

**Московский Авиационный Институт  
(национальный исследовательский университет)**

---

# **Моделирование антенн и микроволновых устройств**

**«Метод конечных разностей  
во временной области (FDTD)»**

## Литература

Allen Taflove, Susan C. Hagness

«Computational Electrodynamics:  
The Finite-Difference Time-Domain Method»

## Литература

John B. Schneider.  
Understanding the Finite-Difference Time-  
Domain Method

<http://www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd/>

## Материалы к лекциям

Исходные тексты программ:

<https://github.com/Jenyay/modelling>

# Численный расчет производной функции

# Производная функции

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

# Правая разностная схема для численного дифференцирования

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \delta) - f(x_0)}{\delta} + O(\delta)$$

$O(\delta)$  — погрешность вычислений

# Ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!} =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!}, x_0 < \xi < x$$



Разложим функцию  $f(x)$  в ряд Тейлора  
вблизи точки  $x_0$  со смещением  $\delta$   
 $x = x_0 + \delta$

$$f(x_0 + \delta) = f(x_0) + \delta f'(x_0) + \frac{1}{2!} \delta^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!} \delta^3 f'''(x_0) + \dots,$$

Выражаем  $f'(x_0)$ :

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \delta) - f(x_0)}{\delta} - \frac{1}{2} \delta f''(x_0) - \frac{1}{6} \delta^2 f'''(x_0) - \dots,$$

$$O(\delta) = -\left(\frac{1}{2} \delta f''(x_0) + \dots\right)$$

Погрешность сравнима с  $\delta$ .

Разложим функцию  $f(x)$  в ряд Тейлора  
вблизи точки  $x_0$  со смещением  $\pm\delta/2$

$$x = x_0 \pm \frac{\delta}{2}, \quad x - x_0 = \pm \frac{\delta}{2}$$

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) = f(x_0) + \frac{\delta}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots,$$

$$f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) = f(x_0) - \frac{\delta}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots,$$

Вычтем первое выражение из второго

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) = \delta f'(x_0) + \frac{2}{3!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots,$$

Вычтем первое выражение из второго

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) = \delta f'(x_0) + \frac{2}{3!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots,$$

Поделим левую и правую части на  $\delta$

$$\frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)}{\delta} = f'(x_0) + \frac{1}{3!} \frac{\delta^2}{2^2} f'''(x_0) + \dots,$$

# Центральная конечно-разностная схема

$$f'(x_0) = \frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)}{\delta} + O(\delta^2)$$

Отбрасываем  $O(\delta^2)$

$$f'(x_0) \approx \frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)}{\delta}$$

Погрешность сравнима с  $\delta^2$ .

# Уравнения Максвелла

# Уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{сТ}}) = \\ &= \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_{\text{сТ}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$



# Оператор набла ( $\nabla$ ) или оператор Гамильтона

17

$$\nabla \equiv \mathbf{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial}{\partial z}$$

# Свойства оператора набла ( $\nabla$ )

$$\nabla \varphi = \mathbf{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = ?$$

$\varphi$  - скалярное поле

# Свойства оператора набла ( $\nabla$ )

$$\nabla \varphi = \mathbf{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \text{grad } \varphi$$

$\varphi$  - скалярное поле

# Свойства оператора набла ( $\nabla$ )

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{a} &= \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \\ &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = ?\end{aligned}$$

$\mathbf{a}$  — векторное поле

# Свойства оператора набла ( $\nabla$ )

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{a} &= \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \\ &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{a}\end{aligned}$$

$\mathbf{a}$  — векторное поле

# Свойства оператора набла ( $\nabla$ )

$$\nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \text{rot } \mathbf{a}$$

$\mathbf{a}$  — векторное поле

# Уравнения Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ст}}) = \\ &= \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_{\text{ст}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{F}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \text{div } \mathbf{F}$$

# Одномерный метод FDTD



# FDTD. Одномерный случай.

## Закон Ампера

25

Пусть поле может меняться только вдоль оси X

$$\epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \mathbf{x}_0 \cdot 0 - \mathbf{y}_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

# FDTD. Одномерный случай.

## Закон Фарадея

26

Пусть поле может меняться только вдоль оси  $x$ , а  $\mathbf{j} = 0$

$$-\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} =$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \mathbf{x}_0 \cdot 0 - \mathbf{y}_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

# FDTD. Одномерный случай

Объединяем предыдущие уравнения

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} = -\mathbf{y}_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$-\mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mathbf{y}_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

# FDTD. Одномерный случай

$$\mathbf{x}_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mathbf{y}_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \mathbf{z}_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} + \mathbf{x}_0 j_x + \mathbf{y}_0 j_y + \mathbf{z}_0 j_z =$$

$$- \mathbf{y}_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$- \mathbf{x}_0 \mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} - \mathbf{y}_0 \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} - \mathbf{z}_0 \mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = - \mathbf{y}_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

# FDTD. Одномерный случай

Или в скалярном виде:

$$\mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0$$

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + j_x = 0$$

$$\mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} + j_z = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$-\mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + j_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

# FDTD. Одномерный случай

Пусть существуют только  $E_z$  и  $H_y$  компоненты поля

$$\mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} + j_z = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

# Дискретизация

$$E_z(x, t) = E_z(m\Delta x, q\Delta t) = E_z^q[m]$$

$$H_y(x, t) = H_y(m\Delta x, q\Delta t) = H_y^q[m]$$

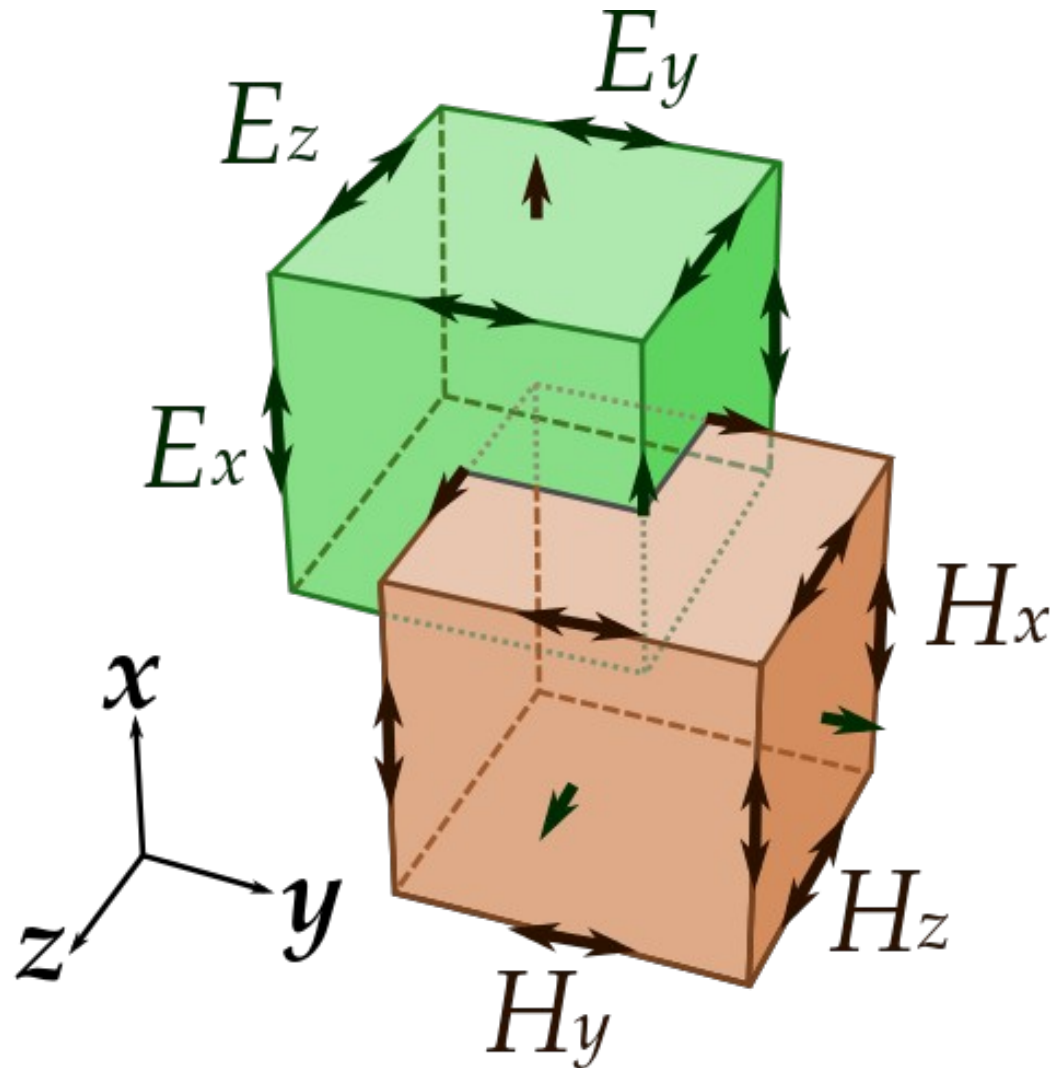
$\Delta x$  — пространственное смещение

$\Delta t$  — временное смещение

$m$  — номер пространственного шага

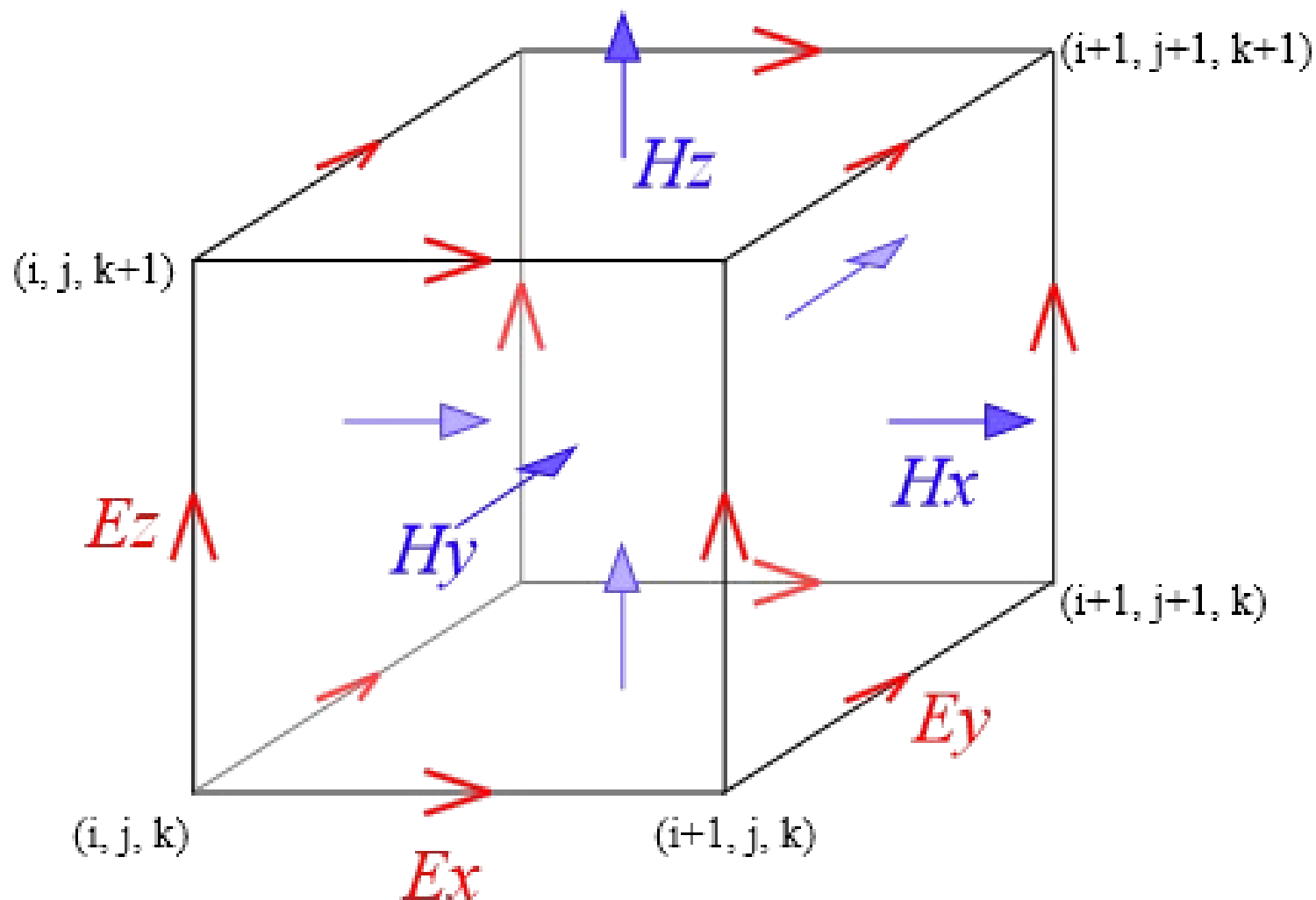
$q$  — номер временного шага

# Трёхмерная ячейка для метода FDTD 32



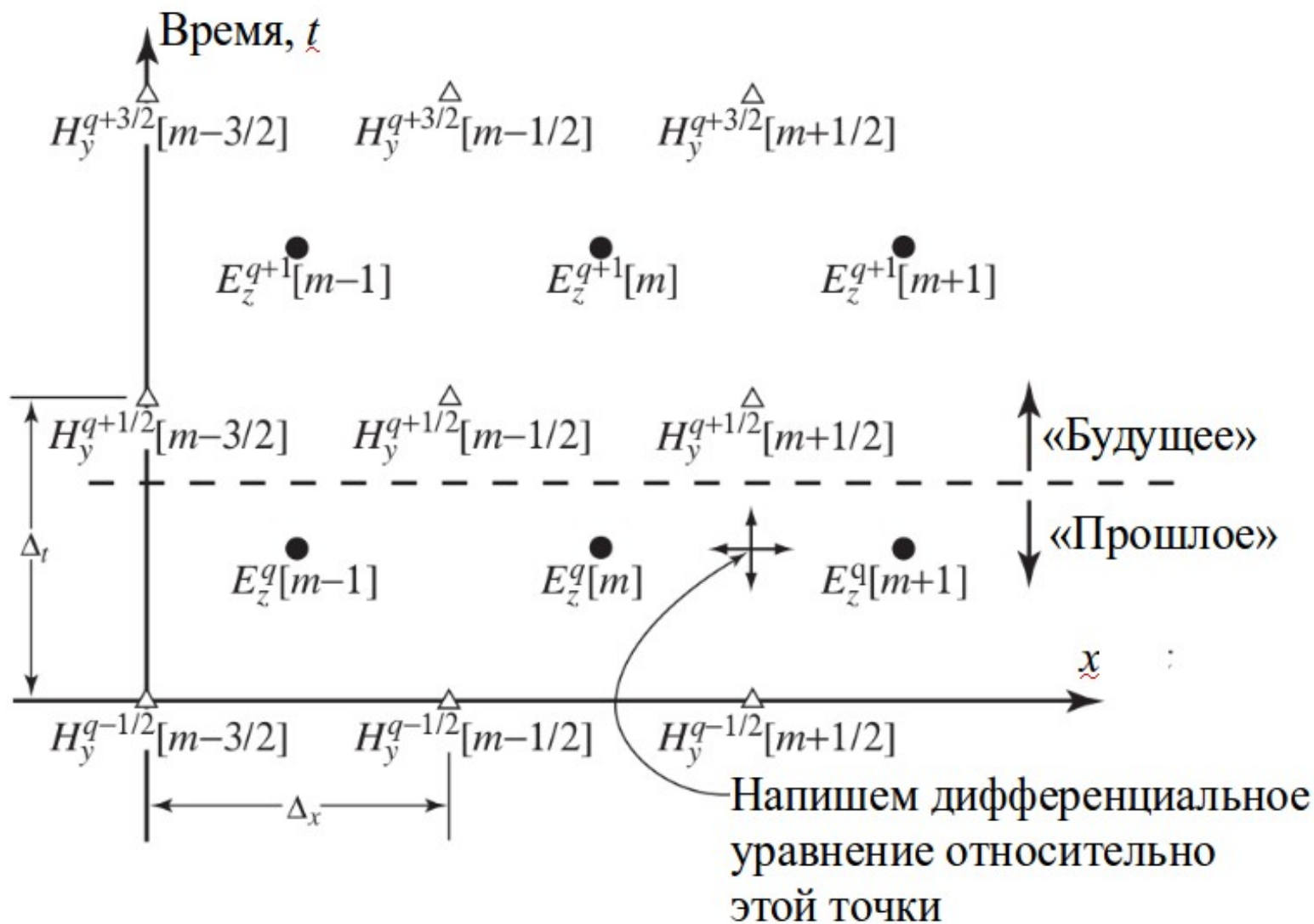


# Ячейка для метода FDTD



# Пространственно-временная сетка для одномерного случая

34



# Переходим к конечным разностям.

## Закон Фарадея

$$\mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \bigg|_{(m+1/2)\Delta x, q\Delta t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \bigg|_{(m+1/2)\Delta x, q\Delta t}$$

# Переходим к конечным разностям.

## Закон Фарадея

$$\mu \mu_0 \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{E_z^q[m+1] - E_z^q[m]}{\Delta_x}$$

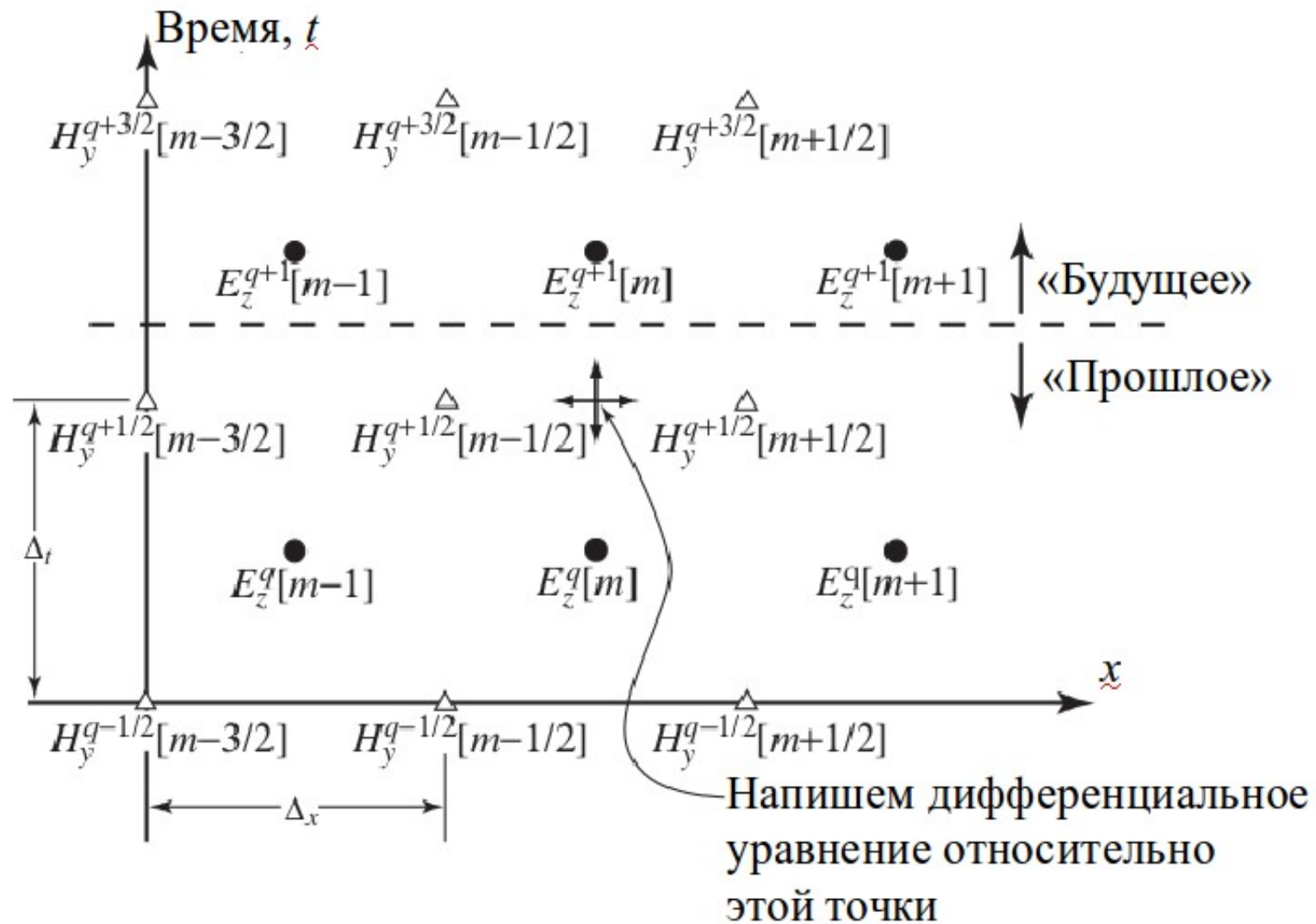
# Переходим к конечным разностям.

## Закон Фарадея

Из предыдущего уравнения

$$\begin{aligned}
 H_y^{q+1/2}[m+1/2] &= \\
 &= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} \left( E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right)
 \end{aligned}$$

# Пространственно-временная сетка для одномерного случая



# Переходим к конечным разностям.

## Закон Ампера

$$\left( \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} + j_z \right) \bigg|_{m \Delta x, (q+1/2) \Delta t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \bigg|_{m \Delta x, (q+1/2) \Delta t}$$

# Переходим к конечным разностям.

## Закон Ампера

$$\begin{aligned} \varepsilon \varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^q[m]}{\Delta_t} + j_z^{q+1/2}[m] = \\ = \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x} \end{aligned}$$



# Переходим к конечным разностям.

## Закон Ампера

$$\begin{aligned}
 E_z^{q+1}[m] &= \\
 &= E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left( H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right) - \\
 &\quad \underline{- \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0} \dot{j}_z^{q+1/2}[m]}
 \end{aligned}$$

# Формулы для метода конечных разностей во временной области <sup>42</sup>

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2] = H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} (E_z^q[m+1] - E_z^q[m])$$

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} (H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]) - \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0} j_z^{q+1/2}[m]$$

# Источник сигнала

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left( H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^{q+1}[m] - \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0} j_z^{q+1/2}[m]$$

или

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^{q+1}[m] + E_{z\,cm}^{q+1/2}[m]$$

# Критерий устойчивости Куранта-Фридриха-Леви

$$v_{max} \Delta_t \leq \frac{1}{\sqrt{\Delta_x^{-2} + \Delta_y^{-2} + \Delta_z^{-2}}}$$

$$v_{max} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{min} \mu_{min}}}$$


---

Если  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \Delta$

$$v_{max} \Delta_t \leq \frac{\Delta}{\sqrt{N}}$$

$N$  — размерность пространства ( $N = 1, 2, 3$ )

# Критерий устойчивости для одномерной задачи

$c\Delta_t$  — максимальное расстояние, которое может пройти волна за один временной шаг  $\Delta_t$  в вакууме.

