

**Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет)**

Моделирование антенн и микроволновых устройств

**«Метод конечных разностей
во временной области (FDTD)»**

Литература

John B. Schneider.
Understanding the Finite-Difference Time-
Domain Method

<http://www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd/>

Материалы к лекциям

Исходные тексты программ:

<https://github.com/Jenyay/modelling>

Уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{сТ}}) = \\ &= \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_{\text{сТ}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Оператор набла (∇) или оператор Гамильтона

5

$$\nabla \equiv \mathbf{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial}{\partial z}$$

Свойства оператора набла (∇)

$$\nabla \varphi = \mathbf{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = ?$$

φ - скалярное поле

Свойства оператора набла (∇)

$$\nabla \varphi = \mathbf{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \text{grad } \varphi$$

φ - скалярное поле

Свойства оператора набла (∇)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{a} &= \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \\ &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = ?\end{aligned}$$

\mathbf{a} — векторное поле

Свойства оператора набла (∇)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{a} &= \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \\ &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{a}\end{aligned}$$

\mathbf{a} — векторное поле

Свойства оператора набла (∇)

$$\nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \text{rot } \mathbf{a}$$

\mathbf{a} — векторное поле

Уравнения Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ст}}) = \\ &= \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_{\text{ст}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{F}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \text{div } \mathbf{F}$$

Одномерный метод FDTD

FDTD. Одномерный случай.

Закон Ампера

13

Пусть поле может меняться только вдоль оси x .

Пусть существуют только E_z и H_y компоненты поля, а $\mathbf{j} = 0$

$$\begin{aligned} \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \nabla \times \mathbf{H} = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{z}_0 \frac{\partial H_y}{\partial x} \end{aligned}$$

FDTD. Одномерный случай.

Закон Фарадея

14

Пусть поле может меняться только вдоль оси x .

Пусть существуют только E_z и H_y компоненты поля, а $\mathbf{j} = 0$

$$-\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} =$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_z \end{vmatrix} = -y_0 \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

FDTD. Одномерный случай

Объединяем предыдущие уравнения

$$\mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \gamma_0 \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{z}_0 \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

FDTD. Одномерный случай

Или в скалярном виде:

$$\mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

Численный расчет производной функции

Производная функции

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Правая разностная схема для численного дифференцирования

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \delta) - f(x_0)}{\delta} + O(\delta)$$

$O(\delta)$ — погрешность вычислений

Ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!} =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x_0 < \xi < x$$

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора
вблизи точки x_0 со смещением δ

$$x = x_0 + \delta$$

$$f(x_0 + \delta) = f(x_0) + \delta f'(x_0) + \frac{1}{2!} \delta^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!} \delta^3 f'''(x_0) + \dots,$$

Выражаем $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \delta) - f(x_0)}{\delta} - \frac{1}{2} \delta f''(x_0) - \frac{1}{6} \delta^2 f'''(x_0) - \dots,$$

$$O(\delta) = -\left(\frac{1}{2} \delta f''(x_0) + \dots\right)$$

Погрешность сравнима с δ .

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора
вблизи точки x_0 со смещением $\pm\delta/2$

$$x = x_0 \pm \frac{\delta}{2}, \quad x - x_0 = \pm \frac{\delta}{2}$$

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) = f(x_0) + \frac{\delta}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots,$$

$$f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) = f(x_0) - \frac{\delta}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots,$$

Вычтем первое выражение из второго

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) = \delta f'(x_0) + \frac{2}{3!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots,$$

Вычтем первое выражение из второго

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) = \delta f'(x_0) + \frac{2}{3!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots,$$

Поделим левую и правую части на δ

$$\frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)}{\delta} = f'(x_0) + \frac{1}{3!} \frac{\delta^2}{2^2} f'''(x_0) + \dots,$$

Центральная конечно-разностная схема

$$\frac{df(x)}{dx}\bigg|_{x=x_0} = \frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)}{\delta} + O(\delta^2)$$

Отбрасываем
 $O(\delta^2)$

$$\frac{df(x)}{dx}\bigg|_{x=x_0} \approx \frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)}{\delta}$$

Одномерный метод FDTD

Дискретизация

$$E_z(x, t) = E_z(m\Delta x, q\Delta t) = E_z^q[m]$$

$$H_y(x, t) = H_y(m\Delta x, q\Delta t) = H_y^q[m]$$

Δx — пространственное смещение

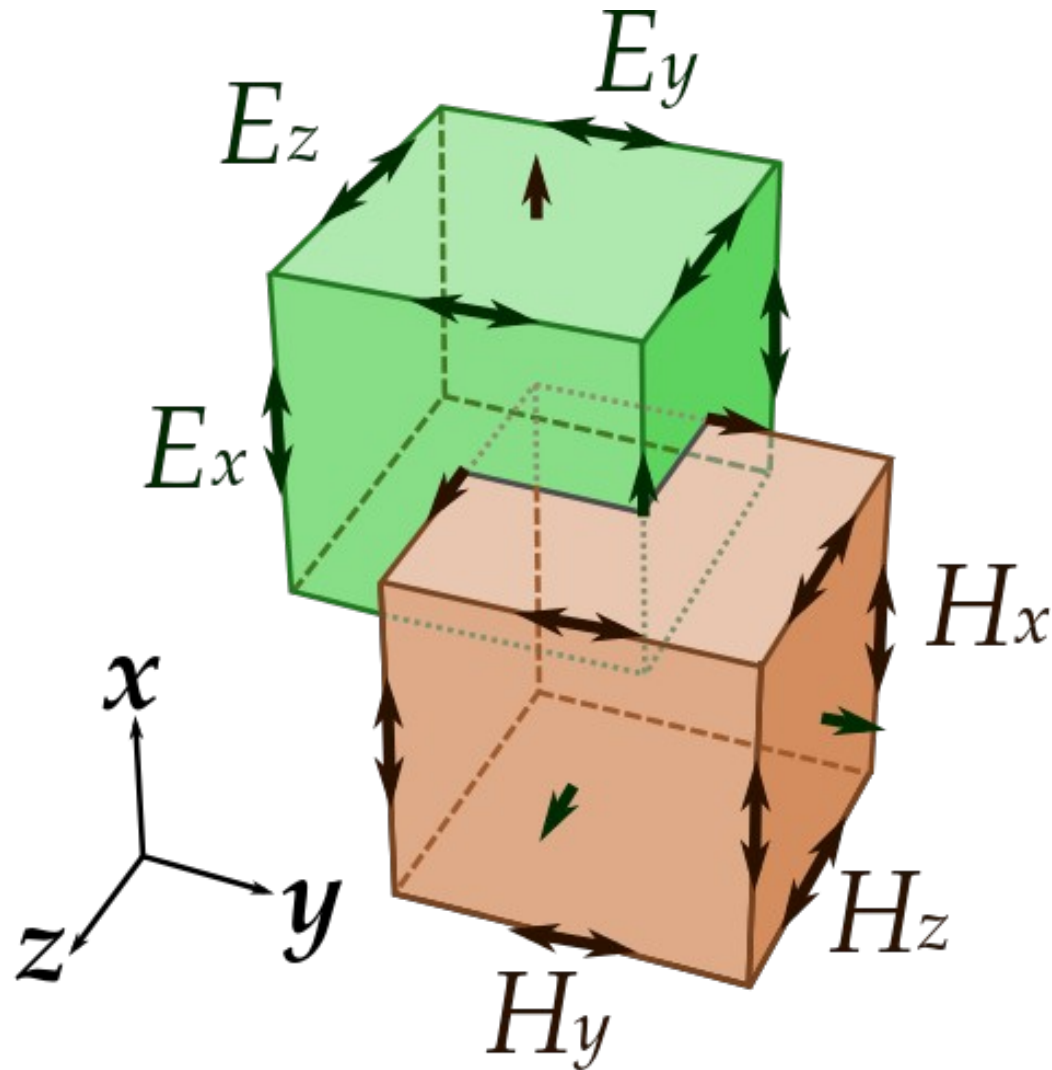
Δt — временное смещение

m — пространственный шаг

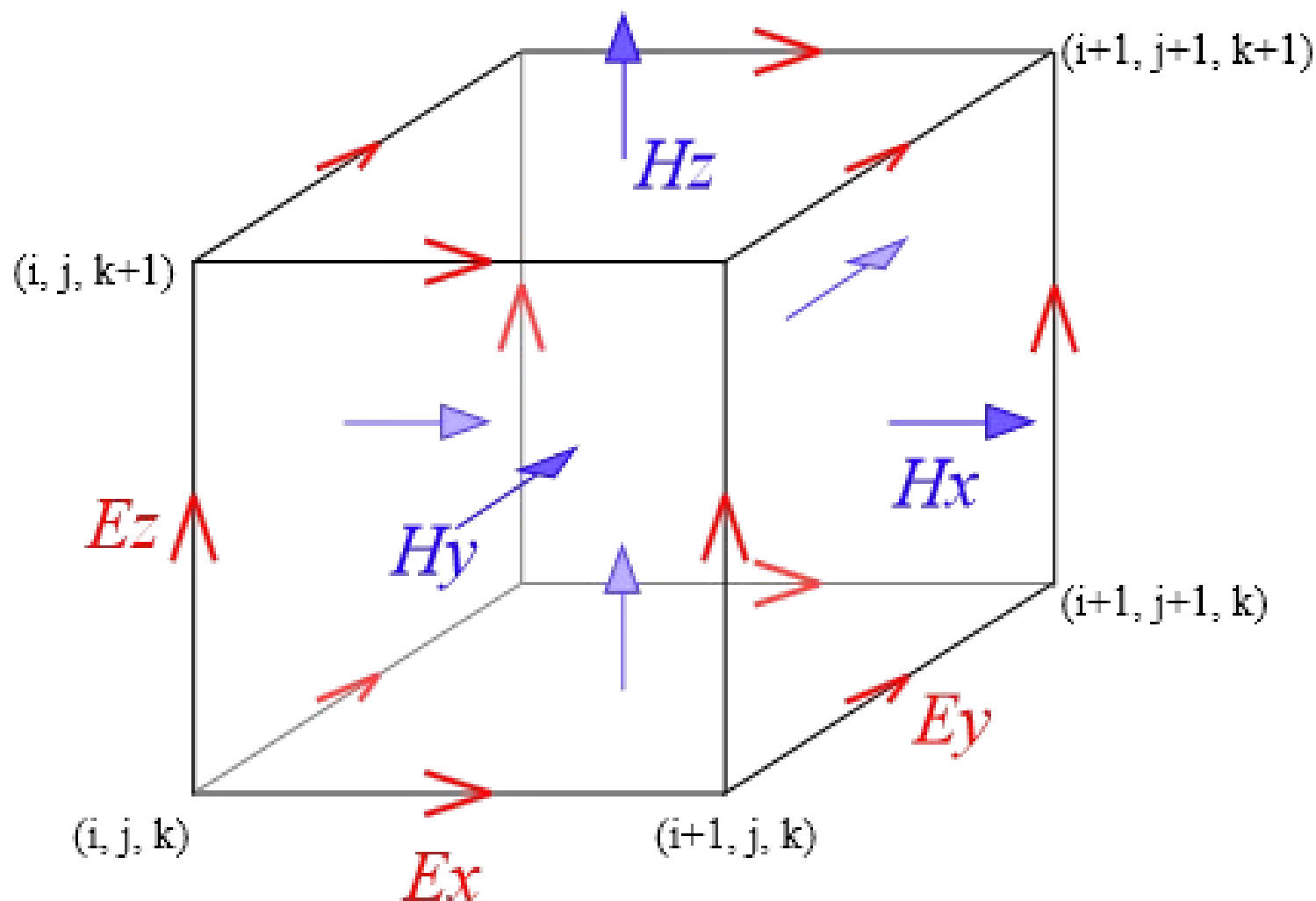
q — временной шаг

Трёхмерная ячейка для метода FDTD

29

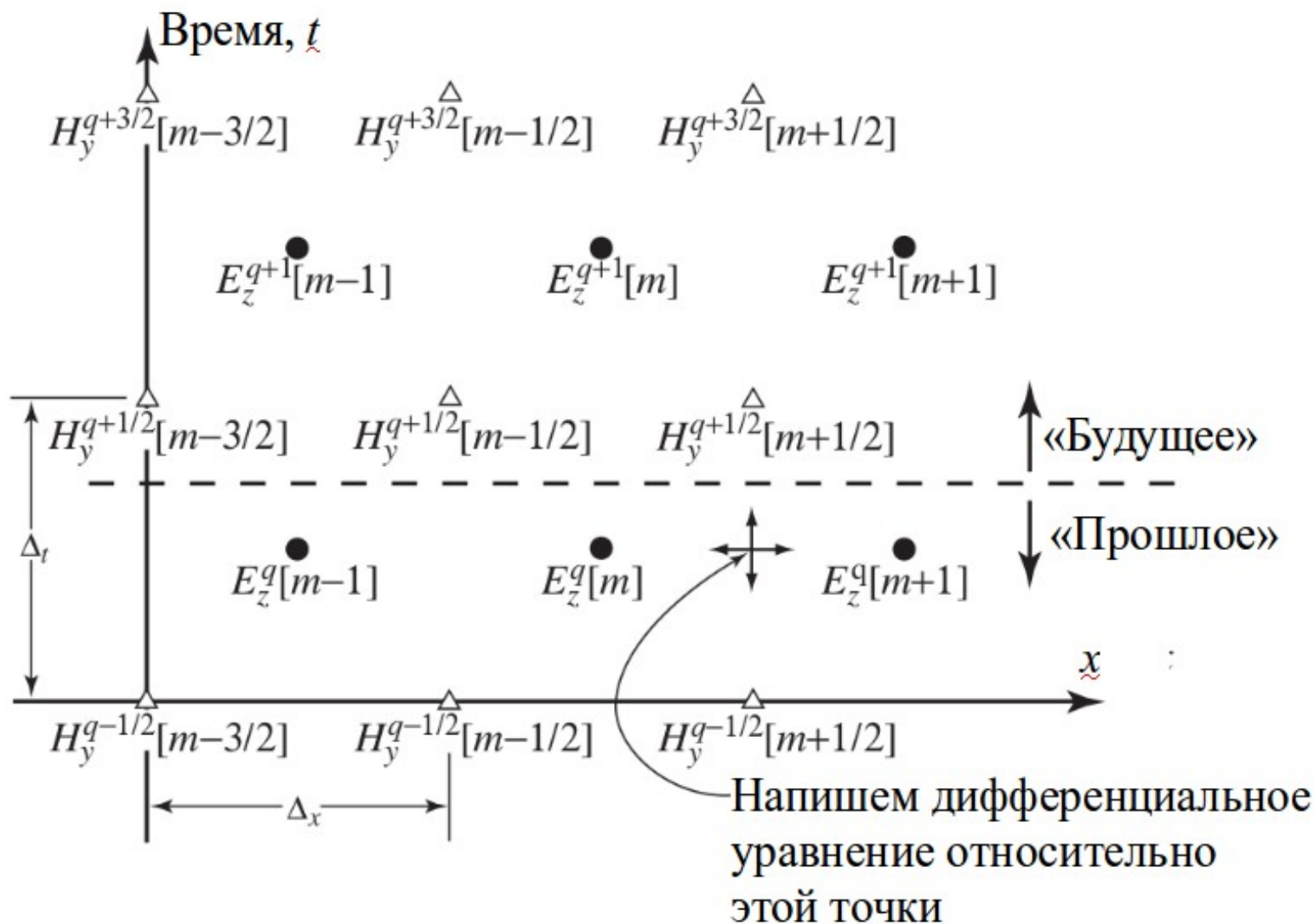


Ячейка для метода FDTD



Пространственно-временная сетка для одномерного случая

31



Переходим к конечным разностям.

Закон Фарадея

$$\mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \bigg|_{(m+1/2)\Delta x, q\Delta t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \bigg|_{(m+1/2)\Delta x, q\Delta t}$$

Переходим к конечным разностям.

Закон Фарадея

$$\mu \mu_0 \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{E_z^q[m+1] - E_z^q[m]}{\Delta_x}$$

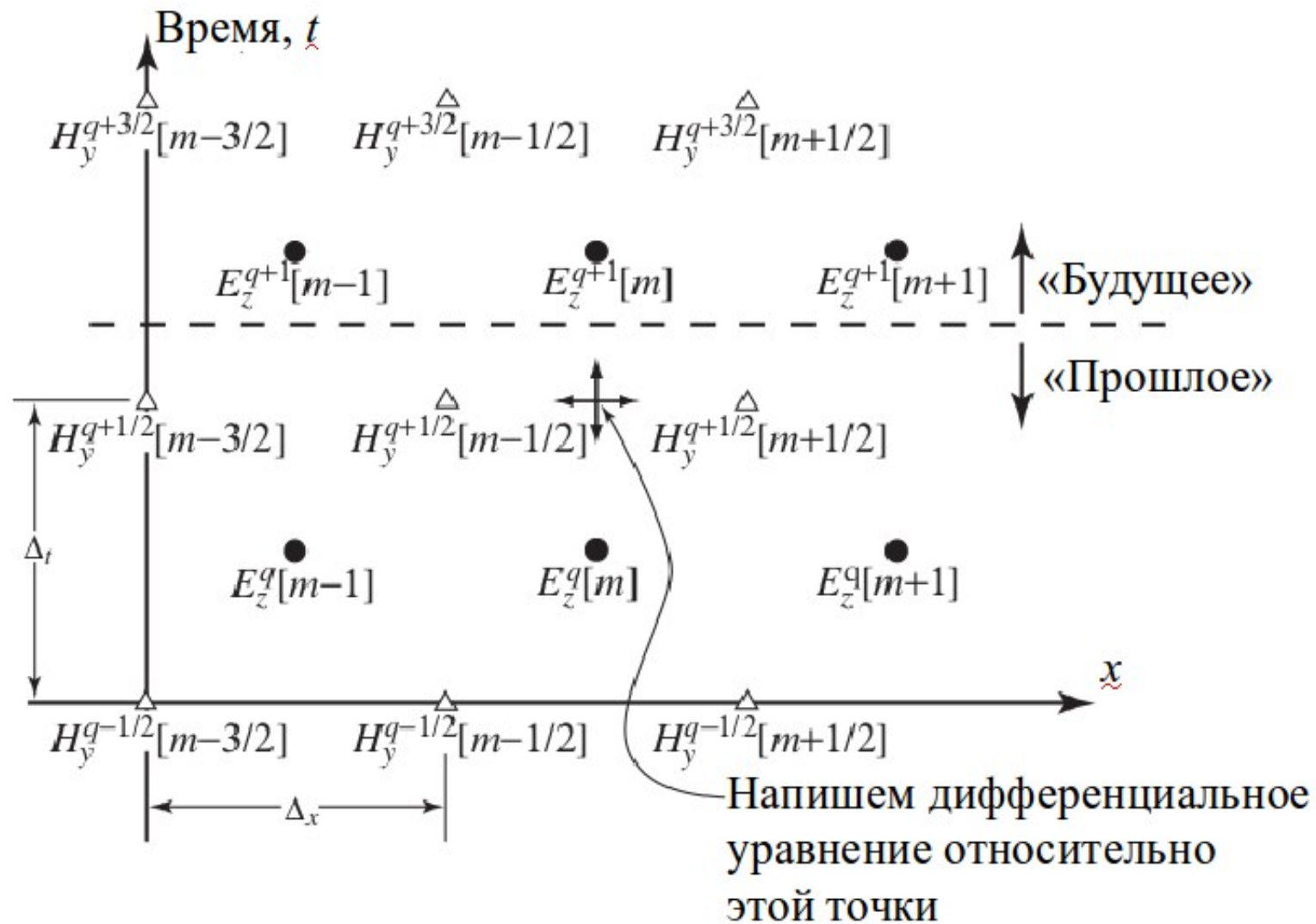
Переходим к конечным разностям.

Закон Фарадея

Из предыдущего уравнения

$$\begin{aligned}
 H_y^{q+1/2}[m+1/2] &= \\
 &= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} \left(E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right)
 \end{aligned}$$

Пространственно-временная сетка для одномерного случая



Переходим к конечным разностям.

Закон Ампера

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \Big|_{m \Delta x, (q+1/2) \Delta t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \Big|_{m \Delta x, (q+1/2) \Delta t}$$

Переходим к конечным разностям.

Закон Ампера

$$\begin{aligned} \varepsilon \varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^q[m]}{\Delta_t} = \\ = \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x} \end{aligned}$$

Переходим к конечным разностям.

Закон Ампера

Из предыдущего уравнения

$$E_z^{q+1}[m] =$$

$$= E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$

Переходим к конечным разностям

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} \left(E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right)$$

$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$= E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$

Критерий устойчивости Куранта-Фридриха-Леви

$$v_{max} \Delta_t \leq \frac{1}{\sqrt{\Delta_x^{-2} + \Delta_y^{-2} + \Delta_z^{-2}}}$$

$$v_{max} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{min} \mu_{min}}}$$

Если $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \Delta$

$$v_{max} \Delta_t \leq \frac{\Delta}{\sqrt{N}}$$

N — размерность пространства ($N = 1, 2, 3$)

Критерий устойчивости для одномерной задачи

$c\Delta_t$ — максимальное расстояние, которое может пройти волна за один временной шаг Δ_t в вакууме.

