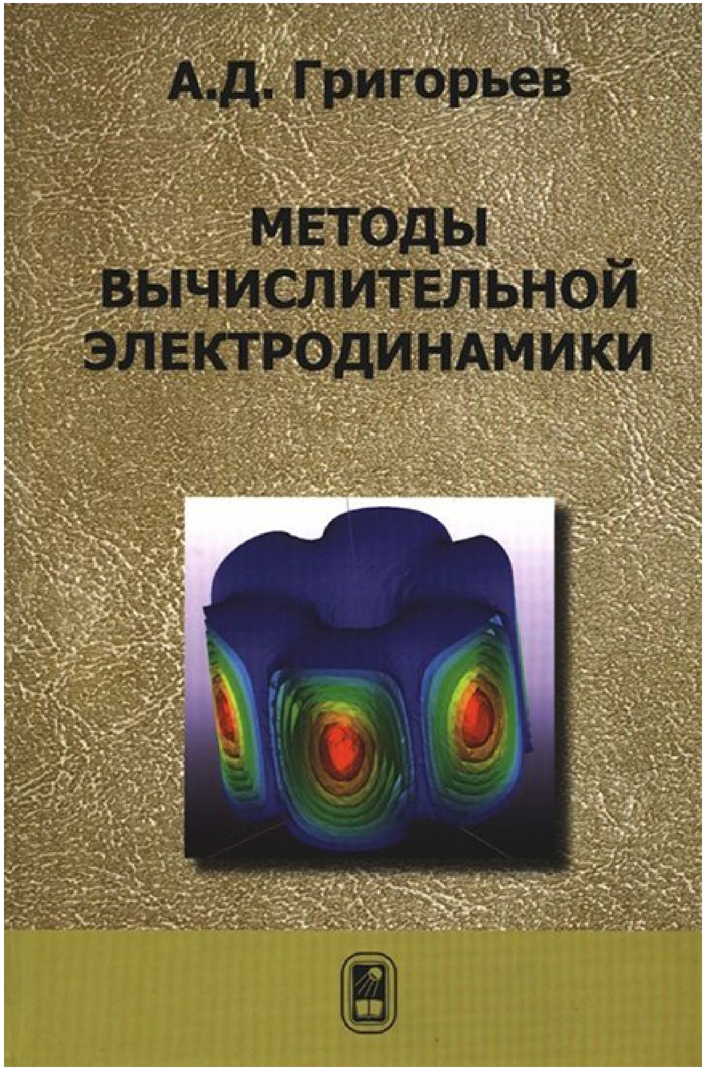
Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет)

Моделирование электродинамических задач численными методами

Тема лекции:
«Постановка задачи электродинамического моделирования»

Литература



Обозначения

A — скалярная величина

$\mathbf{A}$ — векторная величина

Численные методы электродинамики

Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.

  Определение целей расчета.

  Определение класса задачи.

  Определение необходимого объема входной и выходной информации.

  Определение допустимой погрешности результатов.

- Аналитическая обработка.

  Формулировка уравнений.

  Формулировка начальных условий.

  Формулировка граничных условий.

  Описание формы расчетной области и свойств среды.

  Выбор метода решения.

- Дискретизация модели.
- Решение полученных систем уравнений.
- Обработка результатов.

Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
  - Определение целей расчета.
  - **Определение класса задачи.**
  - Определение необходимого объема входной и выходной информации.
  - Определение допустимой погрешности результатов.
- Аналитическая обработка.
  - Формулировка уравнений.
  - Формулировка начальных условий.
  - Формулировка граничных условий.
  - Описание формы расчетной области и свойств среды.
  - Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- Решение полученных систем уравнений.
- Обработка результатов.

Классы электродинамических задач

Классы электродинамических задач

- **Линейные и нелинейные задачи.**
- Корректные и некорректные задачи.
- Прямые и обратные задачи (задачи анализа и задачи синтеза).
- Краевые и начально-краевые задачи.
- Задачи о вынужденных колебаниях и задачи о собственных (свободных) колебаниях (задачи на собственные значения).
- Определение размерности задачи (1D, 2D, 3D).
- Внутренние задачи и внешние задачи.
- Задачи параметрической оптимизации.

