

**Московский Авиационный Институт  
(национальный исследовательский университет)**

---

# **Моделирование антенн и микроволновых устройств**

**«Метод конечных разностей  
во временной области (FDTD)»**

## Литература

John B. Schneider.  
Understanding the Finite-Difference Time-  
Domain Method

<http://www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd/>

## Материалы к лекциям

Исходные тексты программ:

<https://github.com/Jenyay/modelling>

# Уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ст}}) = \\ &= \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_{\text{ст}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

# Оператор набла ( $\nabla$ ) или оператор Гамильтона

5

$$\nabla \equiv \mathbf{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial}{\partial z}$$

# Свойства оператора набла ( $\nabla$ )

$$\nabla \varphi = \mathbf{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = ?$$

$\varphi$  - скалярное поле

# Свойства оператора набла ( $\nabla$ )

$$\nabla \varphi = \mathbf{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \text{grad } \varphi$$

$\varphi$  - скалярное поле

# Свойства оператора набла ( $\nabla$ )

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{a} &= \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \\ &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = ?\end{aligned}$$

$\mathbf{a}$  — векторное поле



# Свойства оператора набла ( $\nabla$ )

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{a} &= \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \\ &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{a}\end{aligned}$$

$\mathbf{a}$  — векторное поле

# Свойства оператора набла ( $\nabla$ )

$$\nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \text{rot } \mathbf{a}$$

$\mathbf{a}$  — векторное поле

# Уравнения Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ст}}) = \\ &= \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_{\text{ст}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{F}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \text{div } \mathbf{F}$$

# Одномерный метод FDTD

# FDTD. Одномерный случай.

## Закон Ампера

13

Пусть поле может меняться только вдоль оси  $x$ , а  $\mathbf{j} = 0$

$$\epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \mathbf{x}_0 \cdot 0 - \mathbf{y}_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

# FDTD. Одномерный случай. Закон Фарадея

14

Пусть поле может меняться только вдоль оси  $x$ , а  $\mathbf{j} = 0$

$$\begin{aligned} -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \nabla \times \mathbf{E} = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \mathbf{x}_0 \cdot 0 - \mathbf{y}_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{aligned}$$

# FDTD. Одномерный случай

Объединяем предыдущие уравнения

$$\epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -y_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} + z_0 \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$-\mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -y_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} + z_0 \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

# FDTD. Одномерный случай

$$\mathbf{x}_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mathbf{y}_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \mathbf{z}_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = -\mathbf{y}_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$-\mathbf{x}_0 \mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} - \mathbf{y}_0 \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} - \mathbf{z}_0 \mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\mathbf{y}_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial E_y}{\partial x}$$



# FDTD. Одномерный случай

Или в скалярном виде:

$$\mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$-\mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

# FDTD. Одномерный случай

Пусть существуют только  $E_z$  и  $H_y$  компоненты поля

$$\mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = -\frac{\partial H_y}{\partial x}$$

# Численный расчет производной функции

# Производная функции

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

## Правая разностная схема для численного дифференцирования

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \delta) - f(x_0)}{\delta} + O(\delta)$$

$O(\delta)$  — погрешность вычислений

# Ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!} =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!}, x_0 < \xi < x$$

Разложим функцию  $f(x)$  в ряд Тейлора  
вблизи точки  $x_0$  со смещением  $\delta$   
 $x = x_0 + \delta$

$$f(x_0 + \delta) = f(x_0) + \delta f'(x_0) + \frac{1}{2!} \delta^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!} \delta^3 f'''(x_0) + \dots,$$

Выражаем  $f'(x_0)$ :

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \delta) - f(x_0)}{\delta} - \frac{1}{2} \delta f''(x_0) - \frac{1}{6} \delta^2 f'''(x_0) - \dots,$$

$$O(\delta) = -\left(\frac{1}{2} \delta f''(x_0) + \dots\right)$$

Погрешность сравнима с  $\delta$ .



Разложим функцию  $f(x)$  в ряд Тейлора  
вблизи точки  $x_0$  со смещением  $\pm\delta/2$

$$x = x_0 \pm \frac{\delta}{2}, \quad x - x_0 = \pm \frac{\delta}{2}$$

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) = f(x_0) + \frac{\delta}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots,$$

$$f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) = f(x_0) - \frac{\delta}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots,$$

Вычтем первое выражение из второго

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) = \delta f'(x_0) + \frac{2}{3!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots,$$

Вычтем первое выражение из второго

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) = \delta f'(x_0) + \frac{2}{3!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots,$$

Поделим левую и правую части на  $\delta$

$$\frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)}{\delta} = f'(x_0) + \frac{1}{3!} \frac{\delta^2}{2^2} f'''(x_0) + \dots,$$

# Центральная конечно-разностная схема

$$f'(x_0) = \frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)}{\delta} + O(\delta^2)$$

Отбрасываем  $O(\delta^2)$

$$f'(x_0) \approx \frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)}{\delta}$$

Погрешность сравнима с  $\delta^2$ .

# Одномерный метод FDTD

# Дискретизация

$$E_z(x, t) = E_z(m\Delta x, q\Delta t) = E_z^q[m]$$

$$H_y(x, t) = H_y(m\Delta x, q\Delta t) = H_y^q[m]$$

$\Delta x$  — пространственное смещение

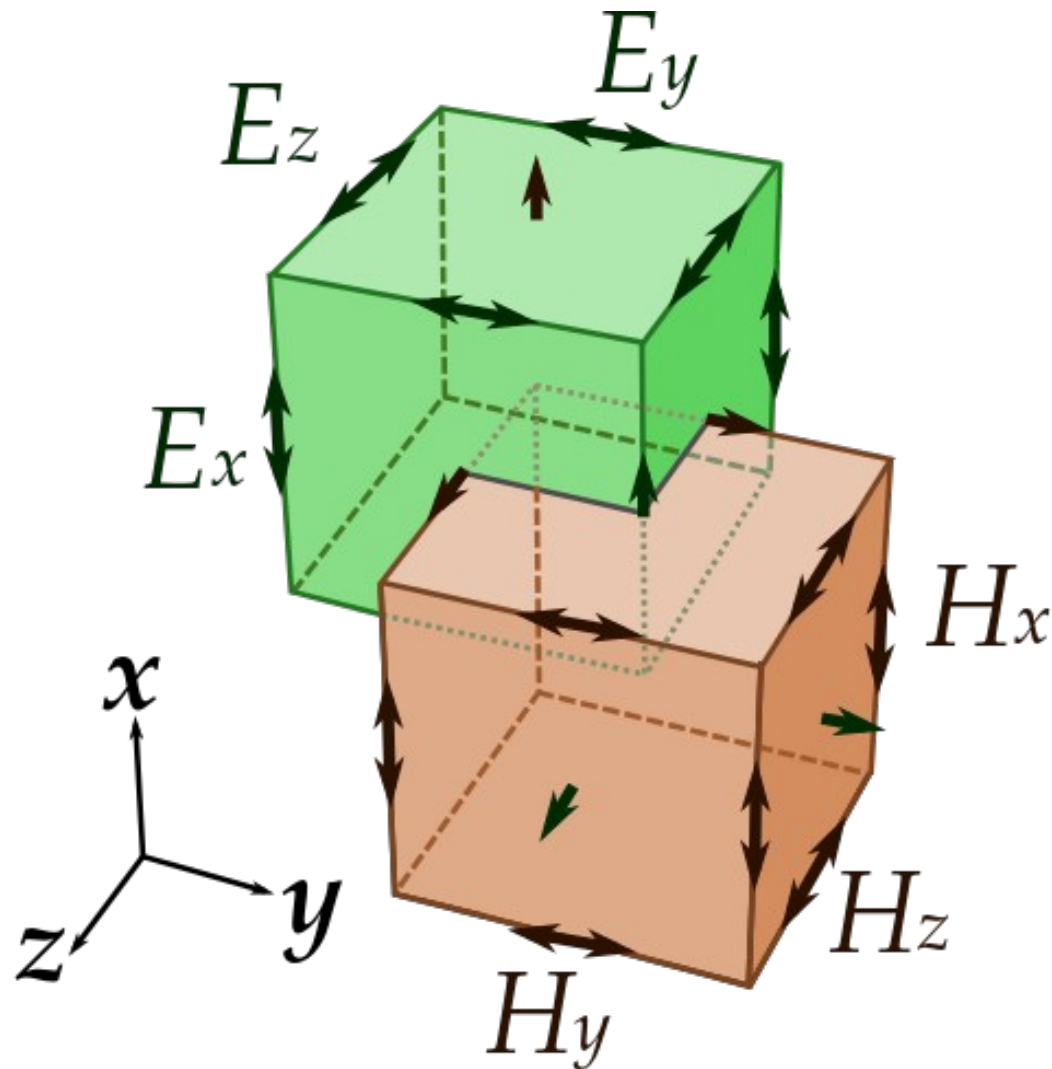
$\Delta t$  — временное смещение

$m$  — пространственный шаг

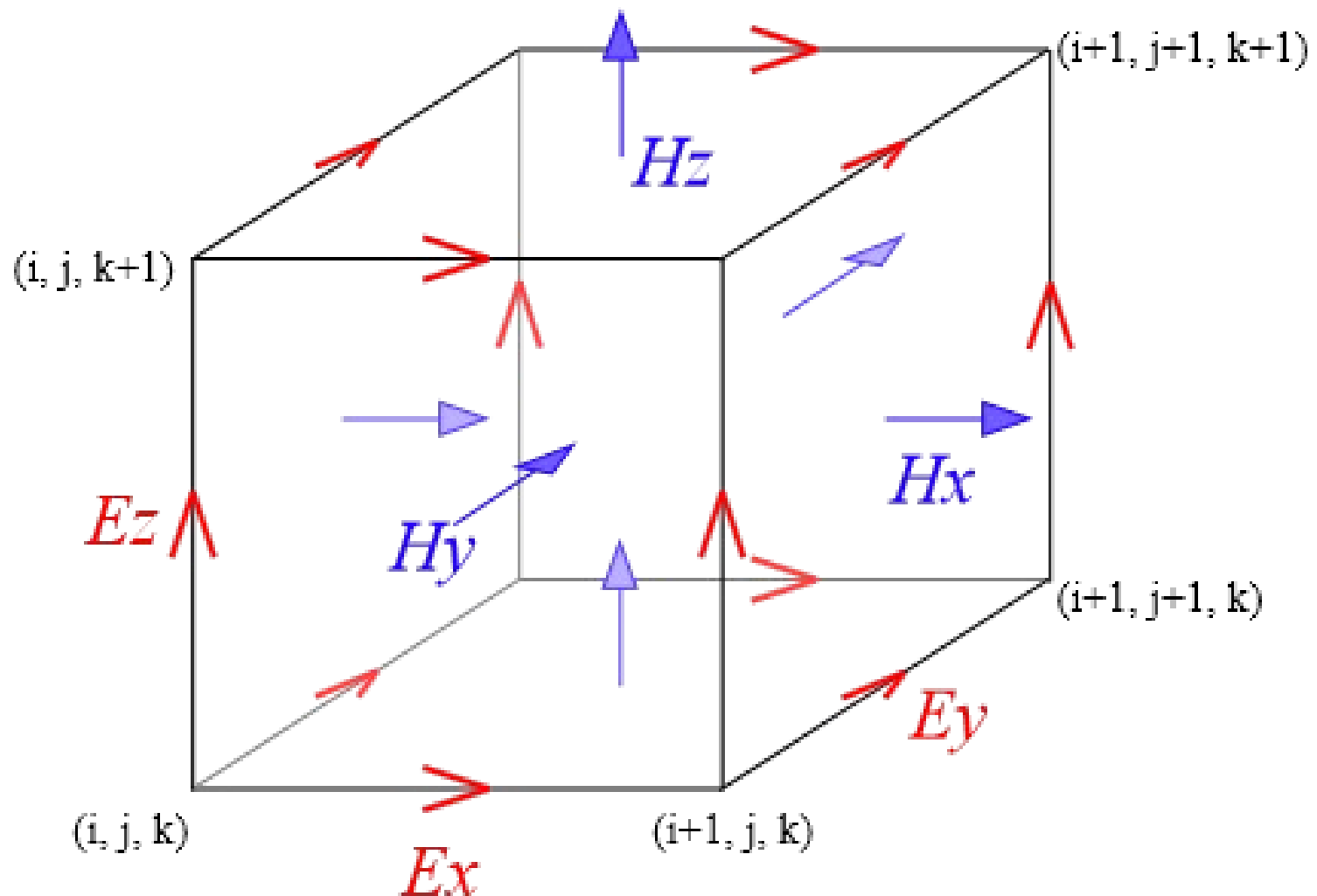
$q$  — временной шаг

# Трёхмерная ячейка для метода FDTD

31



# Ячейка для метода FDTD





# Пространственно-временная сетка для одномерного случая

33



# Переходим к конечным разностям.

## Закон Фарадея

$$\mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \Big|_{(m+1/2)\Delta x, q\Delta t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \Big|_{(m+1/2)\Delta x, q\Delta t}$$