Число Куранта

$$S_c = c\Delta_t / \Delta_x$$

Условие устойчивости

$$c\Delta_t \leq \Delta_x$$

или

$$S_c \leq 1$$

Коэффициенты в конечно-разностной схеме

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} (E_z^q[m+1] - E_z^q[m])$$

$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$= E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} (H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2])$$

Коэффициенты в конечно-разностной схеме

$$\frac{1}{\mu \mu_0} \frac{\Delta_t}{\Delta_x} = \frac{1}{\mu \mu_0} \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta_t}{\Delta_x} = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{c \Delta_t}{\Delta_x} = \frac{1}{\mu W_0} S_c$$

$$W_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$$

- волновое сопротивление свободного пространства

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

- скорость света в вакууме

Коэффициенты в конечно-разностной схеме

$$\frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{\Delta_t}{\Delta_x} = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta_t}{\Delta_x} = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{c \Delta_t}{\Delta_x} = \frac{W_0}{\varepsilon} S_c$$

$$W_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$$

- волновое сопротивление свободного пространства

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

- скорость света в вакууме

Коэффициенты в конечно-разностной схеме

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

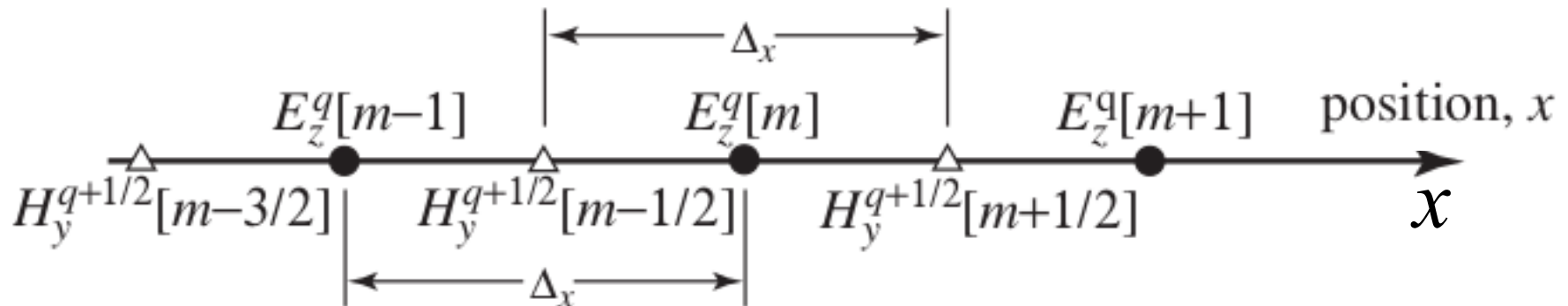
$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \left(E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right) \frac{1}{\underline{\mu W_0}} S_c$$

$$E_z^{q+1}[m]=$$

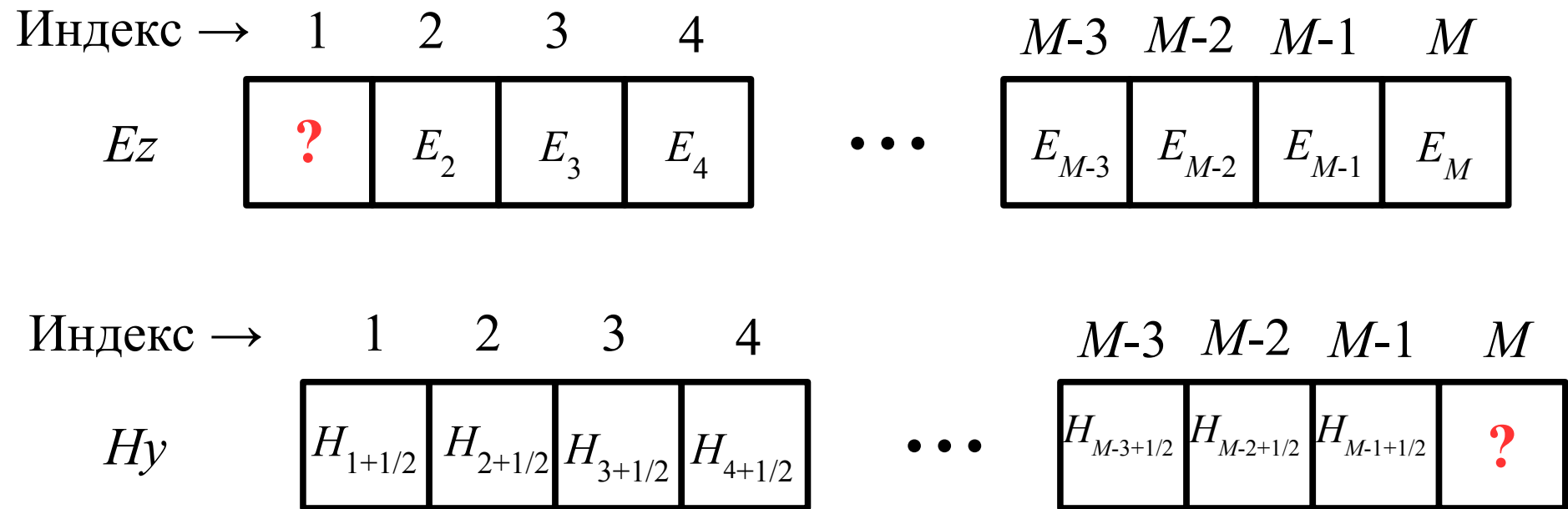
$$= E_z^q[m] + \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right) \underline{\frac{W_0}{\varepsilon} S_c}$$

Одномерная пространственная сетка

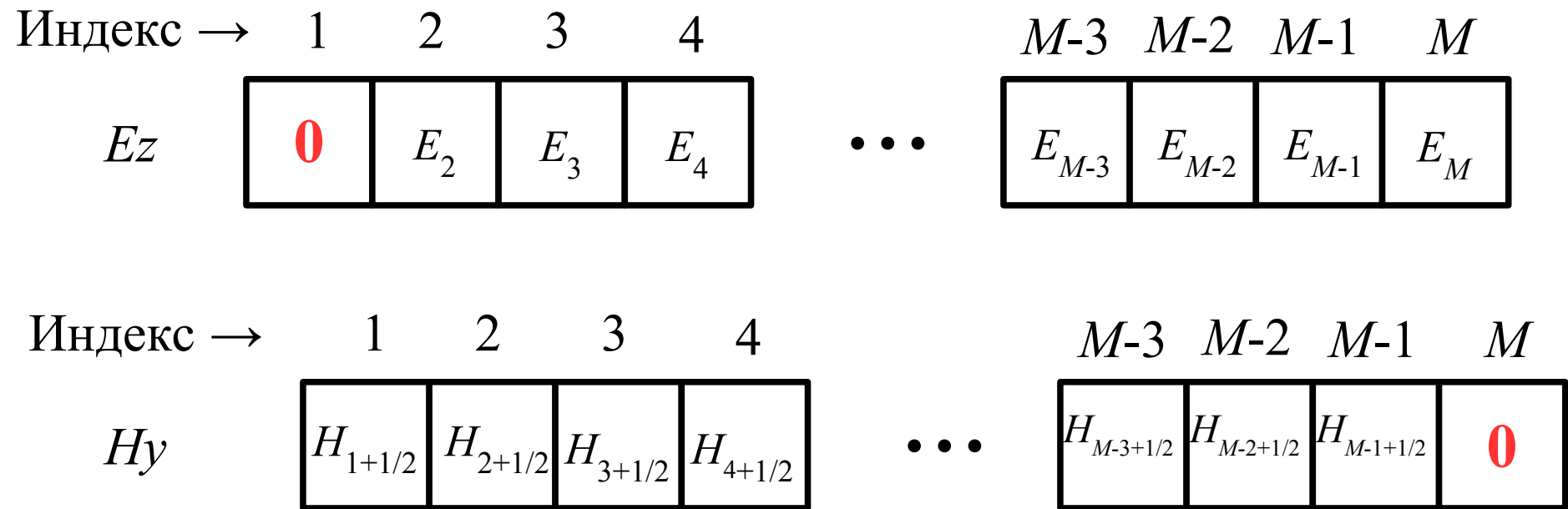
46



Хранение компонент поля в реализации FDTD




Хранение компонент поля в реализации FDTD




Индекс \rightarrow 1 2 3 4 ... $M-3$ $M-2$ $M-1$ M

E_z

	E_2	E_3	E_4		E_{M-3}	E_{M-2}	E_{M-1}	E_M
---	-------	-------	-------	--	-----------	-----------	-----------	-------

Индекс \rightarrow 1 2 3 4 ... $M-3$ $M-2$ $M-1$ M

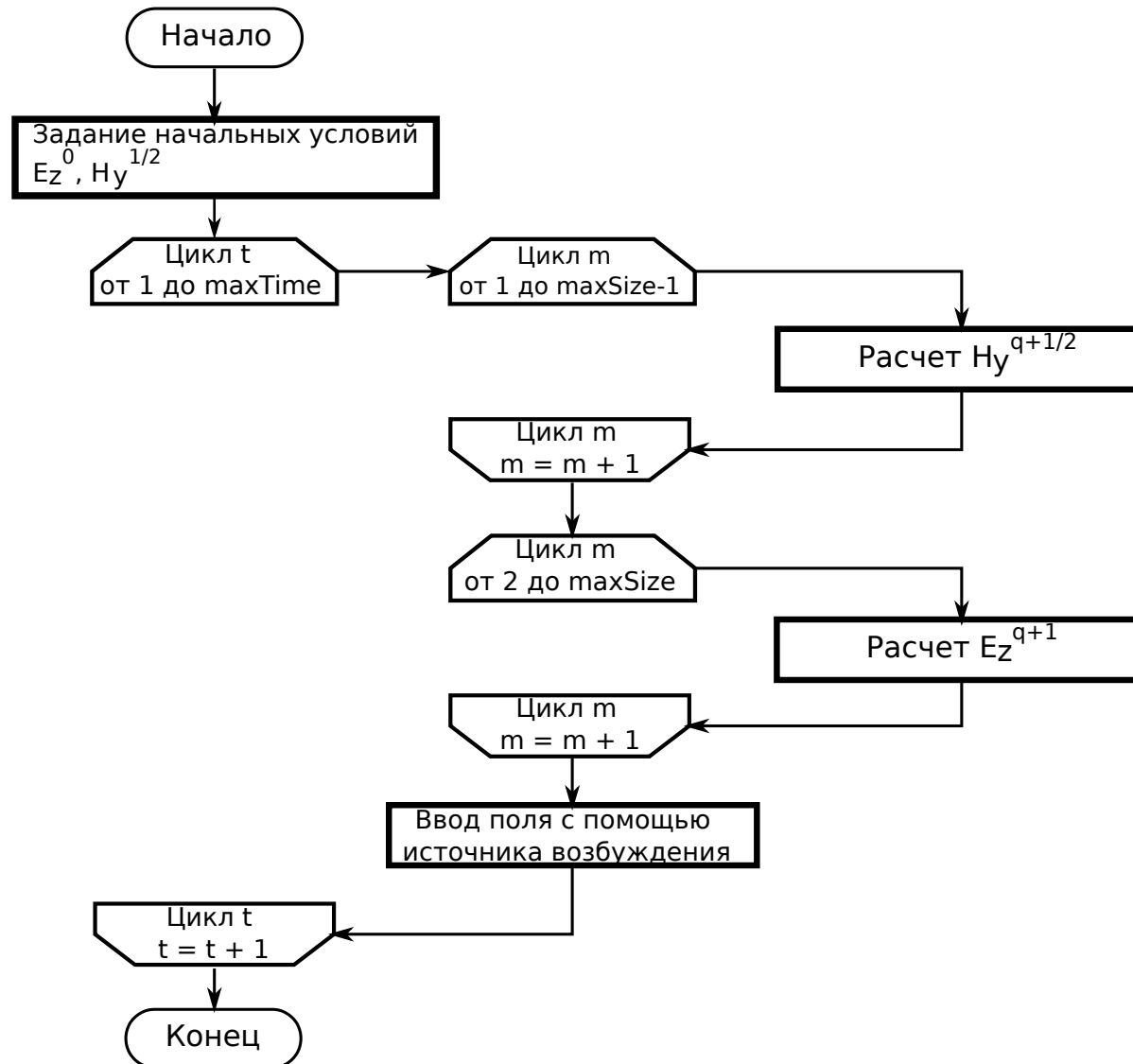
H_y

$H_{1+1/2}$	$H_{2+1/2}$	$H_{3+1/2}$	$H_{4+1/2}$		$H_{M-3+1/2}$	$H_{M-2+1/2}$	$H_{M-1+1/2}$	
-------------	-------------	-------------	-------------	--	---------------	---------------	---------------	---

Источник в разностной схеме

$$f(t) = f(q \Delta_t) = e^{-\left(\frac{q \Delta_t - 30 \Delta_t}{10 \Delta_t}\right)^2} = e^{-\left(\frac{q - 30}{10}\right)^2} = f[q]$$

Схема алгоритма FDTD



Реализация одномерного FDTD в MATLAB

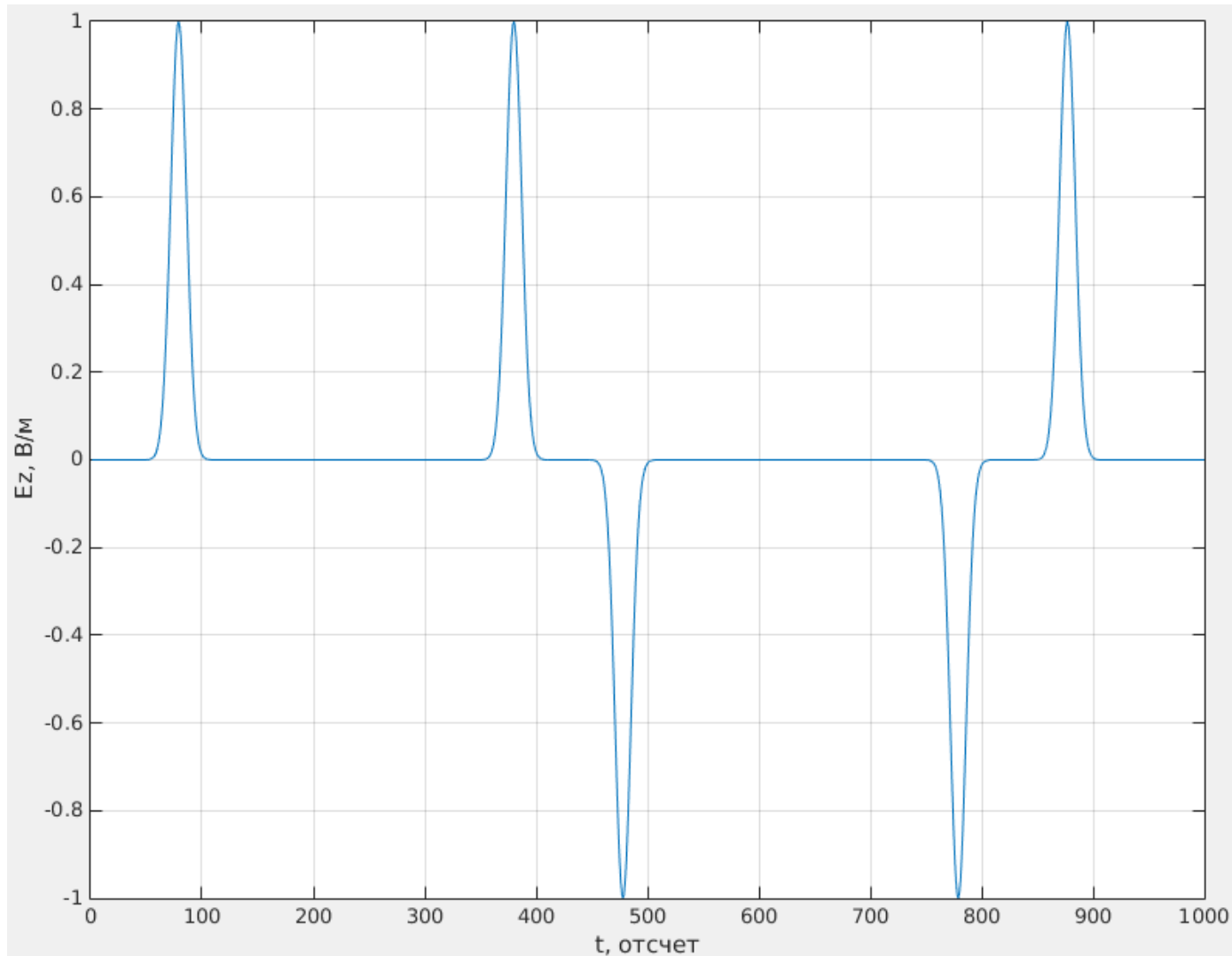
Распространение импульса в свободном пространстве.

«Жесткий» источник.

Число Куранта равно 1.

fdtd_first_version_01.m
fdtd_first_version_02.m
fdtd_first_version_03.m
fdtd_first_version_04.m

Реализация одномерного FDTD



Пояснение граничного условия Perfect Magnetic Conductor (PMC)

$$H_y(m) = H_y(m) + (E_z(m+1) - E_z(m)) / 377;$$

$$E_z(m) = E_z(m) + (H_y(m) - H_y(m-1)) * 377;$$

Временной шаг ↓	$E_z(198)$	$H_y(198)$	$E_z(199)$	$H_y(199)$	$E_z(200)$	$H_y(200)$
$q - 1/2$ q	0	-1/377	1	0	0	0
$q + 1/2$ $q + 1$	0	0	0	-1/377	1	0
$q + 3/2$ $q + 2$	0	0	0	0	1	0
$q + 5/2$ $q + 3$	0	0	1	1/377	0	0
$q + 7/2$ $q + 4$	0	1/377	0	0	0	0

Измерение скорости распространения волны

`fdtd_first_version_speed.m`

Отображение компонент поля E и H

`fdtd_first_version_EH.m`

Достоверность расчета

- Скорость распространения волны в вакууме равна скорости света.
- Коэффициент отражения электрической компоненты поля от РЕС равен -1 .
- Коэффициент отражения электрической компоненты поля от РМС равен $+1$.
- Коэффициент отражения магнитной компоненты поля от РЕС равен $+1$.
- Коэффициент отражения магнитной компоненты поля от РМС равен -1 .

«Жесткий» источник внутри области моделирования

fdtd_hard_source.m

Аддитивный («мягкий») источник

АДДИТИВНЫЙ ИСТОЧНИК

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \mathbf{j}$$

Аддитивный источник в разностной схеме

$$\begin{aligned}
 E_z^{q+1}[m] = & \\
 = E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} & \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right) - \\
 - \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0} \dot{j}_z^{q+1/2}[m] &
 \end{aligned}$$

АДДИТИВНЫЙ ИСТОЧНИК в разностной схеме

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^{q+1}[m] - \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0} j_z^{q+1/2}[m]$$

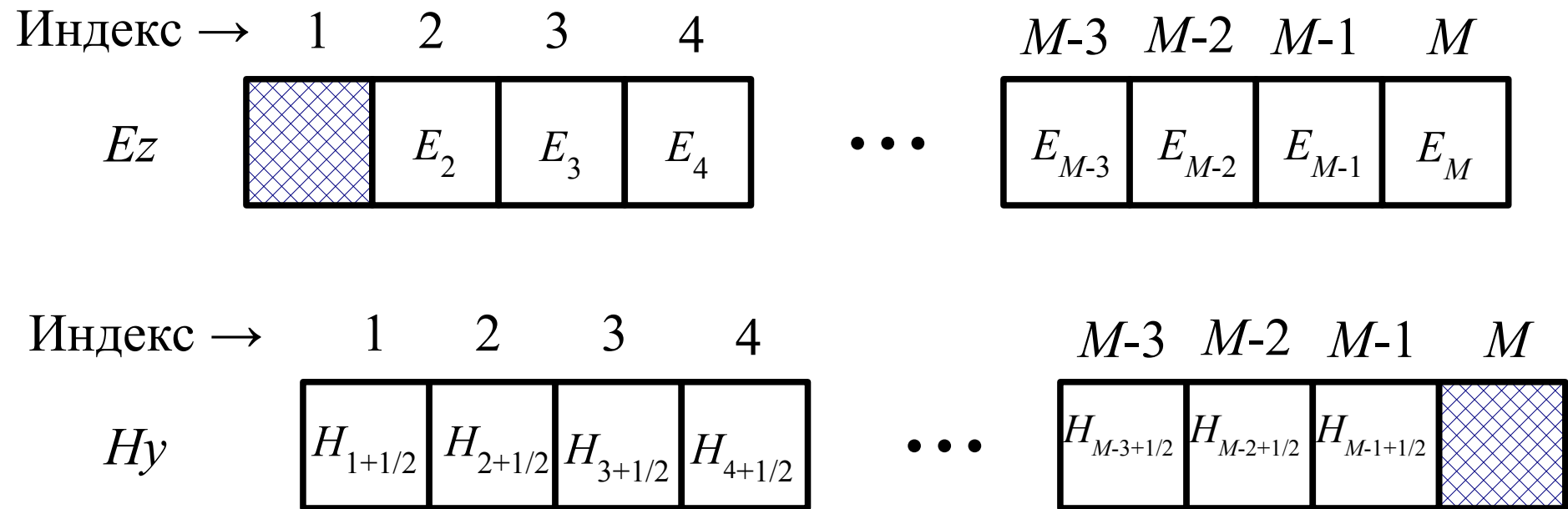
ИЛИ

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^{q+1}[m] + E_{z\,cm}^{q+1}[m]$$

