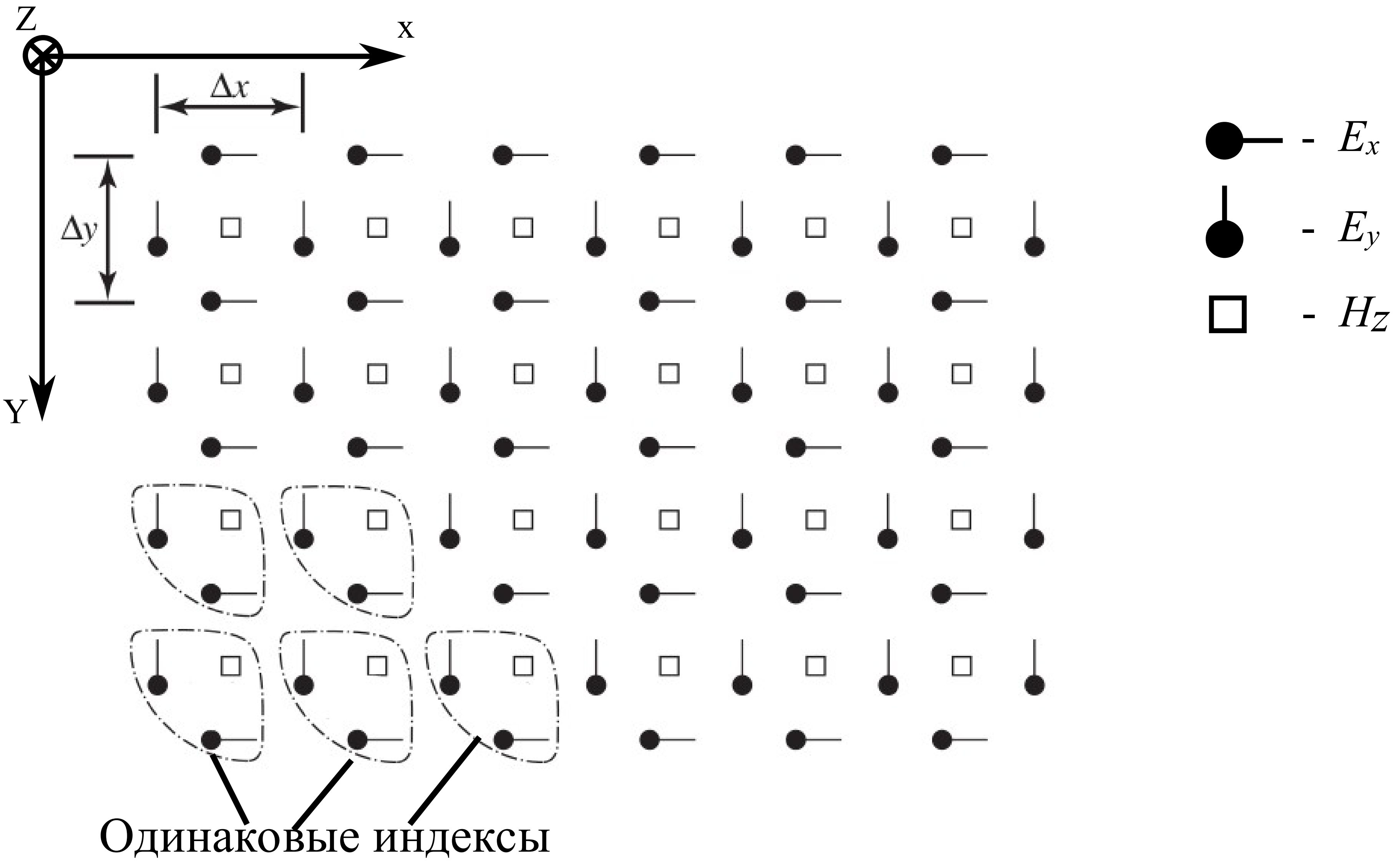
$$E_y(x,y,t)=E_y(m\Delta_x,n\Delta_y,q\Delta_t)=E_y^q[m,n]$$

$$H_z(x,y,t)=H_z(m\Delta_x,n\Delta_y,q\Delta_t)=H_z^q[m,n]$$

m — индекс по пространству вдоль оси X.
n — индекс по пространству вдоль оси Y.
q — индекс по времени.