# Переходим к конечным разностям.

## Закон Фарадея

$$\mu \mu_0 \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{E_z^q[m+1] - E_z^q[m]}{\Delta_x}$$

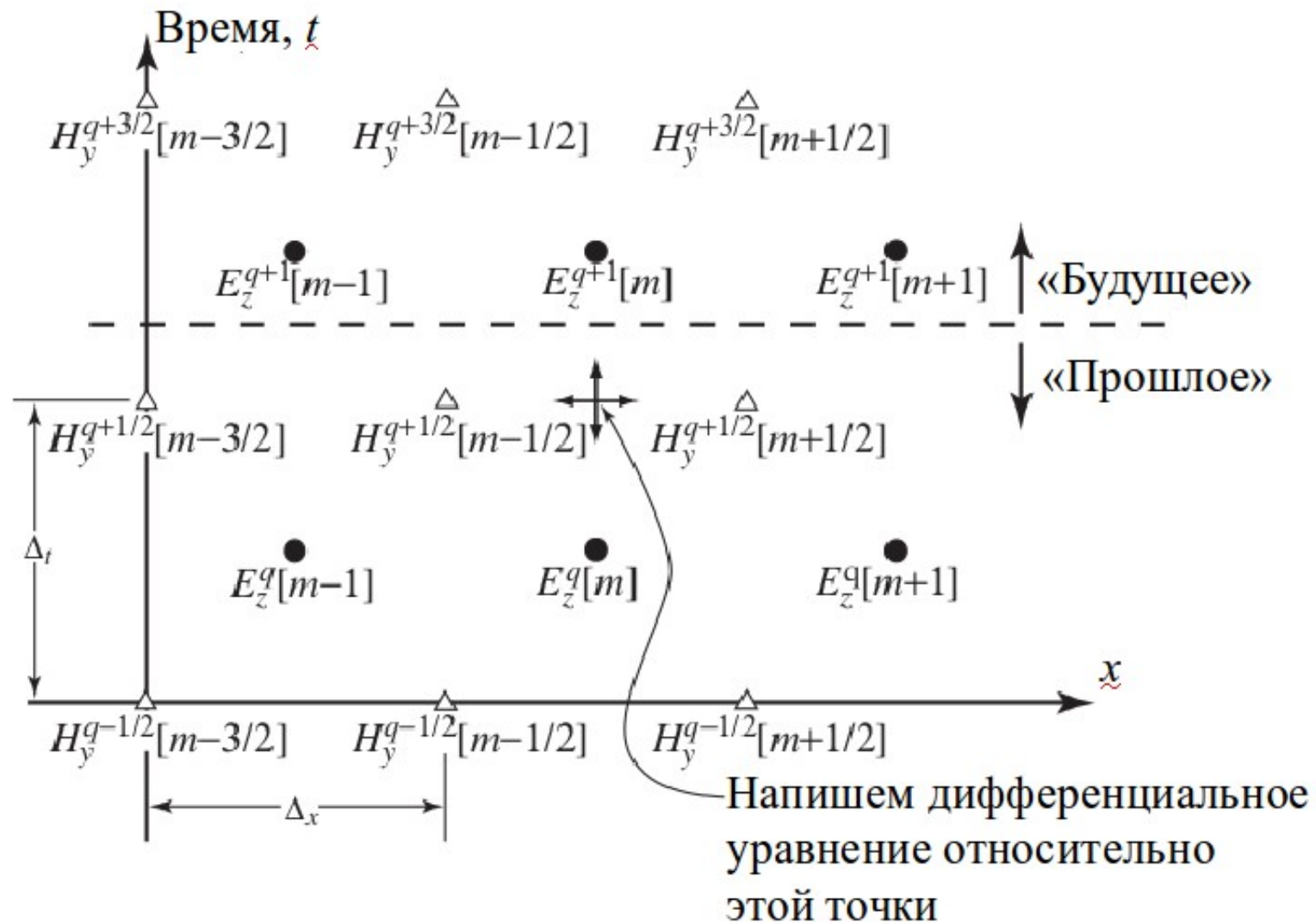
# Переходим к конечным разностям.

## Закон Фарадея

Из предыдущего уравнения

$$\begin{aligned}
 H_y^{q+1/2}[m+1/2] &= \\
 &= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} \left( E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right)
 \end{aligned}$$

# Пространственно-временная сетка для одномерного случая



# Переходим к конечным разностям.

## Закон Ампера

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \Big|_{m \Delta x, (q+1/2) \Delta t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \Big|_{m \Delta x, (q+1/2) \Delta t}$$

# Переходим к конечным разностям.

## Закон Ампера

$$\begin{aligned} \varepsilon \varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^q[m]}{\Delta_t} = \\ = \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x} \end{aligned}$$

# Переходим к конечным разностям.

## Закон Ампера

Из предыдущего уравнения

$$E_z^{q+1}[m] =$$

$$= E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left( H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$



# Переходим к конечным разностям

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} \left( E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right)$$


---

$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$= E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left( H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$

# Критерий устойчивости Куранта-Фридриха-Леви

$$v_{max} \Delta_t \leq \frac{1}{\sqrt{\Delta_x^{-2} + \Delta_y^{-2} + \Delta_z^{-2}}}$$

$$v_{max} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{min} \mu_{min}}}$$


---

Если  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \Delta$

$$v_{max} \Delta_t \leq \frac{\Delta}{\sqrt{N}}$$

$N$  — размерность пространства ( $N = 1, 2, 3$ )

# Критерий устойчивости для одномерной задачи

$c\Delta_t$  — максимальное расстояние, которое может пройти волна за один временной шаг  $\Delta_t$  в вакууме.

Число Куранта

$$S_c = c\Delta_t / \Delta_x$$

Условие устойчивости

$$c\Delta_t \leq \Delta_x$$

или

$$S_c \leq 1$$

# Коэффициенты в конечно-разностной схеме

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} (E_z^q[m+1] - E_z^q[m])$$


---

$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$= E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} (H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2])$$

# Коэффициенты в конечно-разностной схеме

$$\frac{1}{\mu \mu_0} \frac{\Delta_t}{\Delta_x} = \frac{1}{\mu \mu_0} \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta_t}{\Delta_x} = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{c \Delta_t}{\Delta_x} = \frac{1}{\mu W_0} S_c$$

$$W_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$$

- волновое сопротивление свободного пространства

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

- скорость света в вакууме

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$$

$$\epsilon_0 = 1 / (\mu_0 c^2) = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

# Коэффициенты в конечно-разностной схеме

$$\frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{\Delta_t}{\Delta_x} = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta_t}{\Delta_x} = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{c \Delta_t}{\Delta_x} = \frac{W_0}{\varepsilon} S_c$$

$$W_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$$

- волновое сопротивление свободного пространства

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

- скорость света в вакууме

# Коэффициенты в конечно-разностной схеме

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \left( E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right) \frac{1}{\mu W_0} S_c$$


---

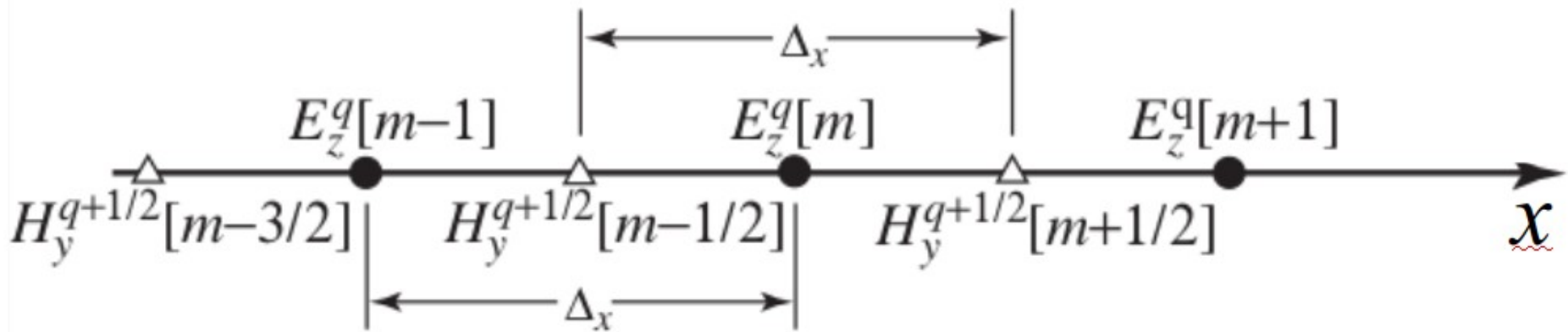
$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$= E_z^q[m] + \left( H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right) \frac{W_0}{\varepsilon} S_c$$