Демонстрация аддитивного источника

Простейшие поглощающие граничные условия

Хранение компонент поля в реализации FDTD



Простейшие поглощающие граничные условия

Работают только для $S_c = 1$

$$E_z^{q+1}[1] = E_z^q[2]$$

$$H_y^{q+1}[\text{end}] = H_y^q[\text{end} - 1]$$

Демонстрация поглощающих условий

Метод Total-Field / Scattered-Field

Граничные условия Total-Field / Scattered-Field

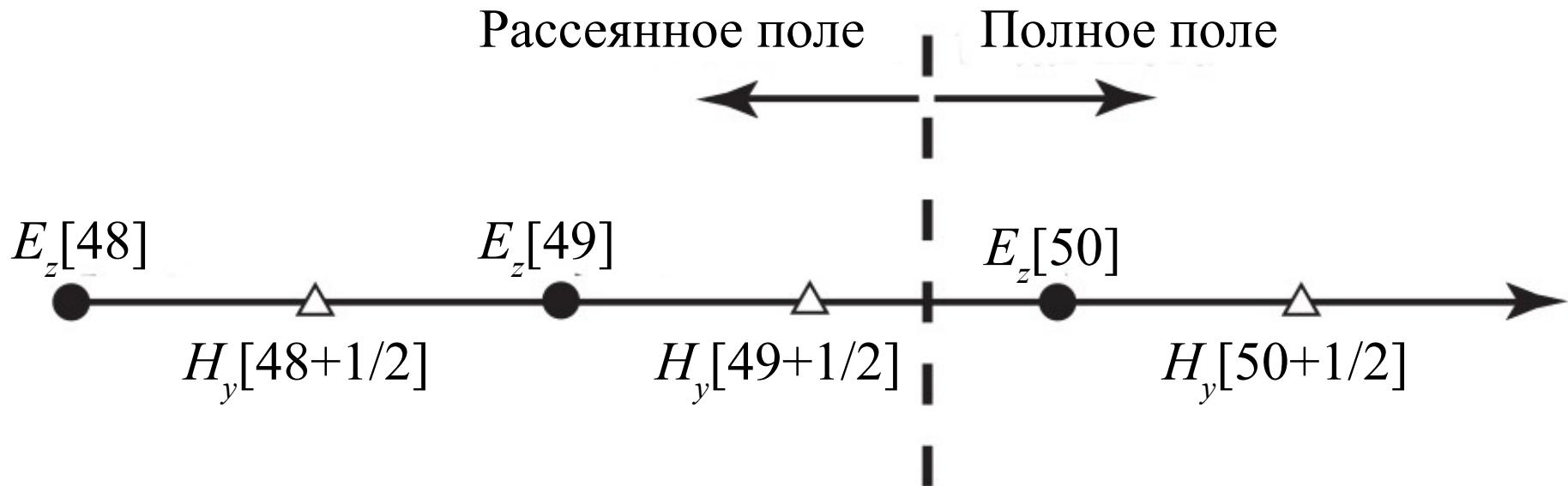
$$\mathbf{E}_{\text{полн}} = \mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{расс}}$$

$$\mathbf{H}_{\text{полн}} = \mathbf{H}_{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\text{расс}}$$

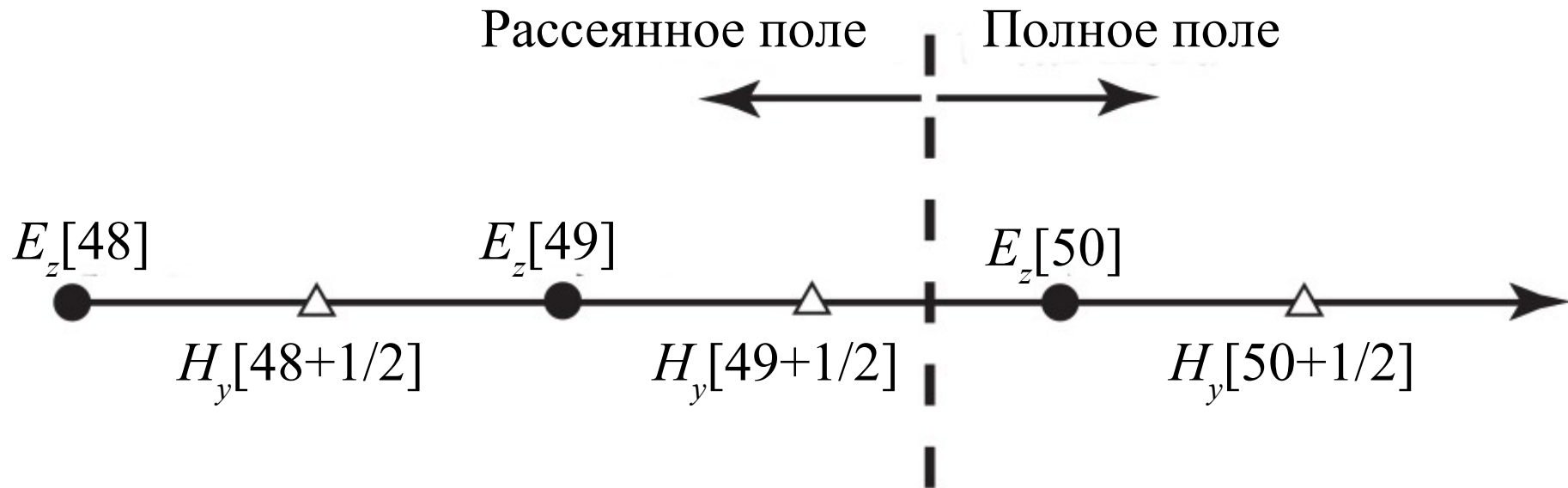
Граничные условия Total-Field / Scattered-Field

$$\mathbf{E}_{\text{полн}} = \mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{расс}}$$

$$\mathbf{H}_{\text{полн}} = \mathbf{H}_{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\text{расс}}$$



Граничные условия Total-Field / Scattered-Field



$$H_y[49 + 1/2] = H_y[50 - 1/2]$$

$H_y[49 + 1/2]$ — последняя ячейка в области рассеянного поля.

$E_z[50]$ — первая ячейка в области полного поля.

Граничные условия Total-Field / Scattered-Field

Важно! Только рассеянное поле должно использоваться при обновлении ячеек в области рассеянного поля.


Только полное поле должно использоваться при обновлении ячеек в области полного поля

Поле на границе

Total-Field / Scattered-Field

Рассмотрим электрическую компоненту поля E_z

$$E_z^{q+1}[50] = E_z^q[50] + \frac{\Delta_t}{\epsilon \epsilon_0 \Delta_x} \left(\overbrace{H_y^{q+1/2}[50+1/2]}^{\text{полн}} - \overbrace{H_y^{q+1/2}[50-1/2]}^{\text{расс}} \right)$$

проблема


Поле на границе

Total-Field / Scattered-Field

Введем дополнительный магнитный источник в точке $(50 - 1/2)\Delta x$ для момента времени $(q + 1/2)\Delta t$

$$\begin{aligned}
 \overbrace{E_z^{q+1}[50]}^{\text{полн}} &= \overbrace{E_z^q[50]}^{\text{полн}} + \\
 &+ \frac{\Delta_t}{\epsilon \epsilon_0 \Delta_x} \left(\overbrace{H_y^{q+1/2}[50+1/2]}^{\text{полн}} - \left\{ \overbrace{H_y^{q+1/2}[50-1/2]}^{\text{расс}} + \overbrace{\left(-\frac{1}{W} E_z^{\text{inc}}[50-1/2, q+1/2] \right)}^{\text{над}} \right\} \right)
 \end{aligned}$$

Total-Field / Scattered-Field

$$E_z^{q+1}[50] = E_z^q[50] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left(H_y^{q+1/2}[50+1/2] - H_y^{q+1/2}[50-1/2] \right)$$

$$E_z^{q+1}[50] = E_z^{q+1}[50] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{W} E_z^{inc}[50-1/2, q+1/2]$$

Total-Field / Scattered-Field

$$E_z^{q+1}[50] = E_z^{q+1}[50] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{W} E_z^{inc}[50 - 1/2, q + 1/2]$$

$$W = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}} = W_0 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad \left| \quad \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} = \frac{W_0 S_c}{\varepsilon}$$

$$E_z^{q+1}[50] = E_z^{q+1}[50] + \frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} E_z^{inc}[50 - 1/2, q + 1/2]$$

Для свободного пространства и если $S_c = 1$:

$$E_z^{q+1}[50] = E_z^{q+1}[50] + E_z^{inc}[\underline{50 - 1/2}, \underline{q + 1/2}]$$

Поле на границе

Total-Field / Scattered-Field

$$\begin{aligned}
 \overbrace{H_y^{q+1/2}[50-1/2]}^{\text{расс}} &= \overbrace{H_y^{q-1/2}[50-1/2]}^{\text{расс}} + \\
 &+ \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} \left(\overbrace{\left(\overbrace{E_z^q[50]}^{\text{полн}} - \overbrace{E_z^{inc}[50, q]}^{\text{пад}} \right)}^{\text{расс}} - \overbrace{E_z^q[49]}^{\text{расс}} \right)
 \end{aligned}$$

Поле на границе

Total-Field / Scattered-Field

$$H_y^{q+1/2}[50-1/2] = H_y^{q-1/2}[50-1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} (E_z^q[50] - E_y^q[49])$$

$$H_y^{q+1/2}[50-1/2] = H_y^{q+1/2}[50-1/2] - \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} E_z^{inc}[50, q]$$

Поле на границе

Total-Field / Scattered-Field

Для свободного пространства и $S_c = 1$:

$$H_y^{q+1/2}[50-1/2] = H_y^{q-1/2}[50-1/2] + \frac{1}{W_0} \left(E_z^q[50] - E_z^q[49] \right)$$

$$H_y^{q+1/2}[50-1/2] = H_y^{q+1/2}[50-1/2] - \frac{1}{W_0} E_z^{inc}[50, q]$$

Поле на границе

Total-Field / Scattered-Field

Пусть для введенного источника $x = 0$ соответствует 50-й ячейке

$$H_y^{q+1/2}[50-1/2] = H_y^{q+1/2}[50-1/2] - \frac{1}{W_0} E_z^{inc}[0, q]$$

$$E_z^{q+1}[50] = E_z^{q+1}[50] + E_z^{inc}[-1/2, q+1/2]$$

Уравнение плоской волны для гауссова сигнала

Волновое уравнение

Волновое уравнение при отсутствии сторонних токов:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

Одномерное волновое уравнение

83

f — одномерная функция

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

Решение одномерного волнового уравнения

$f(\xi)$ — решение волнового уравнения, если:

- $f(\xi)$ дважды дифференцируема
- ξ можно заменить на $t \pm x / v$
(для одномерного случая)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0}}$$

$$f(\xi) = f(t \pm x / v) = f(x, t)$$

Используемый источник

$$f(t) = f(q \Delta_t) = e^{-\left(\frac{q \Delta_t - 30 \Delta_t}{10 \Delta_t}\right)^2} = e^{-\left(\frac{q - 30}{10}\right)^2} = f[q]$$

Граничные условия Total-Field / Scattered-Field

Делаем замену t на $t - x / v$

$$t - \frac{x}{v} = q \Delta_t - \frac{m \Delta_x}{v} = q \Delta_t - \frac{m \Delta_x \sqrt{\epsilon \mu}}{c} =$$

$$= \left(q - \frac{m \Delta_x \sqrt{\epsilon \mu}}{c \Delta_t} \right) \Delta_t = \left(q - \frac{m \sqrt{\epsilon \mu}}{S_c} \right) \Delta_t$$

Для свободного пространства и $S_c = 1$:

$$t - \frac{x}{c} = (q - m) \Delta_t$$

Граничные условия Total-Field / Scattered-Field

$$E_z^{\text{inc}}[m, q] = e^{-\left(\frac{(q - m\sqrt{\epsilon\mu}/S_c)\Delta_t - 30\Delta_t}{10\Delta_t}\right)^2} =$$

$$= e^{-\left(\frac{(q - m\sqrt{\epsilon\mu}/S_c) - 30}{10}\right)^2}$$

$$H_y^{\text{inc}}[m, q] = -\sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon}{\mu_0\mu}} E_z^{\text{inc}}[m, q] =$$

$$= -\frac{1}{W} e^{-\left(\frac{(q - m\sqrt{\epsilon\mu}/S_c) - 30}{10}\right)^2}$$

Граничные условия Total-Field / Scattered-Field

Для свободного пространства и $S_c = 1$:

$$E_z^{\text{inc}}[m, q] = e^{-\left(\frac{(q-m)\Delta_t - 30\Delta_t}{10\Delta_t}\right)^2} = e^{-\left(\frac{(q-m)-30}{10}\right)^2}$$

$$H_y^{\text{inc}}[m, q] = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_z^{\text{inc}}[m, q] = -\frac{1}{W_0} e^{-\left(\frac{(q-m)-30}{10}\right)^2}$$

Поле на границе

Total-Field / Scattered-Field

Пусть для введенного источника $x = 0$ соответствует 50-й ячейке

$$H_y^{q+1/2}[50-1/2] = H_y^{q+1/2}[50-1/2] - \frac{1}{W_0} E_z^{inc}[0, q]$$

$$E_z^{q+1}[50] = E_z^{q+1}[50] + E_z^{inc}[-1/2, q+1/2]$$

Граничные условия Total-Field / Scattered-Field

$$E_z^{\text{inc}} \left[-1/2, q+1/2 \right] = e^{-\left(\frac{((q+0.5) - (-0.5)) - 30}{10} \right)^2}$$

$$E_z^{\text{inc}} \left[0, q \right] = e^{-\left(\frac{q - 30}{10} \right)^2}$$

Демонстрация гауссова импульса, распространяющегося в одну сторону

Моделирование распространения электромагнитной волны в неоднородных средах

Конечно-разностная схема

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \left(E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right) \frac{1}{\mu W_0} S_c$$

$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$= E_z^q[m] + \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right) \frac{W_0}{\varepsilon} S_c$$

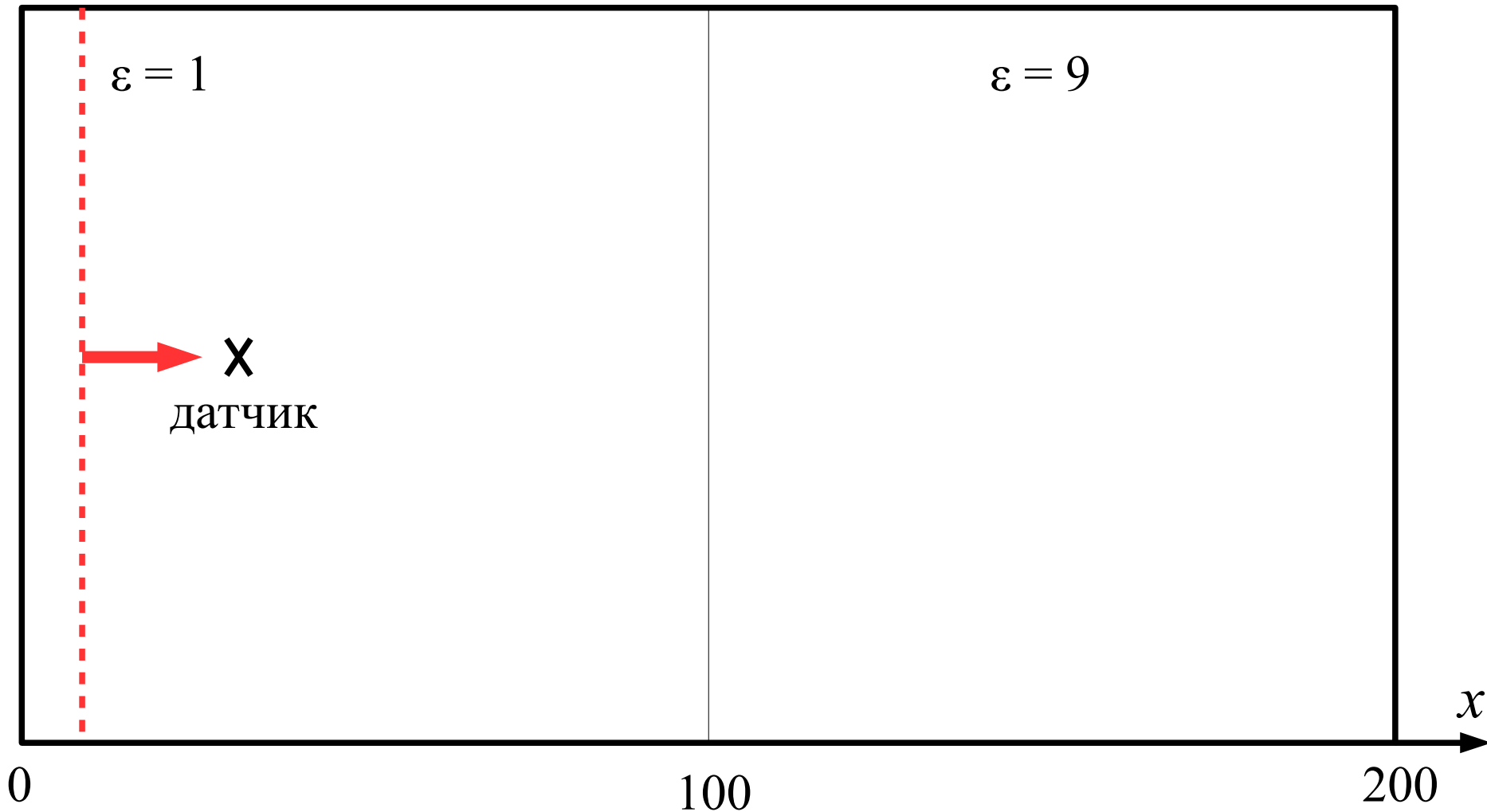
Учет параметров среды

Если $\varepsilon = f(x)$

$$Ez(m) = Ez(m) + (Hy(m) - Hy(m - 1)) * Sc * W0 / eps(m);$$

$$Hy(m) = Hy(m) + (Ez(m + 1) - Ez(m)) * Sc / (W0 * mu(m));$$

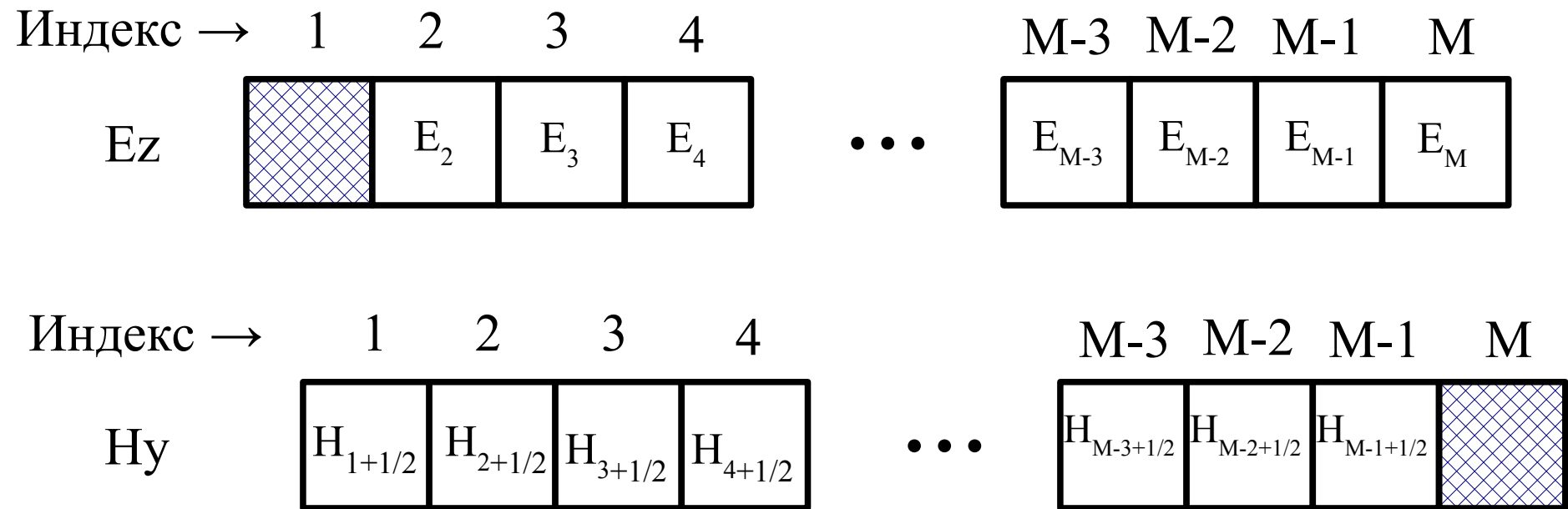
Геометрия решаемой задачи



Демонстрация моделирования распространения электромагнитной волны в неоднородных средах

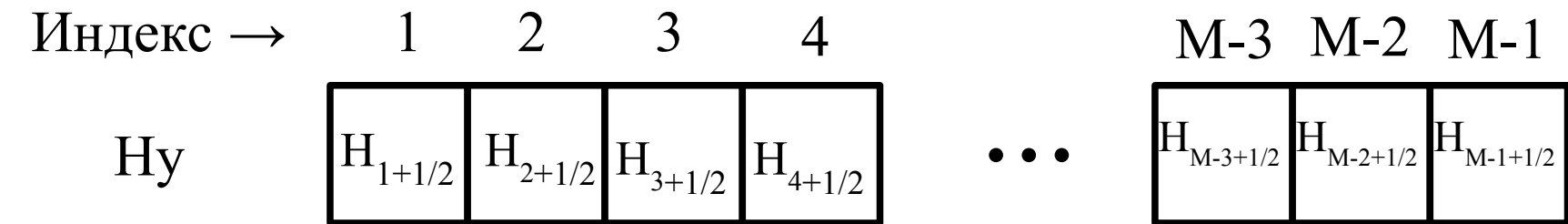
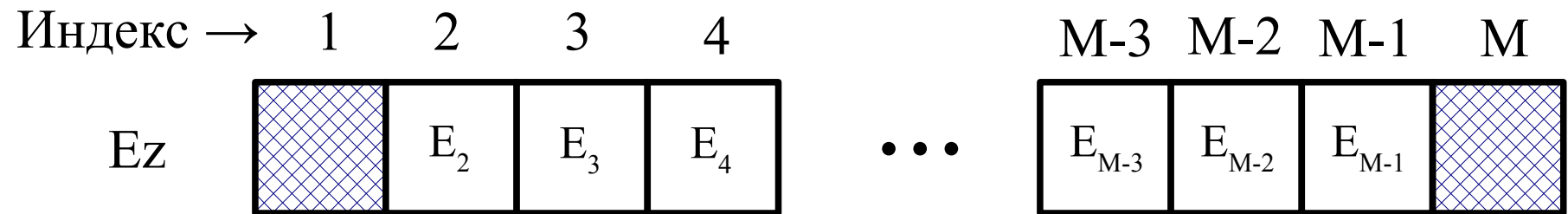
Структура массивов полей