Нелинейные среды

Среда называется нелинейной, отклик которой на действие внешнего излучения нелинейно зависит от амплитуды возмущения.

В нелинейных средах <u>не</u> выполняется принцип суперпозиции: отклик на сумму возмущений <u>не</u> равен сумме откликов на отдельные возмущения.

Классы электродинамических задач

- Линейные и нелинейные задачи.
- **Корректные и некорректные задачи.**
- Прямые и обратные задачи (задачи анализа и задачи синтеза).
- Краевые и начально-краевые задачи.
- Задачи о вынужденных колебаниях и задачи о собственных (свободных) колебаниях (задачи на собственные значения).
- Определение размерности задачи (1D, 2D, 3D).
- Внутренние задачи и внешние задачи.
- Задачи параметрической оптимизации.

Корректно поставленная задача

Задача $y = A(x)$ называется корректно поставленной, если для любых входных данных x из некоторого класса решение y существует, единственно и устойчиво по входным данным.

Устойчивость задачи

Пусть δx — погрешность входных данных

$$y + \delta y = A(x + \delta x)$$

$\delta y = A(x + \delta x) - A(x)$ — неустранимая погрешность решения.

Если решение непрерывно зависит от входных данных, т.е. всегда $\|\delta y\| \to 0$ при $\|\delta x\| \to 0$, то задача называется устойчивой по входным данным; в противном случае задача неустойчива по входным данным.

Классы электродинамических задач

- Линейные и нелинейные задачи.
- Корректные и некорректные задачи.
- **Прямые и обратные задачи (задачи анализа и задачи синтеза).**
- Краевые и начально-краевые задачи.
- Задачи о вынужденных колебаниях и задачи о собственных (свободных) колебаниях (задачи на собственные значения).
- Определение размерности задачи (1D, 2D, 3D).
- Внутренние задачи и внешние задачи.
- Задачи параметрической оптимизации.

Прямая задача электродинамики

Прямая задача электродинамики (задача анализа) — определение электромагнитного поля в некоторой области V с определенными начальными и граничными условиями на поверхности S, созданное заданными источниками.

Обратная задача электродинамики

Обратная задача электродинамики (задача синтеза) — определение параметров среды и (или) источников в области V по известному распределению электромагнитного поля в некоторой другой области V_1, которая может не совпадать с V.

Классы электродинамических задач

- Линейные и нелинейные задачи.
- Корректные и некорректные задачи.
- Прямые и обратные задачи (задачи анализа и задачи синтеза).
- **Краевые и начально-краевые задачи.**
- Задачи о вынужденных колебаниях и задачи о собственных (свободных) колебаниях (задачи на собственные значения).
- Определение размерности задачи (1D, 2D, 3D).
- Внутренние задачи и внешние задачи.
- Задачи параметрической оптимизации.

Краевые задачи

Для решения задачи используются уравнения Максвелла, записанные через комплексные амплитуды.

Решение производится в частотной области.

Анализ стационарных процессов.

Начально-краевые задачи

Для решения задачи используются уравнения Максвелла, записанные для мгновенных значений.

Решение производится во временной области.

Анализ переходных процессов.

Классы электродинамических задач

- Линейные и нелинейные задачи.
- Корректные и некорректные задачи.
- Прямые и обратные задачи (задачи анализа и задачи синтеза).
- Краевые и начально-краевые задачи.
- **Задачи о вынужденных колебаниях и задачи о собственных (свободных) колебаниях (задачи на собственные значения).**
- Определение размерности задачи (1D, 2D, 3D).
- Внутренние задачи и внешние задачи.
- Задачи параметрической оптимизации.

Классы электродинамических задач

- Линейные и нелинейные задачи.
- Корректные и некорректные задачи.
- Прямые и обратные задачи (задачи анализа и задачи синтеза).
- Краевые и начально-краевые задачи.
- Задачи о вынужденных колебаниях и задачи о собственных (свободных) колебаниях (задачи на собственные значения).
- **Определение размерности задачи (1D, 2D, 3D).**
- Внутренние задачи и внешние задачи.
- Задачи параметрической оптимизации.