Число Куранта

$$S_c = c\Delta_t / \Delta_x$$

Условие устойчивости

$$c\Delta_t \leq \Delta_x$$

или

$$S_c \leq 1$$

# Коэффициенты в конечно-разностной схеме

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} (E_z^q[m+1] - E_z^q[m])$$


---

$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$= E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} (H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2])$$

# Коэффициенты в конечно-разностной схеме

$$\frac{1}{\mu \mu_0} \frac{\Delta_t}{\Delta_x} = \frac{1}{\mu \mu_0} \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta_t}{\Delta_x} = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{c \Delta_t}{\Delta_x} = \frac{1}{\mu W_0} S_c$$

$$W_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$$

- волновое сопротивление свободного пространства

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

- скорость света в вакууме

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$$

$$\epsilon_0 = 1 / (\mu_0 c^2) = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

# Коэффициенты в конечно-разностной схеме

$$\frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{\Delta_t}{\Delta_x} = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta_t}{\Delta_x} = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{c \Delta_t}{\Delta_x} = \frac{W_0}{\varepsilon} S_c$$

$$W_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$$

- волновое сопротивление свободного пространства

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

- скорость света в вакууме



# Коэффициенты в конечно-разностной схеме

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \left( E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right) \frac{1}{\mu W_0} S_c$$

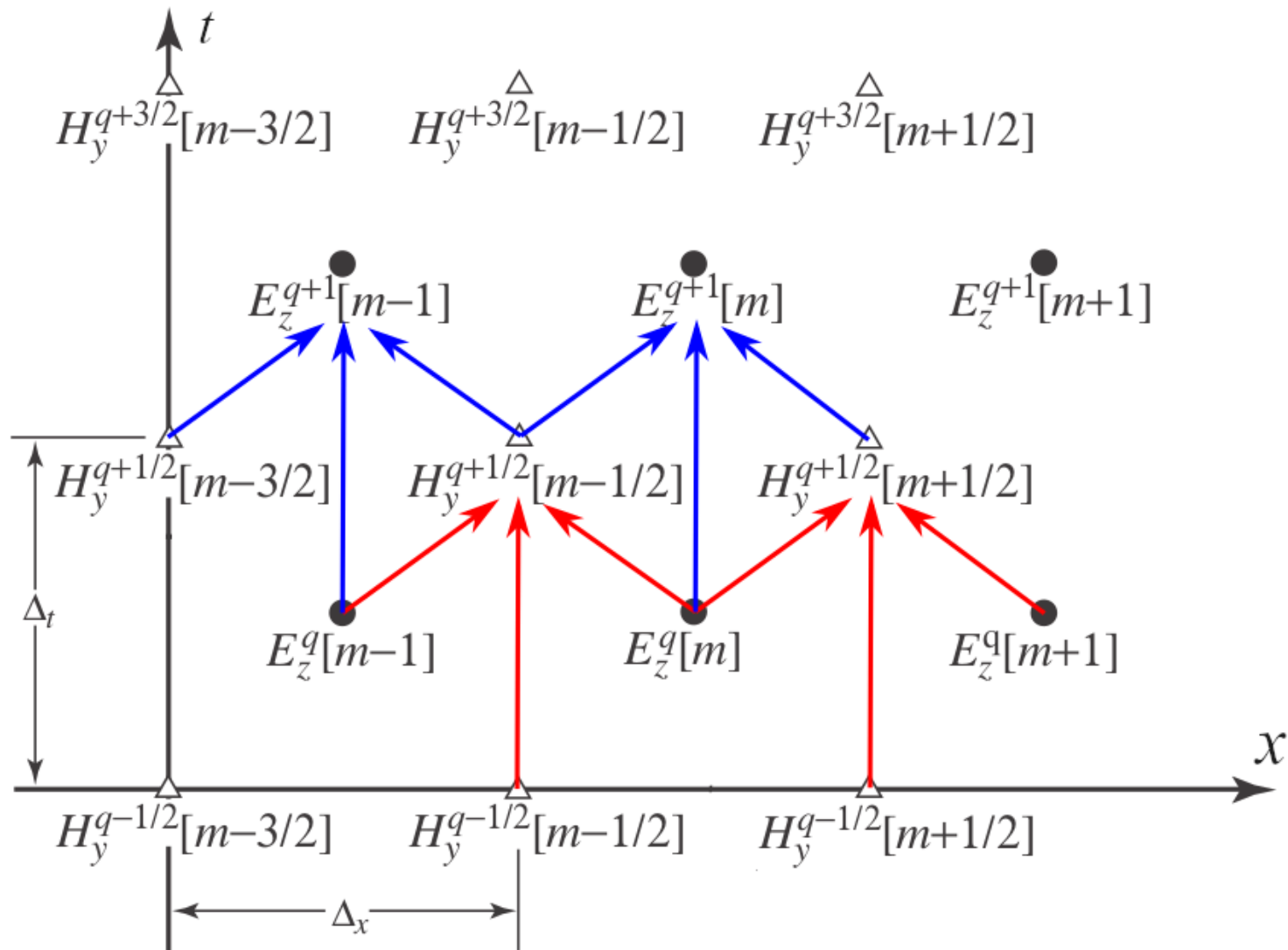

---

$$E_z^{q+1}[m]=$$

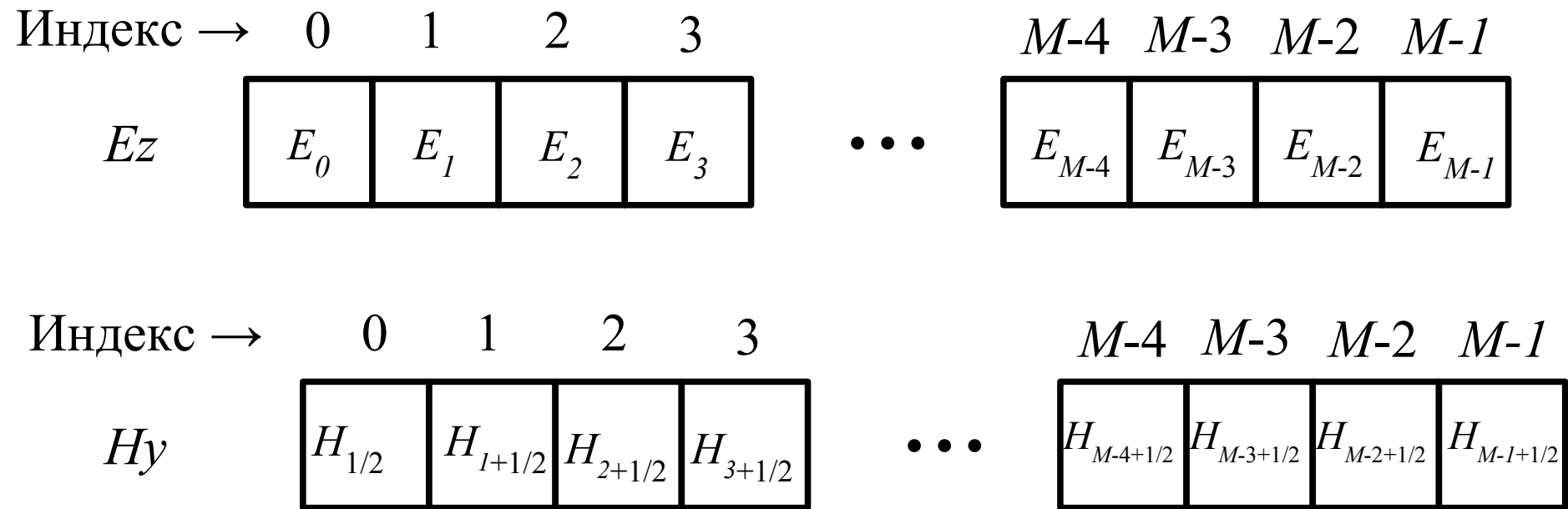
$$= E_z^q[m] + \left( H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right) \frac{W_0}{\varepsilon} S_c$$


---

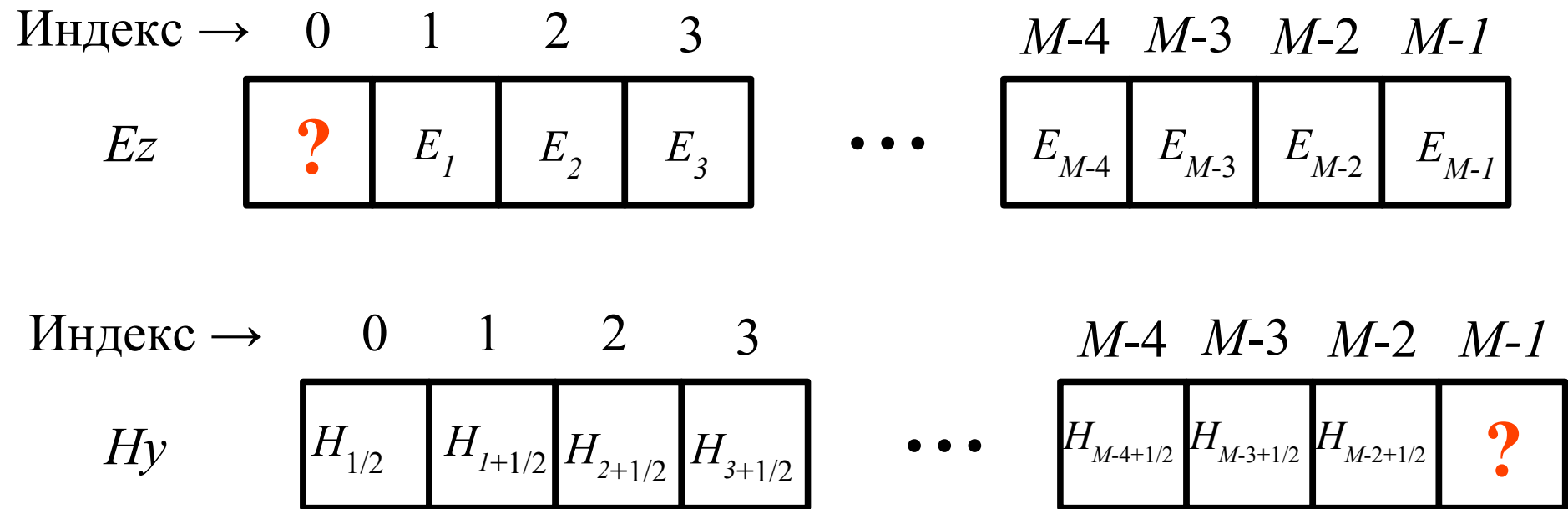
# Расчет полей $H_y$ и $E_z$ в одномерном методе FDTD



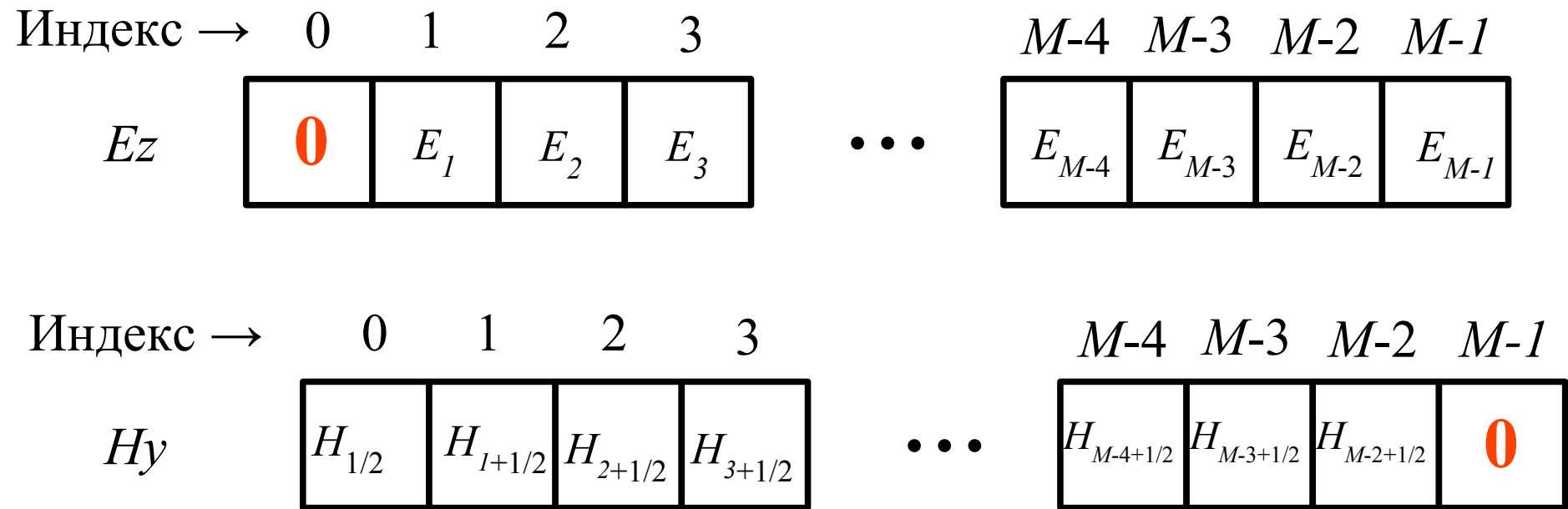
# Хранение компонент поля в реализации FDTD



# Хранение компонент поля в реализации FDTD



# Хранение компонент поля в реализации FDTD



# Источник в разностной схеме

$$f(t) = f(q \Delta_t) = e^{-\left(\frac{q \Delta_t - 30 \Delta_t}{10 \Delta_t}\right)^2} = e^{-\left(\frac{q - 30}{10}\right)^2} = f[q]$$

# Схема алгоритма FDTD

Начало

Задание начальных условий  $E_z^0, H_y^{1/2}$

Цикл по времени  $t = [1 \dots \text{maxTime} - 1]$ :

    Цикл по пространству  $m = [0 \dots \text{maxSize} - 2]$ :

        Расчет  $H_y^{q+1/2}$

    Цикл по пространству  $m = [1 \dots \text{maxSize} - 1]$ :

        Расчет  $E_z^{q+1}$

        Ввод поля с помощью источников возбуждения

Вывод результатов

Конец

# Реализация одномерного FDTD на Python

Распространение импульса в свободном пространстве.

Число Куранта равно 1.

fdtd\_first\_version\_01.py  
fdtd\_first\_version\_02.py  
fdtd\_first\_version\_03.py  
fdtd\_first\_version\_04.py  
fdtd\_first\_version\_05.py  
fdtd\_first\_version\_06.py



# Измерение скорости распространения волны

`fdtd_first_version_speed.py`

# Отображение компонент поля $E$ и $H$

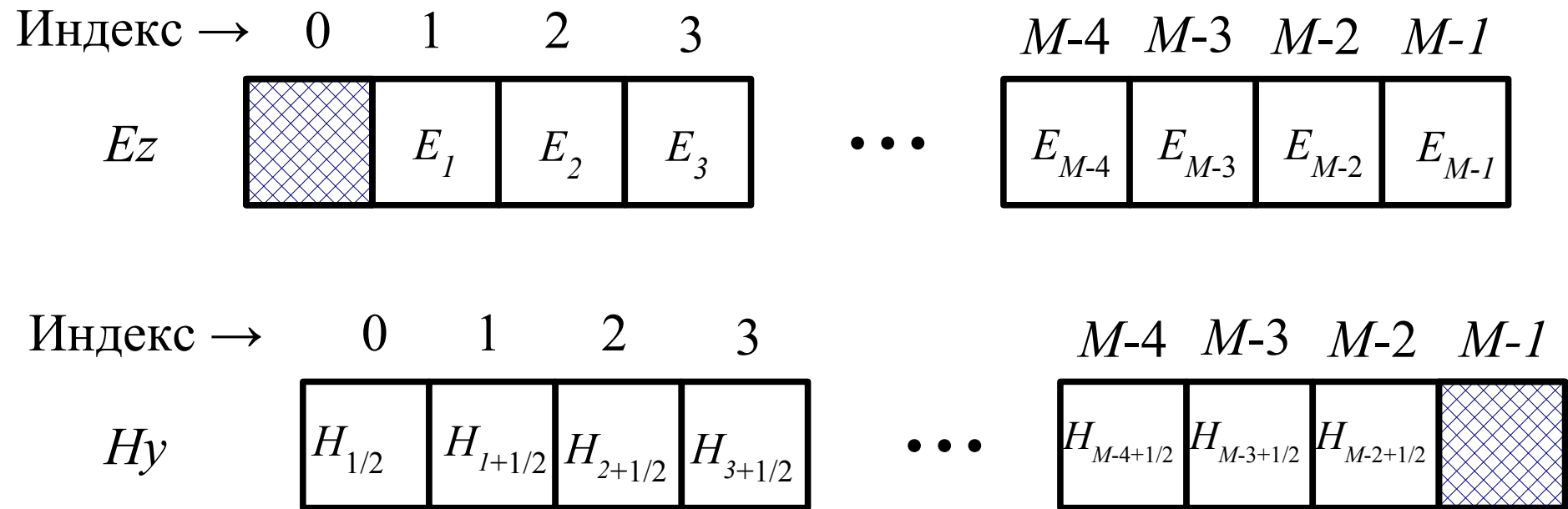
`fdtd_first_version_EH.py`

# Достоверность расчета

- Скорость распространения волны в вакууме равна скорости света.
- Коэффициент отражения электрической компоненты поля от РЕС равен  $-1$ .
- Коэффициент отражения электрической компоненты поля от РМС равен  $+1$ .
- Коэффициент отражения магнитной компоненты поля от РЕС равен  $+1$ .
- Коэффициент отражения магнитной компоненты поля от РМС равен  $-1$ .

## Простейшие поглощающие граничные условия

# Хранение компонент поля в реализации FDTD



# Простейшие поглощающие граничные условия

Работают только для  $S_c = 1$

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1]$$

$$H_y^{q+1/2}[\text{end}] = H_y^{q-1/2}[\text{end} - 1]$$

# Демонстрация поглощающих условий

# **Моделирование распространения электромагнитной волны в неоднородных средах**



# Конечно-разностная схема

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \left( E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right) \frac{1}{\mu W_0} S_c$$


---

$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$= E_z^q[m] + \left( H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right) \frac{W_0}{\varepsilon} S_c$$