Было в предыдущих примерах:



Структура массивов полей

Стало:



**Демонстрация моделирования
распространения
электромагнитной волны в
неоднородных средах**

Коэффициенты отражения и прохождения

Для волны, падающей по нормали:

Коэффициент отражения:

$$\Gamma = \frac{\mathbf{E}_{\text{отр}}}{\mathbf{E}_{\text{пад}}} = \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}$$

Коэффициент прохождения:

$$T = \frac{\mathbf{E}_{\text{пр}}}{\mathbf{E}_{\text{пад}}} = \frac{2W_2}{W_2 + W_1}$$

$$W = ?$$

Коэффициенты отражения и прохождения

Для волны, падающей по нормали:

Коэффициент отражения:

$$\Gamma = \frac{\mathbf{E}_{\text{отр}}}{\mathbf{E}_{\text{пад}}} = \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}$$

Коэффициент прохождения:

$$T = \frac{\mathbf{E}_{\text{пр}}}{\mathbf{E}_{\text{пад}}} = \frac{2W_2}{W_2 + W_1}$$

$$W = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}} = W_0 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Коэффициенты отражения и прохождения

Для границы раздела свободное пространство - диэлектрик
 $\mu = 1$

Коэффициент отражения: $\Gamma = \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1} = ???$

Коэффициент прохождения: $T = \frac{2W_2}{W_2 + W_1} = ???$

$$W = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} = W_0 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Коэффициенты отражения и прохождения

Для границы раздела двух диэлектриков
 $\mu = 1$

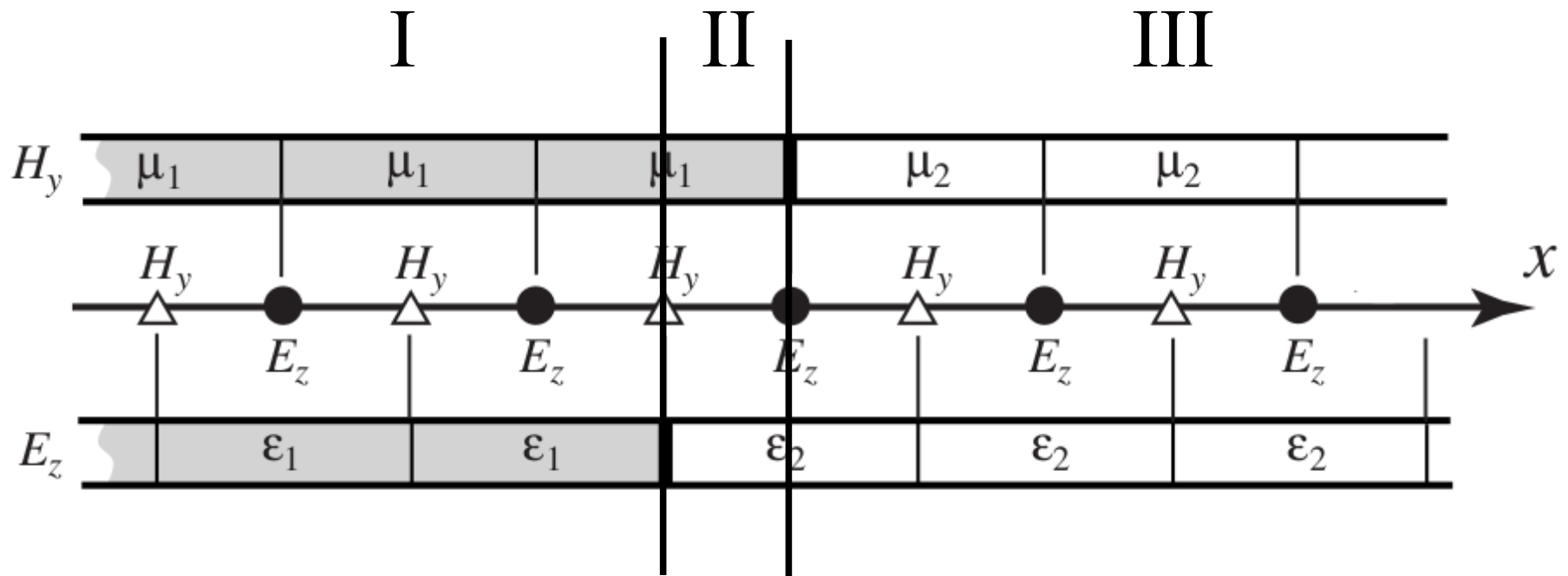
Коэффициент отражения:

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}}$$

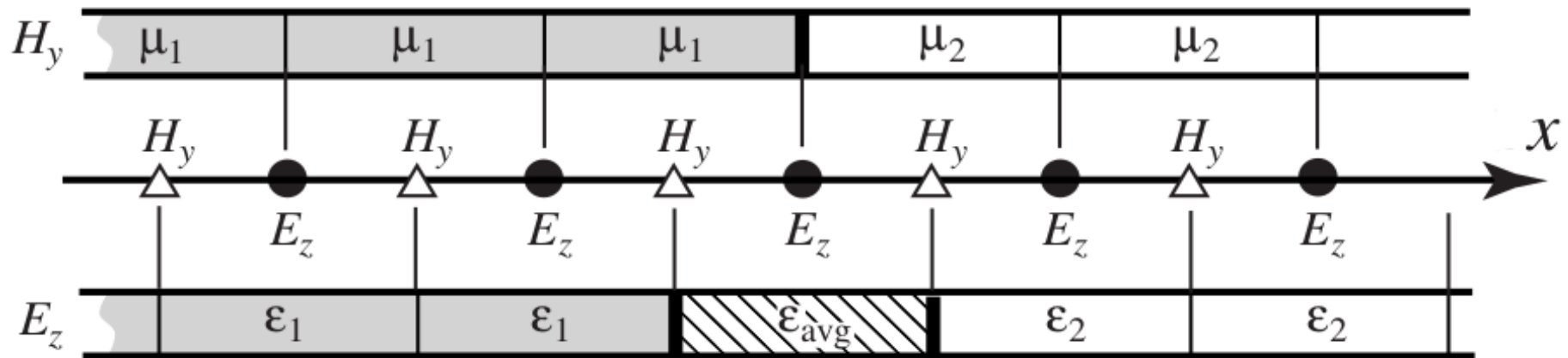
Коэффициент прохождения:

$$T = \frac{2\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}}$$

Погрешность из-за дискретной сетки



Погрешность из-за дискретной сетки



**Демонстрация метода
Total Field / Scattered Field
в диэлектрике**

`fdtd_tfsf_medium_gauss.m`

**Моделирование
распространения
электромагнитной волны в
среде с потерями**

Закон Ампера для среды с потерями

$$\mathbf{j} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H}$$

или

$$\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H}$$

Закон Ампера для среды с потерями

109

Для одномерного случая:

$$\sigma E_z + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

Закон Ампера для среды с потерями

Запишем производные в дискретном виде
для точки $(m\Delta_x; (q + 1/2)\Delta_t)$:

$$\sigma E_z^{q+1/2}[m] + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^q[m]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x}$$

Закон Ампера для среды с потерями

проблема

$$\sigma E_z^{q+1/2}[m] + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^q[m]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x}$$

Закон Ампера для среды с потерями

112

$$E_z^{q+1/2}[m] \approx \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^q[m]}{2}$$

Закон Ампера для среды с потерями

$$E_z^{q+1/2}[m] \approx \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^q[m]}{2}$$

тогда:

$$\begin{aligned} \sigma \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^q[m]}{2} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^q[m]}{\Delta_t} &= \\ = \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x} \end{aligned}$$

Закон Ампера для среды с потерями

$$\begin{aligned}
 E_z^{q+1}[m] = & \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_z^q[m] + \\
 & + \frac{\frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0} \Delta_x}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)
 \end{aligned}$$

Закон Ампера для среды с потерями

$$\begin{aligned}
 E_z^{q+1}[m] = & \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_z^q[m] + \\
 & + \frac{\frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0} \Delta_x}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)
 \end{aligned}$$

Закон Ампера для среды с потерями

Для случая $\sigma = 0$ См/м:

$$E_z^{q+1}[m] =$$

$$= E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$

Закон Фарадея для среды с потерями

$$-\dot{\mathbf{j}}_m - \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}$$

или

$$-\sigma_m \mathbf{H} - \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}$$

Закон Фарадея для среды с потерями

118

Для одномерного случая:

$$\sigma_m H_y + \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

Закон Фарадея для среды с потерями

Запишем производные в дискретном виде:

проблема

$$\sigma_m H_y^q[m+1/2] + \mu \mu_0 \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{E_z^q[m+1] - E_z^q[m]}{\Delta_x}$$

Закон Фарадея для среды с потерями

$$H_y^q[m+1/2] \approx \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] + H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{2}$$

Закон Фарадея для среды с потерями

$$H_y^q[m+1/2] \approx \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] + H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{2}$$

$$\begin{aligned} & \sigma_m \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] + H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{2} + \\ & + \mu \mu_0 \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{\Delta_t} = \\ & = \frac{E_z^q[m+1] - E_z^q[m]}{\Delta_x} \end{aligned}$$

Закон Фарадея для среды с потерями

$$\begin{aligned}
 H_y^{q+1/2}[m+1/2] = & \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \\
 & + \frac{\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0} \Delta_x}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \left(E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right)
 \end{aligned}$$

Закон Фарадея для среды с потерями

Для случая $\sigma_m = 0$:

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} \left(E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right)$$

Моделирование среды с потерями.

Комментарии к реализации

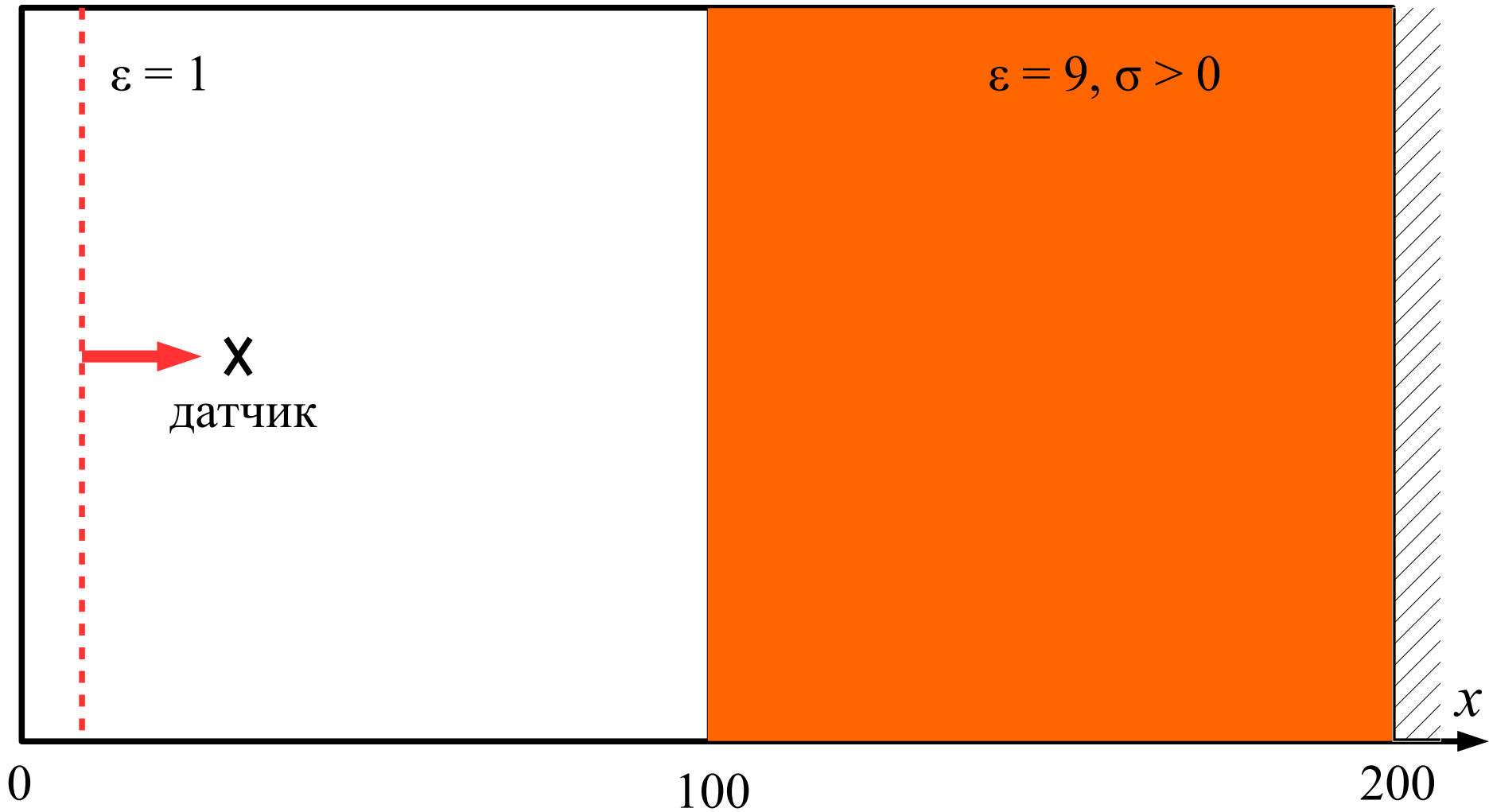
Реализуем случай
 $\sigma_m = 0, Sc = 1$

$$loss = \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}$$

$$ceze = \frac{1 - loss}{1 + loss}$$

$$cezh = \frac{W_0 / \varepsilon}{1 + loss}$$

Геометрия решаемой задачи

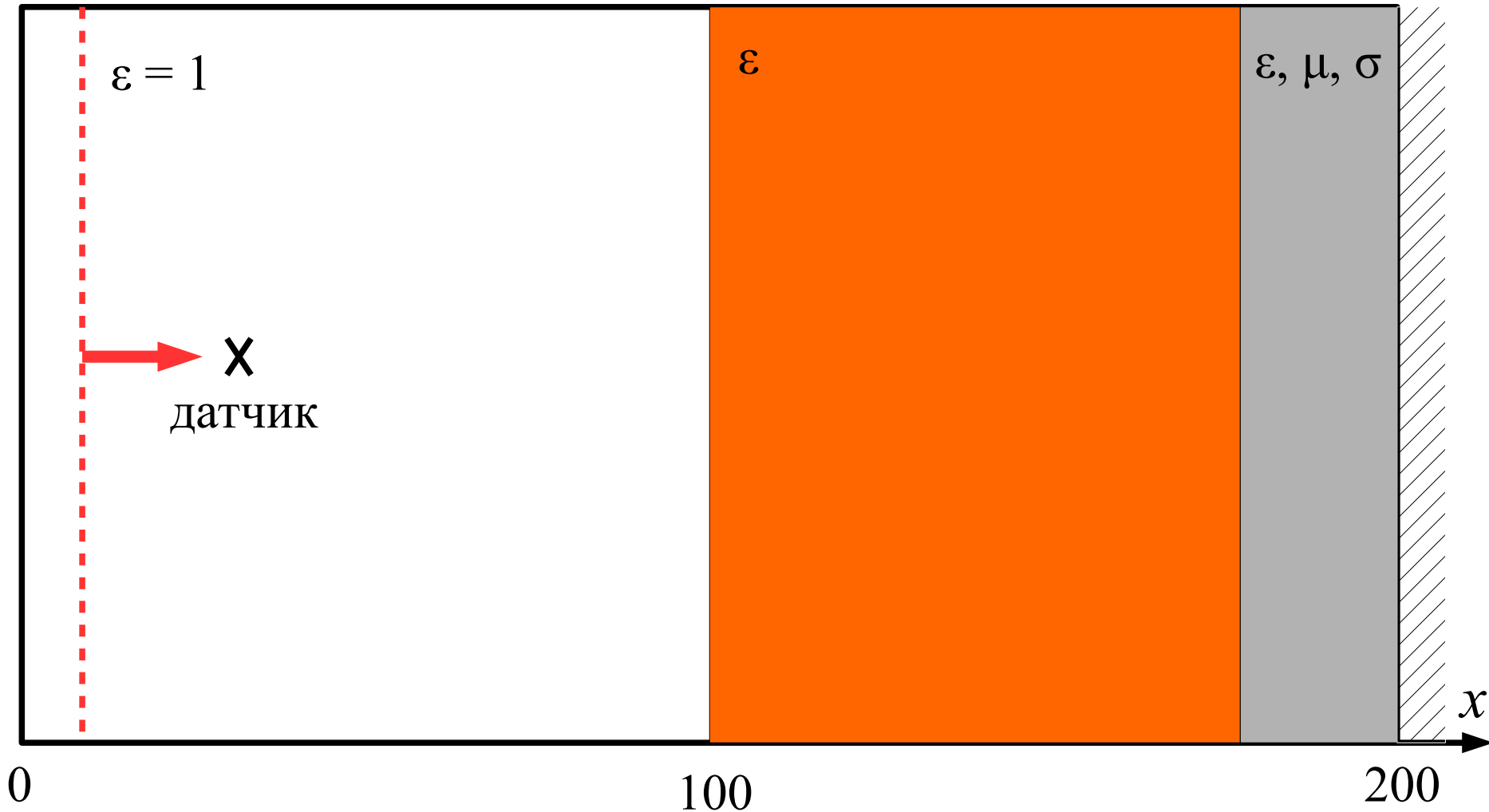


Реализация моделирования распространения электромагнитной волны в среде с потерями

Граничные условия

**Граничное условие с
использованием слоя с
потерями**

Геометрия решаемой задачи



Волновое сопротивление в среде с потерями¹³⁰

$$W = \sqrt{\frac{\mu \mu_0 \left(1 - i \frac{\sigma_m}{\omega \mu \mu_0} \right)}{\varepsilon \varepsilon_0 \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \right)}} = W_0 \sqrt{\frac{\mu \left(1 - i \frac{\sigma_m}{\omega \mu \mu_0} \right)}{\varepsilon \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \right)}}$$

Волновое сопротивление в среде с потерями ¹³¹

$$W = \sqrt{\frac{\mu \mu_0 \left(1 - i \frac{\sigma_m}{\omega \mu \mu_0} \right)}{\varepsilon \varepsilon_0 \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \right)}} = W_0 \sqrt{\frac{\mu \left(1 - i \frac{\sigma_m}{\omega \mu \mu_0} \right)}{\varepsilon \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \right)}}$$

Если $\frac{\sigma_m}{\omega \mu \mu_0} = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0}$, то это равносильно среде без потерь с точки зрения волнового сопротивления

Волновое сопротивление в среде с потерями¹³²

$$W \bigg|_{\frac{\sigma_m}{\omega \mu \mu_0} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon \epsilon_0}} = W \bigg|_{\substack{\sigma_m = 0 \\ \sigma = 0}} = W_0 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$\Gamma = \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}$$

Реализация поглощающих граничных условий

$$loss_m = \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}$$

$$loss_e = \frac{\sigma \Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$

Если

$$\frac{\sigma_m}{\omega\mu\mu_0} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$\frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0} = \frac{\sigma \Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$

Реализация поглощающих граничных условий

$$loss = loss_e = loss_m = \frac{\sigma_m \Delta_t}{2 \mu \mu_0} = \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0} = 0.02$$

$$ceze = \frac{1 - loss}{1 + loss}$$

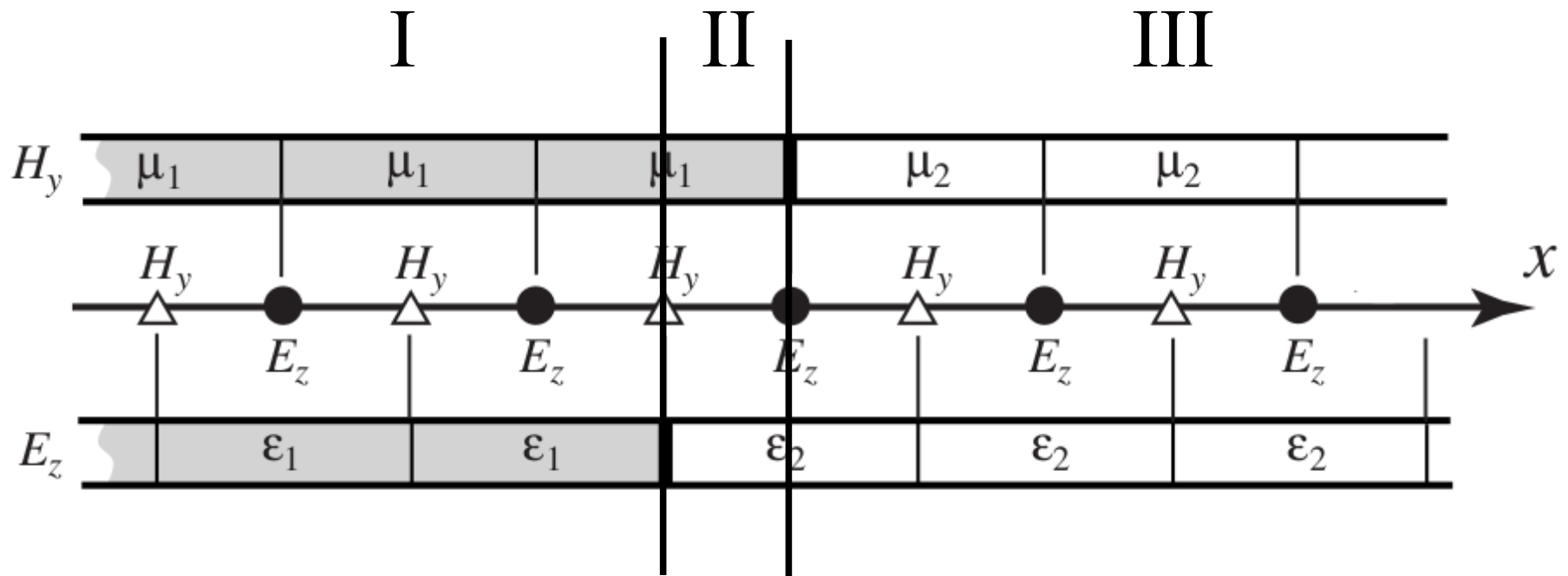
$$cezh = \frac{W_0 / \varepsilon}{1 + loss}$$

$$chye = \frac{1 / W_0}{1 + loss}$$

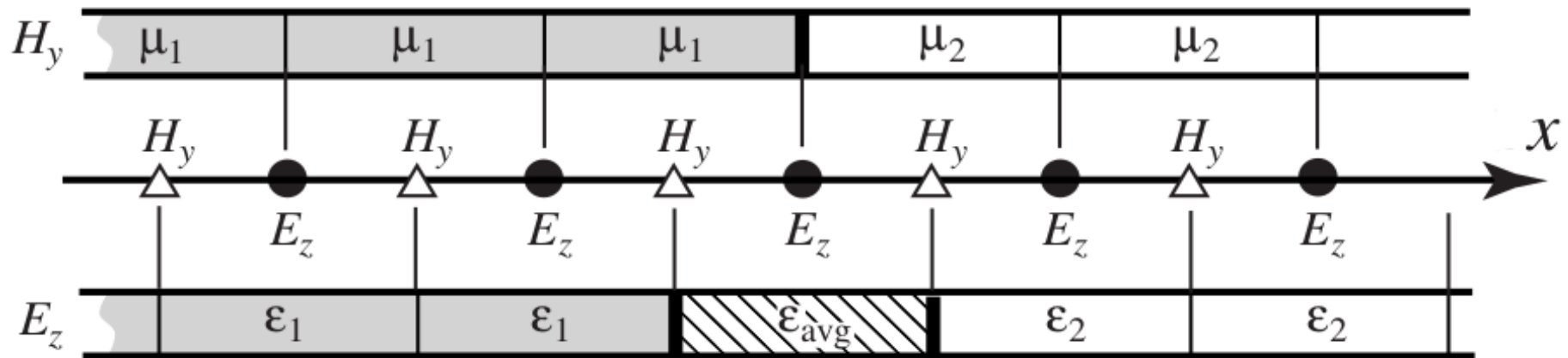
$$chyh = \frac{1 - loss}{1 + loss}$$

**Демонстрация
граничных условий с
использованием
поглощающего слоя**

Погрешность из-за дискретной сетки



Погрешность из-за дискретной сетки



**Демонстрация
граничных условий с
использованием
поглощающего слоя с
усреднением параметров среды
на границе с поглощающим
слоем**

Поглощающие граничные условия (Absorbing boundary condition - ABC)

Типы поглощающих граничных условий

140

Поглощающие граничные условия можно разделить на две группы:

- Условия, аннигилирующие вытекающие волны.
- Условия, аппроксимирующие уравнение волны, распространяющейся только в одном направлении.