---

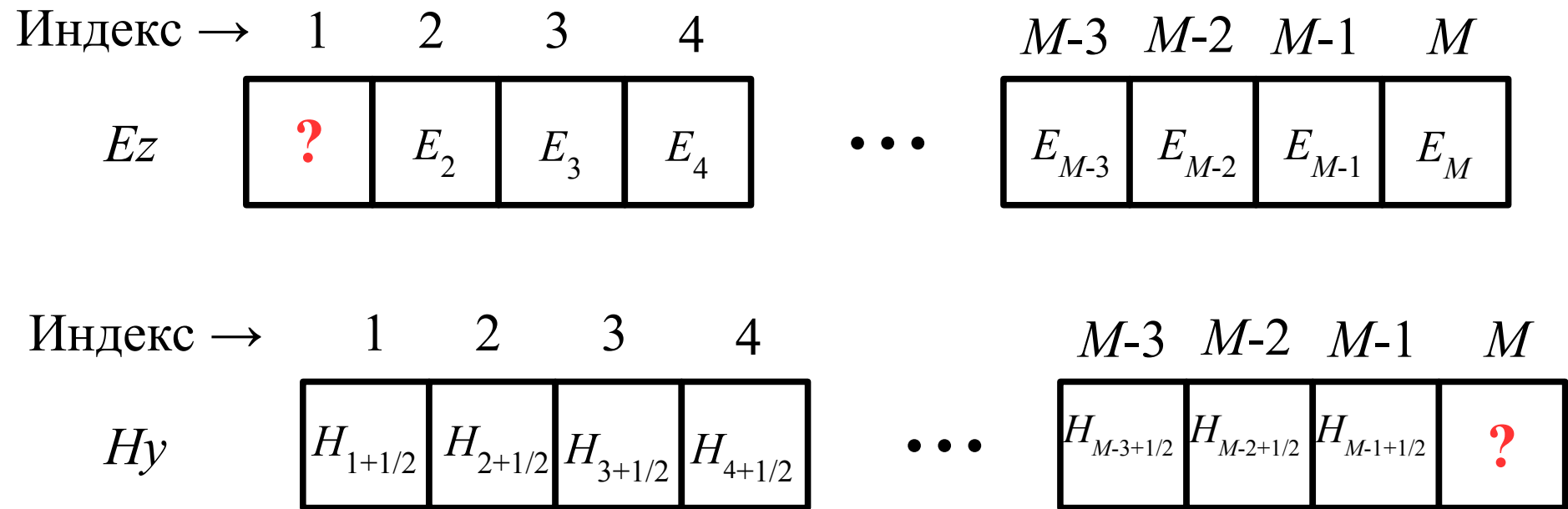
# Одномерная пространственная сетка

48

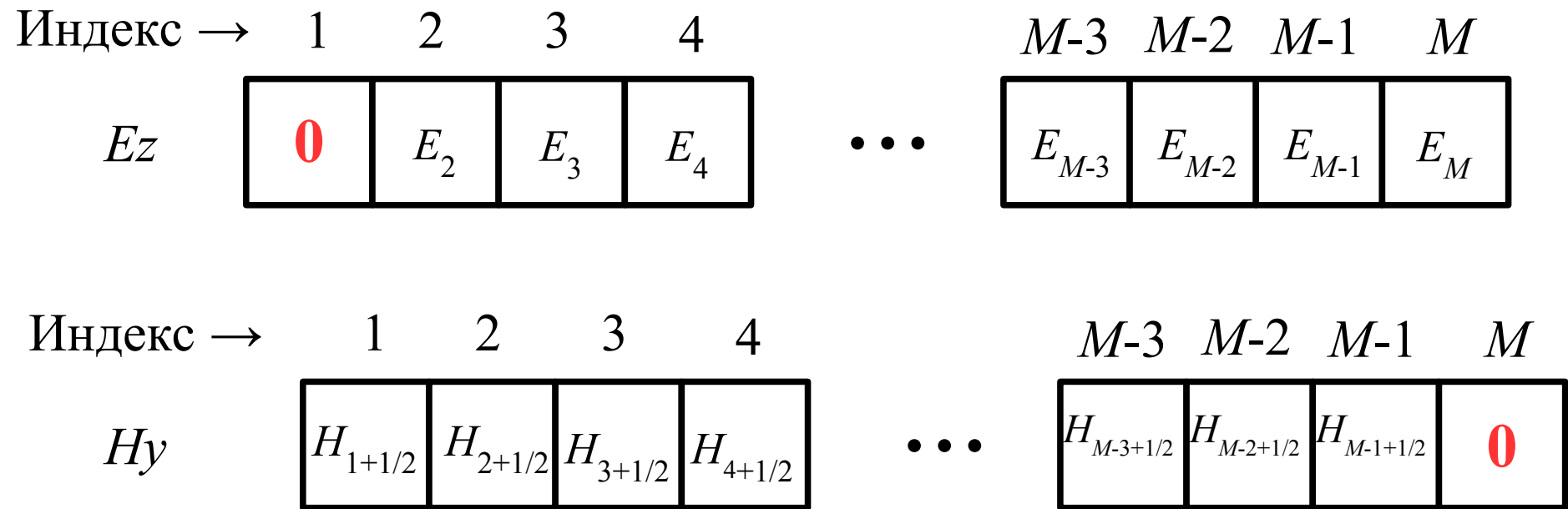




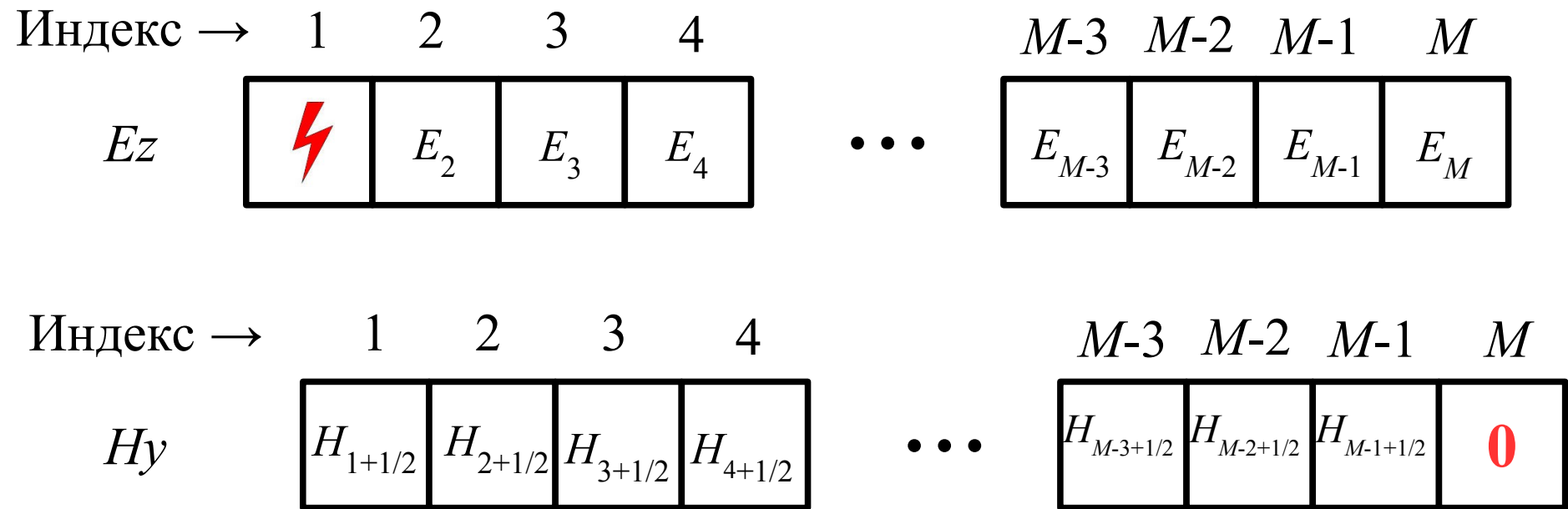
# Хранение компонент поля в реализации FDTD



# Хранение компонент поля в реализации FDTD



# Хранение компонент поля в реализации FDTD



# Источник в разностной схеме

$$f(t) = f(q \Delta_t) = e^{-\left(\frac{q \Delta_t - 30 \Delta_t}{10 \Delta_t}\right)^2} = e^{-\left(\frac{q - 30}{10}\right)^2} = f[q]$$

# Схема алгоритма FDTD

Начало.

Задание начальных условий  $E_z^0, H_y^{1/2}$ .

Цикл по времени  $t = 1 \dots \text{maxTime}$ .

    Цикл по пространству  $m = 1 \dots \text{maxSize} - 1$ .

        Расчет  $H_y^{q+1/2}$

    Цикл по пространству  $m = 2 \dots \text{maxSize}$ .

        Расчет  $E_z^{q+1}$

    Ввод поля с помощью источников возбуждения.

Вывод результатов.

Конец.

# Реализация одномерного FDTD в MATLAB

Распространение импульса в свободном пространстве.

«Жесткий» источник.

Число Куранта равно 1.

fdtd\_first\_version\_01.m  
fdtd\_first\_version\_02.m  
fdtd\_first\_version\_03.m  
fdtd\_first\_version\_04.m

# Измерение скорости распространения волны

`fdtd_first_version_speed.m`

# Отображение компонент поля $E$ и $H$

`fdtd_first_version_EH.m`



# Достоверность расчета

- Скорость распространения волны в вакууме равна скорости света.
- Коэффициент отражения электрической компоненты поля от РЕС равен  $-1$ .
- Коэффициент отражения электрической компоненты поля от РМС равен  $+1$ .
- Коэффициент отражения магнитной компоненты поля от РЕС равен  $+1$ .
- Коэффициент отражения магнитной компоненты поля от РМС равен  $-1$ .

## **«Жесткий» источник внутри области моделирования**

**fdtd\_hard\_source.m**

## Аддитивный («мягкий») источник

# АДДИТИВНЫЙ ИСТОЧНИК

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \mathbf{j}$$

# АДДИТИВНЫЙ ИСТОЧНИК в разностной схеме

$$\begin{aligned}
 E_z^{q+1}[m] = & \\
 = E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} & \left( H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right) - \\
 - \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0} \dot{j}_z^{q+1/2}[m] &
 \end{aligned}$$


---

# АДДИТИВНЫЙ ИСТОЧНИК в разностной схеме

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left( H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^{q+1}[m] - \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0} j_z^{q+1/2}[m]$$

ИЛИ

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^{q+1}[m] + E_{z\,cm}^{q+1}[m]$$

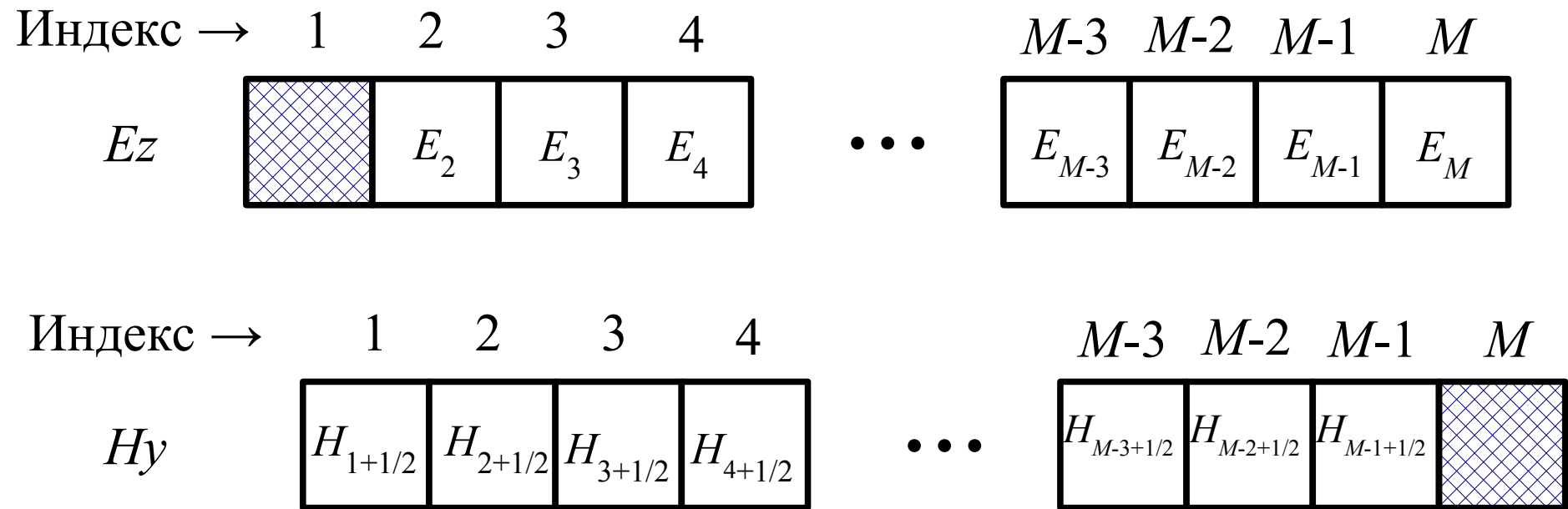
# Демонстрация аддитивного источника

`fdtd_additive_source.m`

# Простейшие поглощающие граничные условия



# Хранение компонент поля в реализации FDTD



# Простейшие поглощающие граничные условия

Работают только для  $S_c = 1$

$$E_z^{q+1}[1] = E_z^q[2]$$

$$H_y^{q+1/2}[\text{end}] = H_y^{q-1/2}[\text{end} - 1]$$

# Демонстрация поглощающих условий

# Метод Total-Field / Scattered-Field

# Граничные условия Total-Field / Scattered-Field

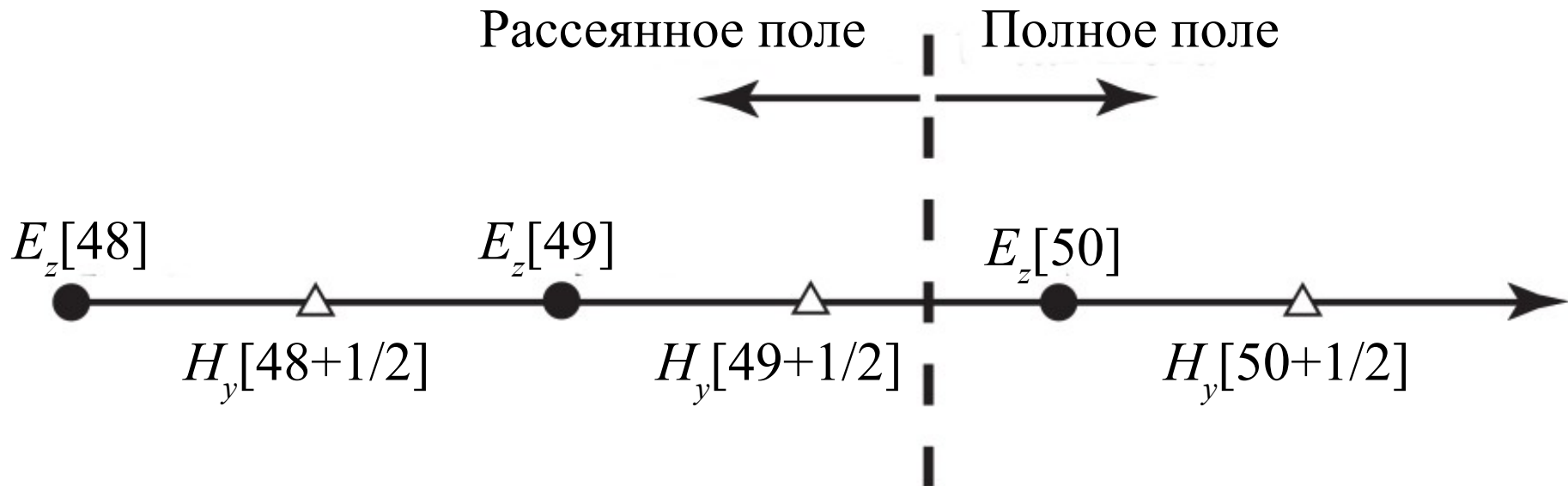
$$\mathbf{E}_{\text{полн}} = \mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{расс}}$$

$$\mathbf{H}_{\text{полн}} = \mathbf{H}_{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\text{расс}}$$