Δ_x, Δ_y — размер сетки по осям X и Y соответственно.

Пространственная сетка для двумерного метода FDTD



Конечно-разностная схема

$$H_z^{q+1/2}[m+1/2,n+1/2]=\frac{1-\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}H_z^{q-1/2}[m+1/2,n+1/2]-$$

$$-\frac{1}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}\left(\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}\left\{E_y^q[m+1,n+1/2]-E_y^q[m,n+1/2]\right\}-\right.$$

$$\left.-\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_y}\left\{E_x^q[m+1/2,n+1]-E_x^q[m+1/2,n]\right\}\right)$$

Конечно-разностная схема

$$E_x^{q+1}[m+1/2,n]=\frac{1-\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}{1+\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}E_x^q[m+1/2,n]+$$

$$+\frac{1}{1+\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_y}\left(H_z^{q+1/2}[m+1/2,n+1/2]-H_z^{q+1/2}[m+1/2,n-1/2]\right)$$

Конечно-разностная схема

$$E_y^{q+1}[m,n+1/2]=\frac{1-\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}{1+\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}E_y^q[m,n+1/2]-$$

$$-\frac{1}{1+\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\left(H_z^{q+1/2}[m+1/2,n+1/2]-H_z^{q+1/2}[m-1/2,n+1/2]\right)$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{hzh}(m+1/2, n+1/2) = \left. \frac{1 - \dfrac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \dfrac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \right|_{(m+1/2)\delta, (n+1/2)\delta}$$

$$C_{hze}(m+1/2, n+1/2) = \left. \frac{1}{1 + \dfrac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\delta} \right|_{(m+1/2)\delta, (n+1/2)\delta}$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{exe}(m+1/2,n) = \left. \frac{1-\dfrac{\sigma\,\Delta_t}{2\,\varepsilon\,\varepsilon_0}}{1+\dfrac{\sigma\,\Delta_t}{2\,\varepsilon\,\varepsilon_0}} \right|_{(m+1/2)\delta\,,\,n\delta}$$

$$C_{exh}(m+1/2,n) = \left. \frac{1}{1+\dfrac{\sigma\,\Delta_t}{2\,\varepsilon\,\varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\delta} \right|_{(m+1/2)\delta\,,\,n\delta}$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{eye}(m,n+1/2)=\left.\frac{1-\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}{1+\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}\right|_{m\delta,(n+1/2)\delta}$$

$$C_{eyh}(m,n+1/2)=\left.\frac{1}{1+\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\delta}\right|_{m\delta,(n+1/2)\delta}$$

Программная реализация конечно-разностной схемы

```
Hz(m, n) = Chzh(m, n) * Hz(m, n) + ...
           Chze(m, n) * ((Ex(m, n + 1) - Ex(m, n) -...
                        (Ey(m + 1, n) - Ey(m, n)));

Ex(m, n) = Cexe(m, n) * Ex(m, n) + ...
           Cexh(m, n) * (Hz(m, n) - Hz(m, n - 1));

Ey(m, n) = Ceye(m, n) * Ey(m, n) - ...
           Ceyh(m, n) * (Hz(m, n) - Hz(m - 1, n));
```

Размеры массивов компонент поля E и H

Для применения граничных условий ABC необходимо, чтобы на границе области моделирования существовали касательные компоненты поля **E**.