---

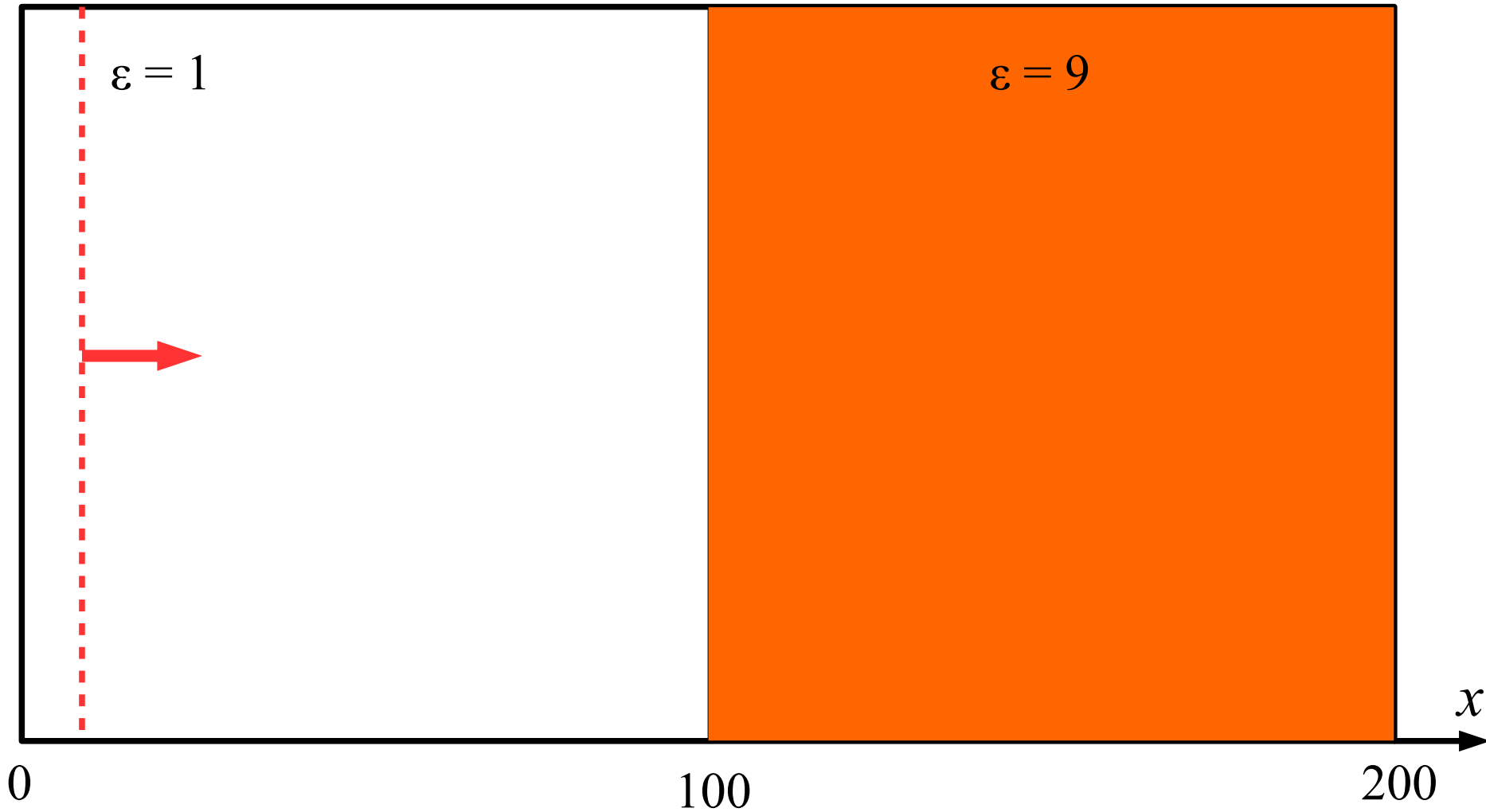
# Учет параметров среды

Если  $\varepsilon = f(m)$

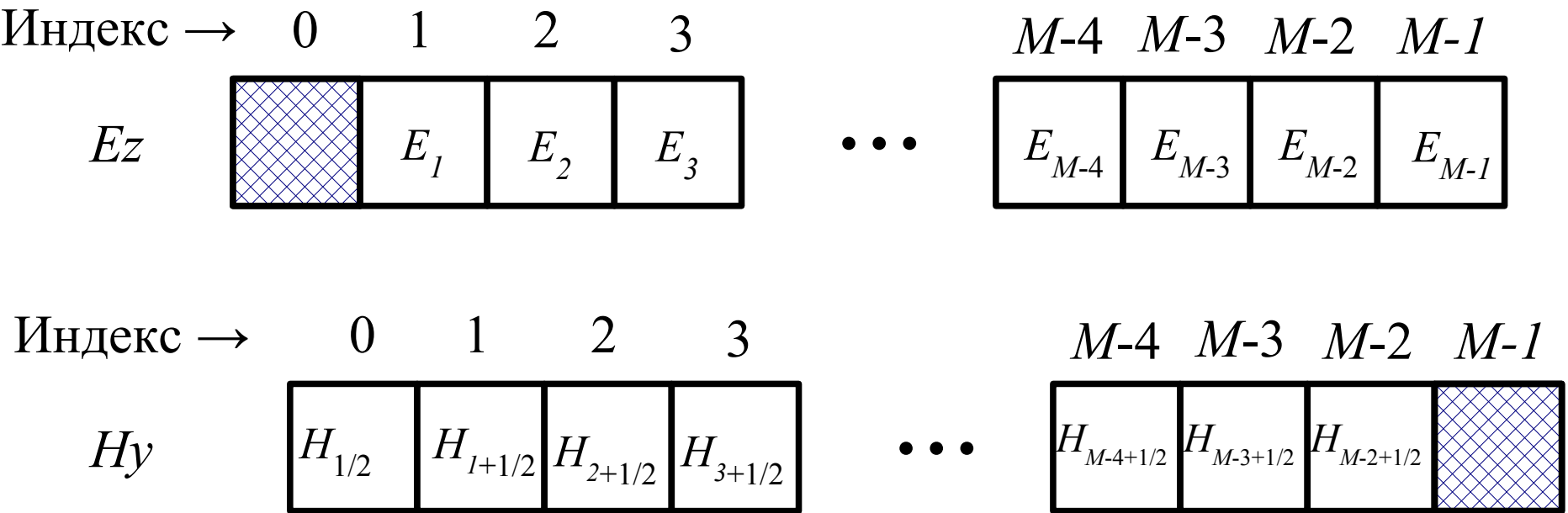
$$Ez[m] = Ez[m] + (Hy[m] - Hy[m - 1]) * Sc * W0 / eps[m]$$

$$Hy[m] = Hy[m] + (Ez[m + 1] - Ez[m]) * Sc / (W0 * mu[m])$$

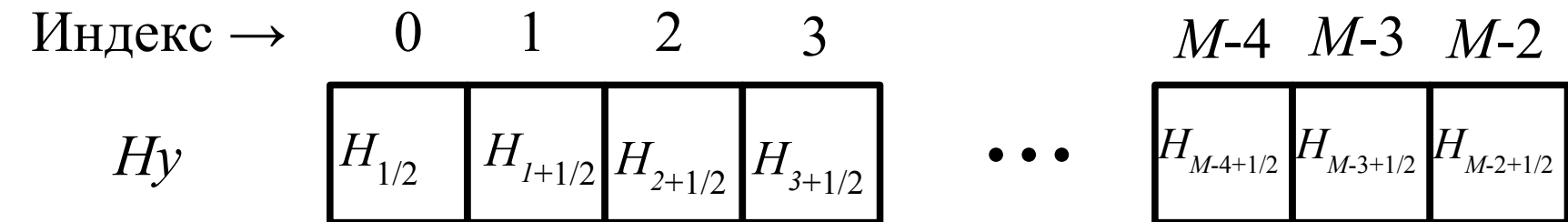
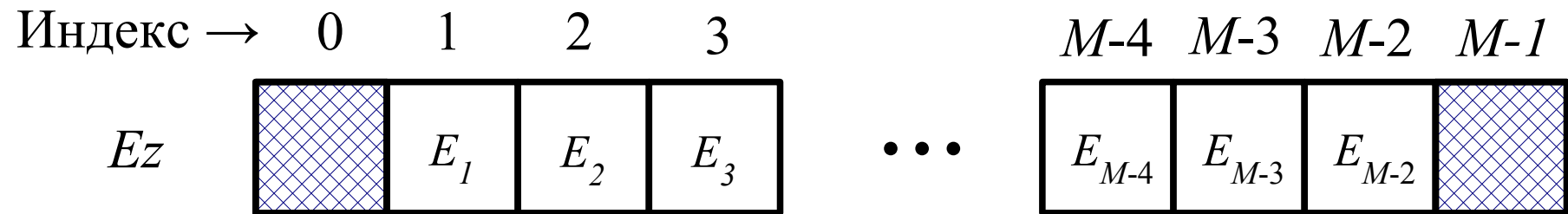
# Геометрия решаемой задачи



# Демонстрация моделирования распространения электромагнитной волны в неоднородных средах



# Структура массивов полей



# Демонстрация моделирования распространения электромагнитной волны в неоднородных средах

# Коэффициенты отражения и прохождения

Для волны, падающей по нормали:

Коэффициент отражения:

$$\Gamma = \frac{\dot{E}_{отр}}{\dot{E}_{пад}} = \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}$$

Коэффициент прохождения:

$$T = \frac{\dot{E}_{пр}}{\dot{E}_{пад}} = \frac{2W_2}{W_2 + W_1}$$

$$W = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} = W_0 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$



# Коэффициенты отражения и прохождения идеального диэлектрика

Для границы раздела двух диэлектриков

$$\mu_1 = \mu_2 = 1$$

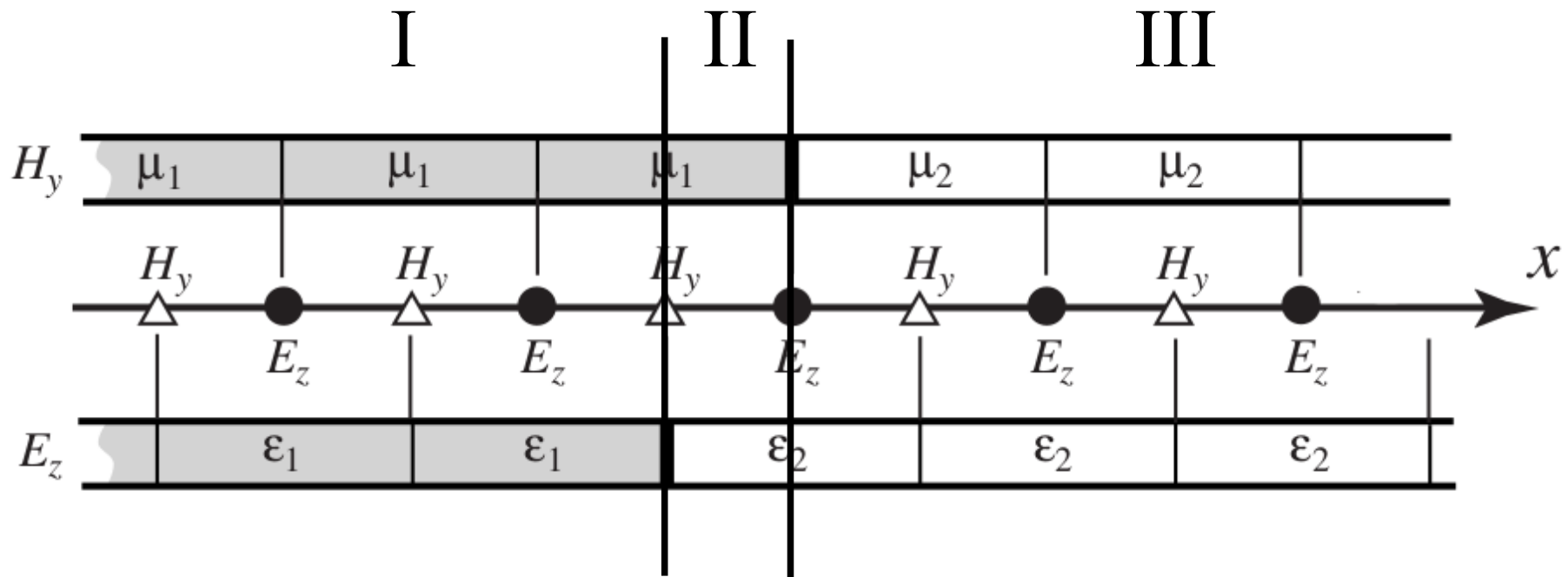
Коэффициент отражения:

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}}$$

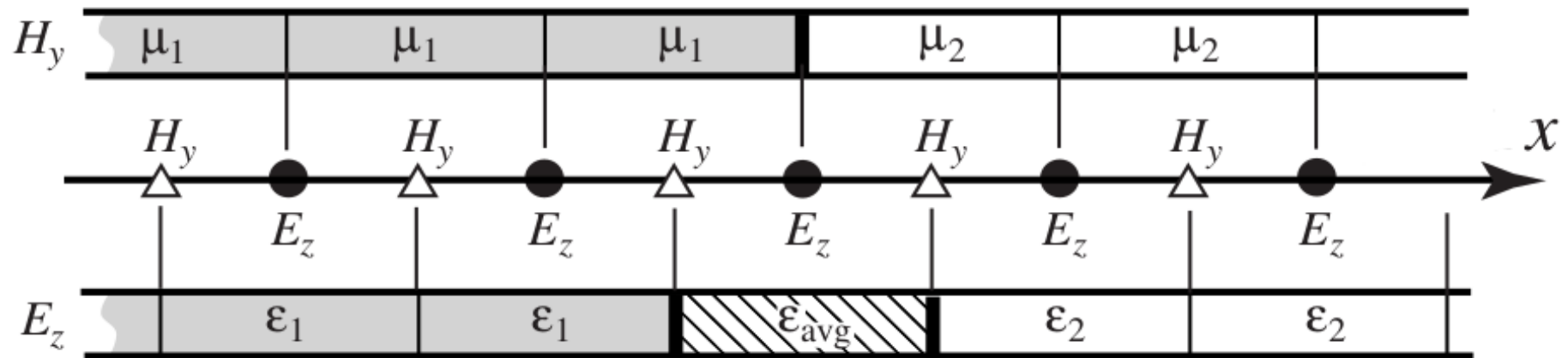
Коэффициент прохождения:

$$T = \frac{2\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}}$$

# Погрешность из-за дискретной сетки



# Погрешность из-за дискретной сетки



# **Метод Total-Field / Scattered-Field**

# Метод Total-Field / Scattered-Field

$$\mathbf{E}_{\text{полн}} = \mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{расс}}$$

$$\mathbf{H}_{\text{полн}} = \mathbf{H}_{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\text{расс}}$$

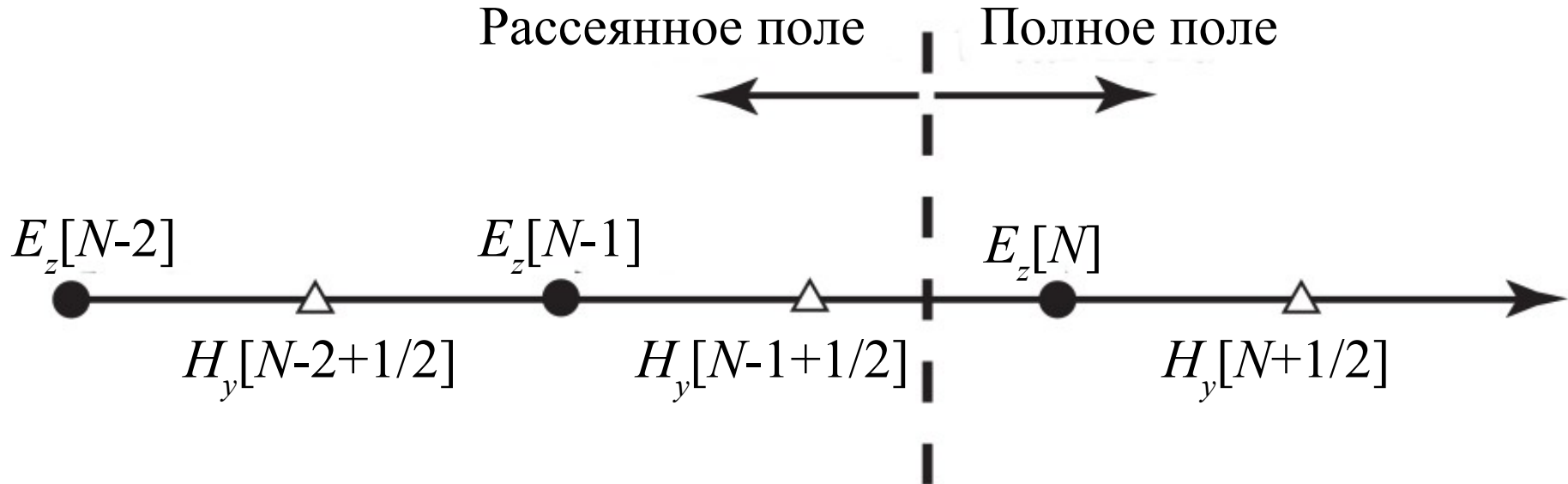
$\mathbf{E}_{\text{пад}}, \mathbf{H}_{\text{пад}}$  могут быть рассчитаны в любой момент времени в любой точке пространства.

$\mathbf{E}_{\text{расс}}, \mathbf{H}_{\text{расс}}$  изначально не известны.

# Метод Total-Field / Scattered-Field

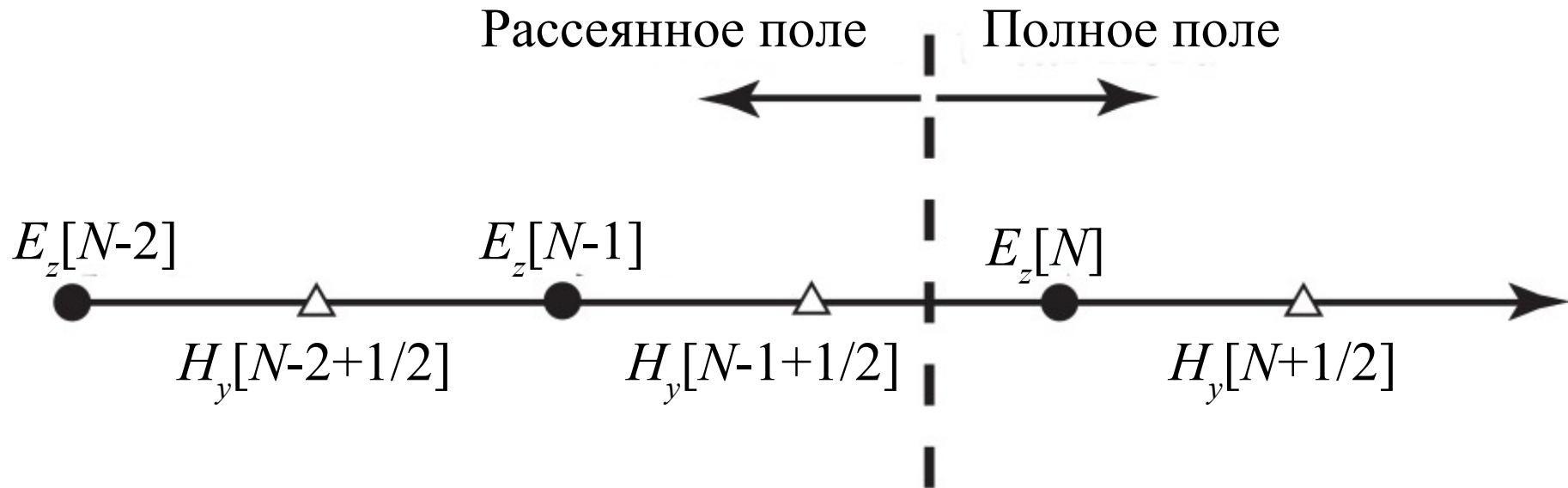
$$\mathbf{E}_{\text{полн}} = \mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{расс}}$$

$$\mathbf{H}_{\text{полн}} = \mathbf{H}_{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\text{расс}}$$



# Метод Total-Field / Scattered-Field.<sup>79</sup>

## Левая граница



$H_y[N-1 + 1/2] = H_y[N - 1/2]$  — последняя ячейка в области  
рассеянного поля.

$E_z[N]$  — первая ячейка в области полного поля.

# Метод Total-Field / Scattered-Field

**Важно!** Только рассеянное поле должно использоваться при обновлении ячеек в области рассеянного поля.

Только полное поле должно использоваться при обновлении ячеек в области полного поля



# Поле на границе

## Total-Field / Scattered-Field

Рассмотрим электрическую компоненту поля  $E_z$

проблема



$$E_z^{q+1}[N] = \overbrace{E_z^q[N]}^{\text{полн}} + \frac{\Delta_t}{\epsilon \epsilon_0 \Delta_x} \left( \overbrace{H_y^{q+1/2}[N+1/2]}^{\text{полн}} - \overbrace{H_y^{q+1/2}[N-1/2]}^{\text{расс}} \right)$$

# Поле на границе

## Total-Field / Scattered-Field

Введем дополнительный магнитный источник в точке  $(N - 1/2)\Delta x$

$$\begin{aligned}
 \overbrace{E_z^{q+1}[N]}^{\text{полн}} &= \overbrace{E_z^q[N]}^{\text{полн}} + \\
 &+ \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left( \overbrace{H_y^{q+1/2}[N+1/2]}^{\text{полн}} - \left( \overbrace{H_y^{q+1/2}[N-1/2]}^{\text{расс}} + \overbrace{H_y^{\text{inc}}[N-1/2, q+1/2]}^{\text{пад}} \right) \right)
 \end{aligned}$$

# Поле на границе

## Total-Field / Scattered-Field

Введем дополнительный магнитный источник в точке  $(N - 1/2)\Delta x$

$$\overbrace{E_z^{q+1}[N]}^{\text{полн}} = \overbrace{E_z^q[N]}^{\text{полн}} +$$

$$+ \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left( \overbrace{H_y^{q+1/2}[N+1/2]}^{\text{полн}} - \left\{ \overbrace{H_y^{q+1/2}[N-1/2]}^{\text{расс}} + \overbrace{\left( -\frac{1}{W} E_z^{\text{inc}}[N-1/2, q+1/2] \right)}^{\text{над}} \right\} \right)$$

# Total-Field / Scattered-Field

$$E_z^{q+1}[N] = E_z^q[N] + \frac{\Delta_t}{\epsilon \epsilon_0 \Delta_x} \left( H_y^{q+1/2}[N+1/2] - H_y^{q+1/2}[N-1/2] \right)$$

$$E_z^{q+1}[N] = E_z^{q+1}[N] + \frac{\Delta_t}{\epsilon \epsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{W} E_z^{inc}[N-1/2, q+1/2]$$

# Total-Field / Scattered-Field

$$E_z^{q+1}[N] = E_z^{q+1}[N] + \frac{\Delta_t}{\epsilon \epsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{W} E_z^{inc}[N - 1/2, q + 1/2]$$

$$W = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} = W_0 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \left| \quad \frac{\Delta_t}{\epsilon \epsilon_0 \Delta_x} = \frac{W_0 S_c}{\epsilon}$$

$$E_z^{q+1}[N] = E_z^{q+1}[N] + \frac{S_c}{\sqrt{\epsilon \mu}} E_z^{inc}[N - 1/2, q + 1/2]$$


---

Для свободного пространства и если  $S_c = 1$ :


$$E_z^{q+1}[N] = E_z^{q+1}[N] + E_z^{inc}[\underline{N - 1/2}, \underline{q + 1/2}]$$

# Поле на границе

## Total-Field / Scattered-Field

$$\overbrace{H_y^{q+1/2}[N-1/2]}^{\text{расс}} = \overbrace{H_y^{q-1/2}[N-1/2]}^{\text{расс}} + \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x} \left( \overbrace{E_z^q[N]}^{\text{полн}} - \overbrace{E_z^q[N-1]}^{\text{расс}} \right)$$

проблема



# Поле на границе

## Total-Field / Scattered-Field

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{H_y^{q+1/2}[N-1/2]}^{\text{расс}} = \overbrace{H_y^{q-1/2}[N-1/2]}^{\text{расс}} + \\
 & + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} \left( \overbrace{\left( \overbrace{E_z^q[N] - E_z^{inc}[N, q]}^{\text{полн}} \right)}^{\text{расс}} - \overbrace{E_z^q[N-1]}^{\text{расс}} \right)
 \end{aligned}$$

# Поле на границе

## Total-Field / Scattered-Field

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] = H_y^{q-1/2}[N-1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} (E_z^q[N] - E_z^q[N-1])$$

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] = H_y^{q+1/2}[N-1/2] - \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} E_z^{inc}[N, q]$$



# Поле на границе

## Total-Field / Scattered-Field

Для свободного пространства и  $S_c = 1$ :

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] = H_y^{q-1/2}[N-1/2] + \frac{1}{W_0} (E_z^q[N] - E_z^q[N-1])$$

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] = H_y^{q+1/2}[N-1/2] - \frac{1}{W_0} E_z^{inc}[N, q]$$