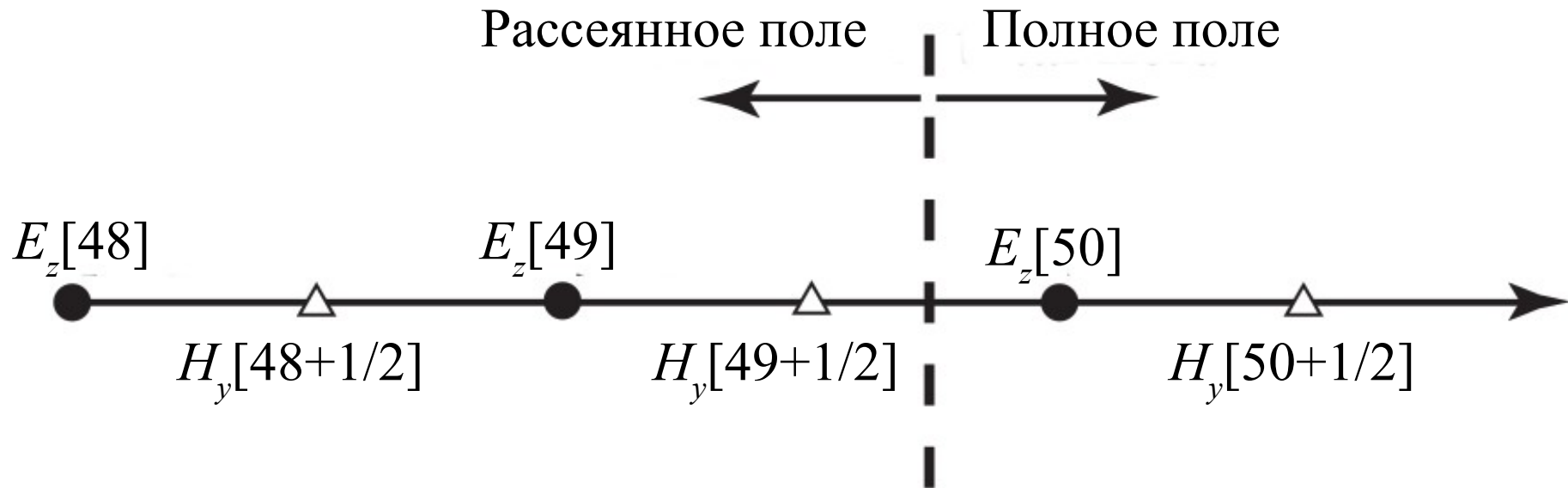
# Граничные условия Total-Field / Scattered-Field

$$\mathbf{E}_{\text{полн}} = \mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{расс}}$$

$$\mathbf{H}_{\text{полн}} = \mathbf{H}_{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\text{расс}}$$



# Граничные условия Total-Field / Scattered-Field



$H_y[49 + 1/2] = H_y[50 - 1/2]$  — последняя ячейка в области  
рассеянного поля.

$E_z[50]$  — первая ячейка в области полного поля.

# Граничные условия Total-Field / Scattered-Field

**Важно!** Только рассеянное поле должно использоваться при обновлении ячеек в области рассеянного поля.

Только полное поле должно использоваться при обновлении ячеек в области полного поля



# Поле на границе

## Total-Field / Scattered-Field

Рассмотрим электрическую компоненту поля  $E_z$

проблема

$$\overbrace{E_z^{q+1}[50]}^{\text{полн}} = \overbrace{E_z^q[50]}^{\text{полн}} + \frac{\Delta_t}{\epsilon \epsilon_0 \Delta_x} \left( \overbrace{H_y^{q+1/2}[50+1/2]}^{\text{полн}} - \overbrace{H_y^{q+1/2}[50-1/2]}^{\text{расс}} \right)$$

# Поле на границе

## Total-Field / Scattered-Field

Введем дополнительный магнитный источник в точке  $(50 - 1/2)\Delta x$  для момента времени  $(q + 1/2)\Delta t$

$$\begin{aligned}
 \overbrace{E_z^{q+1}[50]}^{\text{полн}} &= \overbrace{E_z^q[50]}^{\text{полн}} + \\
 &+ \frac{\Delta_t}{\epsilon \epsilon_0 \Delta_x} \left( \overbrace{H_y^{q+1/2}[50+1/2]}^{\text{полн}} - \overbrace{\left( H_y^{q+1/2}[50-1/2] + \left( -\frac{1}{W} E_z^{\text{inc}}[50-1/2, q+1/2] \right) \right)}^{\text{полн}} \right)
 \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{расс}}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{пад}}$

# Total-Field / Scattered-Field

$$E_z^{q+1}[50] = E_z^q[50] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left( H_y^{q+1/2}[50+1/2] - H_y^{q+1/2}[50-1/2] \right)$$

$$E_z^{q+1}[50] = E_z^{q+1}[50] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{W} E_z^{inc}[50-1/2, q+1/2]$$

# Total-Field / Scattered-Field

$$E_z^{q+1}[50] = E_z^{q+1}[50] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{W} E_z^{inc}[50 - 1/2, q + 1/2]$$

$$W = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}} = W_0 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad \left| \quad \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} = \frac{W_0 S_c}{\varepsilon}$$

$$E_z^{q+1}[50] = E_z^{q+1}[50] + \frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} E_z^{inc}[50 - 1/2, q + 1/2]$$


---

Для свободного пространства и если  $S_c = 1$ :


$$E_z^{q+1}[50] = E_z^{q+1}[50] + E_z^{inc}[\underline{50 - 1/2}, \underline{q + 1/2}]$$

# Поле на границе

## Total-Field / Scattered-Field

$$\overbrace{H_y^{q+1/2}[50-1/2]}^{racc} = \overbrace{H_y^{q-1/2}[50-1/2]}^{racc} + \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x} \left( \overbrace{E_z^q[50]}^{полн} - \overbrace{E_z^q[49]}^{racc} \right)$$

проблема



# Поле на границе

## Total-Field / Scattered-Field

$$\begin{aligned}
 \overbrace{H_y^{q+1/2}[50-1/2]}^{\text{расс}} &= \overbrace{H_y^{q-1/2}[50-1/2]}^{\text{расс}} + \\
 &+ \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} \left( \overbrace{\left( \overbrace{E_z^q[50]}^{\text{полн}} - \overbrace{E_z^{inc}[50, q]}^{\text{пад}} \right)}^{\text{расс}} - \overbrace{E_z^q[49]}^{\text{расс}} \right)
 \end{aligned}$$

# Поле на границе

## Total-Field / Scattered-Field

$$H_y^{q+1/2}[50-1/2] = H_y^{q-1/2}[50-1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} (E_z^q[50] - E_y^q[49])$$

$$H_y^{q+1/2}[50-1/2] = H_y^{q+1/2}[50-1/2] - \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} E_z^{inc}[50, q]$$

# Поле на границе

## Total-Field / Scattered-Field

Для свободного пространства и  $S_c = 1$ :

$$H_y^{q+1/2}[50-1/2] = H_y^{q-1/2}[50-1/2] + \frac{1}{W_0} \left( E_z^q[50] - E_z^q[49] \right)$$

$$H_y^{q+1/2}[50-1/2] = H_y^{q+1/2}[50-1/2] - \frac{1}{W_0} E_z^{inc}[50, q]$$



# Уравнение плоской волны для гауссова сигнала

# Волновое уравнение

Волновое уравнение при отсутствии сторонних токов:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

# Одномерное волновое уравнение

$f$  — одномерная функция

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

# Решение одномерного волнового уравнения

$f(\xi)$  — решение волнового уравнения, если:

- $f(\xi)$  дважды дифференцируема
- $\xi$  можно заменить на  $t \pm x / v$   
(для одномерного случая)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0}}$$

$$f(\xi) = f(t \pm x / v) = f(x, t)$$

# Используемый источник

$$f(t) = f(q \Delta_t) = e^{-\left(\frac{q \Delta_t - 30 \Delta_t}{10 \Delta_t}\right)^2} = e^{-\left(\frac{q - 30}{10}\right)^2} = f[q]$$

# Граничные условия Total-Field / Scattered-Field

Делаем замену  $t$  на  $t - x / v$

$$t - \frac{x}{v} = q \Delta_t - \frac{m \Delta_x}{v} = q \Delta_t - \frac{m \Delta_x \sqrt{\epsilon \mu}}{c} =$$

$$= \left( q - \frac{m \Delta_x \sqrt{\epsilon \mu}}{c \Delta_t} \right) \Delta_t = \left( q - \frac{m \sqrt{\epsilon \mu}}{S_c} \right) \Delta_t$$

Для свободного пространства и  $S_c = 1$ :

$$t - \frac{x}{c} = (q - m) \Delta_t$$

# Граничные условия Total-Field / Scattered-Field

$$E_z^{\text{inc}}[m, q] = e^{-\left(\frac{(q - m\sqrt{\epsilon\mu}/S_c)\Delta_t - 30\Delta_t}{10\Delta_t}\right)^2} =$$

$$= e^{-\left(\frac{(q - m\sqrt{\epsilon\mu}/S_c) - 30}{10}\right)^2}$$

$$H_y^{\text{inc}}[m, q] = -\sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon}{\mu_0\mu}} E_z^{\text{inc}}[m, q] =$$

$$= -\frac{1}{W} e^{-\left(\frac{(q - m\sqrt{\epsilon\mu}/S_c) - 30}{10}\right)^2}$$

# Граничные условия Total-Field / Scattered-Field

Для свободного пространства и  $S_c = 1$ :

$$E_z^{\text{inc}}[m, q] = e^{-\left(\frac{(q-m)\Delta_t - 30\Delta_t}{10\Delta_t}\right)^2} = e^{-\left(\frac{(q-m)-30}{10}\right)^2}$$

$$H_y^{\text{inc}}[m, q] = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_z^{\text{inc}}[m, q] = -\frac{1}{W_0} e^{-\left(\frac{(q-m)-30}{10}\right)^2}$$



# Поле на границе

## Total-Field / Scattered-Field

Пусть для введенного источника  $x = 0$  соответствует 50-й ячейке

$$H_y^{q+1/2}[50-1/2] = H_y^{q+1/2}[50-1/2] - \frac{1}{W_0} E_z^{inc}[0, q]$$

$$E_z^{q+1}[50] = E_z^{q+1}[50] + E_z^{inc}[-1/2, q+1/2]$$

# Граничные условия Total-Field / Scattered-Field

$$E_z^{\text{inc}} \left[ -1/2, q+1/2 \right] = e^{-\left( \frac{((q+0.5) - (-0.5)) - 30}{10} \right)^2}$$

$$E_z^{\text{inc}} \left[ 0, q \right] = e^{-\left( \frac{q - 30}{10} \right)^2}$$

# **Демонстрация гауссова импульса, распространяющегося в одну сторону**

# **Моделирование распространения электромагнитной волны в неоднородных средах**

# Конечно-разностная схема

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \left( E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right) \frac{1}{\mu W_0} S_c$$


---

$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$= E_z^q[m] + \left( H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right) \frac{W_0}{\varepsilon} S_c$$