Волновое уравнение в одномерном случае

$$\nabla^2 E_z - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

ИЛИ

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

Волновое уравнение в одномерном случае

Перепишем волновое уравнение в операторном виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_z = 0$$

Волновое уравнение в одномерном случае

Полученный оператор может быть разложен на произведение двух операторов:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_z = 0$$

Уравнения адвекции

Любая функция E_z , которая удовлетворяет хотя бы одному из следующих уравнений, является решением волнового уравнения:

$$\text{I.} \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

$$\text{II.} \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

Уравнения адвекции

$$E_z(t + x/v) = E_z(t + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} x)$$

- волна, распространяющаяся влево, удовлетворяет первому уравнению адвекции, но не второму.

Покажем это.

Уравнения адвекции

Сделаем замену

$$\xi = t + \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} x$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}$$

Уравнения адвекции

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi}$$

Уравнения адвекции

Полученные выражения подставляем в первое уравнение адвекции

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} - \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} = 0$$

$$0 = 0$$

Уравнение удовлетворяется

Уравнения адвекции

Полученные выражения подставляем во второе уравнение адвекции

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} + \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} = 0$$

$$2 \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \neq 0$$

Уравнение не удовлетворяется

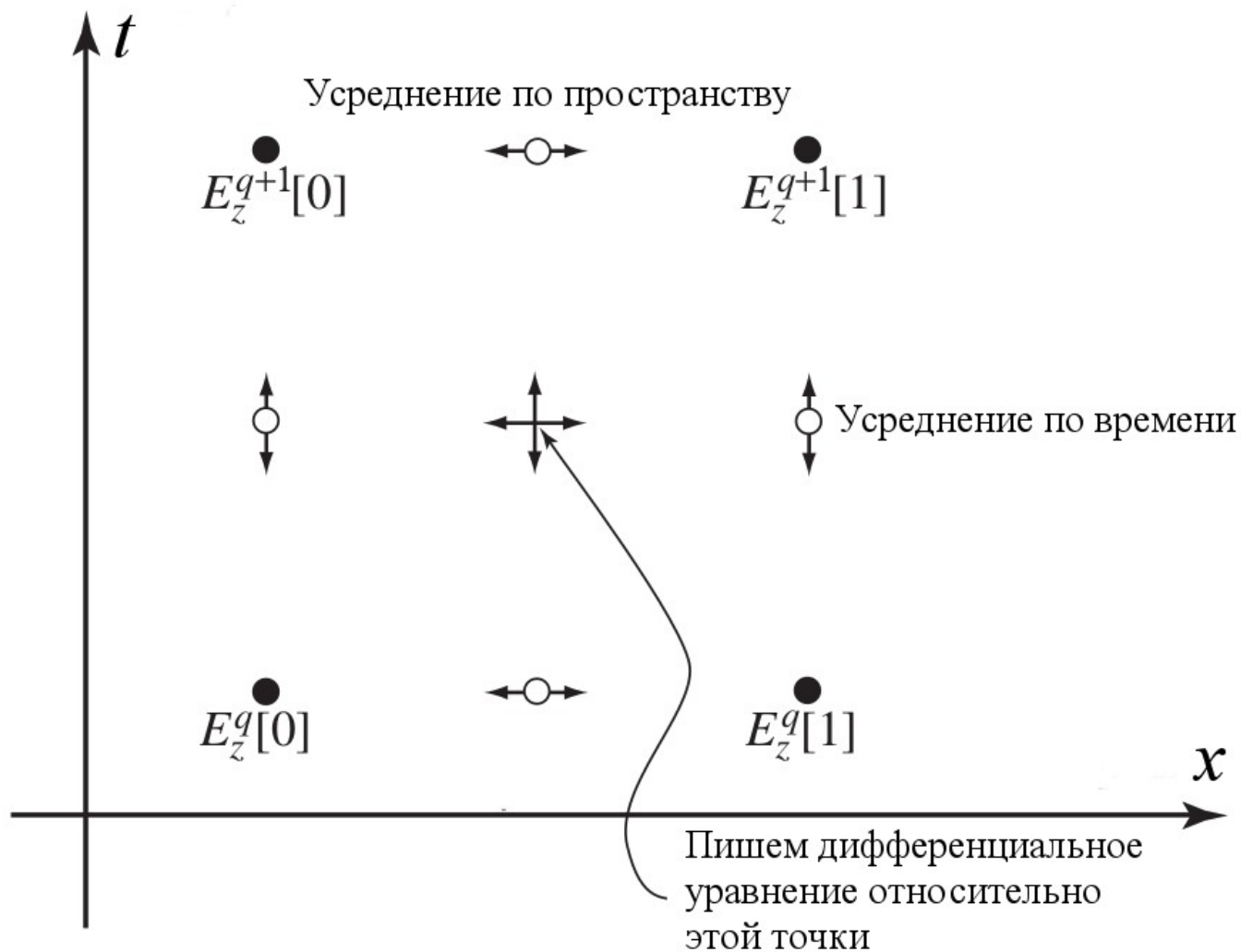
Поглощающие граничные условия. Постановка задачи

Известны значения полей $E_z^{q+1}[1]$, $E_z^q[0]$ и $E_z^q[1]$

Рассчитать поле $E_z^{q+1}[0]$ таким образом,
чтобы волна распространялась только влево

Поглощающие граничные условия

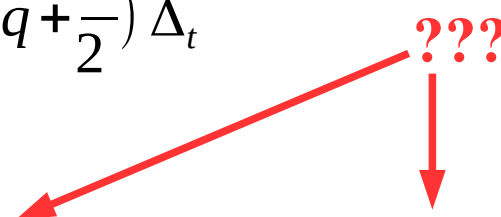
151



Поглощающие граничные условия

152

Запишем производные в уравнении адвекции
через конечно-разностную схему

$$\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} \bigg|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2}) \Delta_t} =$$

$$= \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{E_z^{q+1}[1/2] - E_z^q[1/2]}{\Delta_t}$$

Поглощающие граничные условия

$$E_z^{q+1}[1/2] \approx \frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1]}{2}$$

$$E_z^q[1/2] \approx \frac{E_z^q[0] + E_z^q[1]}{2}$$

Поглощающие граничные условия

154

$$\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} \bigg|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} \approx$$
$$\approx \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1]}{2} - \frac{E_z^q[0] + E_z^q[1]}{2}}{\Delta_t}$$

Поглощающие граничные условия

155

Аналогично поступаем со вторым слагаемым в первом уравнении адвекции

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial E_z}{\partial x} \right|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} = \\ & = \frac{E_z^{q+1/2}[1] - E_z^{q+1/2}[0]}{\Delta_x} \approx \\ & \approx \frac{\frac{E_z^{q+1}[1] + E_z^q[1]}{2} - \frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^q[0]}{2}}{\Delta_x} \end{aligned}$$

Поглощающие граничные условия

156

Подставляем полученные выражения в первое уравнение адвекции

$$\frac{\frac{E_z^{q+1}[1] + E_z^q[1]}{2} - \frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^q[0]}{2}}{\Delta_x} -$$

$$- \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1]}{2} - \frac{E_z^q[0] + E_z^q[1]}{2}}{\Delta_t} = 0$$

Поглощающие граничные условия

Из полученного уравнения выражаем $E_x^{q+1}[0]$ и учитываем, что:

$$\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} = \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{c}, \quad S_c = \frac{c \Delta_t}{\Delta_x}$$

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1] + \frac{\frac{S_c}{\sqrt{\epsilon \mu}} - 1}{\frac{S_c}{\sqrt{\epsilon \mu}} + 1} \left(E_z^{q+1}[1] - E_z^q[0] \right)$$

Поглощающие граничные условия

158

Аналогично можно вывести условие для правой границы

$$E_z^{q+1}[M] = E_z^q[M-1] + \frac{\frac{S_c}{\sqrt{\epsilon\mu}} - 1}{\frac{S_c}{\sqrt{\epsilon\mu}} + 1} \left(E_z^{q+1}[M-1] - E_z^q[M] \right)$$

Поглощающие граничные условия

159

Для свободного пространства и $S_c = 1$ выражения сводятся к виду:

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1]$$

$$E_z^{q+1}[M] = E_z^q[M-1]$$

Демонстрация поглощающих граничных условий (АВС) первой степени

`fdtd_abc_first.m`
`fdtd_abc_first_2.m`

**Формулировка граничных
условий АВС первой степени с
использованием операторной
записи**

Операторы для граничных условий АВС

162

Введем несколько новых операторов:

I — оператор идентичности.

$$I E_z^q[m] = E_z^q[m]$$

s_x^{-1} — оператор пространственного сдвига (сдвиг вправо).

$$s_x^{-1} E_z^q[m] = E_z^q[m+1]$$

s_t^{-1} — оператор обратного временного сдвига.

$$s_t^{-1} E_z^{q+1}[m] = E_z^q[m]$$

Линейные операторы

Оператор A называется линейным, если выполняются следующие условия:

- $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2$
- $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}$

Свойства линейных операторов

Для двух линейных операторов A и B выполняется условия:

$$(A + B)(x) = A(x) + B(x)$$

$$(AB)(x) = A(B(x))$$

Введенные операторы коммутативны
(можно менять порядок их применения)

$$S_x^1 S_t^{-1} = S_t^{-1} S_x^1$$

$$I S_x^1 = S_x^1$$

$$I I = I$$

Поглощающие граничные условия с использованием операторной записи

$$\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} \bigg|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2}) \Delta_t} \approx$$

$$\approx \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1]}{2} - \frac{E_z^q[0] + E_z^q[1]}{2}}{\Delta_t}$$

Использование операторов для граничных условий АВС первого порядка

Пространственное усреднение с помощью введенных операторов записывается следующим образом:

$$\frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^{q+1}[m+1]}{2} = \left(\frac{I + s_x^1}{2} \right) E_z^{q+1}[m]$$

Временное усреднение с помощью введенных операторов записывается следующим образом:

$$\frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^q[m]}{2} = \left(\frac{I + s_t^{-1}}{2} \right) E_z^{q+1}[m]$$

Поглощающие граничные условия с использованием операторной записи

В операторном виде указанные действия выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial E_z}{\partial t} \right|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} &\approx \frac{\left(\frac{I + s_x^1}{2} \right) E_z^{q+1}[0] - \left(\frac{I + s_x^1}{2} \right) s_t^{-1} E_z^{q+1}[0]}{\Delta_t} = \\
 &= \left(\frac{I + s_x^1}{2} \right) \left(\frac{I - s_t^{-1}}{\Delta_t} \right) E_z^{q+1}[0] = \\
 &= \frac{1}{2\Delta_t} (I - s_t^{-1} + s_x^1 - s_x^1 \cdot s_t^{-1}) E_z^{q+1}[0] = \\
 &= \frac{1}{2\Delta_t} (E_z^{q+1}[0] - E_z^q[0] + E_z^{q+1}[1] - E_z^q[1])
 \end{aligned}$$

Поглощающие граничные условия с использованием операторной записи

Аналогично можем поступить с расчетом производной по пространству:

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{\partial E_z}{\partial x} \right|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} \approx \\
 & \approx \left(\frac{s_x^1 - I}{\Delta_x} \right) \left(\frac{I + s_t^{-1}}{2} \right) E_z^{q+1}[0] = \\
 & = \frac{1}{2\Delta_x} (-I + s_x^1 - s_t^{-1} + s_t^{-1} \cdot s_x^1) E_z^{q+1}[0] = \\
 & = \frac{1}{2\Delta_x} (-E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1] - E_z^q[0] + E_z^q[1])
 \end{aligned}$$

Поглощающие граничные условия с использованием операторной записи

Запишем конечно-разностное выражение для уравнения адвекции:

$$\left\{ \left(\frac{s_x^1 - I}{\Delta_x} \right) \left(\frac{I + s_t^{-1}}{2} \right) - \sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0} \left(\frac{I + s_x^1}{2} \right) \left(\frac{I - s_t^{-1}}{\Delta_t} \right) \right\} E_z^{q+1}[0] = 0$$

Решение этого уравнения для $E_z^{q+1}[0]$ даст выражение

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1] + \frac{\frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} - 1}{\frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} + 1} \left(E_z^{q+1}[1] - E_z^q[0] \right)$$

Поглощающие граничные условия (Absorbing boundary condition — ABC) второй степени

Волновое уравнение в одномерном случае

Мы получим более точное решение уравнения адвекции и уменьшим отражение, если применим оператор адвекции дважды:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_z = 0$$

Волновое уравнение в одномерном случае

Конечно-разностная схема для оператора адвекции второй степени в операторном виде:

$$\left[\left\{ \left(\frac{s_x^1 - I}{\Delta_x} \right) \left(\frac{I + s_t^{-1}}{2} \right) - \sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0} \left(\frac{I + s_x^1}{2} \right) \left(\frac{I - s_t^{-1}}{\Delta_t} \right) \right\} \times \right. \\ \left. \left\{ \left(\frac{s_x^1 - I}{\Delta_x} \right) \left(\frac{I + s_t^{-1}}{2} \right) - \sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0} \left(\frac{I + s_x^1}{2} \right) \left(\frac{I - s_t^{-1}}{\Delta_t} \right) \right\} \right] E_z^{q+1}[0] = 0$$

Поглощающее граничное условие второй степени

Если раскрыть скобки и решить это уравнение относительно $E_z^{q+1}[0]$, то мы получим

$$\begin{aligned}
 E_z^{q+1}[0] = & \underbrace{\frac{-1}{1/S'_c + 2 + S'_c}}_{k_1} \left\{ \underbrace{\left(\frac{1}{S'_c} - 2 + S'_c \right)}_{k_2} \left(\underline{E_z^{q+1}[2] + E_z^{q-1}[0]} \right) + \right. \\
 & + 2 \underbrace{\left(S'_c - \frac{1}{S'_c} \right)}_{k_3} \left(\underline{E_z^q[0] + E_z^q[2]} - E_z^{q+1}[1] - E_z^{q-1}[1] \right) - \\
 & \left. - 4 \underbrace{\left(\frac{1}{S'_c} + S'_c \right)}_{k_4} E_z^q[1] \right\} - \underline{E_z^{q-1}[2]}
 \end{aligned}$$

Волновое уравнение в одномерном случае

В предыдущем выражении:

$$S'_c = \frac{\Delta_t}{\sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0} \Delta_x} = \frac{S_c}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

Волновое уравнение в одномерном случае

Для свободного пространства и $S_c = 1$
граничное условие преобразуется к виду:

$$E_z^{q+1}[0] = 2E_z^q[1] - E_z^{q-1}[2]$$

Волновое уравнение в одномерном случае

Граничные условия справа выглядят аналогично, только они отражены «зеркально». Преобразуются пространственные координаты:

$$0 \rightarrow M$$

$$1 \rightarrow M - 1$$

$$2 \rightarrow M - 2$$

В индексации MATLAB:

$$1 \rightarrow \text{end}$$

$$2 \rightarrow \text{end} - 1$$

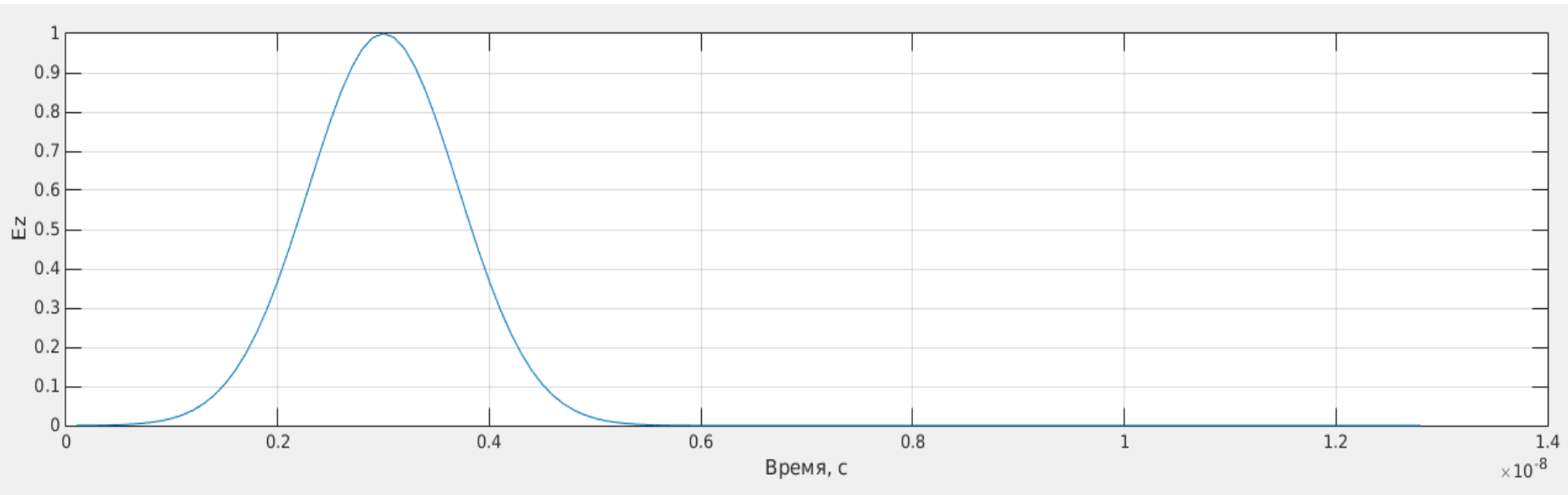
$$3 \rightarrow \text{end} - 2$$

Демонстрация поглощающих граничных условий (АВС) второй степени

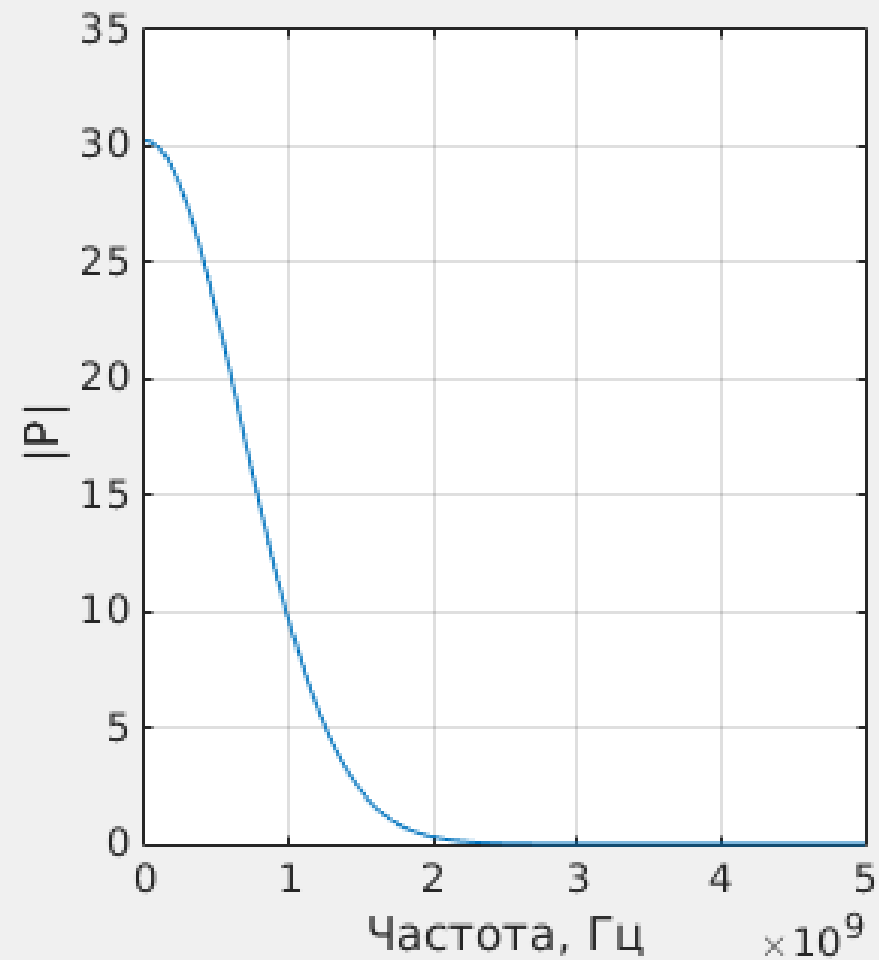
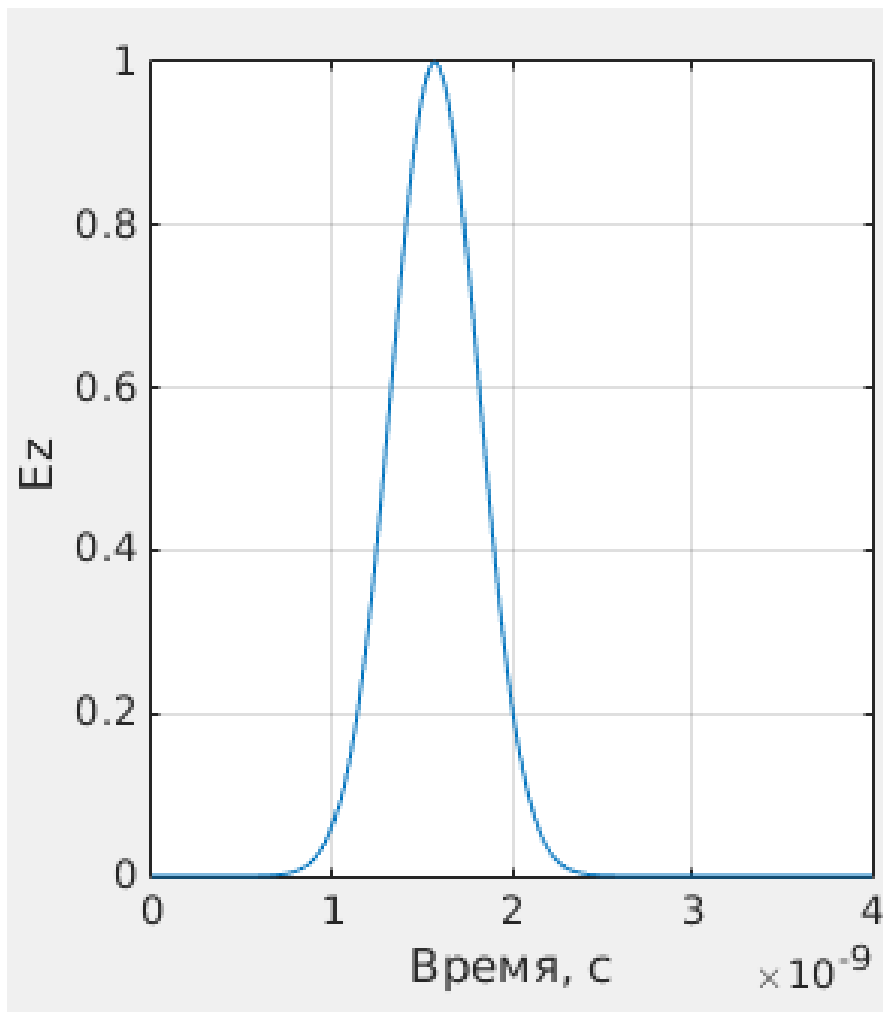
Источники возбуждения

Гауссов импульс

$$f_g(t) = A e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$



Спектр гауссова импульса



Спектр гауссова импульса

Если заданы требования к сигналу:

- A_0 — уровень ослабления сигнала в момент времени $t = 0$ ($A_0 > 1$).
- F_{\max} — «максимальная» частота в спектре сигнала.
- A_{\max} — уровень ослабления спектра сигнала на частоте F_{\max} ($A_{\max} > 1$).

$$f_g(t) = A e^{-\left(\frac{t - d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$w_g = \frac{\sqrt{\ln(A_{\max})}}{\pi F_{\max}}$$

$$d_g = w_g \sqrt{\ln(A_0)}$$

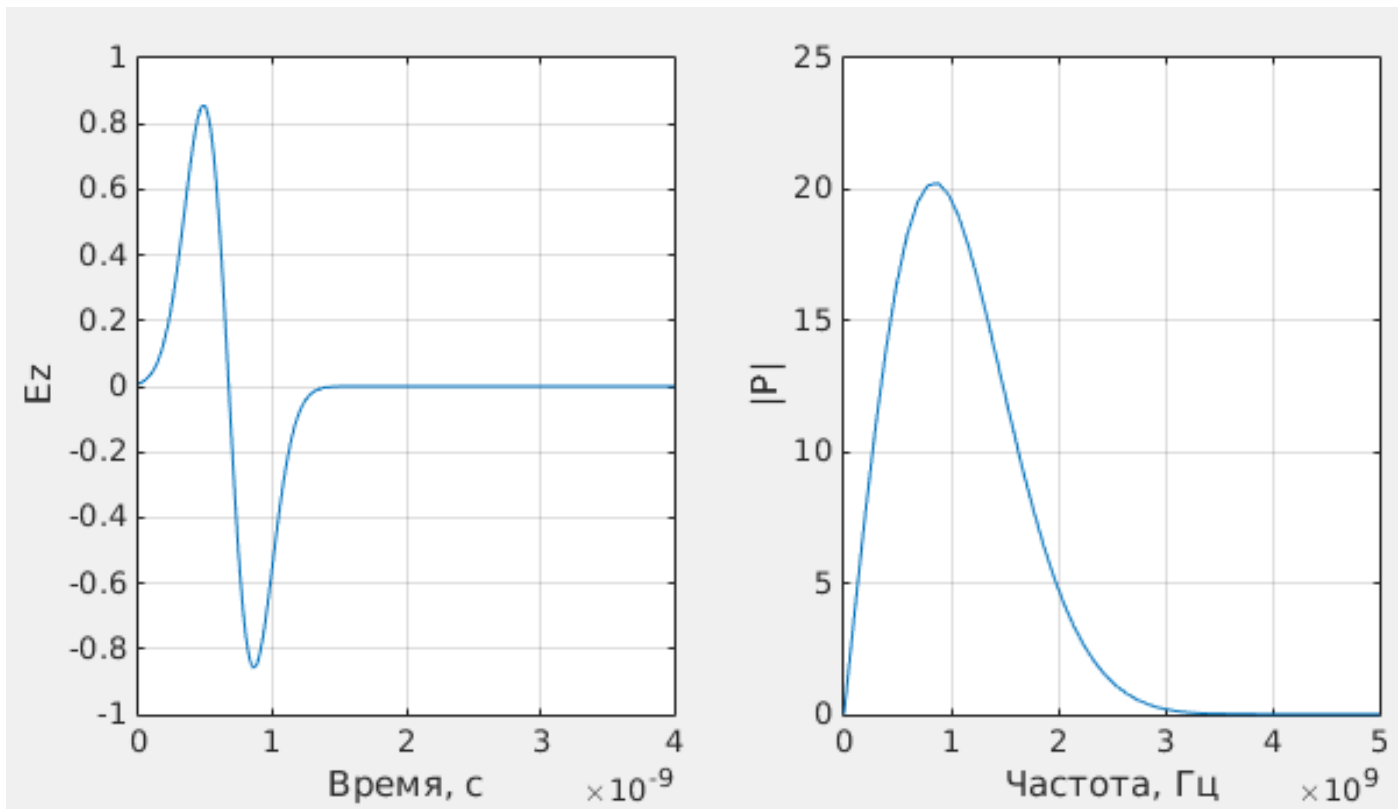
Недостатки гауссова импульса

- В спектре присутствует постоянная составляющая.
- Максимальное значение спектра всегда на частоте 0 ГГц.
- Сигнал с постоянной составляющей нельзя излучить.

Дифференцированный гауссов импульс

190

$$f_g(t) = -2A \left(\frac{t - d_g}{w_g} \right) e^{-\left(\frac{t - d_g}{w_g} \right)^2}$$



Спектр дифференцированного гауссова импульса

Если заданы требования к сигналу:

- F_{\max} — «максимальная» частота в спектре сигнала.
- A_{\max} — уровень ослабления спектра сигнала на частоте F_{\max} и ослабление в момент времени $t = 0$ ($A_{\max} > 1$).

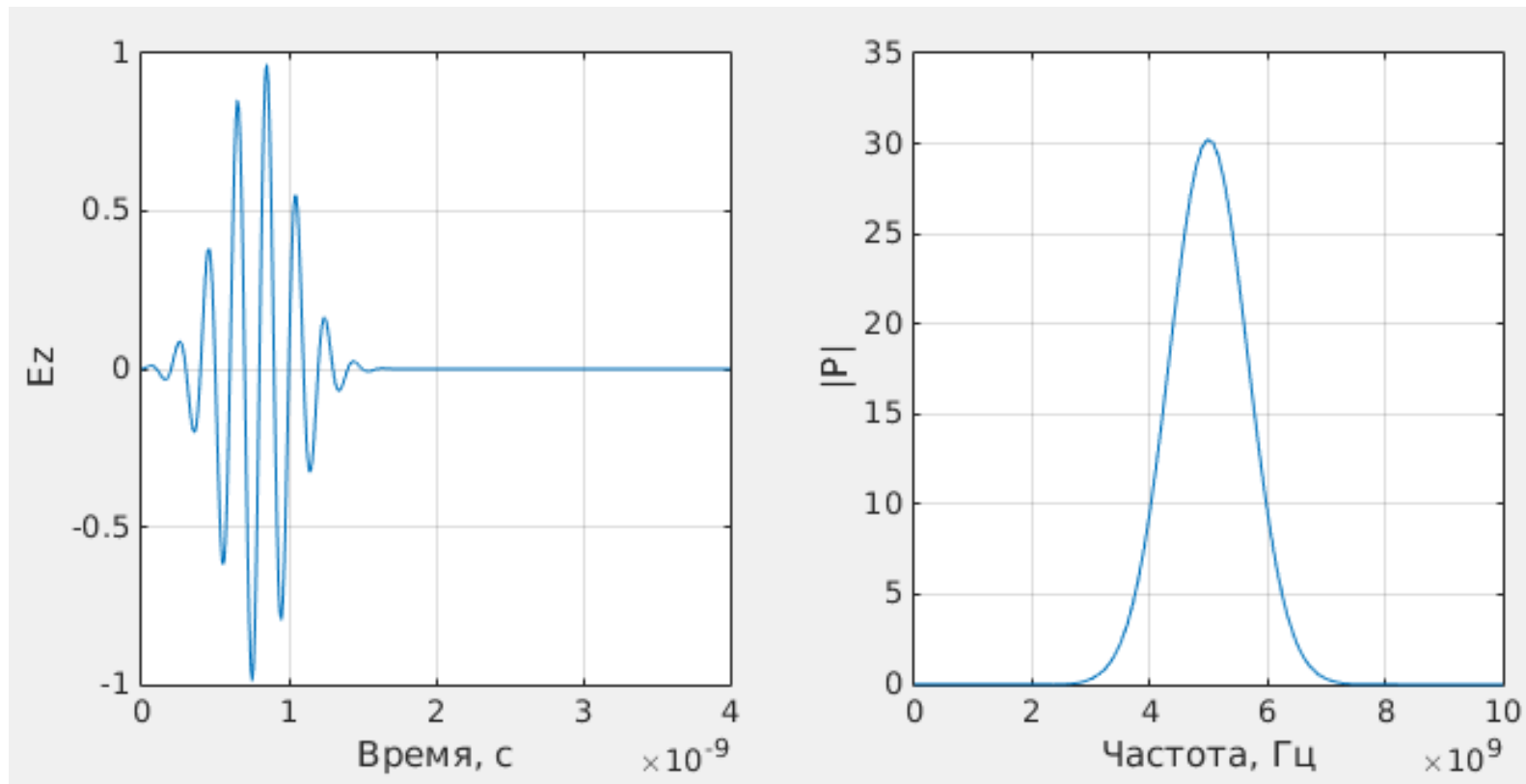
$$f_g(t) = -2A \left(\frac{t - d_g}{w_g} \right) e^{-\left(\frac{t - d_g}{w_g} \right)^2}$$

$$w_g = \frac{\sqrt{\ln(5.5 A_{\max})}}{\pi F_{\max}}$$

$$d_g = w_g \sqrt{\ln(2.5 A_{\max} \sqrt{\ln(2.5 A_{\max})})}$$

Модулированный гауссов импульс

$$f_g(t) = \sin(2\pi f_0 t) e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$



Спектр модулированного гауссова импульса

Если заданы требования к сигналу:

- f_0 — центральная частота в спектре сигнала.
- A_{\max} — уровень ослабления спектра сигнала на частоте F_{\max} ($A_{\max} > 1$).
- A_0 — ослабление огибающей сигнала в момент времени $t = 0$
- ΔF — ширина спектра по уровню ослабления A_{\max} .

$$f_g(t) = \sin(2\pi f_0 t) e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$w_g = 2 \sqrt{\ln(A_{\max})} / (\pi \Delta F)$$

$$d_g = w_g \sqrt{\ln(A_0)}$$

**Модулированный гауссов
импульс при
использовании метода
Total Field / Scattered Field**

Поле на границе

Total-Field / Scattered-Field

$$H_y^{q+1/2}[50-1/2] = H_y^{q+1/2}[50-1/2] - \frac{1}{W_0} E_z^{inc}[0, q]$$

$$E_z^{q+1}[50] = E_z^{q+1}[50] + E_z^{inc}[-1/2, q+1/2]$$

Модулированный гауссов импульс для метода Total Field / Scattered Field

$f(\xi)$ — решение волнового уравнения, если:

- $f(\xi)$ дважды дифференцируема
- ξ можно заменить на $t \pm x / v$
(для одномерного случая)

Модулированный гауссов импульс для метода Total Field / Scattered Field

В выражении для модулированного
гауссова импульса
заменим t на $t \pm x / c$

$$f_g(t) = \sin(2\pi f_0 t) e^{-\left(\frac{t - d_g}{w_g}\right)^2}$$

\Downarrow

$$f_g(t) = \sin\left(2\pi f_0\left(t \pm \frac{x}{c}\right)\right) e^{-\left(\frac{t \pm \frac{x}{c} - d_g}{w_g}\right)^2}$$

Модулированный гауссов импульс для метода Total Field / Scattered Field

Запишем предыдущее выражение через число Куранта и длину волны, учитывая, что

$$\frac{x}{c} = \frac{m \Delta_x}{c} = \frac{m \Delta_t}{S_c},$$

$$f_0 = \frac{S_c}{N_\lambda \Delta_t},$$

$$d_g = N_{dg} \Delta_t,$$

$$w_g = N_{wg} \Delta_t$$

Модулированный гауссов импульс для метода Total Field / Scattered Field

$$f_g[m, q] = \sin \left(\frac{2\pi S_c}{N_\lambda \Delta_t} \left(q \Delta_t \pm \frac{m \Delta_t}{S_c} \right) \right) e^{-\left(\frac{q \Delta_t \pm \frac{m \Delta_t}{S_c} - N_{dg} \Delta_t}{N_{wg} \Delta_t} \right)^2}$$

⇓

$$f_g[m, q] = \sin \left(\frac{2\pi}{N_\lambda} \left(\frac{q}{S_c} \pm m \right) \right) e^{-\left(\frac{q \pm \frac{m}{S_c} - N_{dg}}{N_{wg}} \right)^2}$$

**Демонстрация модулированного
гауссова импульса при
использовании метода
Total Field / Scattered Field**

Гармонический сигнал при использовании метода Total Field / Scattered Field

Гармонический сигнал

$$f_h(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

или в дискретном виде

$$f_h(q \Delta_t) = A \cos(\omega q \Delta_t + \varphi_0)$$

Гармонический сигнал в терминах²⁰³ длин волн

Если задана длина волны в виде: $\lambda = N_\lambda \cdot \Delta_x$, то

$$f = \frac{c}{\lambda}, \quad \omega t = \frac{2\pi c}{\lambda} t$$

$$f_h(q \Delta_t) = A \cos \left(\frac{2\pi c}{N_\lambda \Delta_x} q \Delta_t + \varphi_0 \right)$$

$$f_h[q] = A \cos \left(\frac{2\pi S_c}{N_\lambda} q + \varphi_0 \right)$$

Уравнение плоской волны в дискретном виде

$$T = \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{c} = \frac{N_{\lambda} \Delta_x}{c}$$

Количество временных шагов на период:

$$\frac{T}{\Delta_t} = \frac{N_{\lambda} \Delta_x}{c \Delta_t} = \frac{N_{\lambda}}{S_c}$$

Уравнение плоской волны в дискретном виде

$$f_h(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{k}{\omega}x\right) + \varphi_0\right)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega \sqrt{\mu \epsilon}}{c}$$

$$x = m \Delta_x$$

Уравнение плоской волны в дискретном виде

тогда:

$$\omega \left(t - \frac{k}{\omega} x \right) = \frac{2 \pi c}{N_{\lambda} \Delta_x} \left(q \Delta_t - \frac{\sqrt{\mu \varepsilon}}{c} m \Delta_x \right)$$

Уравнение плоской волны в дискретном виде

тогда:

$$\omega \left(t - \frac{k}{\omega} x \right) = \frac{2 \pi c}{N_{\lambda} \Delta_x} \left(q \Delta_t - \frac{\sqrt{\mu \varepsilon}}{c} m \Delta_x \right)$$

Вынесем за скобки Δ_x / c

$$\omega \left(t - \frac{k}{\omega} x \right) = \frac{2 \pi}{N_{\lambda}} \left(q \frac{\Delta_t c}{\Delta_x} - \sqrt{\mu \varepsilon} m \right) = \frac{2 \pi}{N_{\lambda}} \left(S_c q - \sqrt{\mu \varepsilon} m \right)$$

Уравнение плоской волны в дискретном виде

В дискретном виде:

$$f_h[m, q] = A \cos \left(\frac{2\pi}{N_\lambda} (S_c q - \sqrt{\mu \varepsilon} m) + \varphi_0 \right)$$

Обычно используют:

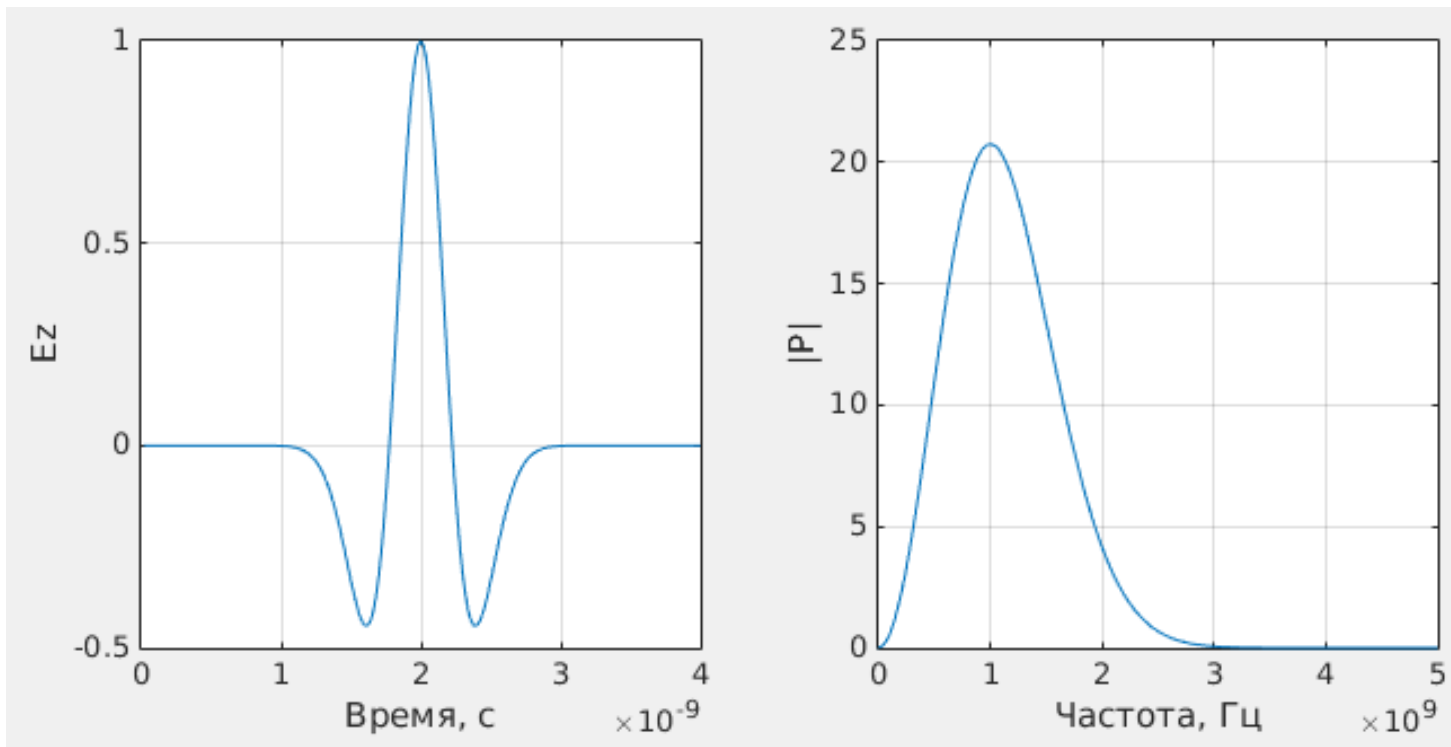
$$f_h[m, q] = A \sin \left(\frac{2\pi}{N_\lambda} (S_c q - \sqrt{\mu \varepsilon} m) + \varphi_0 \right)$$