Классы электродинамических задач

- Линейные и нелинейные задачи.
- Корректные и некорректные задачи.
- Прямые и обратные задачи (задачи анализа и задачи синтеза).
- Краевые и начально-краевые задачи.
- Задачи о вынужденных колебаниях и задачи о собственных (свободных) колебаниях (задачи на собственные значения).
- Определение размерности задачи (1D, 2D, 3D).
- **Внутренние задачи и внешние задачи.**
- Задачи параметрической оптимизации.

Внутренняя задача

Необходимо найти решение уравнений Максвелла или соответствующих им волновых уравнений в области V, ограниченной поверхностью S.

Это решение должно удовлетворять на поверхности S граничным условиям.

Требования для решения внутренней задачи во временной области

Решение внутренней задачи существует и единственно, если:

1. В начальный момент времени t_0 во всем объеме V заданы значения напряженностей электрического и магнитного полей.

2. На поверхности S заданы касательные составляющие $\mathbf{E}_\tau$ или $\mathbf{H}_\tau$, или на части поверхности заданы $\mathbf{E}_\tau$, а на остальной части — $\mathbf{H}_\tau$.

3. В объеме V или его части электропроводность среды отлична от 0.

Требования для решения внутренней задачи <u>в частотной области</u>

Решение внутренней задачи существует и единственно, если:

1. На поверхности S заданы касательные составляющие $\mathbf{E}_\tau$ или $\mathbf{H}_\tau$, или на части поверхности заданы $\mathbf{E}_\tau$, а на остальной части — $\mathbf{H}_\tau$.

2. В объеме V или его части мнимые части ε и (или) μ среды отлична от 0.

Внешняя задача

Область моделирования не ограничена.

Например, <u>задача излучения</u>: в свободном безграничном пространстве необходимо найти решение неоднородного волнового уравнения, удовлетворяющего условию излучения на бесконечности.

Доказать, что решение этой задачи существует и оно единственно.

Требования для решения внешней задачи

Решение внешней задачи существует и единственно, если:

на поверхности областей, вне которых задано ЭМ поле, заданы касательные составляющие $\mathbf{E}_\tau$ или $\mathbf{H}_\tau$, а энергия ЭМ поля, создаваемого источниками конечной интенсивности и размера, во всем пространстве остается конечной.

$$\lim_{r\to\infty} \int_V \left(\varepsilon_a |\vec{\mathrm{E}}|^2 + \mu_a |\vec{\mathrm{H}}|^2\right) r^2\, dr\, d\theta\, d\phi < \infty \qquad (1.1)$$

r — расстояние от источников
V — заполняет все пространство

Классы электродинамических задач

- Линейные и нелинейные задачи.
- Корректные и некорректные задачи.
- Прямые и обратные задачи (задачи анализа и задачи синтеза).
- Краевые и начально-краевые задачи.
- Задачи о вынужденных колебаниях и задачи о собственных (свободных) колебаниях (задачи на собственные значения).
- Определение размерности задачи (1D, 2D, 3D).
- Внутренние задачи и внешние задачи.
- **Задачи параметрической оптимизации.**

Алгоритмы оптимизации

- Алгоритм градиентного спуска.
- Алгоритм Нелдера-Мида (симплекс-метод).
- Алгоритм имитации отжига.
- Генетический алгоритм.
- Алгоритм роя частиц.
- ...

Классы задач, решаемые в дальнейшем

- Линейные задачи.
- Корректные задачи.
- Прямые задачи (задачи анализа).
- Начально-краевые задачи.
- Задачи о вынужденных колебаниях.
- Размерности задачи - 1D, 2D.
- Внутренние задачи.

Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
  - Определение целей расчета.
  - Определение класса задачи.
  - **Определение необходимого объема входной и выходной информации.**
  - Определение допустимой погрешности результатов.
- Аналитическая обработка.
  - Формулировка уравнений.
  - Формулировка начальных условий.
  - Формулировка граничных условий.
  - Описание формы расчетной области и свойств среды.
  - Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- Решение полученных систем уравнений.
- Обработка результатов.

Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
  - Определение целей расчета.
  - Определение класса задачи.
  - Определение необходимого объема входной и выходной информации.
  - **Определение допустимой погрешности результатов.**
- Аналитическая обработка.
  - Формулировка уравнений.
  - Формулировка начальных условий.
  - Формулировка граничных условий.
  - Описание формы расчетной области и свойств среды.
  - Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- Решение полученных систем уравнений.
- Обработка результатов.

Точность решения

Математическая точность решения должна быть в несколько раз (2 — 4 раза) выше, чем ожидаемая точность модели.

Источники погрешности

- Погрешность за счет неточности исходных данных.
- Погрешность математической модели.
- Погрешность метода за счет дискретизации задачи.
- Вычислительная погрешность.

Этапы построения математической модели

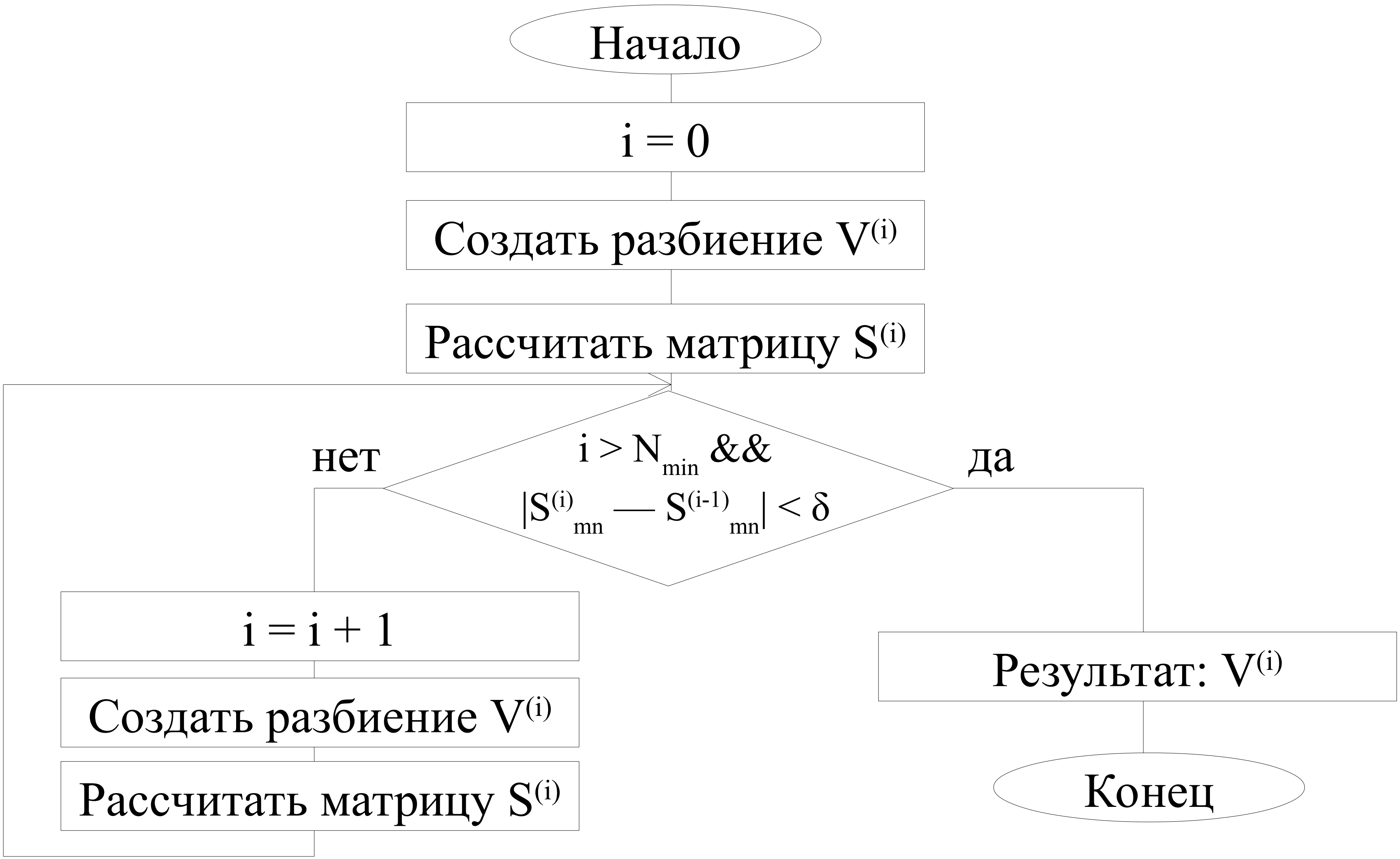
- Постановка задачи.
  Определение целей расчета.
  Определение класса задачи.
  Определение необходимого объема входной и выходной информации.
  Определение допустимой погрешности результатов.