---

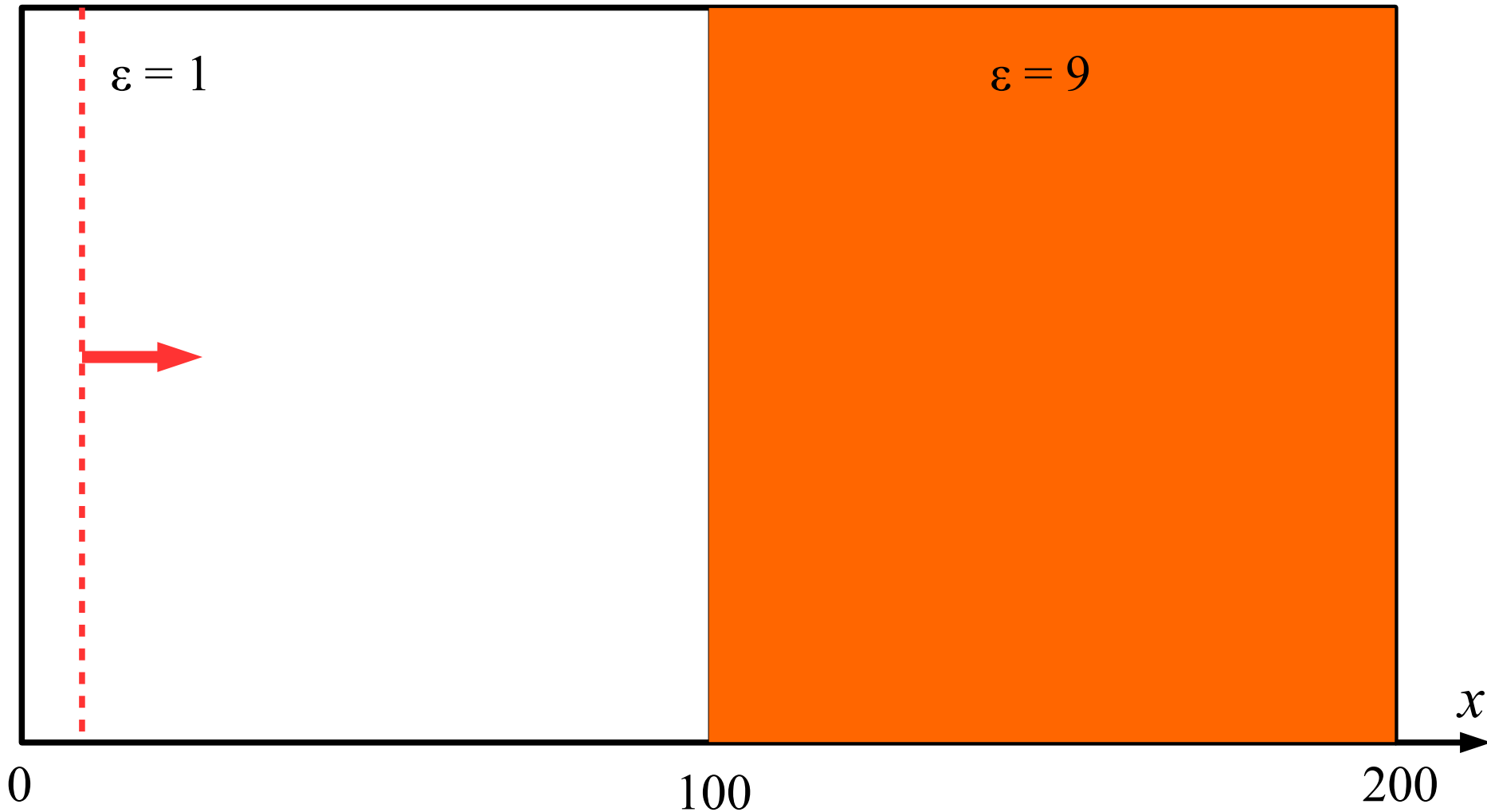
# Учет параметров среды

Если  $\varepsilon = f(x)$

$$Ez(m) = Ez(m) + (Hy(m) - Hy(m - 1)) * Sc * W0 / eps(m);$$

$$Hy(m) = Hy(m) + (Ez(m + 1) - Ez(m)) * Sc / (W0 * mu(m));$$

# Геометрия решаемой задачи

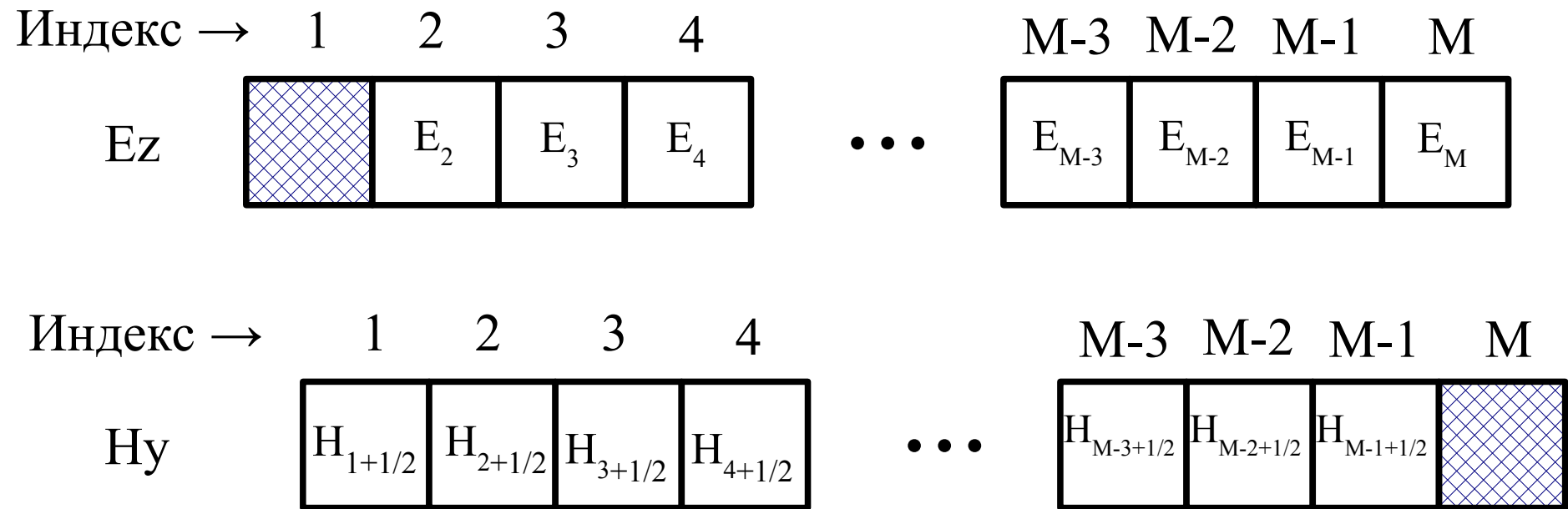


# Демонстрация моделирования распространения электромагнитной волны в неоднородных средах



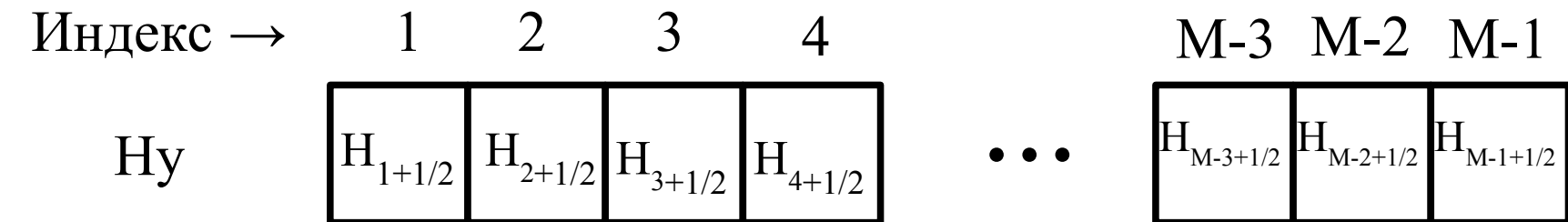
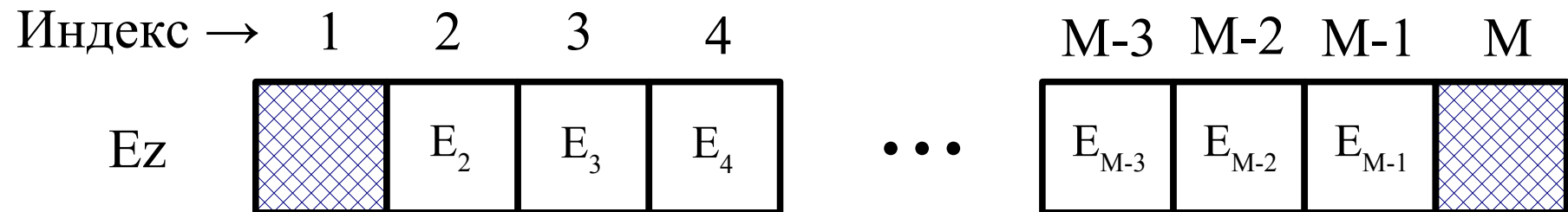
# Структура массивов полей

Было в предыдущих примерах:



# Структура массивов полей

## Стало:



**Демонстрация моделирования  
распространения  
электромагнитной волны в  
неоднородных средах**

# Коэффициенты отражения и прохождения

Для волны, падающей по нормали:

Коэффициент отражения:

$$\Gamma = \frac{\mathbf{E}_{\text{отр}}}{\mathbf{E}_{\text{пад}}} = \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}$$

Коэффициент прохождения:

$$T = \frac{\mathbf{E}_{\text{пр}}}{\mathbf{E}_{\text{пад}}} = \frac{2W_2}{W_2 + W_1}$$

$$W = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}} = W_0 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

# Коэффициенты отражения и прохождения идеального диэлектрика

Для границы раздела двух диэлектриков  
 $\mu = 1$

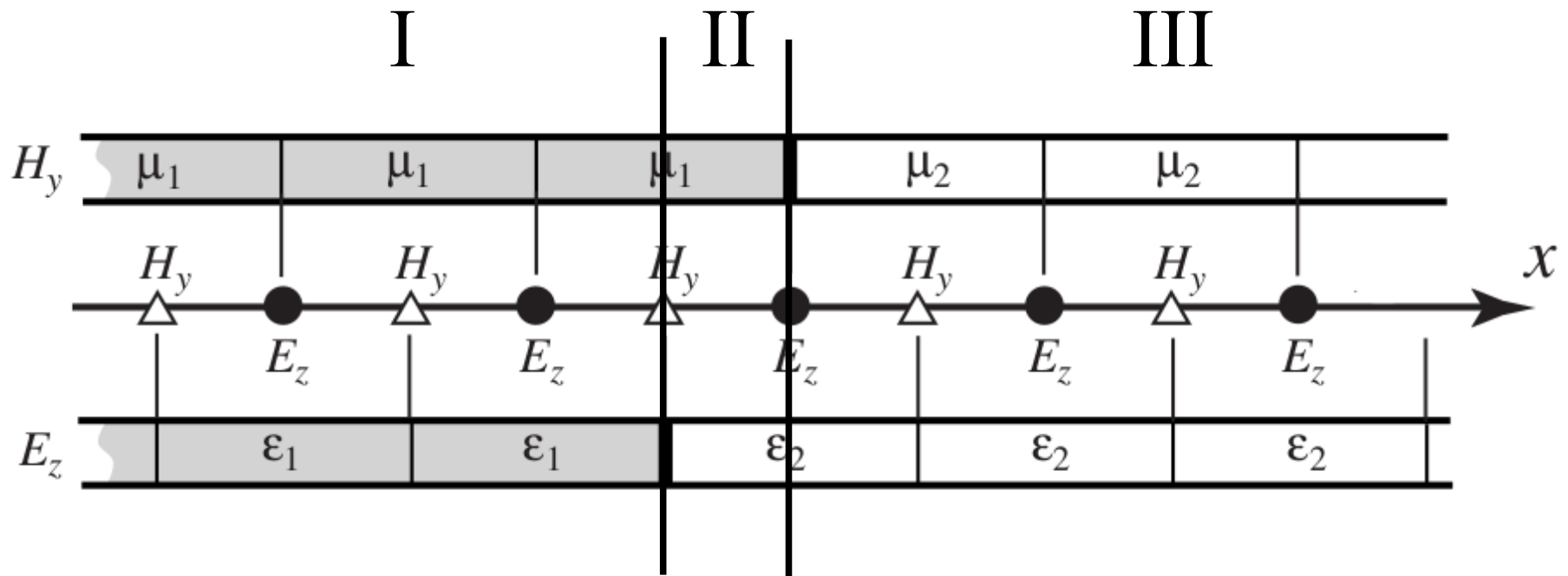
Коэффициент отражения:

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}}$$

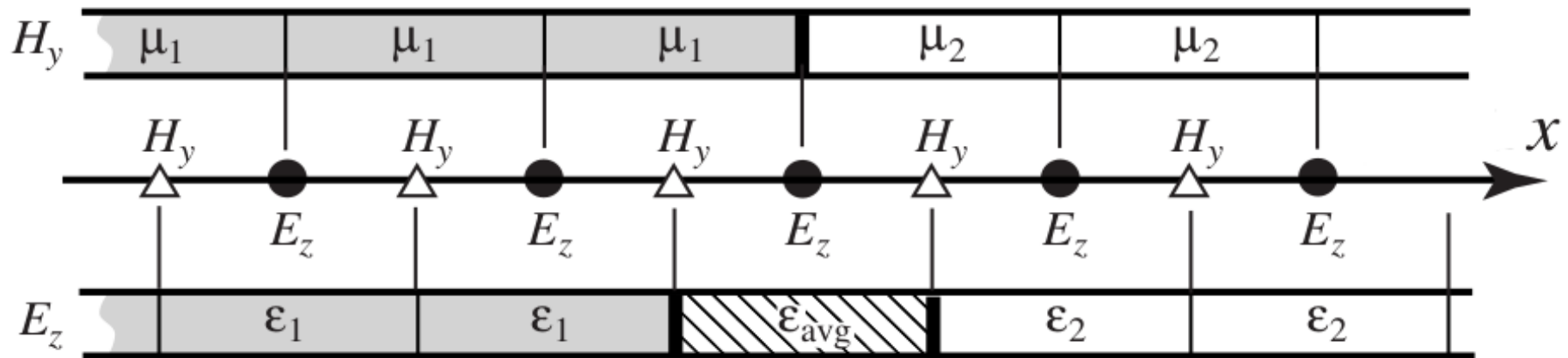
Коэффициент прохождения:

$$T = \frac{2\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}}$$

# Погрешность из-за дискретной сетки



# Погрешность из-за дискретной сетки



**Демонстрация метода  
Total Field / Scattered Field  
в диэлектрике**

`fdtd_tfsf_medium_gauss.m`



**Моделирование  
распространения  
электромагнитной волны в  
среде с потерями**

# Закон Ампера для среды с потерями

111

$$\mathbf{j} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H}$$

или

$$\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H}$$

# Закон Ампера для среды с потерями

112

Для одномерного случая:

$$\sigma E_z + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

# Закон Ампера для среды с потерями в дискретном виде

Запишем производные в дискретном виде  
для точки  $(m\Delta_x; (q + 1/2)\Delta_t)$ :

$$\sigma E_z^{q+1/2}[m] + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^q[m]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x}$$