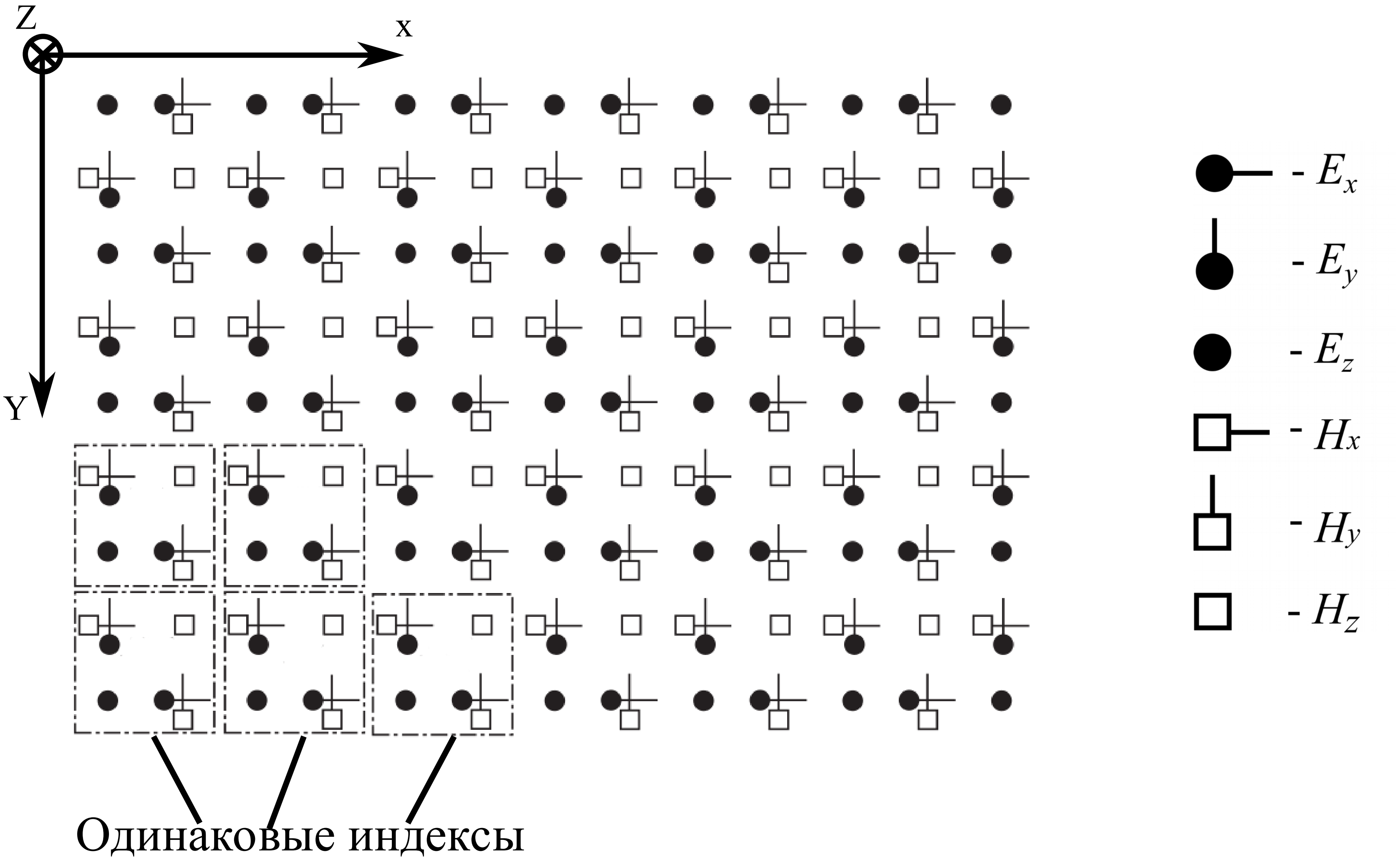
Поэтому для сетки размера M x N размеры массивов для хранения компонент полей следующие:

- $E_x[(M - 1) \text{ x } N]$
- $E_y[M \text{ x } (N - 1)]$
- $H_z[(M - 1) \text{ x } (N - 1)]$