# Поле на границе Total-Field / Scattered-Field.<sup>90</sup>

## Левая граница

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] = H_y^{q+1/2}[N-1/2] - \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} E_z^{inc}[N, q]$$

$$E_z^{q+1}[N] = E_z^{q+1}[N] + \frac{\Delta_t}{\epsilon \epsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{W} E_z^{inc}[N-1/2, q+1/2]$$

# Поле на границе Total-Field / Scattered-Field.<sup>91</sup>

## Левая граница

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] = H_y^{q+1/2}[N-1/2] - \frac{S_c}{W_0 \mu} E_z^{inc}[N, q]$$

$$E_z^{q+1}[N] = E_z^{q+1}[N] + \frac{S_c}{\sqrt{\epsilon} \mu} E_z^{inc}[N-1/2, q+1/2]$$

# Поле на границе Total-Field / Scattered-Field <sub>92</sub> для свободного пространства и $S_c=1$ .

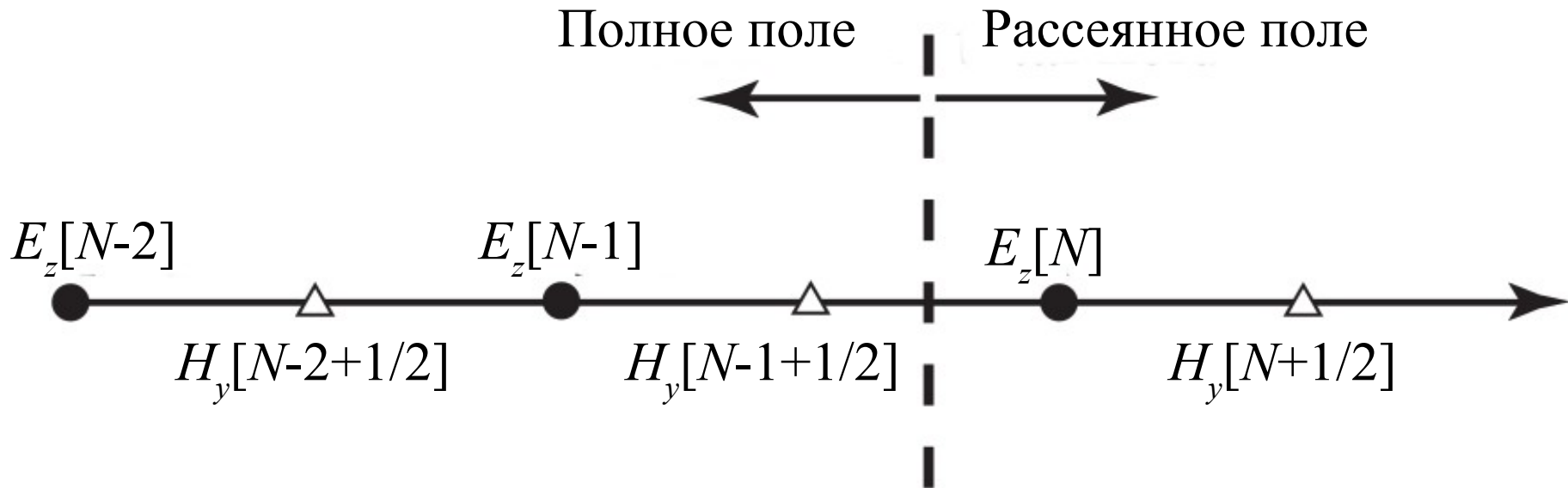
## Левая граница

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] = H_y^{q+1/2}[N-1/2] - \frac{1}{W_0} E_z^{inc}[N, q]$$

$$E_z^{q+1}[N] = E_z^{q+1}[N] + E_z^{inc}[N-1/2, q+1/2]$$

# Метод Total-Field / Scattered-Field.<sup>93</sup>

## Правая граница



$H_y[N-1 + 1/2] = H_y[N - 1/2]$  — последняя ячейка в области  
полного поля.

$E_z[N]$  — первая ячейка в области рассеянного поля.

# Поле на границе Total-Field / Scattered-Field.<sup>94</sup>

## Правая граница

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] = H_y^{q+1/2}[N-1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} E_z^{inc}[N, q]$$

$$E_z^{q+1}[N] = E_z^{q+1}[N] - \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{W} E_z^{inc}[N-1/2, q+1/2]$$

# Поле на границе Total-Field / Scattered-Field.<sup>95</sup>

## Правая граница

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] = H_y^{q+1/2}[N-1/2] + \frac{S_c}{W_0 \mu} E_z^{inc}[N, q]$$

$$E_z^{q+1}[N] = E_z^{q+1}[N] - \frac{S_c}{\sqrt{\epsilon} \mu} E_z^{inc}[N-1/2, q+1/2]$$

# Поле на границе Total-Field / Scattered-Field <sup>96</sup> для свободного пространства и $S_c=1$ .

## Правая граница

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] = H_y^{q+1/2}[N-1/2] + \frac{1}{W_0} E_z^{inc}[N, q]$$

$$E_z^{q+1}[N] = E_z^{q+1}[N] - E_z^{inc}[N-1/2, q+1/2]$$



# Схема алгоритма FDTD с использованием метода Total Field / Scattered field 97

Начало

Задание начальных условий  $E_z^0, H_y^{1/2}$

Цикл по времени  $t = [0 \dots \text{maxTime} - 1]$ :

    Цикл по пространству  $m = [0 \dots \text{maxSize} - 2]$ :

        Расчет  $H_y^{q+1/2}$

**Ввод поля  $H^{\text{inc}}[N, t]$**

    Цикл по пространству  $m = [1 \dots \text{maxSize} - 1]$ :

        Расчет  $E_z^{q+1}$

**Ввод поля  $E^{\text{inc}}[N-1/2, t+1/2]$**

Вывод результатов

Конец

# Уравнение плоской волны для гауссова сигнала

# Волновое уравнение

Волновое уравнение при отсутствии сторонних токов:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

# Одномерное волновое уравнение

100

$f$  — одномерная функция

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

# Решение одномерного волнового уравнения

101

$f(\xi)$  — решение волнового уравнения, если:

- $f(\xi)$  дважды дифференцируема
- $\xi$  можно заменить на  $t \pm x / v$   
(для одномерного случая)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0}}$$

$$f(\xi) = f(t \pm x / v) = f(x, t)$$

# Гауссов импульс в дискретной форме

102

$$f(t) = f(q \Delta_t) = e^{-\left(\frac{(q - d_g) \Delta_t}{w_g \Delta_t}\right)^2} = e^{-\left(\frac{q - d_g}{w_g}\right)^2} = f[q]$$

# Гауссов импульс в дискретной форме

103

Делаем замену  $t$  на  $t - x / v$

$$t - \frac{x}{v} = q \Delta_t - \frac{m \Delta_x}{v} = q \Delta_t - \frac{m \Delta_x \sqrt{\epsilon \mu}}{c} =$$

$$= \left( q - \frac{m \Delta_x \sqrt{\epsilon \mu}}{c \Delta_t} \right) \Delta_t = \left( q - \frac{m \sqrt{\epsilon \mu}}{S_c} \right) \Delta_t$$

Для свободного пространства и  $S_c = 1$ :

$$t - \frac{x}{c} = (q - m) \Delta_t$$

# Уравнение плоской волны в форме гауссова импульса в дискретном виде

$$E_z^{\text{inc}}[m, q] = e^{-\left(\frac{(q - m\sqrt{\epsilon\mu}/S_c)\Delta_t - d_g\Delta_t}{w_g\Delta_t}\right)^2} = e^{-\left(\frac{(q - m\sqrt{\epsilon\mu}/S_c) - d_g}{w_g}\right)^2}$$



# Уравнение плоской волны в форме гауссова импульса в дискретном виде

$$H_y^{\text{inc}}[m, q] = -\frac{1}{W} E_z^{\text{inc}}[m, q] = -\frac{1}{W} e^{-\left(\frac{(q - m\sqrt{\epsilon\mu}/S_c) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

# Гауссов импульс в дискретной форме

106

Для свободного пространства и  $S_c = 1$ :

$$E_z^{\text{inc}}[m, q] = e^{-\left(\frac{(q-m)\Delta_t - d_g \Delta_t}{w_g \Delta_t}\right)^2} = e^{-\left(\frac{(q-m) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$H_y^{\text{inc}}[m, q] = -\frac{1}{W_0} E_z^{\text{inc}}[m, q] = -\frac{1}{W_0} e^{-\left(\frac{(q-m) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

# Демонстрация гауссова импульса, распространяющегося в одну сторону

# Поле на границе

## Total-Field / Scattered-Field

Пусть для введенного источника  $x = 0$  соответствует  $N$ -й ячейке

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] = H_y^{q+1/2}[N-1/2] - \frac{1}{W_0} E_z^{inc}[0, q]$$

$$E_z^{q+1}[N] = E_z^{q+1}[N] + E_z^{inc}[-1/2, q+1/2]$$

# Источники для метода Total-Field / Scattered-Field

$$E_z^{\text{inc}}[-1/2, q+1/2] = e^{-\left(\frac{((q+0.5)-(-0.5))-d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$E_z^{\text{inc}}[0, q] = e^{-\left(\frac{q-d_g}{w_g}\right)^2}$$

# Метод Total Field / Scattered Field с использованием двух границ

`fdtd_tfsf_left_right_gauss.py`  
`fdtd_tfsf_left_right_gauss_pec.py`

**Демонстрация моделирования  
распространения  
электромагнитной волны в  
неоднородных средах с  
использованием метода TFSSF**

# **Демонстрация метода Total Field / Scattered Field в диэлектрике**

**`fddtd_tfsf_medium_gauss.py`  
`fddtd_tfsf_layer_gauss.py`**



**Моделирование  
распространения  
электромагнитной волны в  
среде с потерями**

# Закон Ампера для среды с потерями

114

$$\mathbf{j} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H}$$

или

$$\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H}$$

# Закон Ампера для среды с потерями

115

Для одномерного случая:

$$\sigma E_z + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

# Закон Ампера для среды с потерями в дискретном виде

Запишем производные в дискретном виде  
для точки  $(m\Delta_x; (q + 1/2)\Delta_t)$ :

$$\begin{aligned} \sigma E_z^{q+1/2}[m] + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^q[m]}{\Delta_t} = \\ = \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x} \end{aligned}$$

# Закон Ампера для среды с потерями в дискретном виде

проблема

$$\sigma E_z^{q+1/2}[m] + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^q[m]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x}$$

$$E_z^{q+1/2}[m] \approx \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^q[m]}{2}$$

# Закон Ампера для среды с потерями в дискретном виде

$$E_z^{q+1/2}[m] \approx \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^q[m]}{2}$$

тогда:

$$\begin{aligned} \sigma \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^q[m]}{2} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^q[m]}{\Delta_t} &= \\ &= \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x} \end{aligned}$$

# Расчет электрической компоненты поля для среды с потерями

$$E_z^{q+1}[m] = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_z^q[m] +$$

$$+ \frac{\frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0} \Delta_x}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \left( H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$



# Расчет электрической компоненты поля для среды с потерями

$$\begin{aligned}
 E_z^{q+1}[m] = & \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_z^q[m] + \\
 & + \frac{\frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0} \Delta_x}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \left( H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)
 \end{aligned}$$

# Расчет электрической компоненты поля для среды с потерями

Для случая  $\sigma = 0$  См/м:

$$E_z^{q+1}[m] =$$

$$= E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left( H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$

# Закон Фарадея для среды с потерями

$$-\dot{\mathbf{j}}_m - \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}$$

или

$$-\sigma_m \mathbf{H} - \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}$$

# Закон Фарадея для среды с потерями

124

Для одномерного случая:

$$\sigma_m H_y + \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

# Закон Фарадея для среды с потерями в дискретном виде

Запишем производные в дискретном виде  
для точки  $((m + 1/2)\Delta_x; q\Delta_t)$ :

проблема

$$\sigma_m H_y^q[m+1/2] + \mu \mu_0 \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{E_z^q[m+1] - E_z^q[m]}{\Delta_x}$$

$$H_y^q[m+1/2] \approx \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] + H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{2}$$

# Закон Фарадея для среды с потерями в дискретном виде

$$H_y^q[m+1/2] \approx \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] + H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{2}$$


---

$$\begin{aligned} & \sigma_m \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] + H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{2} + \\ & + \mu \mu_0 \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{\Delta_t} = \\ & = \frac{E_z^q[m+1] - E_z^q[m]}{\Delta_x} \end{aligned}$$

# Расчет магнитной компоненты поля для среды с потерями

$$\begin{aligned}
 H_y^{q+1/2}[m+1/2] = & \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \\
 & + \frac{\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0} \Delta_x}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \left( E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right)
 \end{aligned}$$



# Расчет магнитной компоненты поля

Для случая  $\sigma_m = 0$ :

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} \left( E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right)$$

# Моделирование среды с потерями. Комментарии к реализации

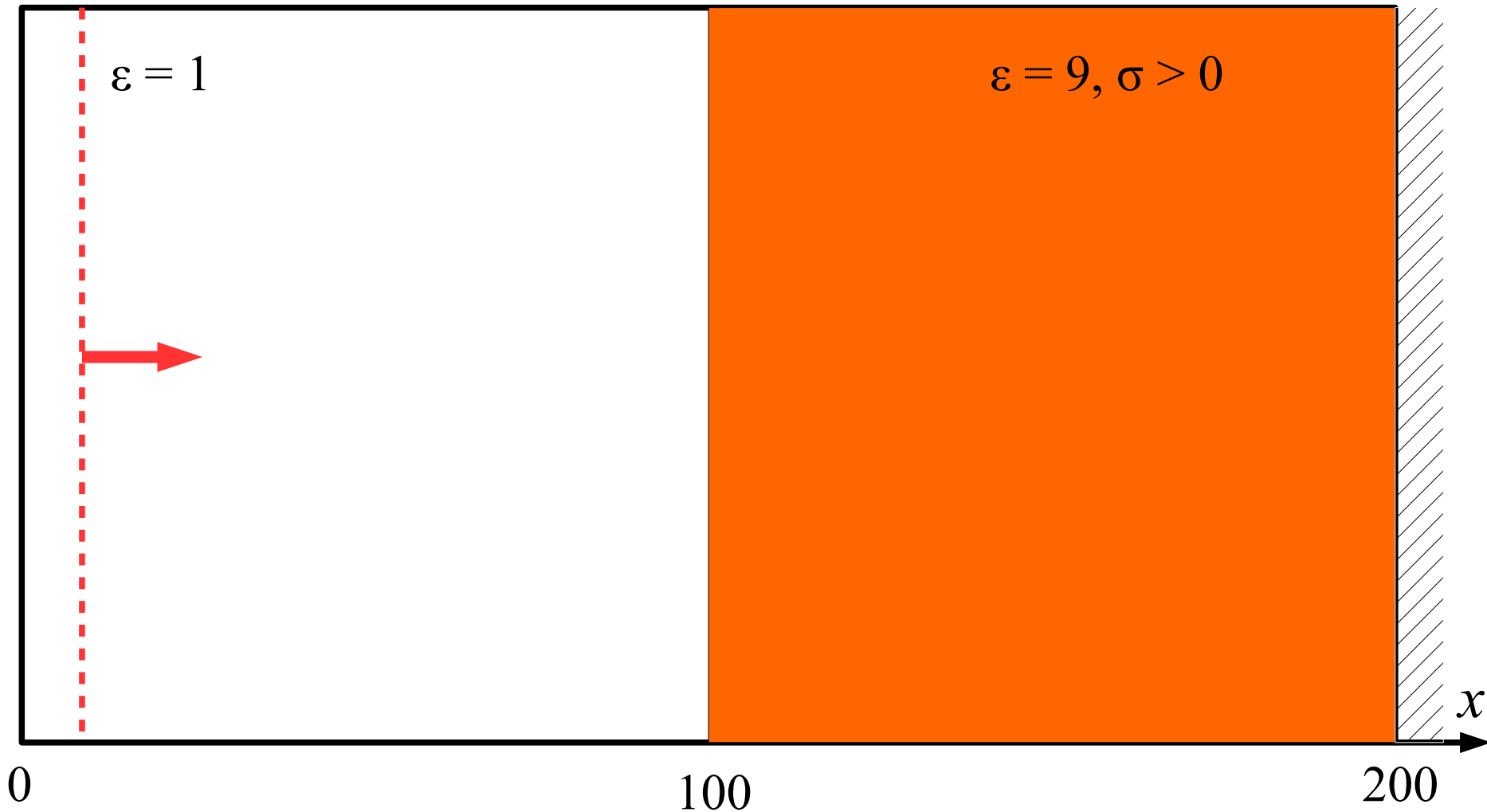
Реализуем случай  
 $\sigma_m = 0, Sc = 1$

$$loss = \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}$$

$$ceze = \frac{1 - loss}{1 + loss}$$

$$cezh = \frac{W_0 / \varepsilon}{1 + loss}$$

# Геометрия решаемой задачи

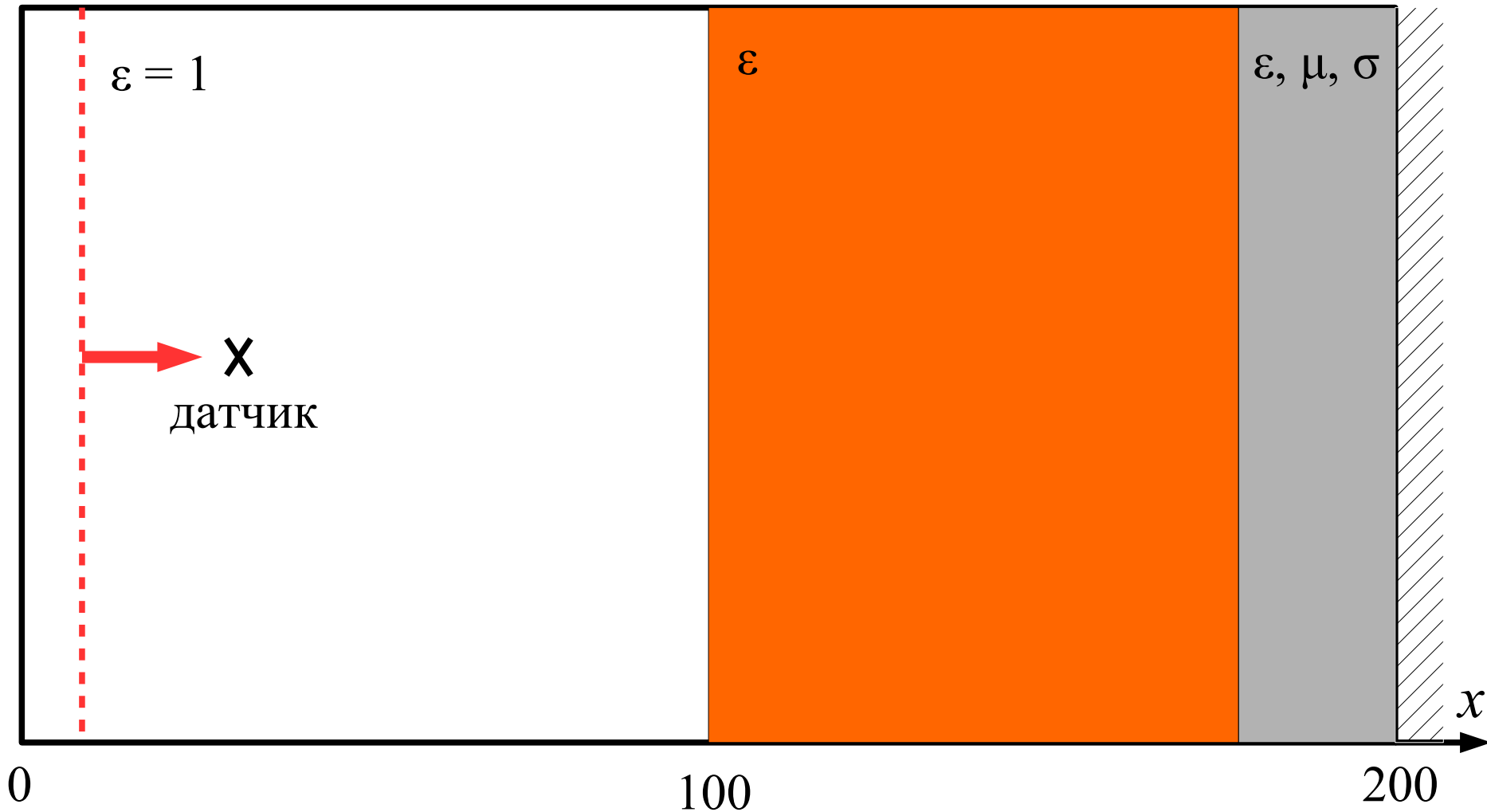


# Реализация моделирования распространения электромагнитной волны в среде с потерями

# Поглощающие граничные условия

**Поглощающие граничные  
условия с использованием  
полностью согласованного слоя**

# Геометрия решаемой задачи



# Коэффициент отражения

Для волны, падающей по нормали:

$$\Gamma = \frac{\dot{E}_{отр}}{\dot{E}_{пад}} = \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}$$



# Волновое сопротивление в среде<sup>137</sup> с потерями

$$W = \sqrt{\frac{\mu \mu_0 \left(1 - i \frac{\sigma_m}{\omega \mu \mu_0}\right)}{\varepsilon \varepsilon_0 \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0}\right)}} = W_0 \sqrt{\frac{\mu \left(1 - i \frac{\sigma_m}{\omega \mu \mu_0}\right)}{\varepsilon \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0}\right)}}$$

# Волновое сопротивление в среде<sup>138</sup> с потерями

$$W = \sqrt{\frac{\mu \mu_0 \left(1 - i \frac{\sigma_m}{\omega \mu \mu_0}\right)}{\varepsilon \varepsilon_0 \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0}\right)}} = W_0 \sqrt{\frac{\mu \left(1 - i \frac{\sigma_m}{\omega \mu \mu_0}\right)}{\varepsilon \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0}\right)}}$$

Если  $\frac{\sigma_m}{\omega \mu \mu_0} = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0}$ , то это равносильно среде без потерь с точки зрения волнового сопротивления

# Волновое сопротивление в среде<sup>139</sup> с потерями

$$W \left| \begin{array}{l} \sigma_m \\ \frac{\sigma}{\omega \mu \mu_0} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon \epsilon_0} \end{array} \right. = W \left| \begin{array}{l} \sigma_m = 0 \\ \sigma = 0 \end{array} \right. = W_0 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$\Gamma = \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}$$