# Закон Ампера для среды с потерями в дискретном виде

проблема

$$\sigma E_z^{q+1/2}[m] + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^q[m]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x}$$

$$E_z^{q+1/2}[m] \approx \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^q[m]}{2}$$

# Закон Ампера для среды с потерями в дискретном виде

$$E_z^{q+1/2}[m] \approx \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^q[m]}{2}$$

тогда:

$$\begin{aligned} \sigma \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^q[m]}{2} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^q[m]}{\Delta_t} &= \\ = \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x} \end{aligned}$$

# Расчет электрической компоненты поля для среды с потерями

$$E_z^{q+1}[m] = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_z^q[m] +$$

$$+ \frac{\frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0} \Delta_x}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \left( H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$



# Расчет электрической компоненты поля для среды с потерями

$$\begin{aligned}
 E_z^{q+1}[m] = & \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_z^q[m] + \\
 & + \frac{\frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0} \Delta_x}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \left( H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)
 \end{aligned}$$

# Расчет электрической компоненты поля для среды с потерями

Для случая  $\sigma = 0$  См/м:

$$E_z^{q+1}[m] =$$

$$= E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left( H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$

# Закон Фарадея для среды с потерями

$$-\dot{\mathbf{j}}_m - \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}$$

или

$$-\sigma_m \mathbf{H} - \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}$$

# Закон Фарадея для среды с потерями

Для одномерного случая:

$$\sigma_m H_y + \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

# Закон Фарадея для среды с потерями в дискретном виде

Запишем производные в дискретном виде  
для точки  $((m + 1/2)\Delta_x; q\Delta_t)$ :

проблема

$$\sigma_m H_y^q[m+1/2] + \mu \mu_0 \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{E_z^q[m+1] - E_z^q[m]}{\Delta_x}$$

$$H_y^q[m+1/2] \approx \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] + H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{2}$$

# Закон Фарадея для среды с потерями в дискретном виде

$$H_y^q[m+1/2] \approx \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] + H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{2}$$


---

$$\begin{aligned} & \sigma_m \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] + H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{2} + \\ & + \mu \mu_0 \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{\Delta_t} = \\ & = \frac{E_z^q[m+1] - E_z^q[m]}{\Delta_x} \end{aligned}$$

# Расчет магнитной компоненты поля для среды с потерями

$$\begin{aligned}
 H_y^{q+1/2}[m+1/2] = & \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \\
 & + \frac{\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0} \Delta_x}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \left( E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right)
 \end{aligned}$$



# Расчет магнитной компоненты поля

Для случая  $\sigma_m = 0$ :

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} \left( E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right)$$

# Моделирование среды с потерями.

## Комментарии к реализации

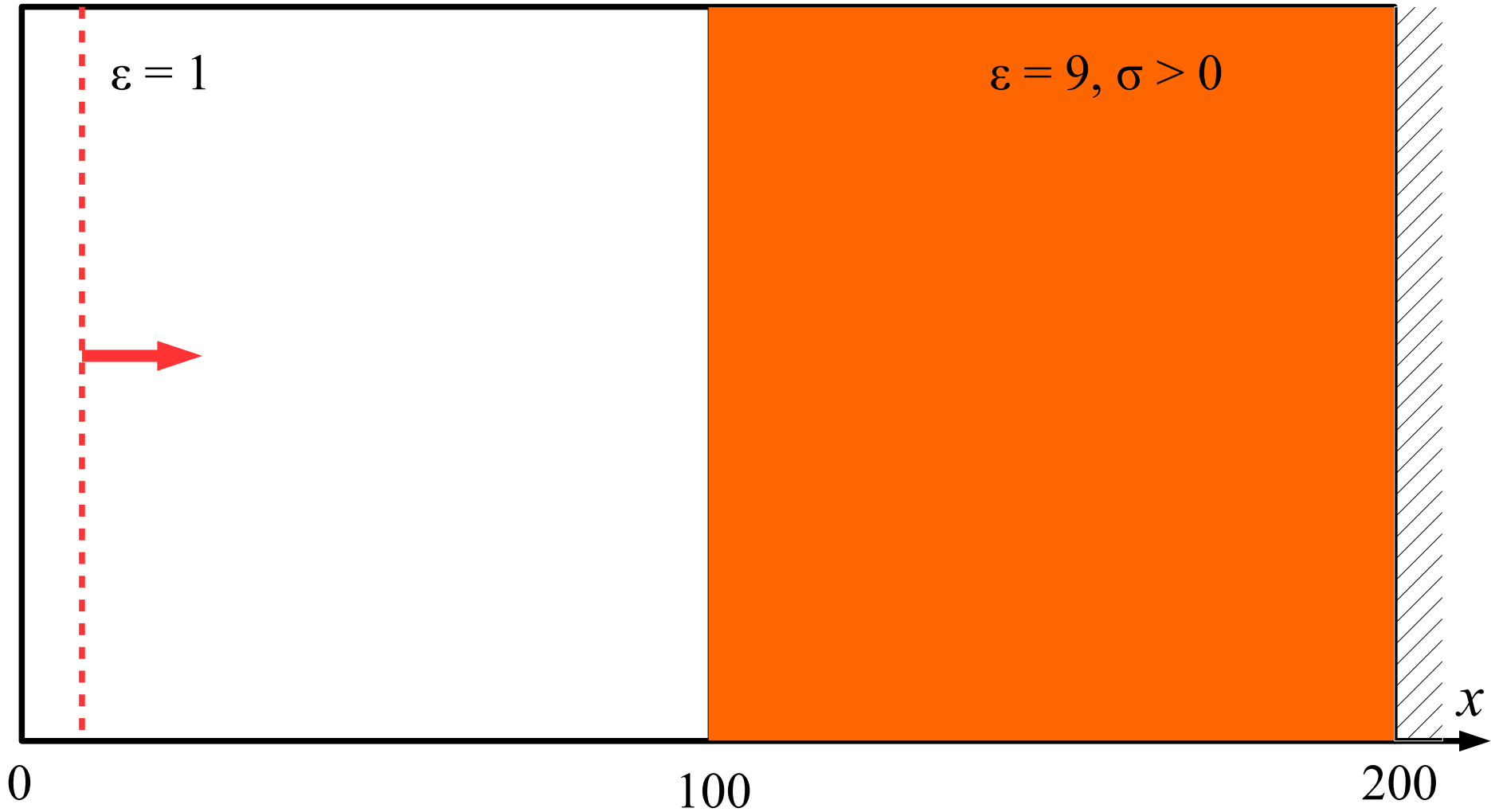
Реализуем случай  
 $\sigma_m = 0, Sc = 1$

$$loss = \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}$$

$$ceze = \frac{1 - loss}{1 + loss}$$

$$cezh = \frac{W_0 / \varepsilon}{1 + loss}$$

# Геометрия решаемой задачи

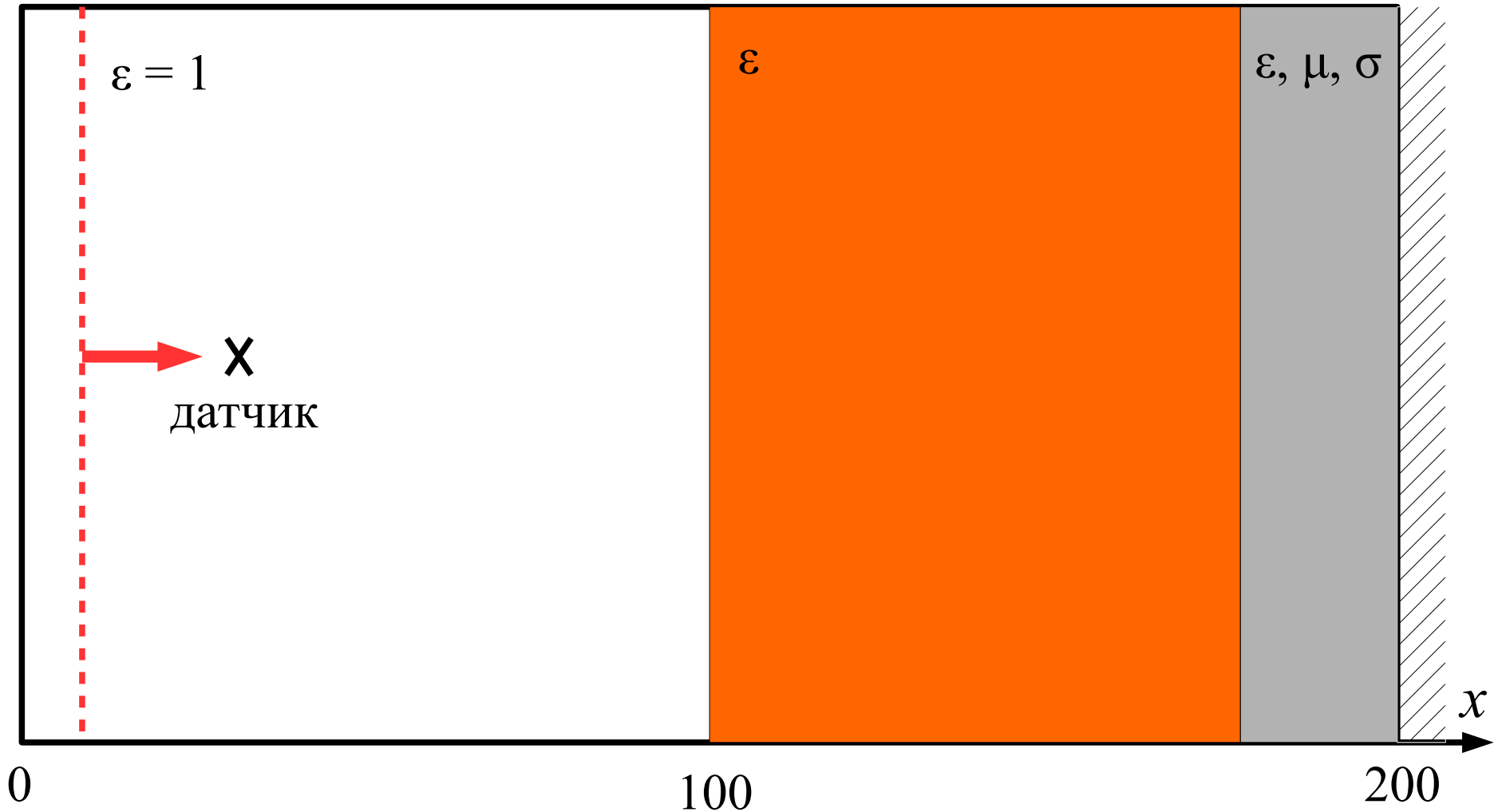


**Реализация моделирования  
распространения  
электромагнитной волны в  
среде с потерями**

# Граничные условия

**Граничное условие с  
использованием слоя с  
потерями**

# Геометрия решаемой задачи



# Волновое сопротивление в среде с потерями<sup>133</sup>

$$W = \sqrt{\frac{\mu \mu_0 \left( 1 - i \frac{\sigma_m}{\omega \mu \mu_0} \right)}{\varepsilon \varepsilon_0 \left( 1 - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \right)}} = W_0 \sqrt{\frac{\mu \left( 1 - i \frac{\sigma_m}{\omega \mu \mu_0} \right)}{\varepsilon \left( 1 - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \right)}}$$



# Волновое сопротивление в среде с потерями <sup>134</sup>

$$W = \sqrt{\frac{\mu \mu_0 \left( 1 - i \frac{\sigma_m}{\omega \mu \mu_0} \right)}{\epsilon \epsilon_0 \left( 1 - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon \epsilon_0} \right)}} = W_0 \sqrt{\frac{\mu \left( 1 - i \frac{\sigma_m}{\omega \mu \mu_0} \right)}{\epsilon \left( 1 - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon \epsilon_0} \right)}}$$

Если  $\frac{\sigma_m}{\omega \mu \mu_0} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon \epsilon_0}$ , то это равносильно среде без потерь с точки зрения волнового сопротивления