**Демонстрация гармонического
сигнала при использовании
метода
Total Field / Scattered Field**

Демонстрация стоячей волны

Вейвлет Рикера

$$f_r(t) = \left(1 - 2\{\pi f_p[t - d_r]\}^2\right) e^{-\{\pi f_p[t - d_r]\}^2}$$



Вейвлет Рикера

Если заданы требования к сигналу:

- f_p — «пиковая» частота в спектре сигнала.

$$f_r(t) = \left(1 - 2\{\pi f_p[t - d_r]\}^2\right) e^{-\{\pi f_p[t - d_r]\}^2}$$

$$d_r = M_d \frac{1}{f_p}$$

M_d — коэффициент задержки

Спектр вейвлета Рикера

$$F_r(\omega) = -\frac{2}{f_p \sqrt{\pi}} \left(\frac{\omega}{2\pi f_p} \right)^2 \exp \left(-jd_r \omega - \left(\frac{\omega}{2\pi f_p} \right)^2 \right)$$

Вейвлет Рикера в терминах длин волн

$$\lambda_p = N_p \Delta_x, \quad f_p = \frac{c}{\lambda_p} = \frac{c}{N_p \Delta_x}$$

Вейвлет Рикера в терминах длин волн

$$\lambda_p = N_p \Delta_x, \quad f_p = \frac{c}{\lambda_p} = \frac{c}{N_p \Delta_x}$$

$$S_c = \frac{c \Delta_t}{\Delta_x} \Rightarrow \Delta_x = \frac{c \Delta_t}{S_c}$$

$$f_p = \frac{S_c}{N_p \Delta_t}$$

Вейвлет Рикера в терминах длин волн

$$f_p = \frac{S_c}{N_p \Delta_t}$$

Тогда задержка может быть представлена как:

$$d_r = M_d \frac{1}{f_p} = M_d \frac{N_p \Delta_t}{S_c}$$

Вейвлет Рикера в дискретном виде

$$f_r[q] = \left(1 - 2\pi^2 \left[\frac{S_c q}{N_p} - M_d \right]^2 \right) \exp \left(-\pi^2 \left[\frac{S_c q}{N_p} - M_d \right]^2 \right)$$

**Вейвлет Рикера при
использовании метода
Total Field / Scattered Field**

Вейвлет Рикера для метода Total Field / Scattered Field

В выражении для вейвлета Рикера
заменим t на $t \pm x / c$

$$f_r\left(t \pm \frac{x}{c}\right) = f_r(x, t) = \left(1 - 2\pi^2 f_p^2 \left(t \pm \frac{x}{c} - d_r\right)^2\right) e^{-\pi^2 f_p^2 \left(t \pm \frac{x}{c} - d_r\right)^2}$$

Вейвлет Рикера для метода Total Field / Scattered Field

Запишем предыдущее выражение через число Куранта и длину волны, учитывая, что

$$\frac{x}{c} = \frac{m \Delta_x}{c} = \frac{m \Delta_t}{S_c}, \quad f_p = \frac{S_c}{N_p \Delta_t}, \quad d_r = M_d \frac{1}{f_p} = M_d \frac{N_p \Delta_t}{S_c}$$



$$f_r[m, q] = \left(1 - 2\pi^2 \left[\frac{S_c q \pm m}{N_p} - M_d \right]^2 \right) e^{-\pi^2 \left[\frac{S_c q \pm m}{N_p} - M_d \right]^2}$$

Демонстрация вейвлета Рикера при использовании метода Total Field / Scattered Field

Погрешности метода FDTD

Источники погрешностей метода FDTD

- Численная дисперсия.
- Отражение от границ области моделирования.
- Ступенчатая аппроксимация границ объектов.
- Численный шум.
- Постоянная составляющая тока может создавать остаточные электрические заряды (емкость ячеек сетки).

Численная дисперсия

Дисперсия — зависимость фазовой скорости распространения волны от частоты.

Численная дисперсия

$$\frac{\tilde{c}}{c} = \frac{\pi \sqrt{\epsilon \mu}}{N_{\lambda} \arcsin \left(\frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{S_c} \sin \left(\frac{\pi S_c}{N_{\lambda}} \right) \right)}$$

\tilde{c} — скорость распространения волны в дискретном пространстве

N_{λ} — Количество ячеек сетки на длину волны

Демонстрация численной дисперсии

`dispersion.m`
`fdtd_dispersion.m`

Коэффициенты отражения и прохождения

Для границы раздела двух диэлектриков
 $\mu = 1$

Коэффициент прохождения: $T = \frac{2\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}}$

Коэффициент отражения: $\Gamma = \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}}$

Коэффициенты прохождения и отражения в дискретном пространстве

$$\tilde{T} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}{\sqrt{\epsilon_1} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) + \sqrt{\epsilon_2} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)} \quad \bigg| \quad \tilde{\Gamma} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) - \sqrt{\epsilon_2} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}{\sqrt{\epsilon_1} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) + \sqrt{\epsilon_2} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}$$

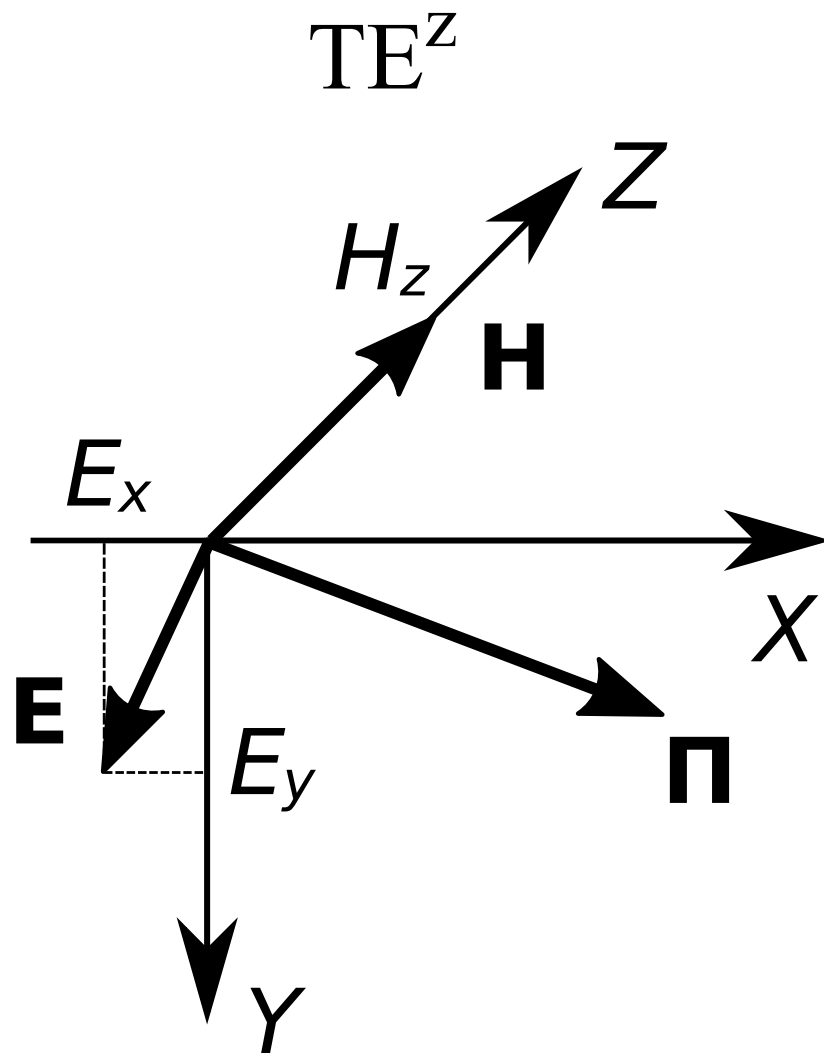
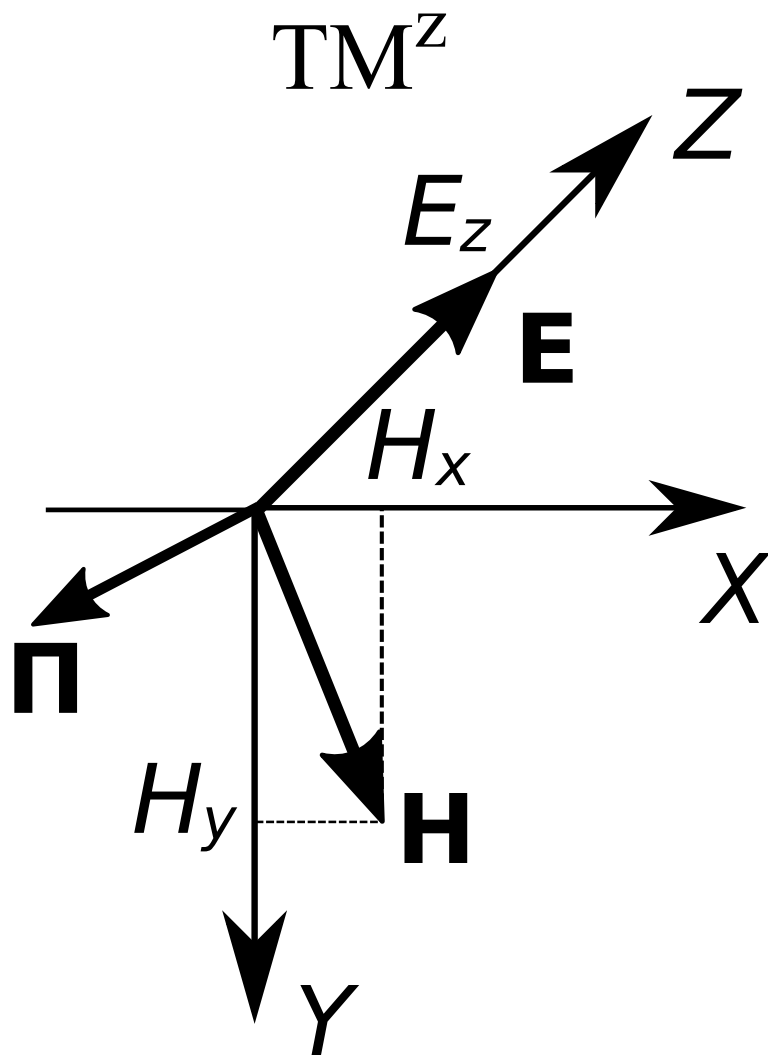
где

$$\frac{\tilde{\beta}_i \Delta_x}{2} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{\epsilon_i \mu_i}}{S_c} \sin\left(\frac{\pi S_c}{N_\lambda}\right)\right)$$

Демонстрация погрешностей при расчете коэффициента отражения

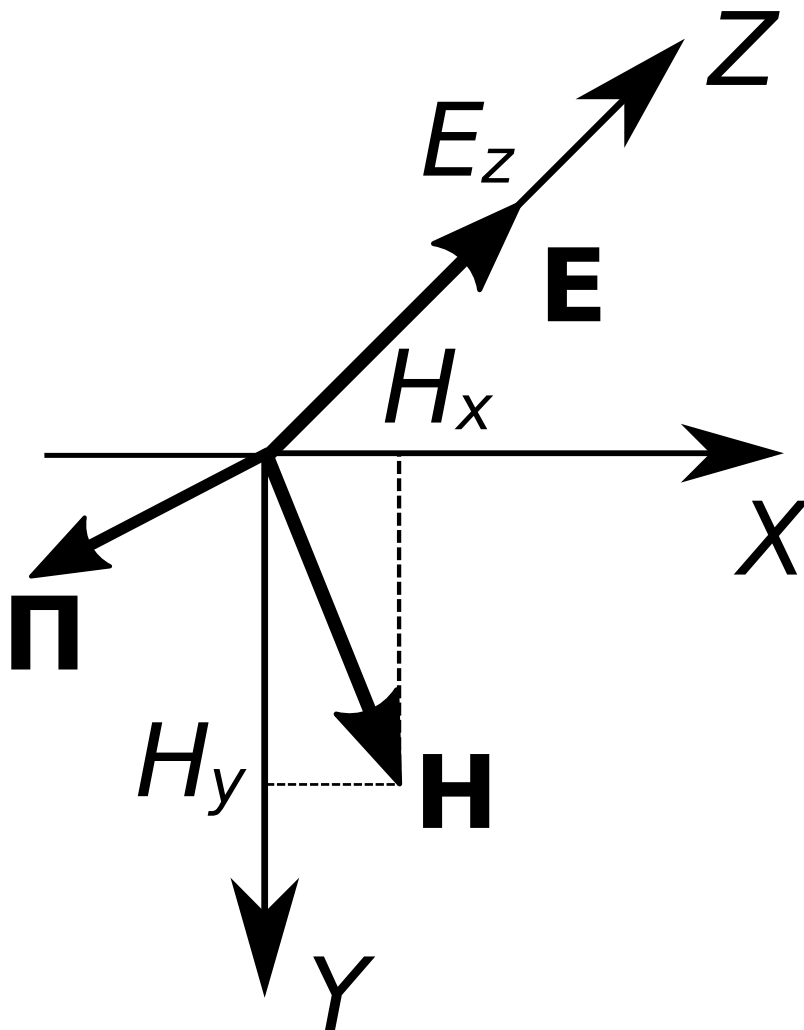
Двумерный метод конечных разностей во временной области

Виды поляризации для двумерного случая



**Двумерный метод конечных
разностей во временной области
для поляризации TM^z**

Поляризация ТМ^z



Существуют следующие компоненты ЭМ поля:

- E_z
- H_x
- H_y

Метод FDTD для поляризации TM^z .

Закон Фарадея

$$-\sigma_m \mathbf{H} - \mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & E_z \end{vmatrix} = \mathbf{x}_0 \frac{\partial E_z}{\partial y} - \mathbf{y}_0 \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

Метод FDTD для поляризации TM^z .

Закон Ампера

$$\sigma \mathbf{E} + \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{z}_0 \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

Метод FDTD для поляризации ТМ^z. Законы Фарадея и Ампера в скалярном виде

236

$$-\sigma_m H_x - \mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$\sigma_m H_y + \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\sigma E_z + \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

Дискретизация величин E и H

$$H_x(x, y, t) = H_x(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = H_x^q[m, n]$$

$$H_y(x, y, t) = H_y(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = H_y^q[m, n]$$

$$E_z(x, y, t) = E_z(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = E_z^q[m, n]$$

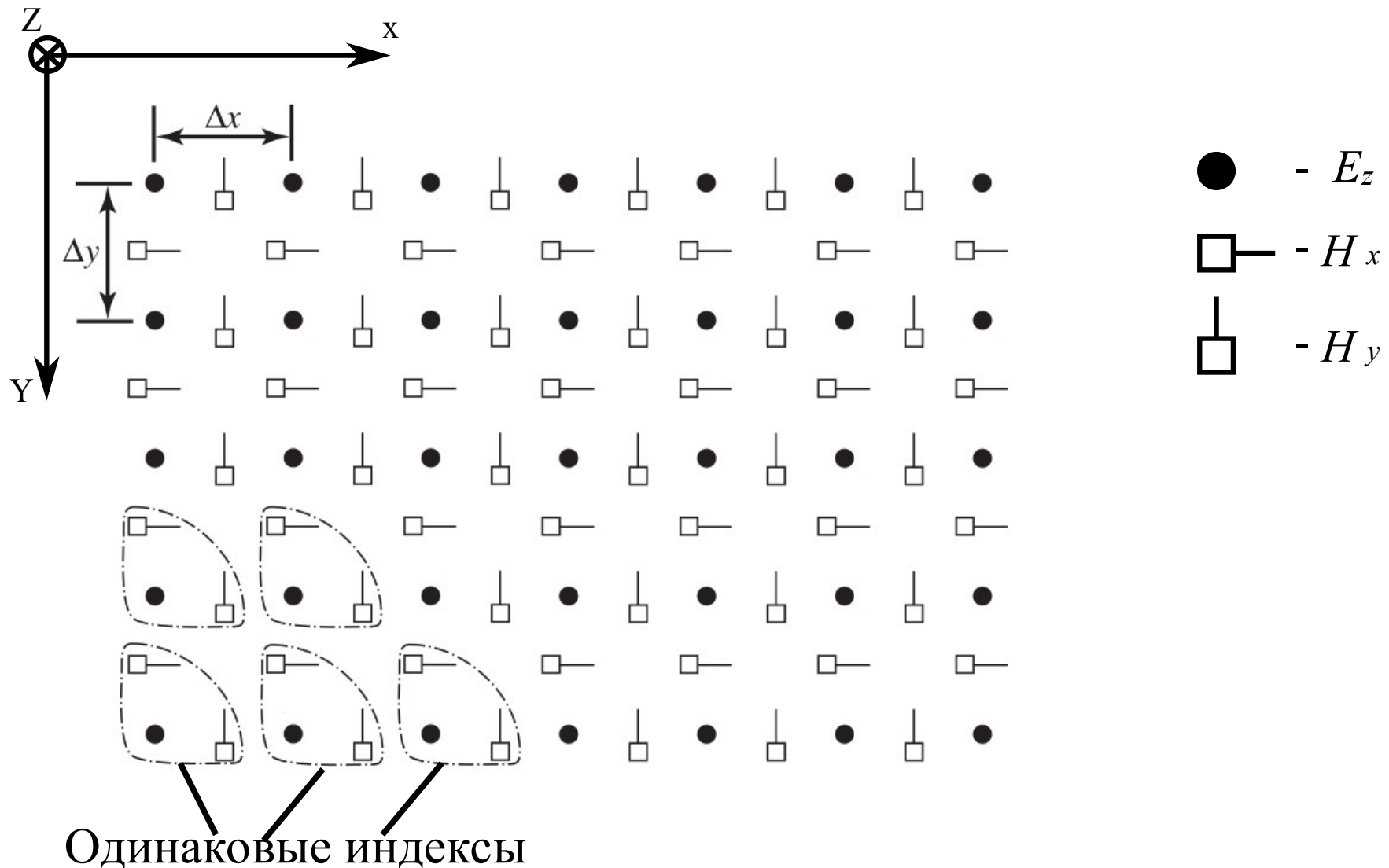
m — индекс по пространству вдоль оси X.

n — индекс по пространству вдоль оси Y.

q — индекс по времени.

Δ_x, Δ_y — размер сетки по осям X и Y соответственно.