# Реализация поглощающих граничных условий

$$loss_m = \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}$$

$$loss_e = \frac{\sigma \Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$

Если

$$\frac{\sigma_m}{\omega\mu\mu_0} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$\frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0} = \frac{\sigma \Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$

# Реализация поглощающих граничных условий

$$loss = loss_e = loss_m = \frac{\sigma_m \Delta_t}{2 \mu \mu_0} = \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0} = 0.02$$

$$ceze = \frac{1 - loss}{1 + loss}$$

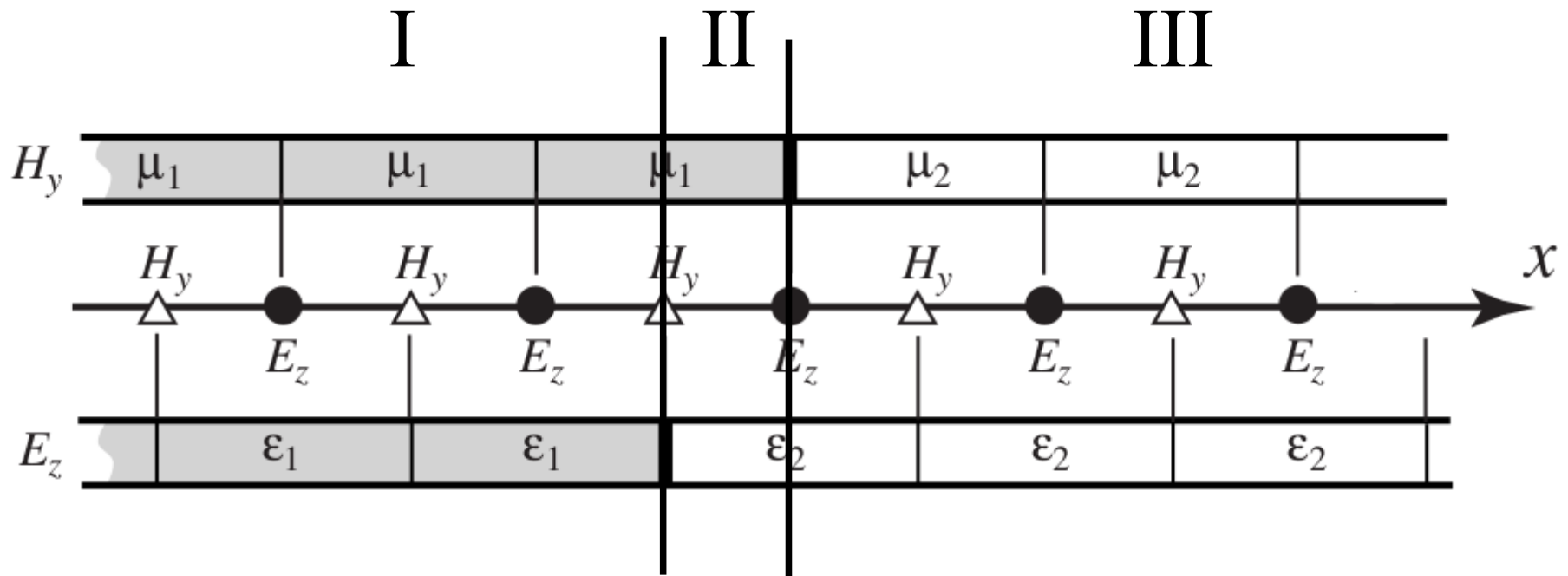
$$cezh = \frac{W_0 / \varepsilon}{1 + loss}$$

$$chye = \frac{1 / W_0}{1 + loss}$$

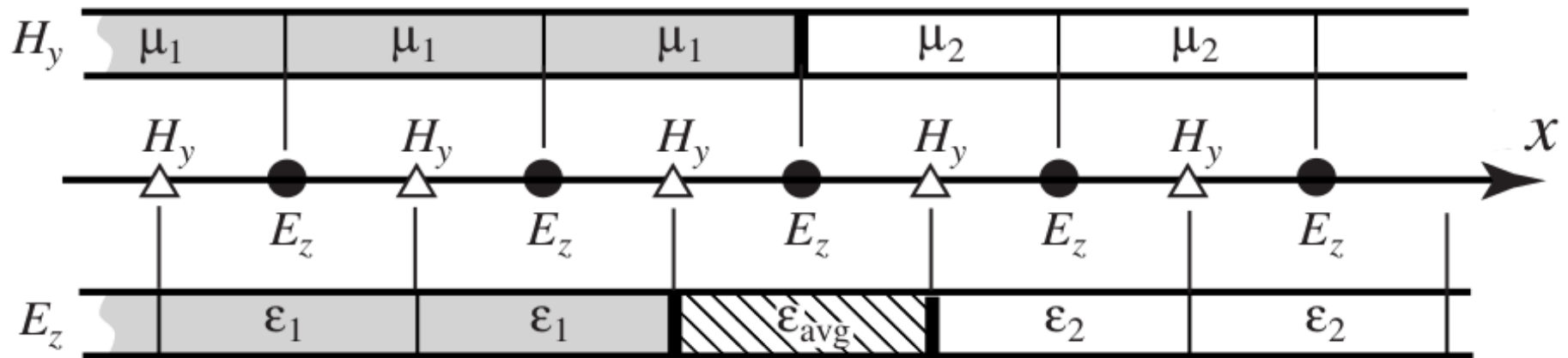
$$chyh = \frac{1 - loss}{1 + loss}$$

**Демонстрация  
граничных условий с  
использованием  
полностью согласованного слоя**

# Погрешность из-за дискретной сетки



# Погрешность из-за дискретной сетки





**Демонстрация  
граничных условий с  
использованием  
полностью согласованного слоя**

## **Поглощающие граничные условия (Absorbing boundary condition - ABC)**

# Типы поглощающих граничных условий

147

Поглощающие граничные условия можно разделить на две группы:

- Условия, аннигилирующие вытекающие волны.
- Условия, аппроксимирующие уравнение волны, распространяющейся только в одном направлении.

# Волновое уравнение в одномерном случае

$$\nabla^2 E_z - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

ИЛИ

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

# Волновое уравнение в одномерном случае

Перепишем волновое уравнение в операторном виде:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_z = 0$$

# Волновое уравнение в одномерном случае

150

Полученный оператор может быть разложен на произведение двух операторов:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_z = 0$$

# Уравнения адвекции

Любая функция  $E_z$ , которая удовлетворяет хотя бы одному из следующих уравнений, является решением волнового уравнения:

$$\text{I.} \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

$$\text{II.} \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

# Уравнения адвекции

$$E_z(t + x/v) = E_z(t + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} x)$$

- волна, распространяющаяся влево, удовлетворяет первому уравнению адвекции, но не второму.

Покажем это.



# Уравнения адвекции

Сделаем замену

$$\xi = t + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} x$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

# Уравнения адвекции

$$\xi = t + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} x$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = 1$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}$$

# Уравнения адвекции

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi}$$

# Уравнения адвекции

Полученные выражения подставляем в первое уравнение адвекции

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} - \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} = 0$$

$$0 = 0$$

Уравнение удовлетворяется

# Уравнения адвекции

Полученные выражения подставляем во второе уравнение адвекции

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

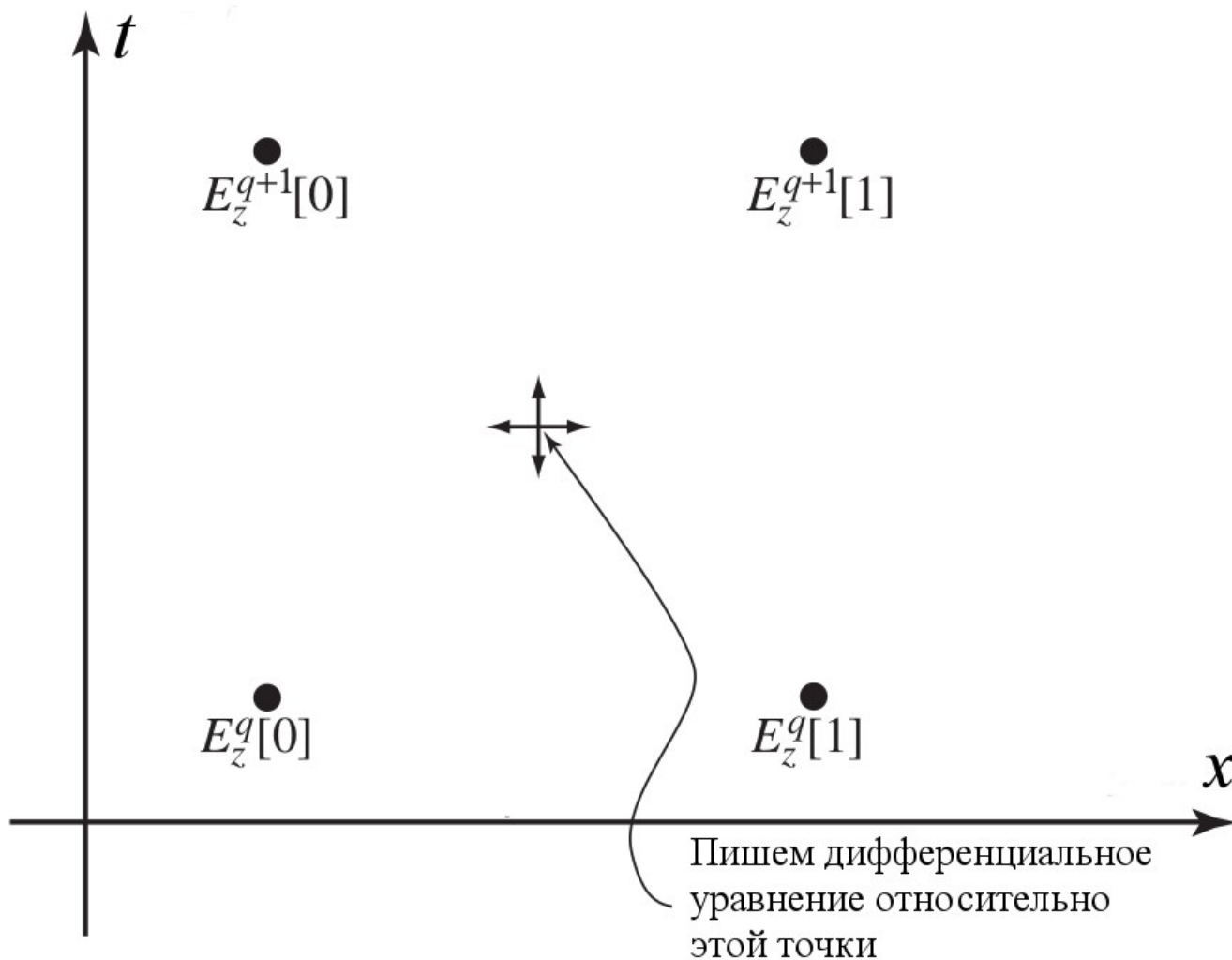
$$\frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} + \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} = 0$$

$$2 \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \neq 0$$

Уравнение не удовлетворяется

# Поглощающие граничные условия

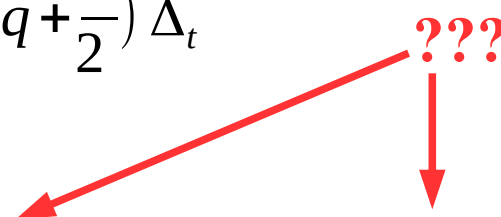
158



# Поглощающие граничные условия

159

Запишем производные в уравнении адвекции  
через конечно-разностную схему

$$\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} \bigg|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2}) \Delta_t} =$$

$$= \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{E_z^{q+1}[1/2] - E_z^q[1/2]}{\Delta_t}$$

# Поглощающие граничные условия

160

$$E_z^{q+1}[1/2] \approx \frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1]}{2}$$

$$E_z^q[1/2] \approx \frac{E_z^q[0] + E_z^q[1]}{2}$$



# Поглощающие граничные условия

161

$$\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} \bigg|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} \approx$$

$$\approx \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1]}{2} - \frac{E_z^q[0] + E_z^q[1]}{2}}{\Delta_t}$$

# Поглощающие граничные условия

162

Аналогично поступаем со вторым слагаемым в первом уравнении адвекции

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{\partial E_z}{\partial x} \right|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} = \\
 & = \frac{E_z^{q+1/2}[1] - E_z^{q+1/2}[0]}{\Delta_x} \approx \\
 & \approx \frac{\frac{E_z^{q+1}[1] + E_z^q[1]}{2} - \frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^q[0]}{2}}{\Delta_x}
 \end{aligned}$$

# Поглощающие граничные условия

163

Подставляем полученные выражения в первое уравнение адвекции

$$\frac{\frac{E_z^{q+1}[1] + E_z^q[1]}{2} - \frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^q[0]}{2}}{\Delta_x} -$$

$$- \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1]}{2} - \frac{E_z^q[0] + E_z^q[1]}{2}}{\Delta_t} = 0$$

# Поглощающие граничные условия

164

Из полученного уравнения выражаем  $E_x^{q+1}[0]$  и учитываем, что:

$$\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} = \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{c}, \quad S_c = \frac{c \Delta_t}{\Delta_x}$$

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1] + \frac{\frac{S_c}{\sqrt{\epsilon \mu}} - 1}{\frac{S_c}{\sqrt{\epsilon \mu}} + 1} \left( E_z^{q+1}[1] - E_z^q[0] \right)$$

# Поглощающие граничные условия

165

Аналогично можно вывести условие для правой границы

$$E_z^{q+1}[M] = E_z^q[M-1] + \frac{\frac{S_c}{\sqrt{\epsilon\mu}} - 1}{\frac{S_c}{\sqrt{\epsilon\mu}} + 1} \left( E_z^{q+1}[M-1] - E_z^q[M] \right)$$

# Поглощающие граничные условия

166

Для свободного пространства и  $S_c = 1$  выражения сводятся к виду:

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1]$$

$$E_z^{q+1}[M] = E_z^q[M-1]$$

# Демонстрация поглощающих граничных условий (АВС) первой степени

**Формулировка граничных  
условий АВС первой степени с  
использованием дискретных  
операторов**



# Операторы для граничных условий АВС

169

Введем несколько новых операторов:

$I$  — оператор идентичности.

$$I E_z^q[m] = E_z^q[m]$$

$s_x^1$  — оператор пространственного сдвига (сдвиг вправо).

$$s_x^1 E_z^q[m] = E_z^q[m+1]$$

$s_t^{-1}$  — оператор обратного временного сдвига.

$$s_t^{-1} E_z^{q+1}[m] = E_z^q[m]$$

# Линейные операторы

Оператор  $A$  называется линейным, если выполняются следующие условия:

- $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2$
- $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}$

# Свойства линейных операторов

Для двух линейных операторов  $A$  и  $B$  выполняется условия:

$$(A + B)(x) = A(x) + B(x)$$

$$(AB)(x) = A(B(x))$$

Введенные операторы коммутативны  
(можно менять порядок их применения)

$$S_x^1 S_t^{-1} = S_t^{-1} S_x^1$$

$$I S_x^1 = S_x^1$$

$$I I = I$$

# Уравнения адвекции

$$\text{I.} \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

$$\text{II.} \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} \bigg|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} \approx \\
& \approx \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1]}{2} - \frac{E_z^q[0] + E_z^q[1]}{2}}{\Delta_t}
\end{aligned}$$

# Использование дискретных операторов для граничных условий АВС первого порядка <sup>174</sup>

Пространственное усреднение с помощью введенных операторов записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^{q+1}[m+1]}{2} = \\ & = \frac{I E_z^{q+1}[m] + s_x^1 E_z^{q+1}[m]}{2} = \\ & = \left( \frac{I + s_x^1}{2} \right) E_z^{q+1}[m] \end{aligned}$$

# Использование дискретных операторов для граничных условий АВС первого порядка <sup>175</sup>

Временное усреднение с помощью введенных операторов записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^q[m]}{2} = \\ & \frac{I E_z^{q+1}[m] + s_t^{-1} E_z^{q+1}[m]}{2} = \\ & = \left( \frac{I + s_t^{-1}}{2} \right) E_z^{q+1}[m] \end{aligned}$$

# Поглощающие граничные условия с использованием дискретных операторов

В операторном виде указанные действия выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_z}{\partial t} \Big|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} &\approx \frac{\left(\frac{I+s_x^1}{2}\right)E_z^{q+1}[0] - \left(\frac{I+s_x^1}{2}\right)s_t^{-1}E_z^{q+1}[0]}{\Delta_t} = \\
 &= \left(\frac{I+s_x^1}{2}\right)\left(\frac{I-s_t^{-1}}{\Delta_t}\right)E_z^{q+1}[0] = \\
 &= \frac{1}{2\Delta_t} (I - s_t^{-1} + s_x^1 - s_x^1 \cdot s_t^{-1}) E_z^{q+1}[0] = \\
 &= \frac{1}{2\Delta_t} (E_z^{q+1}[0] - E_z^q[0] + E_z^{q+1}[1] - E_z^q[1])
 \end{aligned}$$



# Поглощающие граничные условия с использованием операторной записи

Аналогично можем поступить с расчетом производной по пространству:

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{\partial E_z}{\partial x} \right|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} \approx \\
 & \approx \left( \frac{s_x^1 - I}{\Delta_x} \right) \left( \frac{I + s_t^{-1}}{2} \right) E_z^{q+1}[0] = \\
 & = \frac{1}{2\Delta_x} (-I + s_x^1 - s_t^{-1} + s_t^{-1} \cdot s_x^1) E_z^{q+1}[0] = \\
 & = \frac{1}{2\Delta_x} (-E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1] - E_z^q[0] + E_z^q[1])
 \end{aligned}$$

# Поглощающие граничные условия с использованием операторной записи

Запишем конечно-разностное выражение для уравнения адвекции:

$$\left\{ \left( \frac{s_x^1 - I}{\Delta_x} \right) \left( \frac{I + s_t^{-1}}{2} \right) - \sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0} \left( \frac{I + s_x^1}{2} \right) \left( \frac{I - s_t^{-1}}{\Delta_t} \right) \right\} E_z^{q+1}[0] = 0$$

Решение этого уравнения для  $E_z^{q+1}[0]$  даст выражение

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1] + \frac{\frac{S_c}{\sqrt{\epsilon \mu}} - 1}{\frac{S_c}{\sqrt{\epsilon \mu}} + 1} (E_z^{q+1}[1] - E_z^q[0])$$

**Поглощающие граничные условия  
(Absorbing boundary condition — ABC)  
второй степени**

# Волновое уравнение в одномерном случае

Мы получим более точное решение уравнения адвекции и уменьшим отражение, если применим оператор адвекции дважды:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_z = 0$$

# Волновое уравнение в одномерном случае

Конечно-разностная схема для оператора адвекции второй степени в операторном виде:

$$\left[ \left\{ \left( \frac{s_x^1 - I}{\Delta_x} \right) \left( \frac{I + s_t^{-1}}{2} \right) - \sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0} \left( \frac{I + s_x^1}{2} \right) \left( \frac{I - s_t^{-1}}{\Delta_t} \right) \right\} \times \right. \\ \left. \left\{ \left( \frac{s_x^1 - I}{\Delta_x} \right) \left( \frac{I + s_t^{-1}}{2} \right) - \sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0} \left( \frac{I + s_x^1}{2} \right) \left( \frac{I - s_t^{-1}}{\Delta_t} \right) \right\} \right] E_z^{q+1}[0] = 0$$

# Поглощающее граничное условие второй степени

182

Если раскрыть скобки и решить это уравнение относительно  $E_z^{q+1}[0]$ , то мы получим

$$\begin{aligned}
 E_z^{q+1}[0] = & \underbrace{\frac{-1}{1/S'_c + 2 + S'_c}}_{k_1} \left\{ \underbrace{\left( \frac{1}{S'_c} - 2 + S'_c \right)}_{k_2} \left( E_z^{q+1}[2] + \underline{E_z^{q-1}[0]} \right) + \right. \\
 & + 2 \underbrace{\left( S'_c - \frac{1}{S'_c} \right)}_{k_3} \left( \underline{E_z^q[0]} + \underline{E_z^q[2]} - E_z^{q+1}[1] - \underline{E_z^{q-1}[1]} \right) - \\
 & \left. - 4 \underbrace{\left( \frac{1}{S'_c} + S'_c \right)}_{k_4} \underline{E_z^q[1]} \right\} - \underline{E_z^{q-1}[2]}
 \end{aligned}$$

В предыдущем выражении:

$$S'_c = \frac{\Delta_t}{\sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0} \Delta_x} = \frac{S_c}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