- **Аналитическая обработка.**
  Формулировка уравнений.
  Формулировка начальных условий.
  Формулировка граничных условий.
  Описание формы расчетной области и свойств среды.
  Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- Решение полученных систем уравнений.
- Обработка результатов.

Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
  - Определение целей расчета.
  - Определение класса задачи.
  - Определение необходимого объема входной и выходной информации.
  - Определение допустимой погрешности результатов.
- Аналитическая обработка.
  - Формулировка уравнений.
  - Формулировка начальных условий.
  - Формулировка граничных условий.
  - Описание формы расчетной области и свойств среды.
  - Выбор метода решения.
- **Дискретизация модели.**
- Решение полученных систем уравнений.
- Обработка результатов.

Итерационный алгоритм создания сетки разбиения



Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
  - Определение целей расчета.
  - Определение класса задачи.
  - Определение необходимого объема входной и выходной информации.
  - Определение допустимой погрешности результатов.

- Аналитическая обработка.
  - Формулировка уравнений.
  - Формулировка начальных условий.
  - Формулировка граничных условий.
  - Описание формы расчетной области и свойств среды.
  - Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- **Решение полученных систем уравнений.**
- Обработка результатов.

Классификация вычислительных методов

- Вычистельные методы
  - Решение дифференциальных уравнений
    - Метод конечных разностей
    - Метод конечных разностей во временной области (FDTD)
    - Метод конечных элементов
    - Метод линий передач (TLM)
  - Решение интегральных уравнений
    - Метод моментов
    - Метод граничных интегральных уравнений
    - Метод поверхностных интегральных уравнений

Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
  - Определение целей расчета.
  - Определение класса задачи.
  - Определение необходимого объема входной и выходной информации.
  - Определение допустимой погрешности результатов.

- Аналитическая обработка.
  - Формулировка уравнений.
  - Формулировка начальных условий.
  - Формулировка граничных условий.
  - Описание формы расчетной области и свойств среды.
  - Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- Решение полученных систем уравнений.
- **Обработка результатов.**

Граничные условия

Граничные условия

Граничные условия — соотношения между векторами поля в двух очень близких точках, находящихся по обе стороны границы раздела двух сред.

Поверхность раздела двух диэлектриков

Касательные составляющие напряженностей электрического и магнитного полей должны удовлетворять условиям:

$$\mathbf{n}\times\left(\mathbf{E}_{\tau 1}-\mathbf{E}_{\tau 2}\right)=\mathbf{J}_s^m$$
$$\mathbf{n}\times\left(\mathbf{H}_{\tau 2}-\mathbf{H}_{\tau 1}\right)=\mathbf{J}_s^e$$

n — нормаль к поверхности раздела, направленная из первой среды во вторую,
$\mathbf{J}_s^e$ — поверхностная плотность электрического тока, протекающего по поверхности раздела,
$\mathbf{J}_s^m$ — поверхностная плотность магнитного тока, протекающего по поверхности раздела.