Пространственная сетка для двумерного метода FDTD



Особенности реализации двумерного метода FDTD

- Размер массива для компоненты E_z — $M \times N$
- Размер массива для компоненты H_x — $M \times (N - 1)$
- Размер массива для компоненты H_y — $(M - 1) \times N$

Конечно-разностная аппроксимация для закона Фарадея

Запишем конечно-разностную аппроксимацию для точки
 $(m\Delta_x, (n + 1/2)\Delta_y, q\Delta_t)$

$$\begin{aligned}
 & -\sigma_m \frac{H_x^{q+1/2}[m, n+1/2] + H_x^{q-1/2}[m, n+1/2]}{2} - \\
 & -\mu\mu_0 \frac{H_x^{q+1/2}[m, n+1/2] + H_x^{q-1/2}[m, n+1/2]}{\Delta_t} = \\
 & = \frac{E_z^q[m, n+1] - E_z^q[m, n]}{\Delta_y}
 \end{aligned}$$

Конечно-разностная аппроксимация для закона Фарадея

Из полученного уравнения выражаем $H_x^{q+1/2}[m, n+1/2]$:

$$H_x^{q+1/2}[m, n+1/2] = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} H_x^{q-1/2}[m, n+1/2] -$$

$$- \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \Delta_y} \left(E_z^q[m, n+1] - E_z^q[m, n] \right)$$

Конечно-разностная аппроксимация для закона Фарадея

Подобным образом выражаем $H_y^{q+1/2}[m+1/2, n]$:

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2, n] = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} H_y^{q-1/2}[m+1/2, n] +$$

$$+ \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \Delta_x} \left(E_z^q[m+1, n] - E_z^q[m, n] \right)$$

Конечно-разностная аппроксимация для закона Ампера

Подобным образом выражаем $E_z^{q+1}[m, n]$ из закона Ампера:

$$\begin{aligned}
 E_z^{q+1}[m, n] = & \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_z^q[m, n] + \\
 & + \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \left(\frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \{ H_y^{q+1/2}[m+1/2, n] - H_y^{q+1/2}[m-1/2, n] \} - \right. \\
 & \left. - \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_y} \{ H_x^{q+1/2}[m, n+1/2] - H_x^{q+1/2}[m, n-1/2] \} \right)
 \end{aligned}$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{hxh}(m, n+1/2) = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \bigg|_{m\delta, (n+1/2)\delta}$$

$$C_{hxe}(m, n+1/2) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \delta} \bigg|_{m\delta, (n+1/2)\delta}$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{hyh}(m+1/2, n) = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \Bigg|_{(m+1/2)\delta, n\delta}$$

$$C_{hye}(m+1/2, n) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \delta} \Bigg|_{(m+1/2)\delta, n\delta}$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{eze}(m, n) = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \bigg|_{m\delta, n\delta}$$

$$C_{ezh}(m, n) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \delta} \bigg|_{m\delta, n\delta}$$

Программная реализация конечно-разностной схемы

$$\begin{aligned} H_x(m, n) = & C_{hxh}(m, n) * H_x(m, n) - \dots \\ & C_{hxe}(m, n) * (E_z(m, n + 1) - E_z(m, n)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_y(m, n) = & C_{hyh}(m, n) * H_y(m, n) + \dots \\ & C_{hye}(m, n) * (E_z(m + 1, n) - E_z(m, n)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_z(m, n) = & C_{eze}(m, n) * E_z(m, n) + \dots \\ & C_{ezh}(m, n) * (H_y(m, n) - H_y(m - 1, n)) - \dots \\ & (H_x(m, n) - H_x(m, n - 1)); \end{aligned}$$

Стабильность двумерного метода FDTD

Критерий устойчивости Куранта-Фридриха-Леви

$$v_{max} \Delta_t \leq \frac{1}{\sqrt{\Delta_x^{-2} + \Delta_y^{-2} + \Delta_z^{-2}}}$$

$$v_{max} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{min} \mu_{min}}}$$

Если $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \Delta$

$$v_{max} \Delta_t \leq \frac{\Delta}{\sqrt{N}}$$

N — размерность пространства (1, 2, 3)

Стабильность двумерного метода FDTD

250

Критерий стабильности для одномерного пространства:

$$S_c = \frac{v \Delta_t}{\Delta_x} \leq 1$$

Стабильность двумерного метода FDTD

Критерий стабильности для одномерного пространства:

$$S_c = \frac{v \Delta_t}{\Delta_x} \leq 1$$

Критерий стабильности для N-мерного пространства:

$$S_c = v \Delta_t \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{1}{\Delta_n^2}} \leq 1$$

Стабильность двумерного метода FDTD

Критерий стабильности для одномерного пространства:

$$S_c = \frac{v \Delta_t}{\Delta_x} \leq 1$$

Критерий стабильности для N-мерного пространства:

$$S_c = v \Delta_t \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{1}{\Delta_n^2}} \leq 1$$

Критерий стабильности для двумерного пространства:

$$S_c = v \Delta_t \sqrt{\frac{1}{\Delta_x^2} + \frac{1}{\Delta_y^2}} \leq 1$$

Стабильность двумерного метода FDTD

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то

$$S_c = v \Delta_t \sqrt{\frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\delta^2}} \leq 1 \quad \rightarrow \quad S_c = \frac{v \Delta_t \sqrt{2}}{\delta} \leq 1$$

Критерий стабильности для N-мерного пространства:

$$S_c = \frac{v \Delta_t \sqrt{N}}{\delta} \leq 1$$

или

$$S_c = \frac{v \Delta_t}{\delta} \leq \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Стабильность двумерного метода FDTD

Введем коэффициент — аналог одномерного числа Куранта для двумерного случая

$$C_{dtds} = \frac{v \Delta_t}{\delta} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Критерий устойчивости для двумерного FDTD:

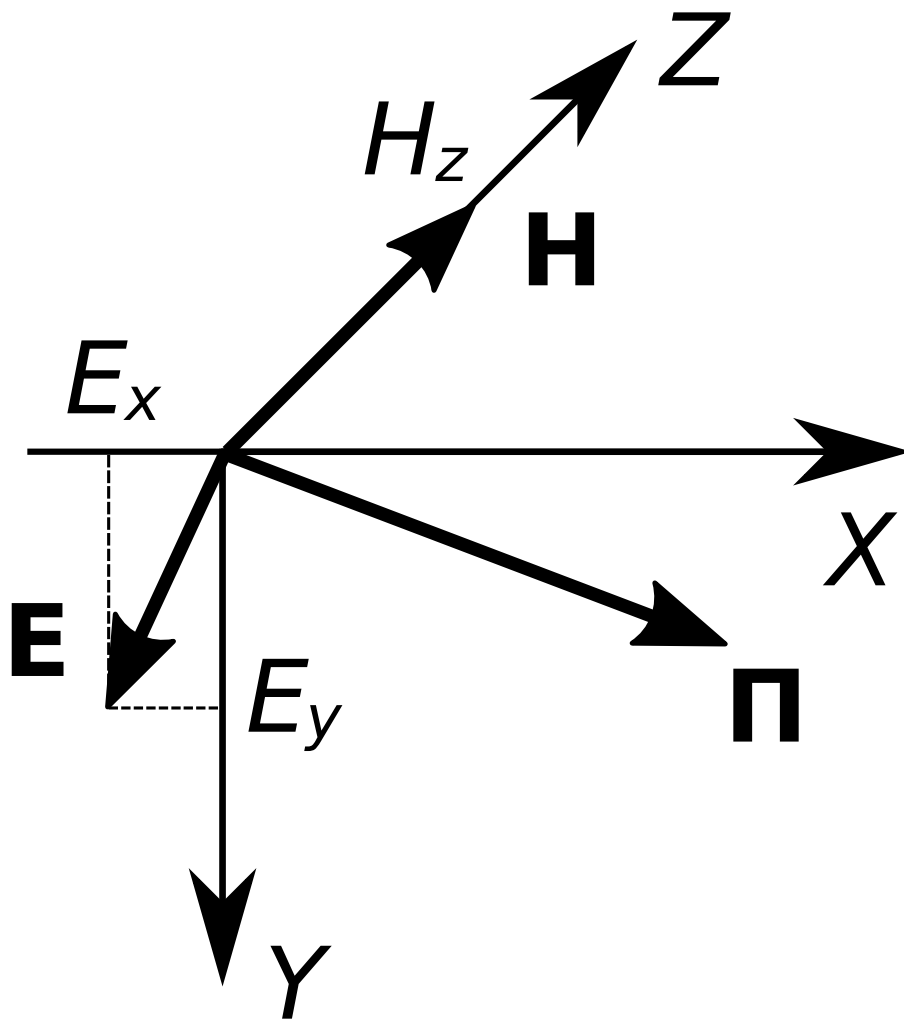
$$\Delta_t \leq \frac{\delta}{c\sqrt{2}}$$

**Демонстрация двумерного метода
FDTD для поляризации TM^z .
Источник цилиндрической волны.**

**Демонстрация двумерного метода
FDTD для поляризации TM^z .
Источник плоской волны.**

**Двумерный метод конечных
разностей во временной области
для поляризации TE^z**

Поляризация TE^z



Существуют следующие
компоненты ЭМ поля:

- E_x
- E_y
- H_z

Закон Фарадея

$$-\sigma_m \mathbf{H} - \mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{z}_0 \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

Закон Фарадея

В скалярном виде предыдущее выражение записывается как:

$$-\sigma_m H_z - \mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

Закон Ампера

$$\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & H_z \end{vmatrix} = \mathbf{x}_0 \frac{\partial H_z}{\partial y} - \mathbf{y}_0 \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

Закон Ампера

В скалярном виде предыдущее выражение записывается как:

$$\sigma E_x + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$\sigma E_y + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = - \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

Дискретизация величин E и H

$$E_x(x, y, t) = E_x(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = E_x^q[m, n]$$

$$E_y(x, y, t) = E_y(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = E_y^q[m, n]$$

$$H_z(x, y, t) = H_z(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = H_z^q[m, n]$$

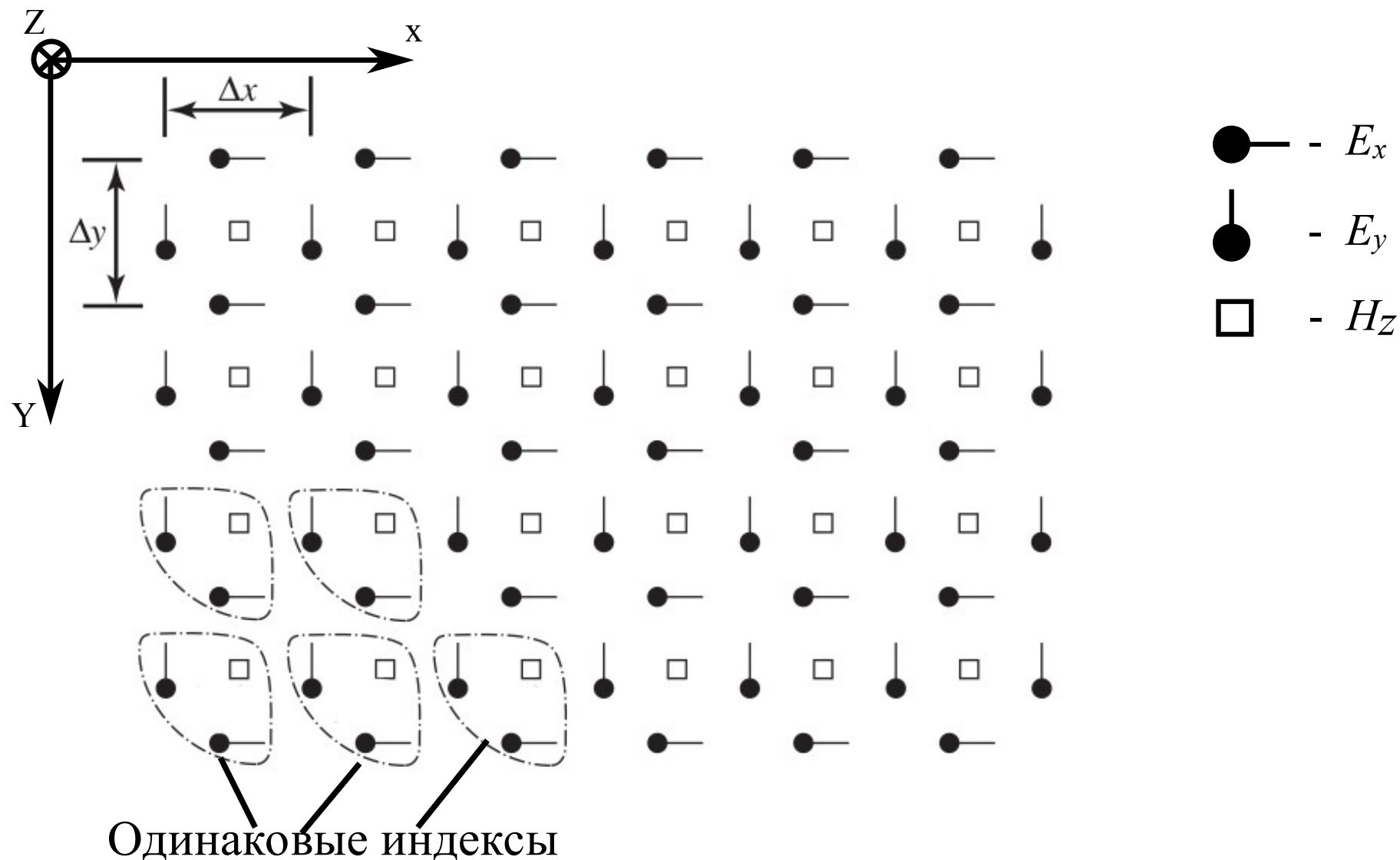
m — индекс по пространству вдоль оси X.

n — индекс по пространству вдоль оси Y.

q — индекс по времени.

Δ_x, Δ_y — размер сетки по осям X и Y соответственно.

Пространственная сетка для двумерного метода FDTD



Конечно-разностная схема

$$\begin{aligned}
 H_z^{q+1/2}[m+1/2, n+1/2] = & \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} H_z^{q-1/2}[m+1/2, n+1/2] - \\
 & - \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \left(\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \Delta_x} \{ E_y^q[m+1, n+1/2] - E_y^q[m, n+1/2] \} - \right. \\
 & \left. - \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \Delta_y} \{ E_x^q[m+1/2, n+1] - E_x^q[m+1/2, n] \} \right)
 \end{aligned}$$

Конечно-разностная схема

$$E_x^{q+1}[m+1/2, n] = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_x^q[m+1/2, n] +$$

$$+ \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_y} \left(H_z^{q+1/2}[m+1/2, n+1/2] - H_z^{q+1/2}[m+1/2, n-1/2] \right)$$

Конечно-разностная схема

$$E_y^{q+1}[m, n+1/2] = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_y^q[m, n+1/2] -$$

$$- \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left(H_z^{q+1/2}[m+1/2, n+1/2] - H_z^{q+1/2}[m-1/2, n+1/2] \right)$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{hzh}(m+1/2, n+1/2) = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \bigg|_{(m+1/2)\delta, (n+1/2)\delta}$$

$$C_{hze}(m+1/2, n+1/2) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \delta} \bigg|_{(m+1/2)\delta, (n+1/2)\delta}$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{exe}(m+1/2, n) = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \bigg|_{(m+1/2)\delta, n\delta}$$

$$C_{exh}(m+1/2, n) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \delta} \bigg|_{(m+1/2)\delta, n\delta}$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{eye}(m, n+1/2) = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \bigg|_{m\delta, (n+1/2)\delta}$$

$$C_{eyh}(m, n+1/2) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \delta} \bigg|_{m\delta, (n+1/2)\delta}$$

Программная реализация конечно-разностной схемы

$$\begin{aligned} H_z(m, n) = & C_{hzh}(m, n) * H_z(m, n) + \dots \\ & C_{hze}(m, n) * ((E_x(m, n + 1) - E_x(m, n) - \dots \\ & (E_y(m + 1, n) - E_y(m, n)))); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_x(m, n) = & C_{exe}(m, n) * E_x(m, n) + \dots \\ & C_{exh}(m, n) * (H_z(m, n) - H_z(m, n - 1)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_y(m, n) = & C_{eye}(m, n) * E_y(m, n) - \dots \\ & C_{eyh}(m, n) * (H_z(m, n) - H_z(m - 1, n)); \end{aligned}$$

Размеры массивов компонент поля E и H

Для применения граничных условий АВС необходимо, чтобы на границе области моделирования существовали касательные компоненты поля E .

Поэтому для сетки размера $M \times N$ размеры массивов для хранения компонент полей следующие:

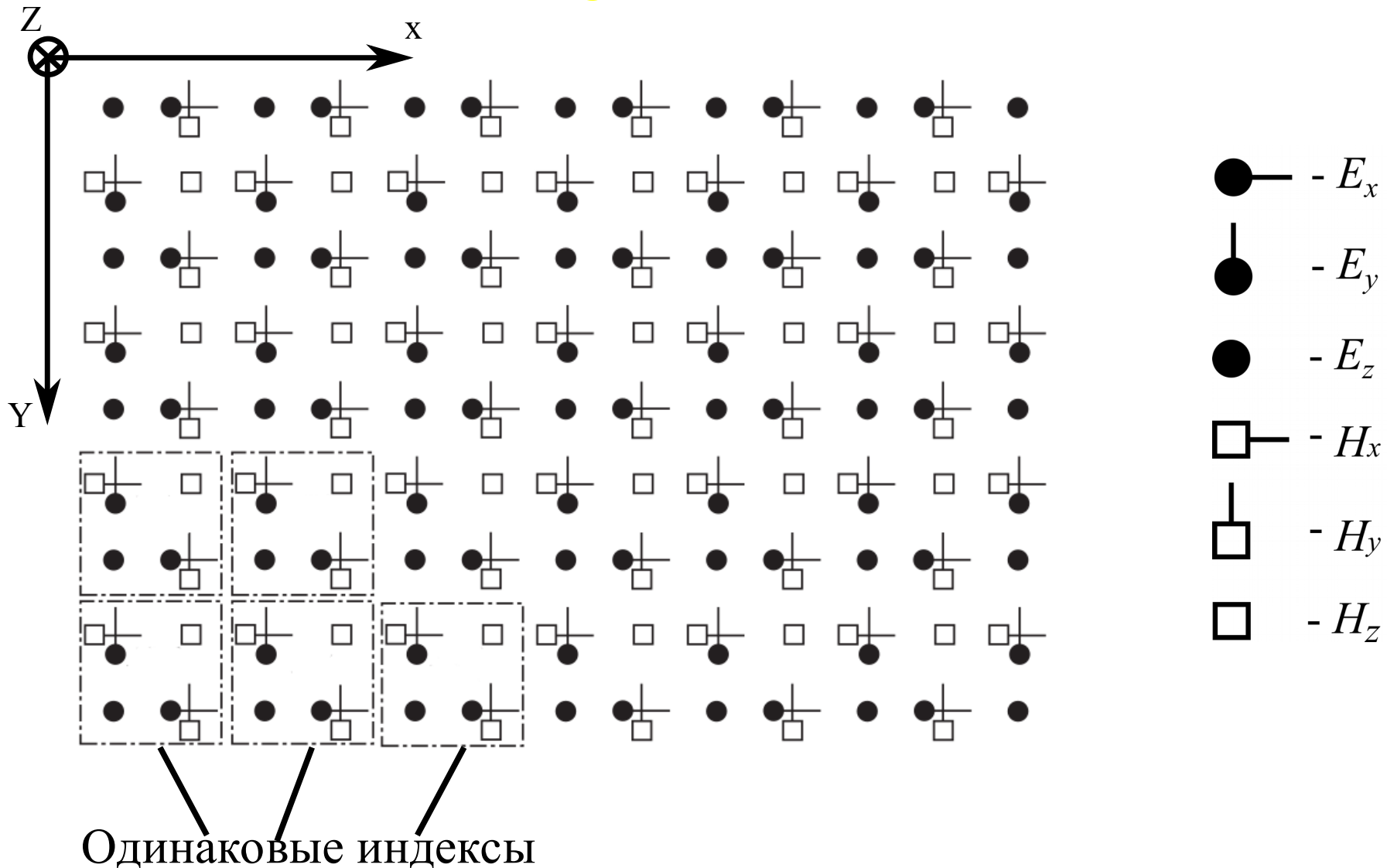
- $E_x[(M - 1) \times N]$
- $E_y[M \times (N - 1)]$
- $H_z[(M - 1) \times (N - 1)]$

**Демонстрация двумерного метода
FDTD для поляризации TM^z .
Граничные условия ABC.**

`fdtd_2d_TM_plainwave_abc.m`

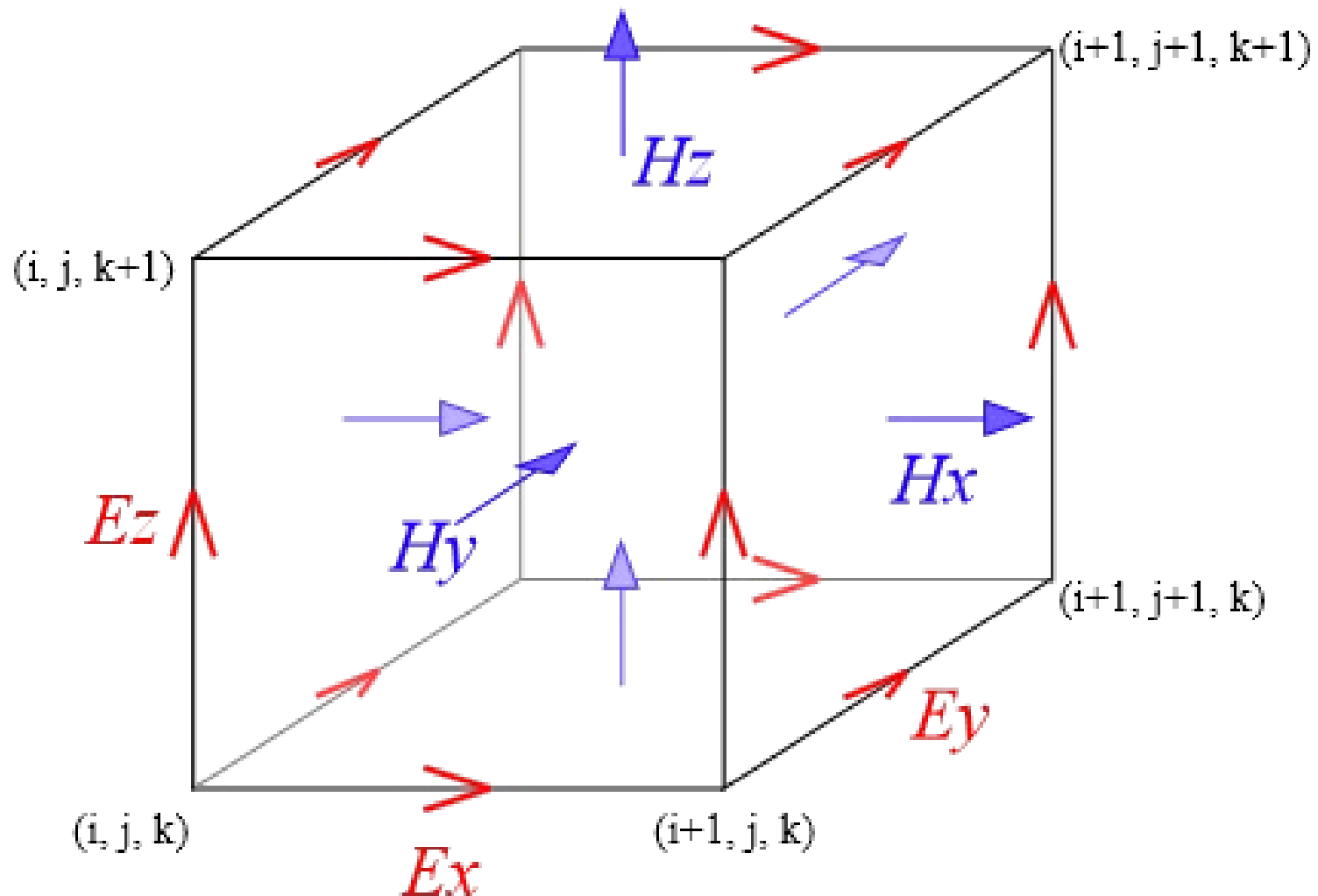
Объединенная пространственная сетка для двумерного метода FDTD для двух поляризаций

274



Ячейка для трехмерного метода FDTD

275



Модификации метода FDTD

- Метод FDTD в криволинейных системах координат.
- Уменьшение отражений от границ области моделирования.
- Использование неравномерных сеток разбиения.
- Использование ячеек неправильной формы.
- Учет временной дисперсии среды.
- Учет зависимости параметров среды от частоты.
- Метод FDTD с произвольным шагом по времени.