Для свободного пространства и  $S_c = 1$   
граничное условие преобразуется к виду:

$$E_z^{q+1}[0] = 2E_z^q[1] - E_z^{q-1}[2]$$



Граничные условия справа выглядят аналогично, только они отражены «зеркально». Преобразуются пространственные координаты:

$$0 \rightarrow M$$

$$1 \rightarrow M - 1$$

$$2 \rightarrow M - 2$$

В индексации Python:

$$0 \rightarrow -1$$

$$1 \rightarrow -2$$

$$2 \rightarrow -3$$

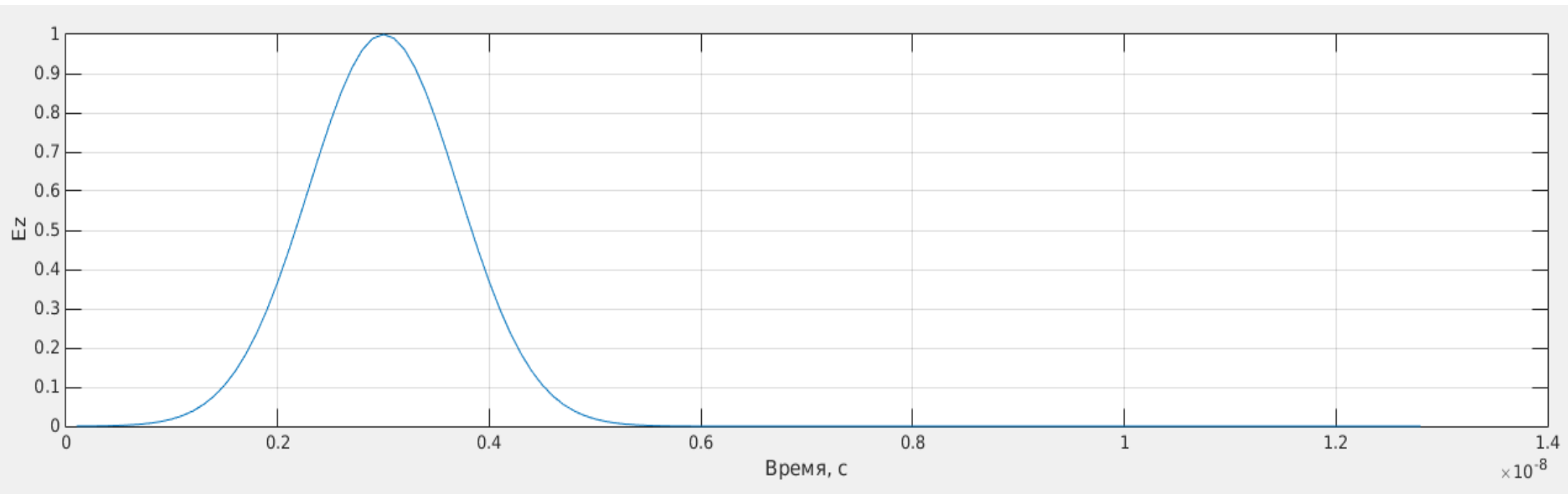
# Демонстрация поглощающих граничных условий (АВС) второй степени

# Источники возбуждения

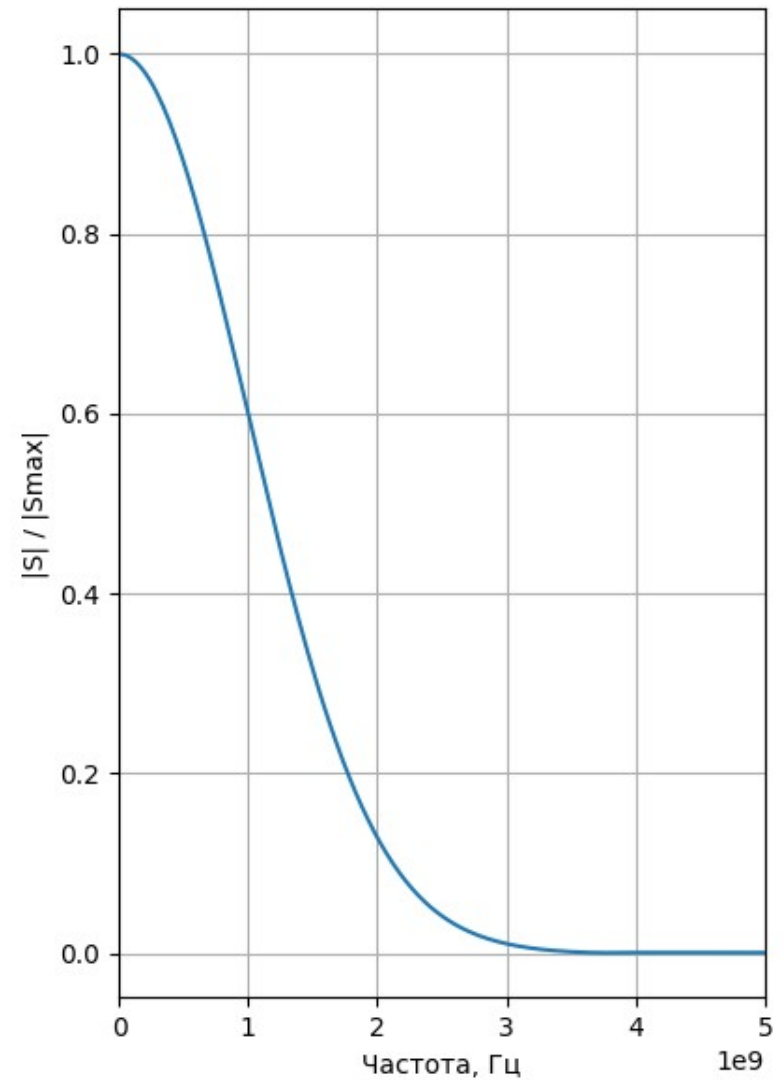
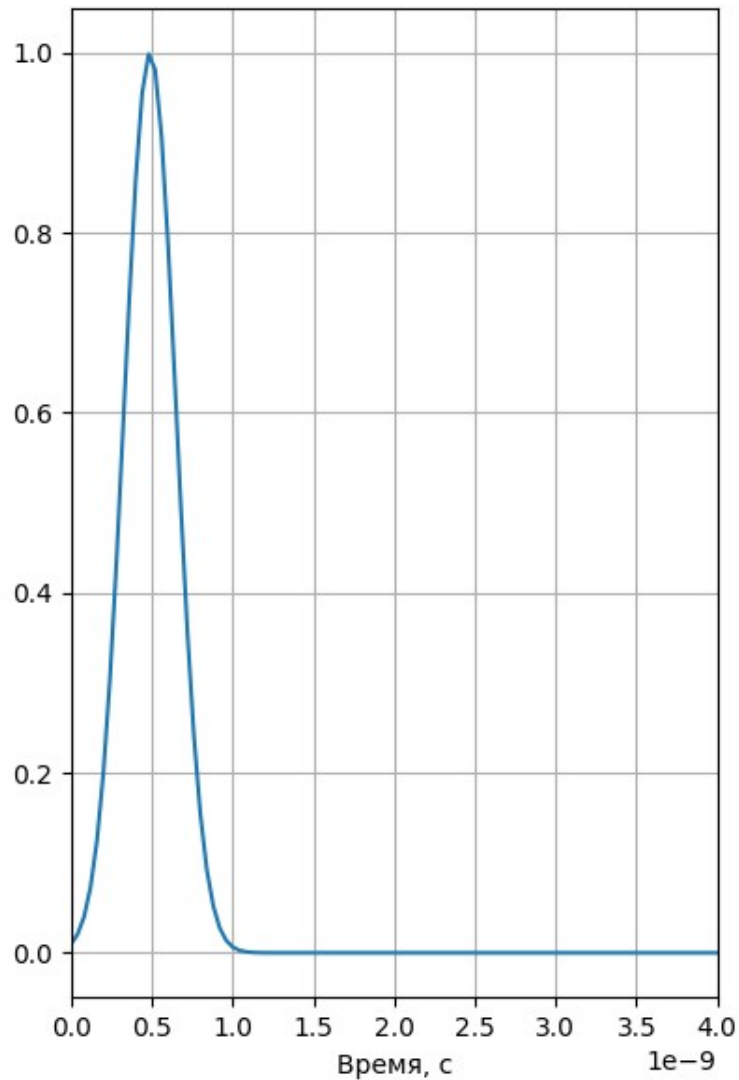
# Гауссов импульс

# Гауссов импульс

$$f_g(t) = A e^{-\left(\frac{t - d_g}{w_g}\right)^2}$$



# Спектр гауссова импульса



# Спектр гауссова импульса

Если заданы требования к сигналу:

- $A_0 > 1$  — уровень ослабления сигнала в момент времени  $t = 0$ .
- $F_{\max}$  — «максимальная» частота в спектре сигнала.
- $A_{\max} > 1$  — уровень ослабления спектра сигнала на частоте  $F_{\max}$ .

$$f_g(t) = A e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$w_g = \frac{\sqrt{\ln(A_{\max})}}{\pi F_{\max}}$$

$$d_g = w_g \sqrt{\ln(A_0)}$$

# Демонстрация спектра гауссова импульса



# Недостатки гауссова импульса

- В спектре присутствует постоянная составляющая.
- Максимальное значение спектра всегда на частоте 0 ГГц.
- Сигнал с постоянной составляющей нельзя излучить.

**Уравнение плоской волны для  
гауссова импульса в дискретном  
виде**

# Уравнение плоской волны для гауссова импульса в дискретном виде

$$f[m, q] = e^{-\left(\frac{(q - m \sqrt{\epsilon} \bar{\mu} / S_c) - N_{dg}}{N_{wg}}\right)^2}$$

$$N_{wg} = w_g / \Delta_t$$

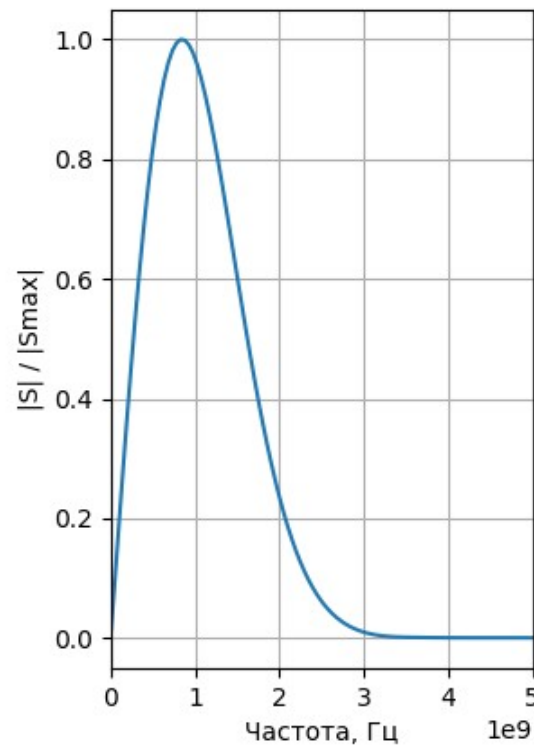
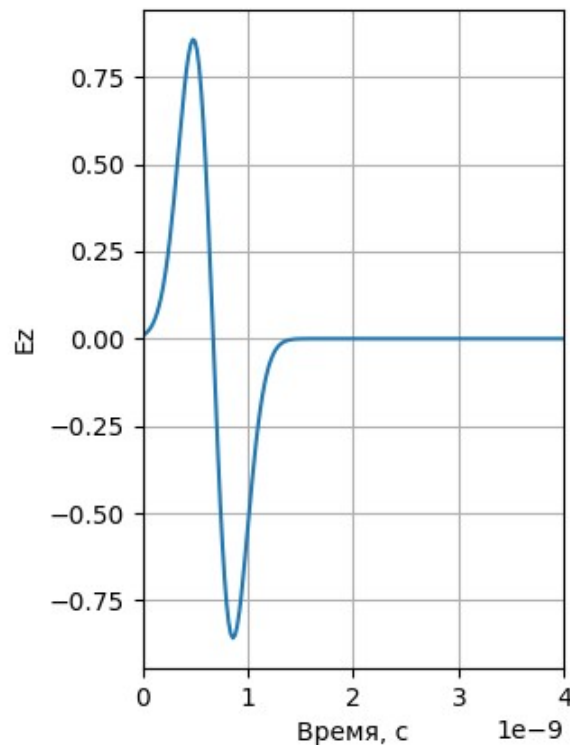
$$N_{dg} = d_g / \Delta_t$$

# Дифференцированный гауссов импульс

# Дифференцированный гауссов импульс

197

$$f_g(t) = -2A \left( \frac{t - d_g}{w_g} \right) e^{-\left( \frac{t - d_g}{w_g} \right)^2}$$



# Спектр дифференцированного гауссова импульса

Если заданы требования к сигналу:

- $F_{\max}$  — «максимальная» частота в спектре сигнала.
- $A_{\max} > 1$  — уровень ослабления спектра сигнала на частоте  $F_{\max}$  и ослабление в момент времени  $t = 0$ .

$$f_g(t) = -2A \left( \frac{t - d_g}{w_g} \right) e^{-\left( \frac{t - d_g}{w_g} \right)^2}$$

$$w_g = \frac{\sqrt{\ln(5.5 A_{\max})}}{\pi F_{\max}}$$

$$d_g = w_g \sqrt{\ln(2.5 A_{\max} \sqrt{\ln(2.5 A_{\max})})}$$

# Демонстрация спектра дифференцированного гауссова импульса

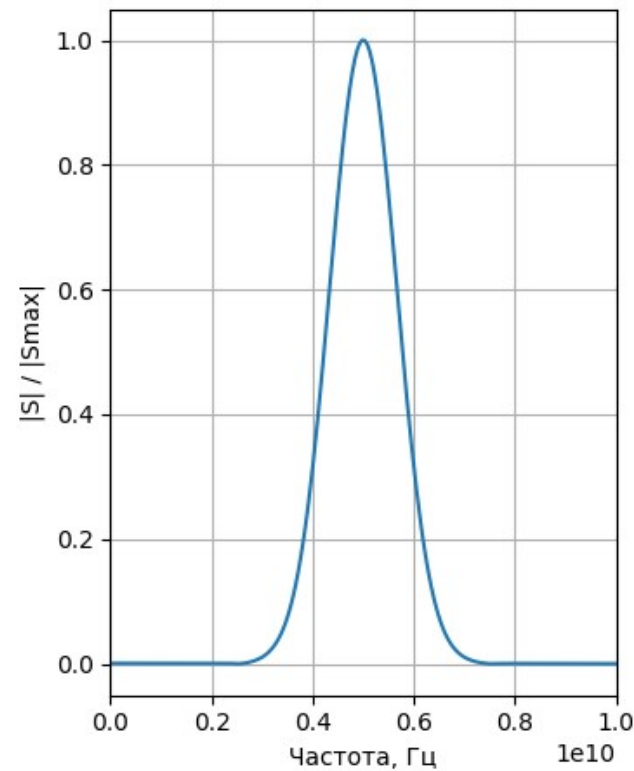
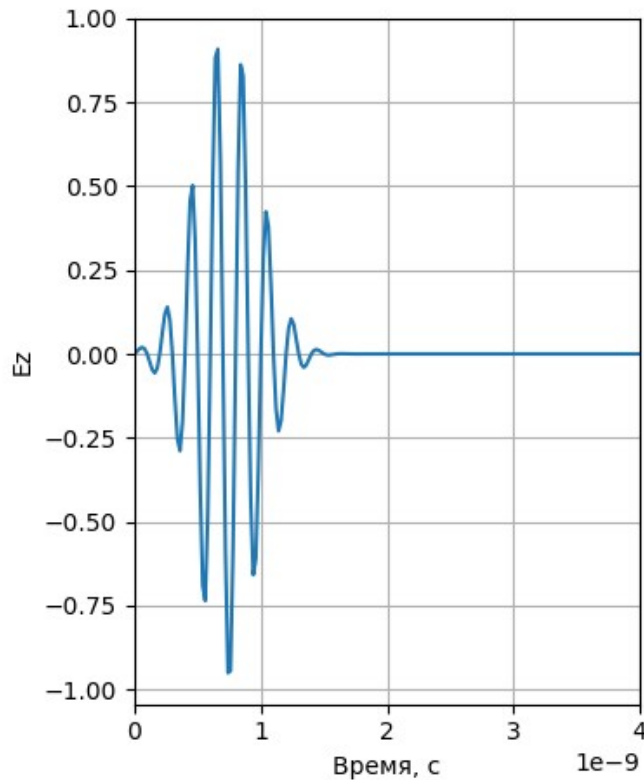
`spectrum_gauss_diff.py`

# Модулированный гауссов импульс



# Модулированный гауссов импульс

$$f_g(t) = \sin(2\pi f_0 t) e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$



# Спектр модулированного гауссова импульса

Если заданы требования к сигналу:

- $f_0$  — центральная частота в спектре сигнала.
- $A_{\max} > 1$  — уровень ослабления спектра сигнала на частоте  $F_{\max}$ .
- $A_0$  — ослабление огибающей сигнала в момент времени  $t = 0$
- $\Delta F$  — ширина спектра по уровню ослабления  $A_{\max}$ .

$$f_g(t) = \sin(2\pi f_0 t) e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$w_g = 2 \sqrt{\ln(A_{\max})} / (\pi \Delta F)$$

$$d_g = w_g \sqrt{\ln(A_0)}$$

# Демонстрация спектра модулированного гауссова импульса

`spectrum_gauss_mod.py`

**Уравнение плоской волны для  
модулированного гауссова  
импульса в дискретном виде**

# Уравнение плоской волны для модулированного гауссова импульса в дискретном виде

205

$f(\xi)$  — решение волнового уравнения, если:

- $f(\xi)$  дважды дифференцируема
- $\xi$  можно заменить на  $t \pm x / v$   
(для одномерного случая)

# Уравнение плоской волны для модулированного гауссова импульса в дискретном виде

206

В выражении для модулированного  
гауссова импульса  
заменим  $t$  на  $t \pm x / v$

$$f_g(t) = \sin(2\pi f_0 t) e^{-\left(\frac{t - d_g}{w_g}\right)^2}$$



$$f_g(t) = \sin\left(2\pi f_0 \left(t \pm \frac{x \sqrt{\epsilon \mu}}{c}\right)\right) e^{-\left(\frac{t \pm \frac{x \sqrt{\epsilon \mu}}{c} - d_g}{w_g}\right)^2}$$

# Уравнение плоской волны для модулированного гауссова импульса в дискретном виде

207

$$\lambda_0 = N_{\lambda_0} \Delta x, \quad w_g = N_{wg} \Delta_t, \quad d_g = N_{dg} \Delta_t,$$

$$\frac{x}{c} = \frac{m \Delta_x}{c} = \frac{m \Delta_t}{S_c},$$

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{N_{\lambda_0} \Delta x} = \frac{S_c}{N_{\lambda_0} \Delta_t}$$

# Уравнение плоской волны для модулированного гауссова импульса в дискретном виде

208

$$f_g[m, q] = \sin \left( \frac{2\pi S_c}{N_{\lambda_0} \Delta_t} \left( q \Delta_t \pm \frac{m \Delta_t \sqrt{\epsilon \mu}}{S_c} \right) \right) e^{-\left( \frac{q \Delta_t \pm \frac{m \Delta_t \sqrt{\epsilon \mu}}{S_c} - N_{dg} \Delta_t}{N_{wg} \Delta_t} \right)^2}$$



$$f_g[m, q] = \sin \left( \frac{2\pi}{N_{\lambda_0}} (q S_c \pm m \sqrt{\epsilon \mu}) \right) e^{-\left( \frac{q \pm \frac{m \sqrt{\epsilon \mu}}{S_c} - N_{dg}}{N_{wg}} \right)^2}$$



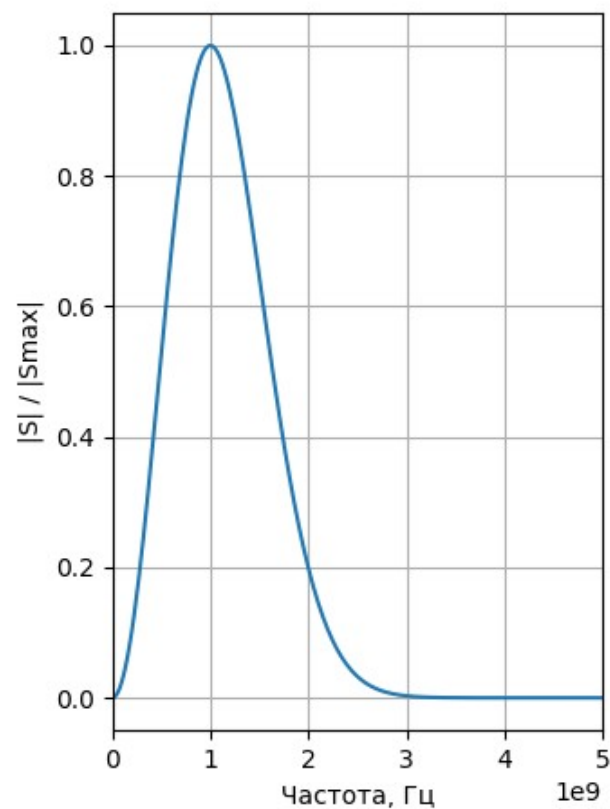
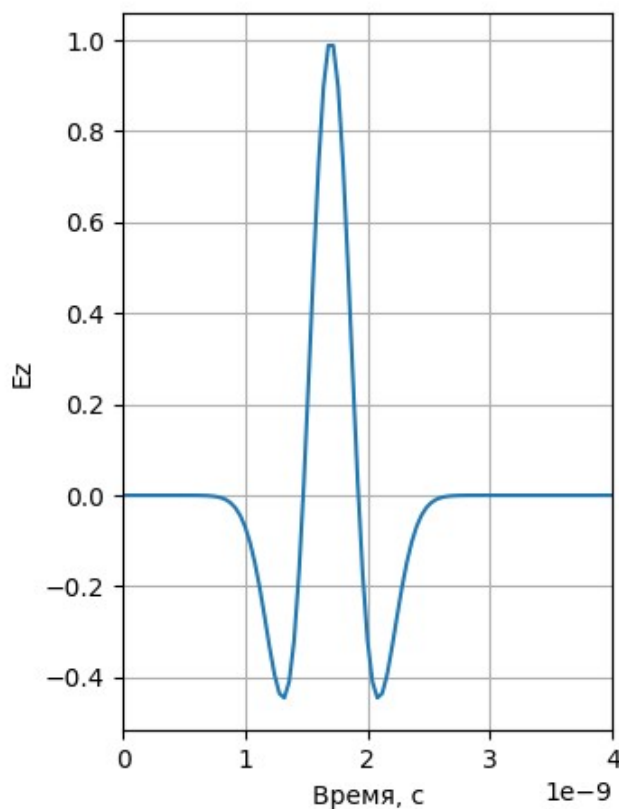
**Демонстрация модулированного  
гауссова импульса при  
использовании метода  
Total Field / Scattered Field**

`fdtd_tfsf_medium_gauss_mod.py`

# Вейвлет Рикера

# Вейвлет Рикера

$$f_r(t) = \left(1 - 2\{\pi f_p[t - d_r]\}^2\right) e^{-\{\pi f_p[t - d_r]\}^2}$$



# Вейвлет Рикера

Если заданы требования к сигналу:

- $f_p$  — «пиковая» частота в спектре сигнала.