# Волновое сопротивление в среде с потерями<sup>135</sup>

$$W \bigg|_{\frac{\sigma_m}{\omega \mu \mu_0} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon \epsilon_0}} = W \bigg|_{\substack{\sigma_m = 0 \\ \sigma = 0}} = W_0 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$\Gamma = \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}$$

# Реализация поглощающих граничных условий

$$loss_m = \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}$$

$$loss_e = \frac{\sigma \Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$

Если

$$\frac{\sigma_m}{\omega\mu\mu_0} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$\frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0} = \frac{\sigma \Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$

# Реализация поглощающих граничных условий

$$loss = loss_e = loss_m = \frac{\sigma_m \Delta_t}{2 \mu \mu_0} = \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0} = 0.02$$

$$ceze = \frac{1 - loss}{1 + loss}$$

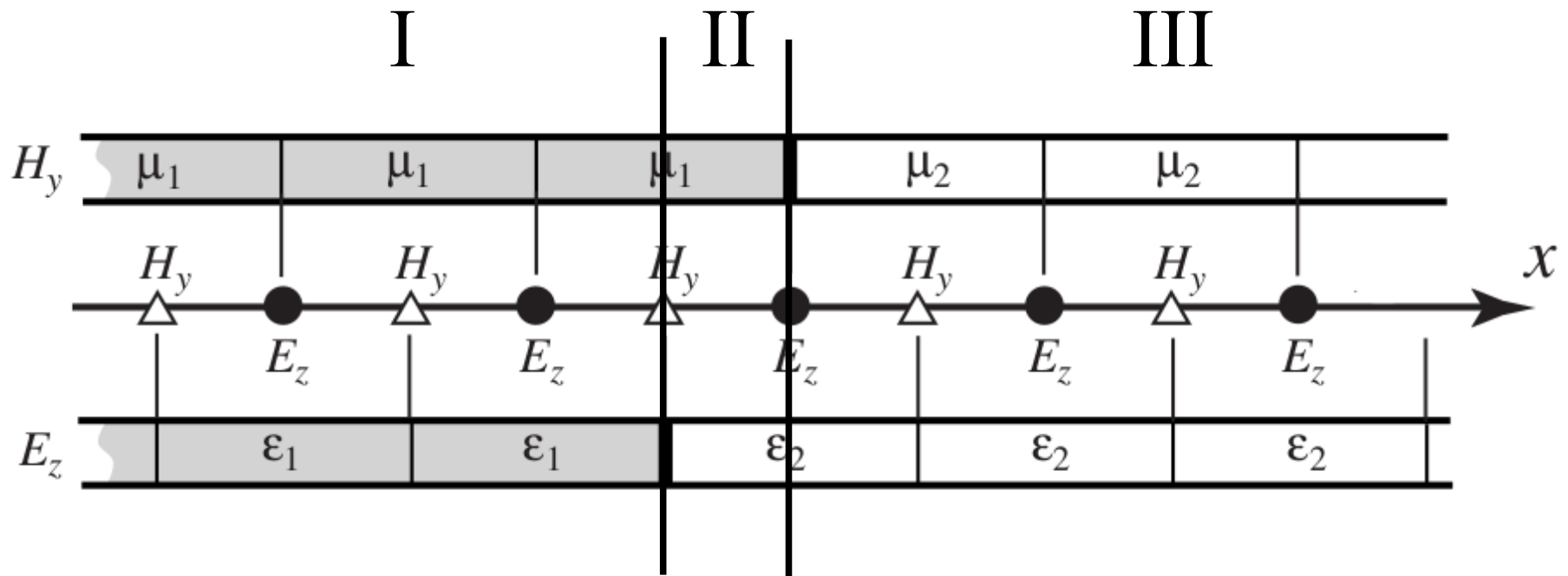
$$cezh = \frac{W_0 / \varepsilon}{1 + loss}$$

$$chye = \frac{1 / W_0}{1 + loss}$$

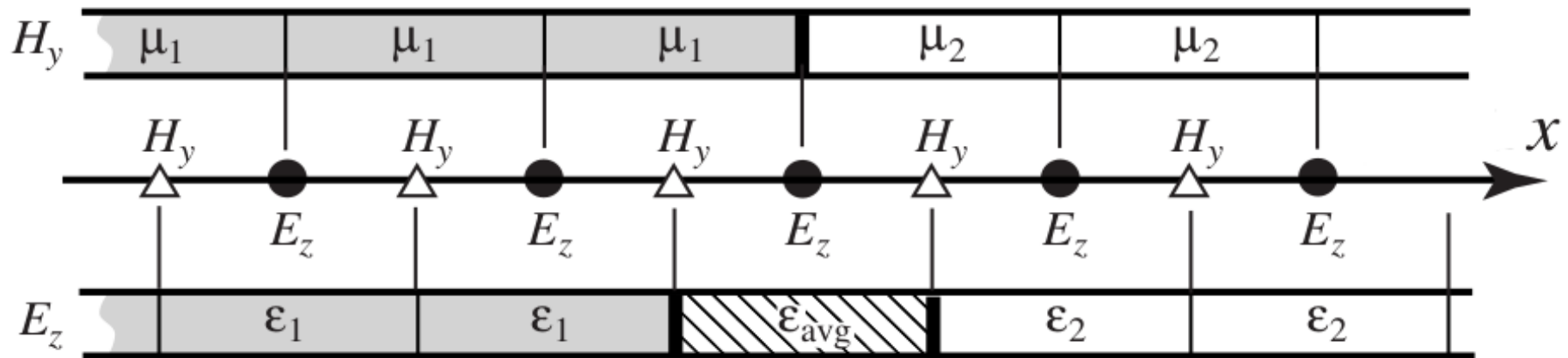
$$chyh = \frac{1 - loss}{1 + loss}$$

**Демонстрация  
граничных условий с  
использованием  
поглощающего слоя**

# Погрешность из-за дискретной сетки



# Погрешность из-за дискретной сетки



**Демонстрация  
граничных условий с  
использованием  
поглощающего слоя с  
усреднением параметров среды  
на границе с поглощающим  
слоем**



## **Поглощающие граничные условия (Absorbing boundary condition - ABC)**

# Типы поглощающих граничных условий

143

Поглощающие граничные условия можно разделить на две группы:

- Условия, аннигилирующие вытекающие волны.
- Условия, аппроксимирующие уравнение волны, распространяющейся только в одном направлении.

# Волновое уравнение в одномерном случае

$$\nabla^2 E_z - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

ИЛИ

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

# Волновое уравнение в одномерном случае

Перепишем волновое уравнение в операторном виде:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_z = 0$$

# Волновое уравнение в одномерном случае

Полученный оператор может быть разложен на произведение двух операторов:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_z = 0$$

# Уравнения адвекции

Любая функция  $E_z$ , которая удовлетворяет хотя бы одному из следующих уравнений, является решением волнового уравнения:

$$\text{I.} \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

$$\text{II.} \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

# Уравнения адвекции

$$E_z(t + x/v) = E_z(t + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} x)$$

- волна, распространяющаяся влево, удовлетворяет первому уравнению адвекции, но не второму.

Покажем это.

# Уравнения адвекции

Сделаем замену

$$\xi = t + \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} x$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}$$



# Уравнения адвекции

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi}$$

# Уравнения адвекции

Полученные выражения подставляем в первое уравнение адвекции

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} - \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} = 0$$

$$0 = 0$$

Уравнение удовлетворяется

# Уравнения адвекции

Полученные выражения подставляем во второе уравнение адвекции

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

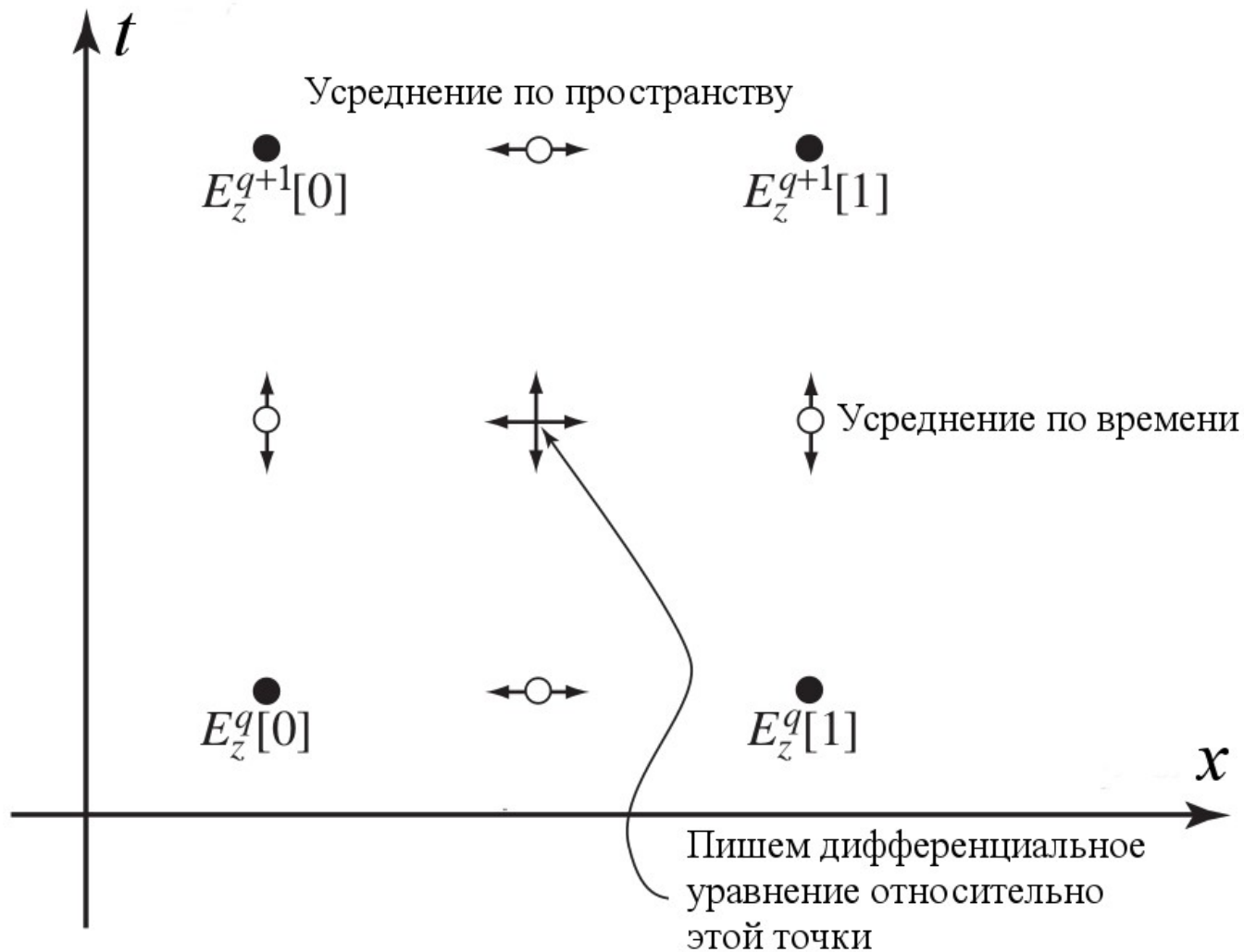
$$\frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} + \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} = 0$$

$$2 \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \neq 0$$

Уравнение не удовлетворяется

# Поглощающие граничные условия

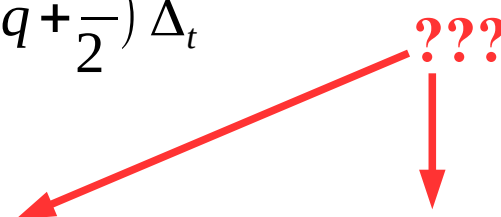
154



# Поглощающие граничные условия

155

Запишем производные в уравнении адвекции  
через конечно-разностную схему

$$\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} \bigg|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2}) \Delta_t} =$$

$$= \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{E_z^{q+1}[1/2] - E_z^q[1/2]}{\Delta_t}$$

# Поглощающие граничные условия

$$E_z^{q+1}[1/2] \approx \frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1]}{2}$$

$$E_z^q[1/2] \approx \frac{E_z^q[0] + E_z^q[1]}{2}$$

# Поглощающие граничные условия

157

$$\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} \bigg|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} \approx$$
$$\approx \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1]}{2} - \frac{E_z^q[0] + E_z^q[1]}{2}}{\Delta_t}$$

# Поглощающие граничные условия

158

Аналогично поступаем со вторым слагаемым в первом уравнении адвекции

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial E_z}{\partial x} \right|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} = \\ & = \frac{E_z^{q+1/2}[1] - E_z^{q+1/2}[0]}{\Delta_x} \approx \\ & \approx \frac{\frac{E_z^{q+1}[1] + E_z^q[1]}{2} - \frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^q[0]}{2}}{\Delta_x} \end{aligned}$$