Поверхность раздела двух диэлектриков

Нормальные составляющие индукции связаны соотношениями:

$$\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{D}_{n2}-\mathbf{D}_{n1}\right)=\rho_s^e$$
$$\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{B}_{n2}-\mathbf{B}_{n1}\right)=\rho_s^m$$

n — нормаль к поверхности раздела, направленная из первой среды во вторую,
ρ_s^e, ρ_s^m — поверхностные плотности электрического и магнитного заряда, находящихся на поверхности раздела

$$\mathbf{D}=\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}\left[\text{Кл}/\text{м}^2\right]$$

$$\mathbf{B}=\mu\mu_0\mathbf{H}\left[\text{Тл}\right]$$

Поверхность раздела диэлектрика и идеального проводника

Касательная составляющая вектора напряженности электрического поля **E** равна нулю

$$\mathbf{E}_{\tau 1} = 0$$

Нормальная составляющая вектора напряженности магнитного поля **H** равна нулю

$$\mathbf{H}_{n1} = 0$$

$$\mathbf{H}_{\tau 1} \times \mathbf{n} = \mathbf{j}$$

Поверхность раздела диэлектрика и идеального магнетика

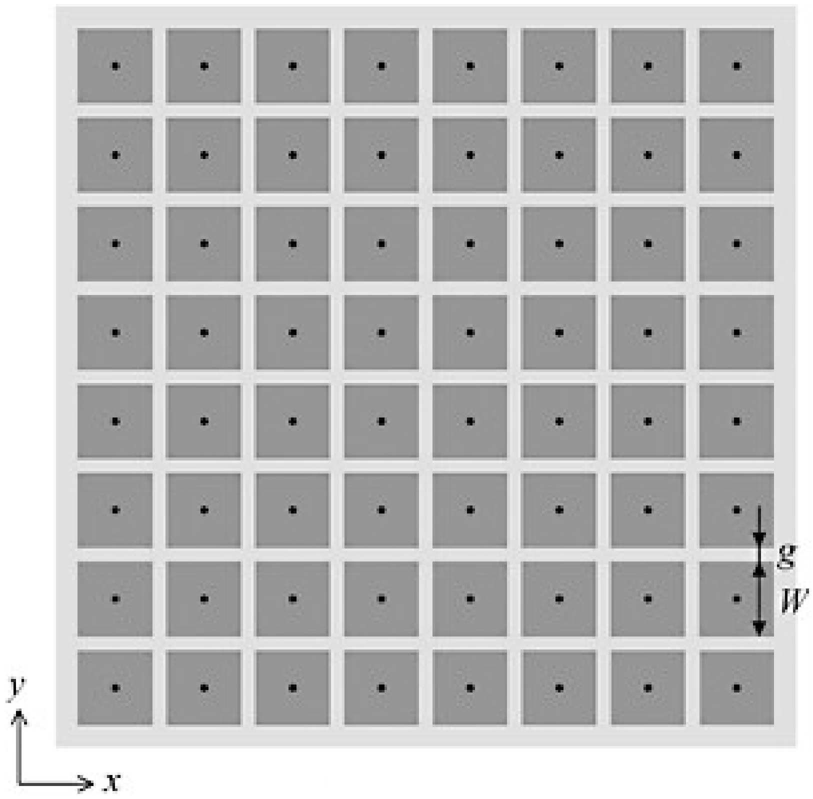
Нормальная составляющая вектора напряженности электрического поля **E** равна нулю

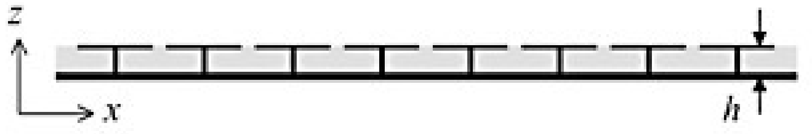
$$\mathbf{E}_{n\,1} = 0$$

Касательная составляющая вектора напряженности магнитного поля **H** равна нулю:

$$\mathbf{H}_{\tau\,1} = 0$$

Electromagnetic Band Gap (EBG)





Поверхность раздела диэлектрика и металла с конечной проводимостью

Поле в диэлектрике с потерями уменьшается экспоненциально:

$$\left|\dot{\mathbf{E}}(x)\right| = \left|\dot{\mathbf{E}}_{\mathbf{0}}\right| e^{-x/\delta}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

δ — глубина проникновения.