$$f_r(t) = \left(1 - 2\{\pi f_p[t - d_r]\}^2\right) e^{-\{\pi f_p[t - d_r]\}^2}$$

$$d_r = M_d \frac{1}{f_p}$$

$M_d$  — коэффициент задержки

# Спектр вейвлета Рикера

$$F_r(\omega) = -\frac{2}{f_p \sqrt{\pi}} \left( \frac{\omega}{2\pi f_p} \right)^2 \exp \left( -jd_r \omega - \left( \frac{\omega}{2\pi f_p} \right)^2 \right)$$

# Вейвлет Рикера в терминах длин волн

$$\lambda_p = N_p \Delta_x, \quad f_p = \frac{c}{\lambda_p} = \frac{c}{N_p \Delta_x}$$

# Вейвлет Рикера в терминах длин волн

$$\lambda_p = N_p \Delta_x, \quad f_p = \frac{c}{\lambda_p} = \frac{c}{N_p \Delta_x}$$

$$S_c = \frac{c \Delta_t}{\Delta_x} \Rightarrow \Delta_x = \frac{c \Delta_t}{S_c}$$

$$f_p = \frac{S_c}{N_p \Delta_t}$$

# Вейвлет Рикера в терминах длин волн

$$f_p = \frac{S_c}{N_p \Delta_t}$$

Тогда задержка может быть представлена как:

$$d_r = M_d \frac{1}{f_p} = M_d \frac{N_p \Delta_t}{S_c}$$



# Вейвлет Рикера в дискретном виде

$$f_r[q] = \left(1 - 2\pi^2 \left[\frac{S_c q}{N_p} - M_d\right]^2\right) \exp\left(-\pi^2 \left[\frac{S_c q}{N_p} - M_d\right]^2\right)$$

# Демонстрация спектра вейвлета Рикера

`spectrum_ricker.py`

# Уравнение плоской волны для вейвлета Рикера в дискретном виде

# Уравнение плоской волны для вейвлета Рикера в дискретном виде

В выражении для вейвлета Рикера  
заменим  $t$  на  $t \pm x / c$

$$f_r\left(t \pm \frac{x}{c}\right) = f_r(x, t) = \left(1 - 2\pi^2 f_p^2 \left(t \pm \frac{x}{c} - d_r\right)^2\right) e^{-\pi^2 f_p^2 \left(t \pm \frac{x}{c} - d_r\right)^2}$$

# Уравнение плоской волны для вейвлета Рикера в дискретном виде

Запишем предыдущее выражение через число Куранта и длину волны, учитывая, что

$$\frac{x}{c} = \frac{m \Delta_x}{c} = \frac{m \Delta_t}{S_c}, \quad f_p = \frac{S_c}{N_p \Delta_t}, \quad d_r = M_d \frac{1}{f_p} = M_d \frac{N_p \Delta_t}{S_c}$$

$$f_r[m, q] = \left( 1 - 2\pi^2 \left[ \frac{S_c q \pm m}{N_p} - M_d \right]^2 \right) e^{-\pi^2 \left[ \frac{S_c q \pm m}{N_p} - M_d \right]^2}$$

# Демонстрация вейвлета Рикера при использовании метода Total Field / Scattered Field

# Уравнение плоской волны для гармонического сигнала в дискретном виде

# Гармонический сигнал

$$f_h(t) = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

или в дискретном виде

$$f_h(q \Delta_t) = A \cos(\omega q \Delta_t + \phi_0)$$



# Гармонический сигнал в терминах<sup>225</sup> длин волн

Если задана длина волны в виде:  $\lambda = N_\lambda \cdot \Delta_x$ , то

$$f = \frac{c}{\lambda}, \quad \omega t = \frac{2\pi c}{\lambda} t$$

$$f_h(q \Delta_t) = A \cos \left( \frac{2\pi c}{N_\lambda \Delta_x} q \Delta_t + \phi_0 \right)$$

$$f_h[q] = A \cos \left( \frac{2\pi S_c}{N_\lambda} q + \phi_0 \right)$$

# Уравнение плоской волны в дискретном виде

$$T = \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{c} = \frac{N_{\lambda} \Delta_x}{c}$$

Количество временных шагов на период:

$$\frac{T}{\Delta_t} = \frac{N_{\lambda} \Delta_x}{c \Delta_t} = \frac{N_{\lambda}}{S_c}$$

# Уравнение плоской волны в дискретном виде

$$f_h(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \phi_0) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{k}{\omega}x\right) + \phi_0\right)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega \sqrt{\mu\epsilon}}{c}$$

$$x = m \Delta_x$$

# Уравнение плоской волны в дискретном виде

тогда:

$$\omega \left( t - \frac{k}{\omega} x \right) = \frac{2 \pi c}{N_{\lambda} \Delta_x} \left( q \Delta_t - \frac{\sqrt{\mu \epsilon}}{c} m \Delta_x \right)$$

# Уравнение плоской волны в дискретном виде

тогда:

$$\omega \left( t - \frac{k}{\omega} x \right) = \frac{2 \pi c}{N_{\lambda} \Delta_x} \left( q \Delta_t - \frac{\sqrt{\mu \varepsilon}}{c} m \Delta_x \right)$$

Вынесем за скобки  $\Delta_x / c$

$$\omega \left( t - \frac{k}{\omega} x \right) = \frac{2 \pi}{N_{\lambda}} \left( q \frac{\Delta_t c}{\Delta_x} - \sqrt{\mu \varepsilon} m \right) = \frac{2 \pi}{N_{\lambda}} (S_c q - \sqrt{\mu \varepsilon} m)$$

# Уравнение плоской волны в дискретном виде

В дискретном виде:

$$f_h[m, q] = A \cos \left( \frac{2\pi}{N_\lambda} (S_c q - \sqrt{\mu \varepsilon} m) + \phi_0 \right)$$

Обычно используют:

$$f_h[m, q] = A \sin \left( \frac{2\pi}{N_\lambda} (S_c q - \sqrt{\mu \varepsilon} m) + \phi_0 \right)$$

**Демонстрация гармонического  
сигнала при использовании  
метода  
Total Field / Scattered Field**

`fdtd_tfsf_sin.py`

`fdtd_tfsf_medium_sin.py`

# Демонстрация стоячей волны

`fdtd_tfsf_sin.py`  
`fdtd_swr.py`



# Программирование источников с использованием объектно-ориентированного подхода

`fdtd_sources_oop.py`  
`fdtd_sources_oop_tfsf.py`

# Погрешности метода FDTD

# Источники погрешностей метода FDTD<sup>235</sup>

- Численная дисперсия.
- Отражение от границ области моделирования.
- Ступенчатая аппроксимация границ объектов.
- Численный шум.
- Постоянная составляющая тока может создавать остаточные электрические заряды (емкость ячеек сетки).

# Численная дисперсия

Дисперсия — зависимость фазовой скорости распространения волны от частоты.

# Численная дисперсия

$$\tilde{c} = c \frac{\pi \sqrt{\epsilon \mu}}{N_{\lambda} \arcsin \left( \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{S_c} \sin \left( \frac{\pi S_c}{N_{\lambda}} \right) \right)}$$

$\tilde{c}$  — скорость распространения волны в дискретном пространстве

$N_{\lambda}$  — Количество ячеек сетки на длину волны

# Численная дисперсия

Если  $Sc = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$

$$\tilde{c} = c \frac{\pi}{N_{\lambda} \arcsin \left( \sin \left( \frac{\pi}{N_{\lambda}} \right) \right)} = \frac{c \pi N_{\lambda}}{N_{\lambda} \pi} = c$$

# Демонстрация численной дисперсии

`dispersion.py`  
`fdtd_dispersion.py`

# Коэффициенты отражения и прохождения

Для границы раздела двух диэлектриков  
 $\mu = 1$

Коэффициент прохождения:

$$T = \frac{2\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}}$$

Коэффициент отражения:

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}}$$



# Коэффициенты прохождения и отражения в дискретном пространстве

$$\widetilde{T} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1} \cos\left(\frac{\widetilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}{\sqrt{\epsilon_1} \cos\left(\frac{\widetilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) + \sqrt{\epsilon_2} \cos\left(\frac{\widetilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)} \quad \Bigg| \quad \widetilde{\Gamma} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos\left(\frac{\widetilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) - \sqrt{\epsilon_2} \cos\left(\frac{\widetilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}{\sqrt{\epsilon_1} \cos\left(\frac{\widetilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) + \sqrt{\epsilon_2} \cos\left(\frac{\widetilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}$$

где

$$\frac{\widetilde{\beta}_i \Delta_x}{2} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{\epsilon_i} \mu_i}{S_c} \sin\left(\frac{\pi S_c}{N_\lambda}\right)\right)$$

# Демонстрация погрешностей при расчете коэффициента отражения

# Источники погрешностей метода FDTD<sup>243</sup>

- Численная дисперсия.
- Отражение от границ области моделирования.
- Ступенчатая аппроксимация границ объектов.
- Численный шум.
- Постоянная составляющая тока может создавать остаточные электрические заряды (емкость ячеек сетки).

# Модификации метода FDTD

- Метод FDTD в криволинейных системах координат.
- Уменьшение отражений от границ области моделирования.
- Использование неравномерных сеток разбиения.
- Использование ячеек неправильной формы.
- Учет временной дисперсии среды.
- Учет зависимости параметров среды от частоты.
- Метод FDTD с произвольным шагом по времени.

# Двумерный метод конечных разностей во временной области

# Закон Фарадея

$$-\sigma_m \mathbf{H} - \mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \mathbf{x}_0 \frac{\partial E_z}{\partial y} - \mathbf{y}_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

# Закон Ампера

$$\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \mathbf{x}_0 \frac{\partial H_z}{\partial y} - \mathbf{y}_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

# Законы Фарадея и Ампера в скалярном виде

$$-\sigma_m H_x - \mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$\sigma_m H_y + \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$-\sigma_m H_z - \mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

$$\sigma E_x + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$\sigma E_y + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$\sigma E_z + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$$



# Законы Фарадея и Ампера в скалярном виде

$$-\sigma_m H_x - \mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$\sigma_m H_y + \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

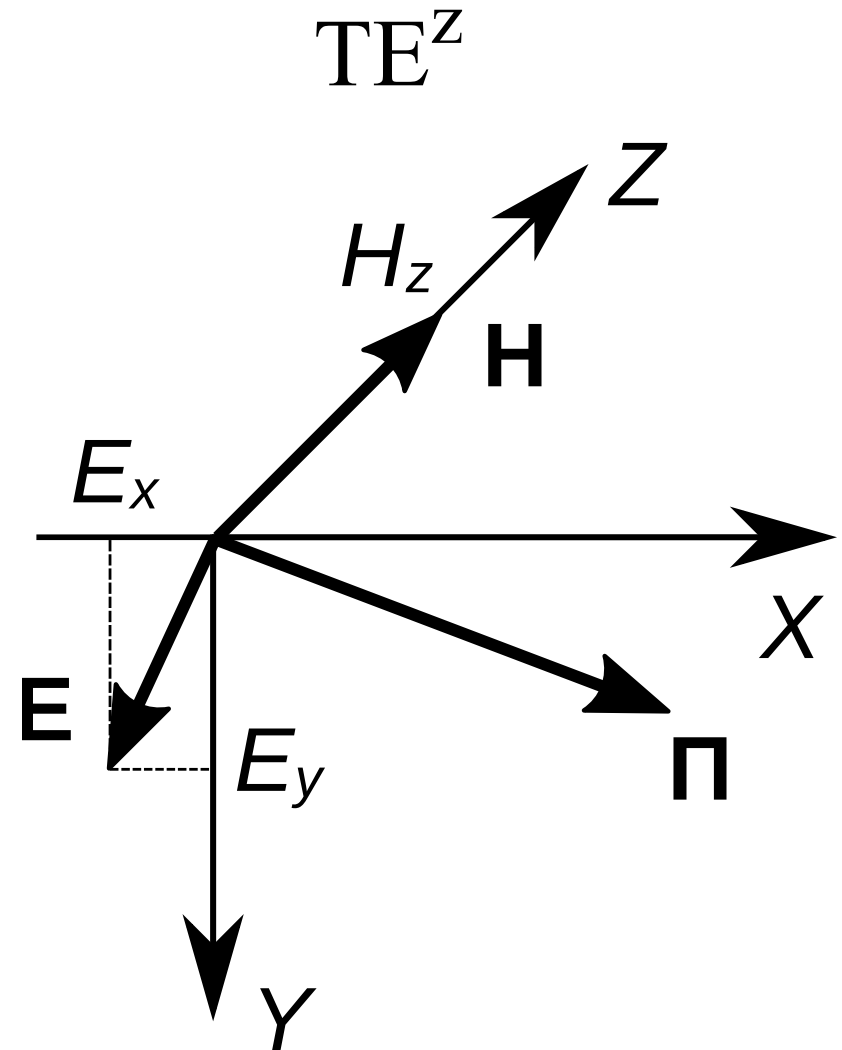
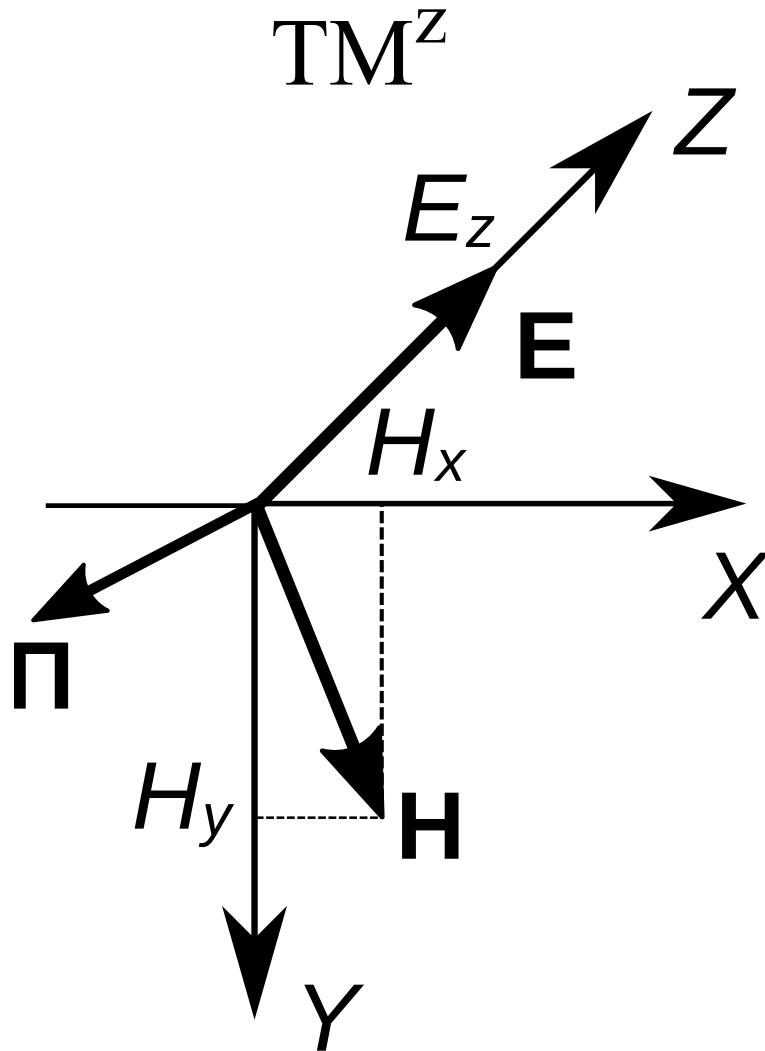
$$-\sigma_m H_z - \mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

$$\sigma E_x + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$\sigma E_y + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$\sigma E_z + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

# Виды поляризации для двумерного случая

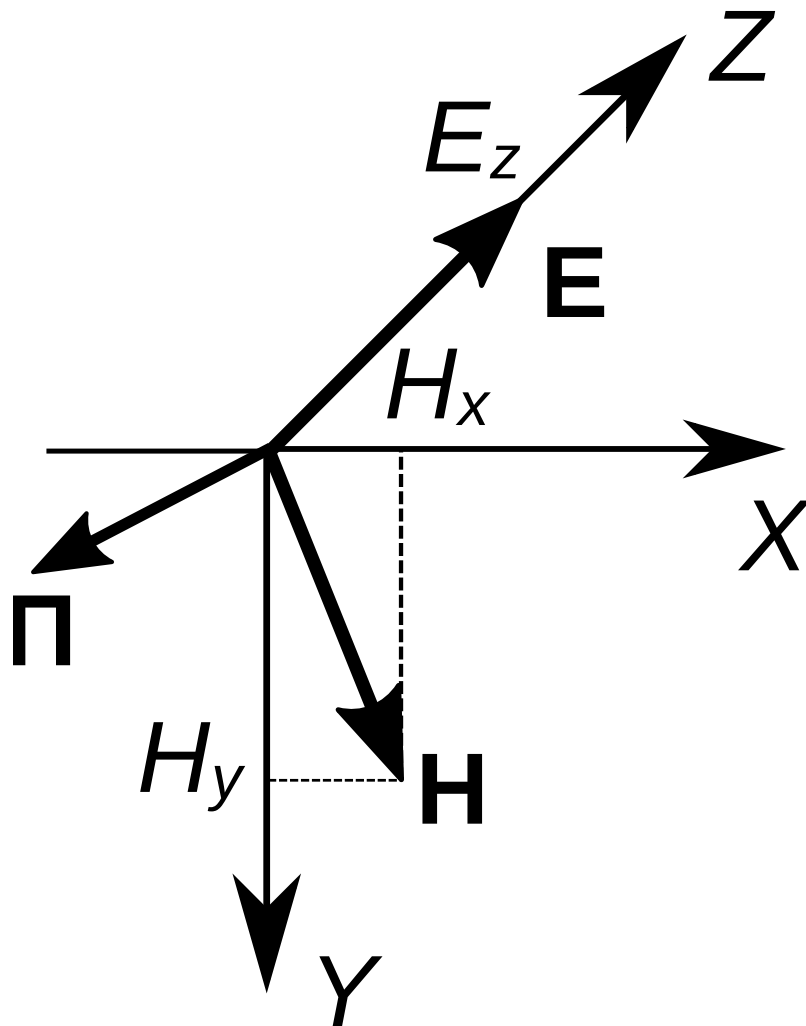


# Виды мод электромагнитной волны

- ТМ - Transverse magnetic — Поперечно-магнитная волна. Нет магнитной составляющей в указанном направлении (Е-волна).
- ТЕ - Transverse electric — Поперечно-электрическая волна. нет электрической составляющей в указанном направлении (Н-волна).
- ТЕМ - Transverse electromagnetic — Поперечно-электромагнитная волна. нет электрической и магнитной составляющих в указанном направлении.
- Гибридные — есть и электрическая, и магнитная составляющие в указанном направлении.

**Двумерный метод конечных  
разностей во временной области  
для поляризации  $TM^z$**

# Поляризация ТМ<sup>z</sup>



Существуют следующие компоненты ЭМ поля:

- $E_z$
- $H_x$
- $H_y$

# Метод FDTD для поляризации ТМ<sup>z</sup>. 254

## Законы Фарадея и Ампера в скалярном виде

$$-\sigma_m H_x - \mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$\sigma_m H_y + \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\sigma E_z + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

## Дискретизация величин E и H

$$H_x(x, y, t) = H_x(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = H_x^q[m, n]$$

$$H_y(x, y, t) = H_y(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = H_y^q[m, n]$$

$$E_z(x, y, t) = E_z(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = E_z^q[m, n]$$

$m$  — индекс по пространству вдоль оси X.

$n$  — индекс по пространству вдоль оси Y.

$q$  — индекс по времени.

$\Delta_x, \Delta_y$  — размер сетки по осям X и Y соответственно.