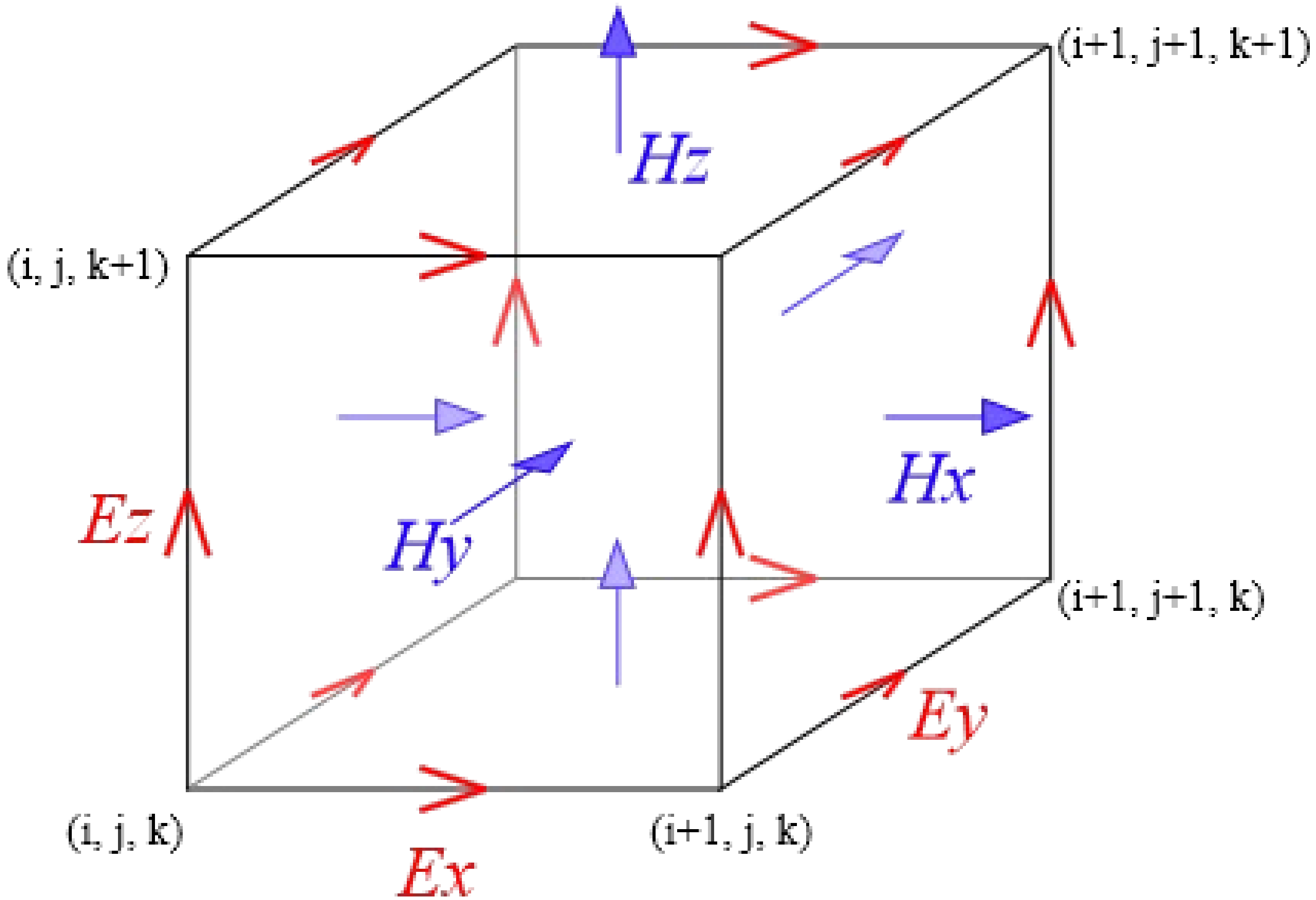
Демонстрация двумерного метода FDTD для поляризации TM^z. Граничные условия ABC.

fdtd_2d_TM_plainwave_abc.m

Объединенная пространственная сетка для двумерного метода FDTD для двух поляризаций



Ячейка для трехмерного метода FDTD



Модификации метода FDTD

- Метод FDTD в криволинейных системах координат.
- Уменьшение отражений от границ области моделирования.
- Использование неравномерных сеток разбиения.
- Использование ячеек неправильной формы.
- Учет временной дисперсии среды.
- Учет зависимости параметров среды от частоты.
- Метод FDTD с произвольным шагом по времени.