Поверхность раздела диэлектрика и металла с конечной проводимостью

Приближенные граничные условия Леонтовича (импедансные граничные условия):

$$\dot{\mathbf{E}}_\tau = \dot{Z}_s\left(\dot{\mathbf{H}}_\tau \times \mathbf{n}\right)$$

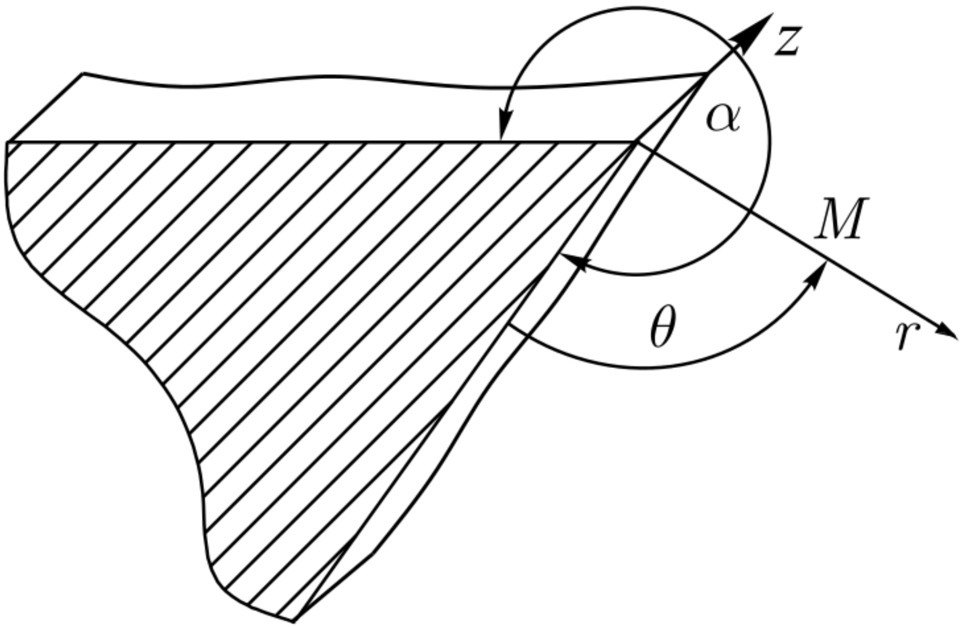
$\dot{\mathbf{E}}_\tau, \dot{\mathbf{H}}_\tau$ — касательные составляющие комплексных амплитуд напряженности электрического и магнитного полей

$\dot{Z}_s$ — поверхностное сопротивление металла

$$\dot{Z}_s = \left(1 + i\right)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$

Эти условия справедливы, если радиус кривизны поверхности металла много больше глубины проникновения.

Граничные условия на ребре



Электромагнитная энергия, запасенная в любом конечном объеме вблизи ребра, должна оставаться конечной.

Любая составляющая векторов **E** и **H** при приближении к ребру должна расти не быстрее, чем $r^{\tau-1}$, $\tau > 0$

r — расстояние от ребра до точки наблюдения.
τ — определяется электрофизическими свойствами сред, образующих ребро, и формой поверхностей раздела.

Lockheed F-117 Nighthawk

Уфимцев П.Я. «Метод краевых волн в физической теории дифракции», 1962 г.

Условие излучения

Энергия поля должна быть конечной.

Напряженность электрического и магнитного полей должна убывать на бесконечности быстрее, чем 1 / *r*.

Условие излучения Зоммерфельда:

$$\lim_{r\to\infty}\left\{r\left[\frac{\partial}{\partial r}\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}-\sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}\right]\right\}=0$$