# Конечно-разностная аппроксимация для закона Фарадея

Запишем конечно-разностную аппроксимацию для точки  
 $(m\Delta_x, (n + 1/2)\Delta_y, q\Delta_t)$

$$\begin{aligned}
 & -\sigma_m \frac{H_x^{q+1/2}[m, n+1/2] + H_x^{q-1/2}[m, n+1/2]}{2} - \\
 & -\mu\mu_0 \frac{H_x^{q+1/2}[m, n+1/2] + H_x^{q-1/2}[m, n+1/2]}{\Delta_t} = \\
 & = \frac{E_z^q[m, n+1] - E_z^q[m, n]}{\Delta_y}
 \end{aligned}$$



# Конечно-разностная аппроксимация для закона Фарадея

Из полученного уравнения выражаем  $H_x^{q+1/2}[m, n+1/2]$ :

$$H_x^{q+1/2}[m, n+1/2] = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} H_x^{q-1/2}[m, n+1/2] -$$

$$- \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \Delta_y} \left( E_z^q[m, n+1] - E_z^q[m, n] \right)$$

# Конечно-разностная аппроксимация для закона Фарадея

Подобным образом выражаем  $H_y^{q+1/2}[m+1/2, n]$ :

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2, n] = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} H_y^{q-1/2}[m+1/2, n] +$$

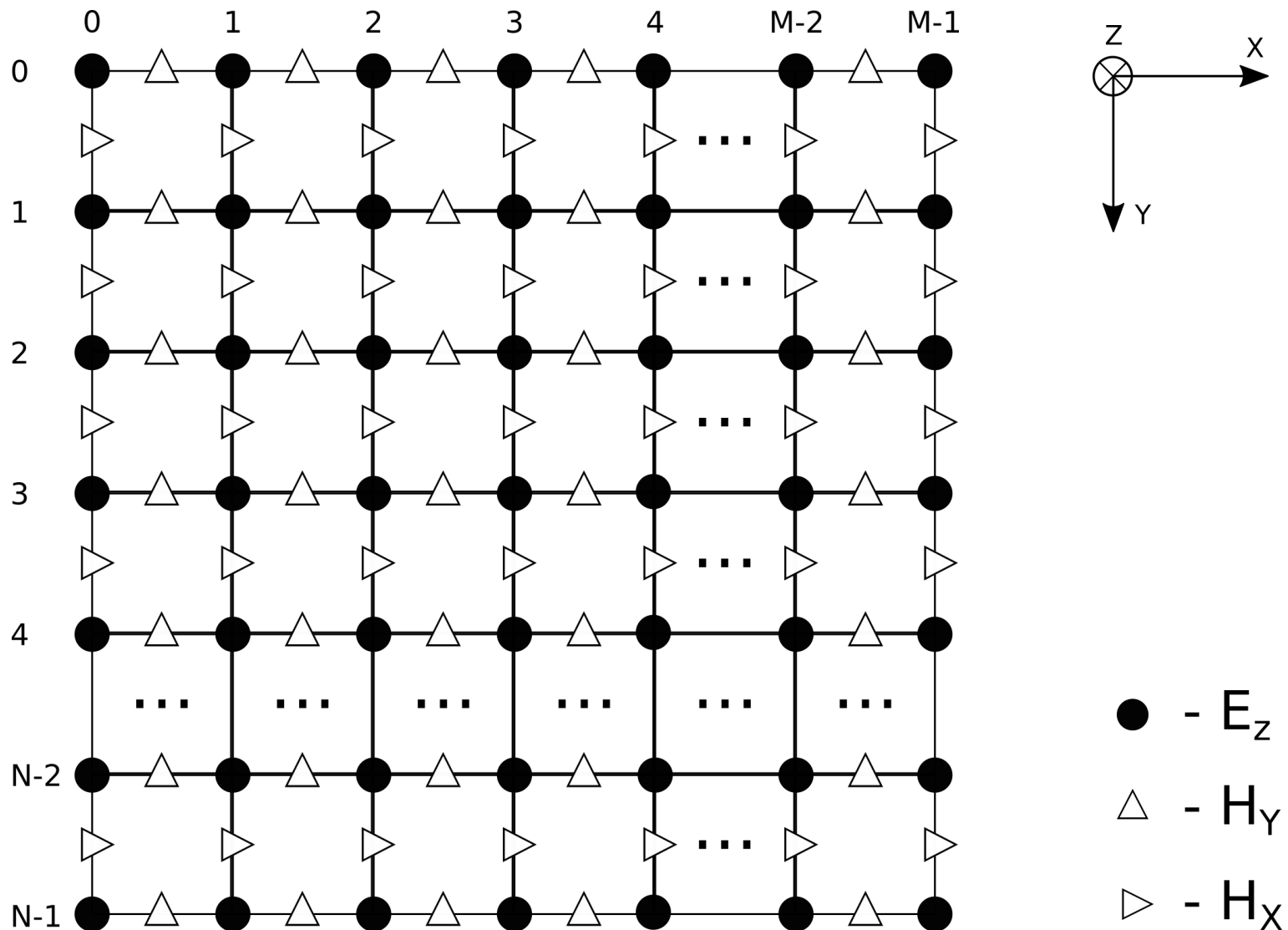
$$+ \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \Delta_x} \left( E_z^q[m+1, n] - E_z^q[m, n] \right)$$

# Конечно-разностная аппроксимация для закона Ампера

Подобным образом выражаем  $E_z^{q+1}[m, n]$  из закона Ампера:

$$\begin{aligned}
 E_z^{q+1}[m, n] = & \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_z^q[m, n] + \\
 & + \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \left( \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \{ H_y^{q+1/2}[m+1/2, n] - H_y^{q+1/2}[m-1/2, n] \} - \right. \\
 & \left. - \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_y} \{ H_x^{q+1/2}[m, n+1/2] - H_x^{q+1/2}[m, n-1/2] \} \right)
 \end{aligned}$$

# Пространственная сетка для двумерного метода FDTD. Поляризация $TM^z$



# Особенности реализации двумерного метода FDTD

- Размер массива для компоненты  $E_z$  —  $M \times N$
- Размер массива для компоненты  $H_x$  —  $M \times (N - 1)$
- Размер массива для компоненты  $H_y$  —  $(M - 1) \times N$

# Конечно-разностная аппроксимация

Если  $\Delta_x = \Delta_y = \delta$ , то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{hxh}(m, n+1/2) = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \Bigg|_{m\delta, (n+1/2)\delta}$$

$$C_{hxe}(m, n+1/2) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \delta} \Bigg|_{m\delta, (n+1/2)\delta}$$

# Конечно-разностная аппроксимация

Если  $\Delta_x = \Delta_y = \delta$ , то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{hyh}(m+1/2, n) = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \Bigg|_{(m+1/2)\delta, n\delta}$$

$$C_{hye}(m+1/2, n) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \delta} \Bigg|_{(m+1/2)\delta, n\delta}$$

# Конечно-разностная аппроксимация

Если  $\Delta_x = \Delta_y = \delta$ , то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{eze}(m, n) = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \bigg|_{m\delta, n\delta}$$

$$C_{ezh}(m, n) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \delta} \bigg|_{m\delta, n\delta}$$



# Программная реализация конечно-разностной схемы

$$Hx[m, n] = Chxh[m, n] * Hx[m, n] - \\ Chxe[m, n] * (Ez[m, n + 1] - Ez[m, n])$$

$$Hy[m, n] = Chyh[m, n] * Hy[m, n] + \\ Chye[m, n] * (Ez[m + 1, n] - Ez[m, n])$$

$$Ez[m, n] = Ceze[m, n] * Ez[m, n] + \\ Cezh[m, n] * (Hy[m, n] - Hy[m - 1, n]) - \\ (Hx[m, n] - Hx[m, n - 1])$$

# Стабильность двумерного метода FDTD

# Критерий устойчивости Куранта-Фридриха-Леви

$$v_{max} \Delta_t \leq \frac{1}{\sqrt{\Delta_x^{-2} + \Delta_y^{-2} + \Delta_z^{-2}}}$$

$$v_{max} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{min} \mu_{min}}}$$


---

Если  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \Delta$

$$v_{max} \Delta_t \leq \frac{\Delta}{\sqrt{N}}$$

$N$  — размерность пространства (1, 2, 3)

# Стабильность двумерного метода FDTD

268

Критерий стабильности для одномерного пространства:

$$S_c = \frac{v \Delta_t}{\Delta_x} \leq 1$$

# Стабильность двумерного метода FDTD

Критерий стабильности для одномерного пространства:

$$S_c = \frac{v \Delta_t}{\Delta_x} \leq 1$$

Критерий стабильности для N-мерного пространства:

$$S_c = v \Delta_t \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{1}{\Delta_n^2}} \leq 1$$

# Стабильность двумерного метода FDTD

Критерий стабильности для одномерного пространства:

$$S_c = \frac{v \Delta_t}{\Delta_x} \leq 1$$

Критерий стабильности для N-мерного пространства:

$$S_c = v \Delta_t \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{1}{\Delta_n^2}} \leq 1$$

Критерий стабильности для двумерного пространства:

$$S_c = v \Delta_t \sqrt{\frac{1}{\Delta_x^2} + \frac{1}{\Delta_y^2}} \leq 1$$

# Стабильность двумерного метода FDTD

Если  $\Delta_x = \Delta_y = \delta$ , то

$$S_c = v \Delta_t \sqrt{\frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\delta^2}} \leq 1 \quad \rightarrow \quad S_c = \frac{v \Delta_t \sqrt{2}}{\delta} \leq 1$$

Критерий стабильности для N-мерного пространства:

$$S_c = \frac{v \Delta_t \sqrt{N}}{\delta} \leq 1$$

или

$$S_c = \frac{v \Delta_t}{\delta} \leq \frac{1}{\sqrt{N}}$$

# Стабильность двумерного метода FDTD

Введем коэффициент — аналог одномерного числа Куранта для двумерного случая

$$C_{dtds} = \frac{v \Delta_t}{\delta} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Критерий устойчивости для двумерного FDTD:

$$\Delta_t \leq \frac{\delta}{c \sqrt{2}}$$

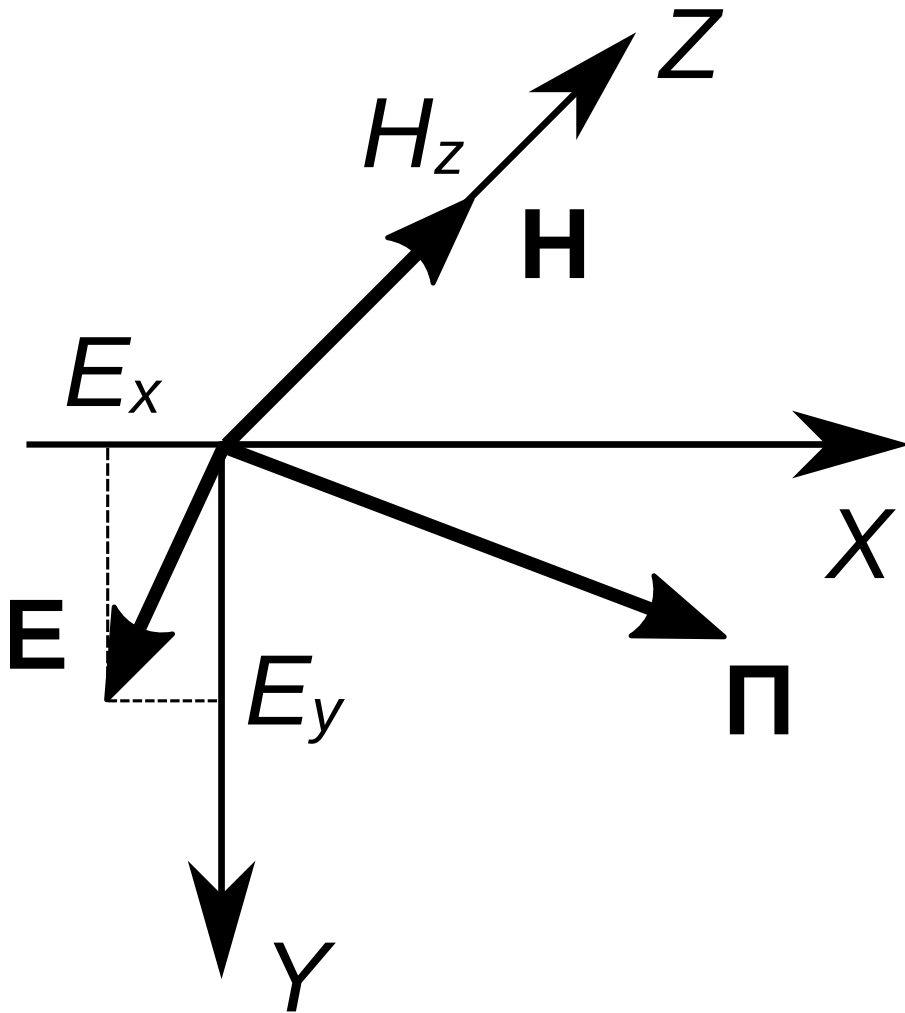


**Демонстрация двумерного метода  
FDTD для поляризации  $TM^z$ .  
Источник цилиндрической волны.**

**Демонстрация двумерного метода  
FDTD для поляризации  $TM^z$ .  
Источник плоской волны.**

**Двумерный метод конечных  
разностей во временной области  
для поляризации  $TE^z$**

# Поляризация $TE^z$



Существуют следующие компоненты ЭМ поля:

- $E_x$
- $E_y$
- $H_z$

# Законы Фарадея и Ампера в скалярном виде

$$\sigma E_x + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$\sigma E_y + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = - \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$-\sigma_m H_z - \mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

## Дискретизация величин E и H

$$E_x(x, y, t) = E_x(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = E_x^q[m, n]$$

$$E_y(x, y, t) = E_y(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = E_y^q[m, n]$$

$$H_z(x, y, t) = H_z(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = H_z^q[m, n]$$

$m$  — индекс по пространству вдоль оси X.

$n$  — индекс по пространству вдоль оси Y.

$q$  — индекс по времени.

$\Delta_x, \Delta_y$  — размер сетки по осям X и Y соответственно.

# Конечно-разностная схема

$$\begin{aligned}
 H_z^{q+1/2}[m+1/2, n+1/2] = & \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} H_z^{q-1/2}[m+1/2, n+1/2] - \\
 & - \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \left( \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \Delta_x} \{ E_y^q[m+1, n+1/2] - E_y^q[m, n+1/2] \} - \right. \\
 & \left. - \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \Delta_y} \{ E_x^q[m+1/2, n+1] - E_x^q[m+1/2, n] \} \right)
 \end{aligned}$$

# Конечно-разностная схема

$$E_x^{q+1}[m+1/2, n] = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_x^q[m+1/2, n] +$$

$$+ \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_y} \left( H_z^{q+1/2}[m+1/2, n+1/2] - H_z^{q+1/2}[m+1/2, n-1/2] \right)$$



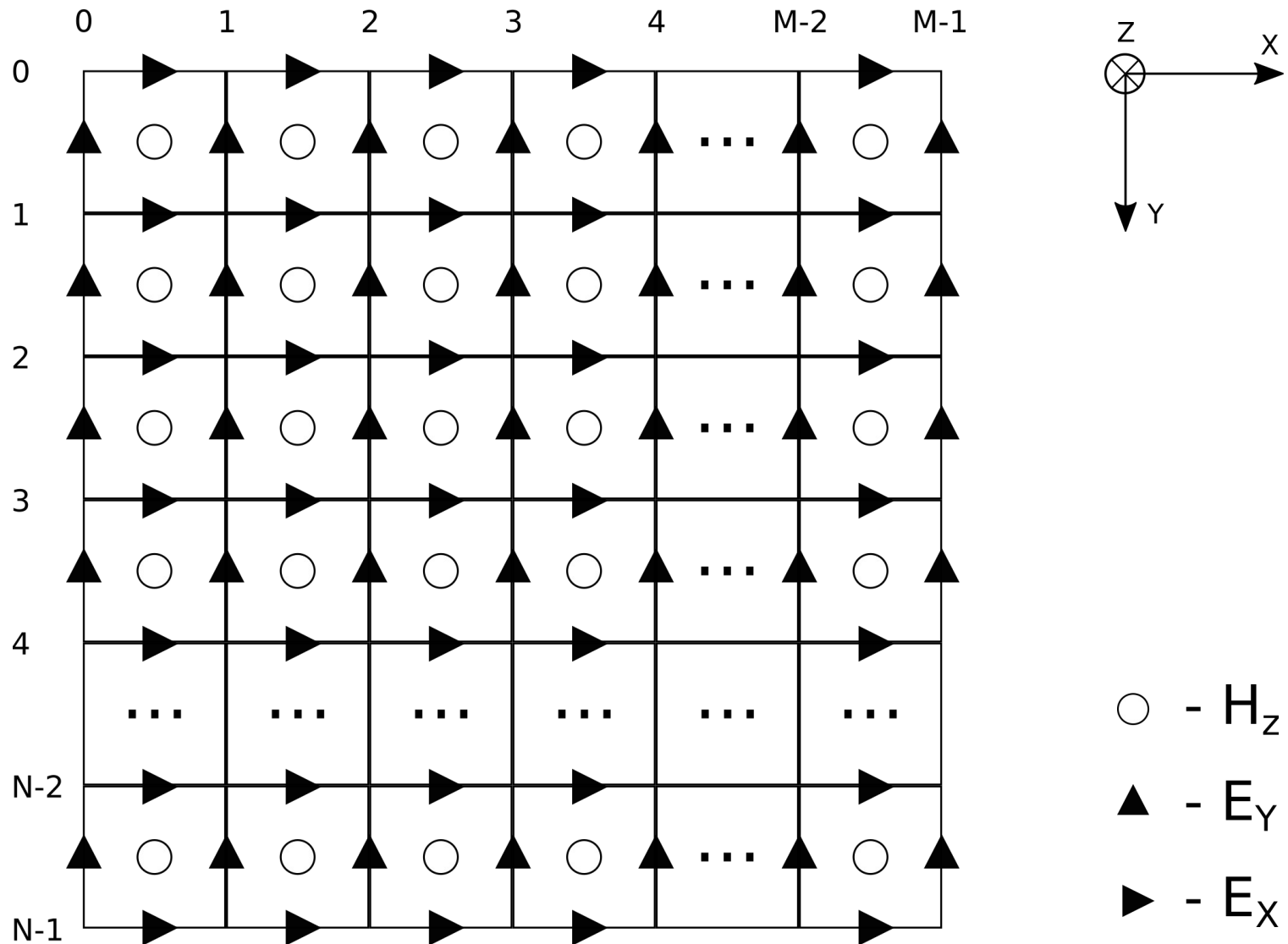
# Конечно-разностная схема

$$E_y^{q+1}[m, n+1/2] = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_y^q[m, n+1/2] -$$

$$- \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left( H_z^{q+1/2}[m+1/2, n+1/2] - H_z^{q+1/2}[m-1/2, n+1/2] \right)$$

# Пространственная сетка для двумерного метода FDTD. Поляризация $TE^z$

282



# Конечно-разностная аппроксимация

Если  $\Delta_x = \Delta_y = \delta$ , то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{hzh}(m+1/2, n+1/2) = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \bigg|_{(m+1/2)\delta, (n+1/2)\delta}$$

$$C_{hze}(m+1/2, n+1/2) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \delta} \bigg|_{(m+1/2)\delta, (n+1/2)\delta}$$

# Конечно-разностная аппроксимация

Если  $\Delta_x = \Delta_y = \delta$ , то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{exe}(m+1/2, n) = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \bigg|_{(m+1/2)\delta, n\delta}$$

$$C_{exh}(m+1/2, n) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \delta} \bigg|_{(m+1/2)\delta, n\delta}$$

# Конечно-разностная аппроксимация

Если  $\Delta_x = \Delta_y = \delta$ , то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{eye}(m, n+1/2) = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \bigg|_{m\delta, (n+1/2)\delta}$$

$$C_{eyh}(m, n+1/2) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \delta} \bigg|_{m\delta, (n+1/2)\delta}$$

# Программная реализация конечно-разностной схемы

$$\begin{aligned} H_z[m, n] = & C_{hz h}[m, n] * H_z[m, n] + \\ & C_{hz e}[m, n] * ((E_x[m, n + 1] - E_x[m, n] - \\ & (E_y[m + 1, n] - E_y[m, n]))) \end{aligned}$$

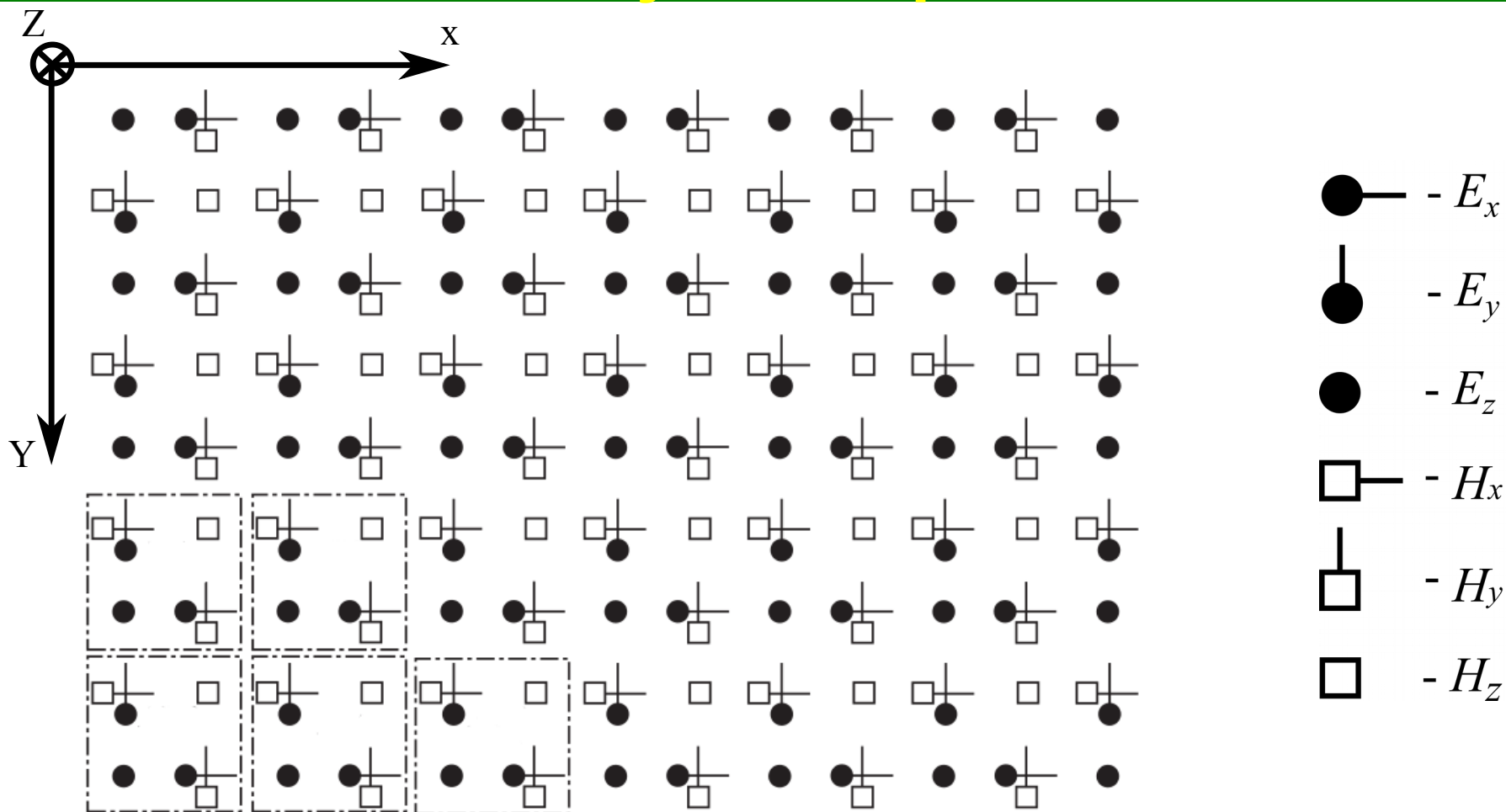
$$\begin{aligned} E_x[m, n] = & C_{ex e}[m, n] * E_x[m, n] + \\ & C_{ex h}[m, n] * (H_z[m, n] - H_z[m, n - 1]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_y[m, n] = & C_{ey e}[m, n] * E_y[m, n] - \\ & C_{ey h}[m, n] * (H_z[m, n] - H_z[m - 1, n]) \end{aligned}$$

**Демонстрация двумерного метода  
FDTD для поляризации  $TE^z$ .  
Источник цилиндрической волны.**

# Объединенная пространственная сетка для двумерного метода FDTD для двух поляризаций

290



Одинаковые индексы