# Поглощающие граничные условия

Подставляем полученные выражения в первое уравнение адвекции

$$\frac{\frac{E_z^{q+1}[1] + E_z^q[1]}{2} - \frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^q[0]}{2}}{\Delta_x} -$$

$$- \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1]}{2} - \frac{E_z^q[0] + E_z^q[1]}{2}}{\Delta_t} = 0$$

# Поглощающие граничные условия

160

Из полученного уравнения выражаем  $E_x^{q+1}[0]$  и учитываем, что:

$$\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} = \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{c}, \quad S_c = \frac{c \Delta_t}{\Delta_x}$$

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1] + \frac{\frac{S_c}{\sqrt{\epsilon \mu}} - 1}{\frac{S_c}{\sqrt{\epsilon \mu}} + 1} \left( E_z^{q+1}[1] - E_z^q[0] \right)$$

# Поглощающие граничные условия

161

Аналогично можно вывести условие для правой границы

$$E_z^{q+1}[M] = E_z^q[M-1] + \frac{\frac{S_c}{\sqrt{\epsilon\mu}} - 1}{\frac{S_c}{\sqrt{\epsilon\mu}} + 1} \left( E_z^{q+1}[M-1] - E_z^q[M] \right)$$

# Поглощающие граничные условия

162

Для свободного пространства и  $S_c = 1$  выражения сводятся к виду:

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1]$$

$$E_z^{q+1}[M] = E_z^q[M-1]$$

# Демонстрация поглощающих граничных условий (АВС) первой степени

`fdtd_abc_first.m`  
`fdtd_abc_first_2.m`

**Поглощающие граничные условия  
(Absorbing boundary condition — ABC)  
второй степени**

# Волновое уравнение в одномерном случае

Мы получим более точное решение уравнения адвекции и уменьшим отражение, если применим оператор адвекции дважды:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_z = 0$$

# Поглощающее граничное условие второй степени

Если раскрыть скобки и решить это уравнение относительно  $E_z^{q+1}[0]$ , то мы получим

$$\begin{aligned}
 E_z^{q+1}[0] = & \underbrace{\frac{-1}{1/S'_c + 2 + S'_c}}_{k_1} \left\{ \underbrace{\left( \frac{1}{S'_c} - 2 + S'_c \right)}_{k_2} \left( \underline{E_z^{q+1}[2] + E_z^{q-1}[0]} \right) + \right. \\
 & + 2 \underbrace{\left( S'_c - \frac{1}{S'_c} \right)}_{k_3} \left( E_z^q[0] + \underline{E_z^q[2]} - E_z^{q+1}[1] - E_z^{q-1}[1] \right) - \\
 & \left. - 4 \underbrace{\left( \frac{1}{S'_c} + S'_c \right)}_{k_4} E_z^q[1] \right\} - \underline{E_z^{q-1}[2]}
 \end{aligned}$$



# Волновое уравнение в одномерном случае

В предыдущем выражении:

$$S'_c = \frac{\Delta_t}{\sqrt{\mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0} \Delta_x} = \frac{S_c}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

# Волновое уравнение в одномерном случае

Для свободного пространства и  $S_c = 1$   
граничное условие преобразуется к виду:

$$E_z^{q+1}[0] = 2E_z^q[1] - E_z^{q-1}[2]$$

# Волновое уравнение в одномерном случае

Граничные условия справа выглядят аналогично, только они отражены «зеркально». Преобразуются пространственные координаты:

$$0 \rightarrow M$$

$$1 \rightarrow M - 1$$

$$2 \rightarrow M - 2$$

В индексации MATLAB:

$$1 \rightarrow \text{end}$$

$$2 \rightarrow \text{end} - 1$$

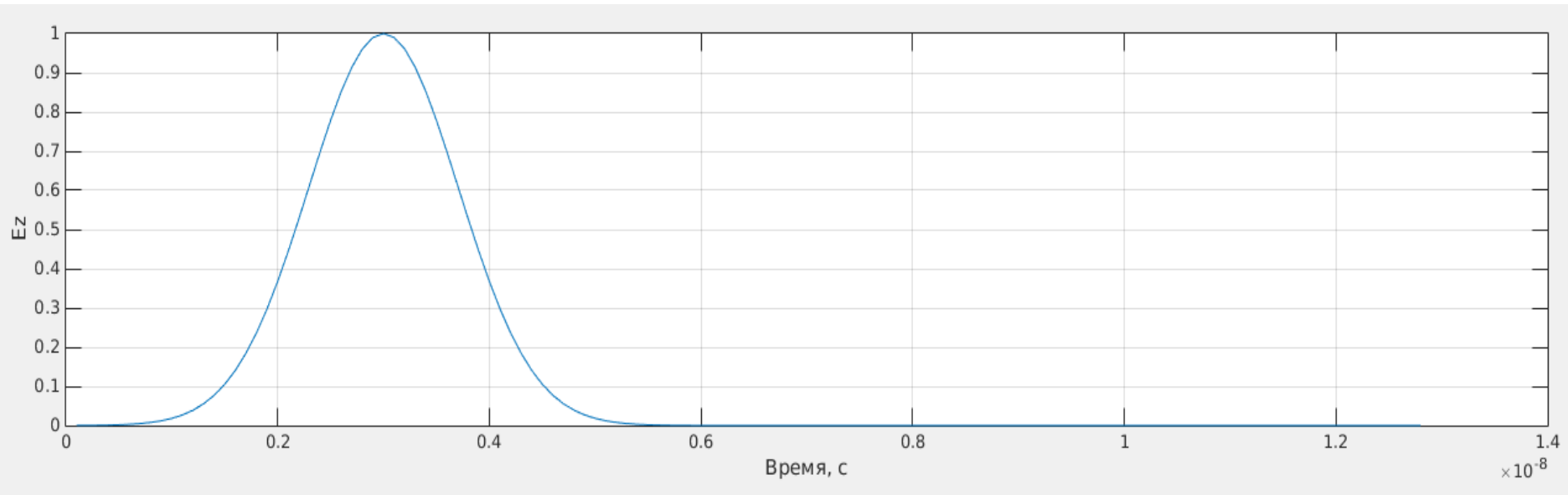
$$3 \rightarrow \text{end} - 2$$

# Демонстрация поглощающих граничных условий (АВС) второй степени

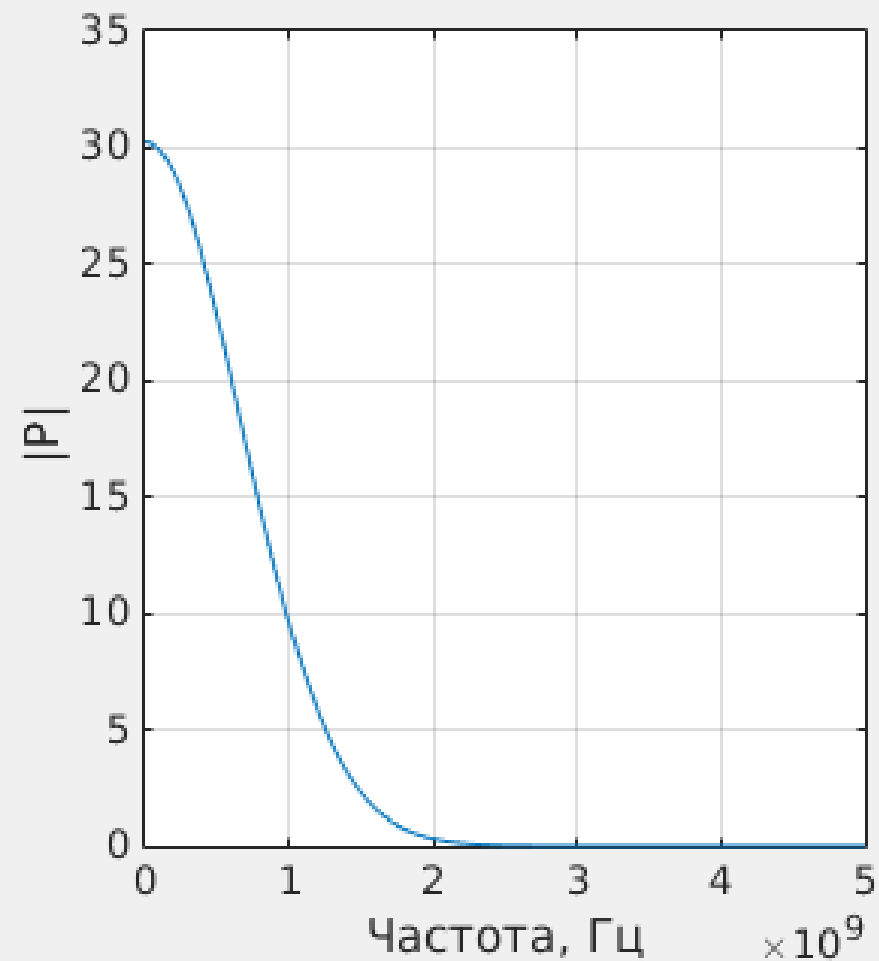
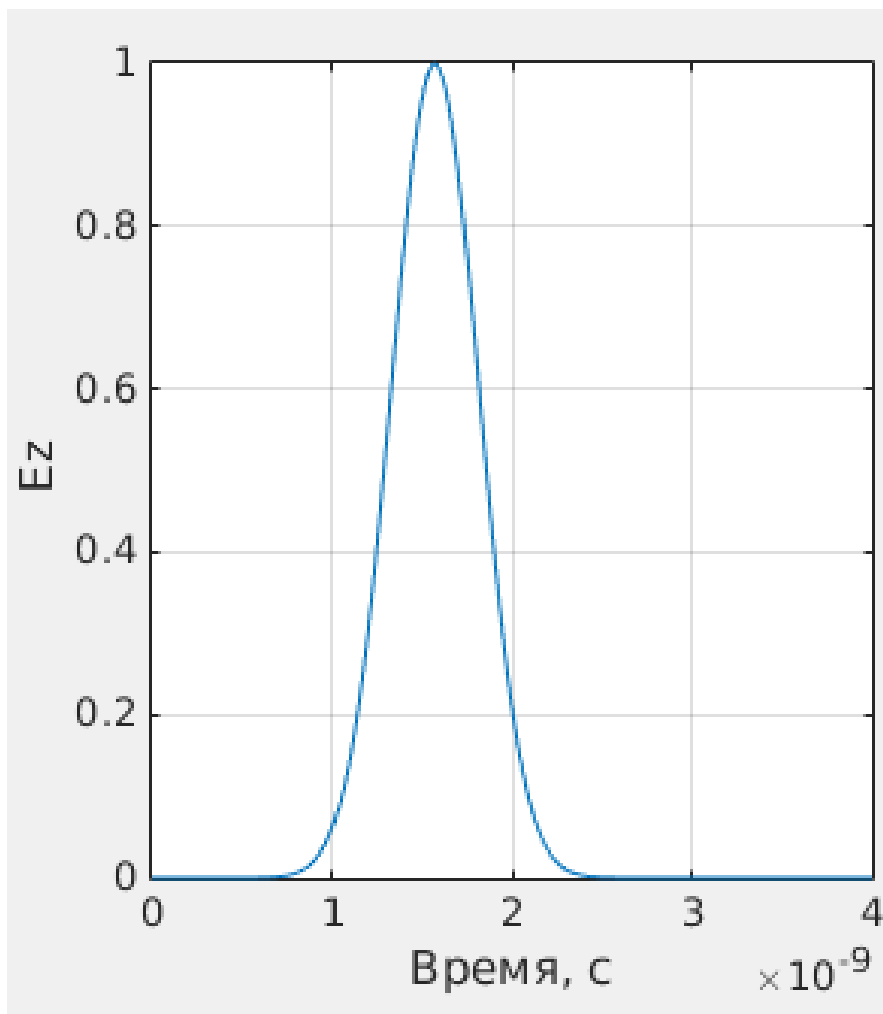
# Источники возбуждения

# Гауссов импульс

$$f_g(t) = A e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$



# Спектр гауссова импульса



# Спектр гауссова импульса

Если заданы требования к сигналу:

- $A_0$  — уровень ослабления сигнала в момент времени  $t = 0$  ( $A_0 > 1$ ).
- $F_{\max}$  — «максимальная» частота в спектре сигнала.
- $A_{\max}$  — уровень ослабления спектра сигнала на частоте  $F_{\max}$  ( $A_{\max} > 1$ ).

$$f_g(t) = A e^{-\left(\frac{t - d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$w_g = \frac{\sqrt{\ln(A_{\max})}}{\pi F_{\max}}$$

$$d_g = w_g \sqrt{\ln(A_0)}$$



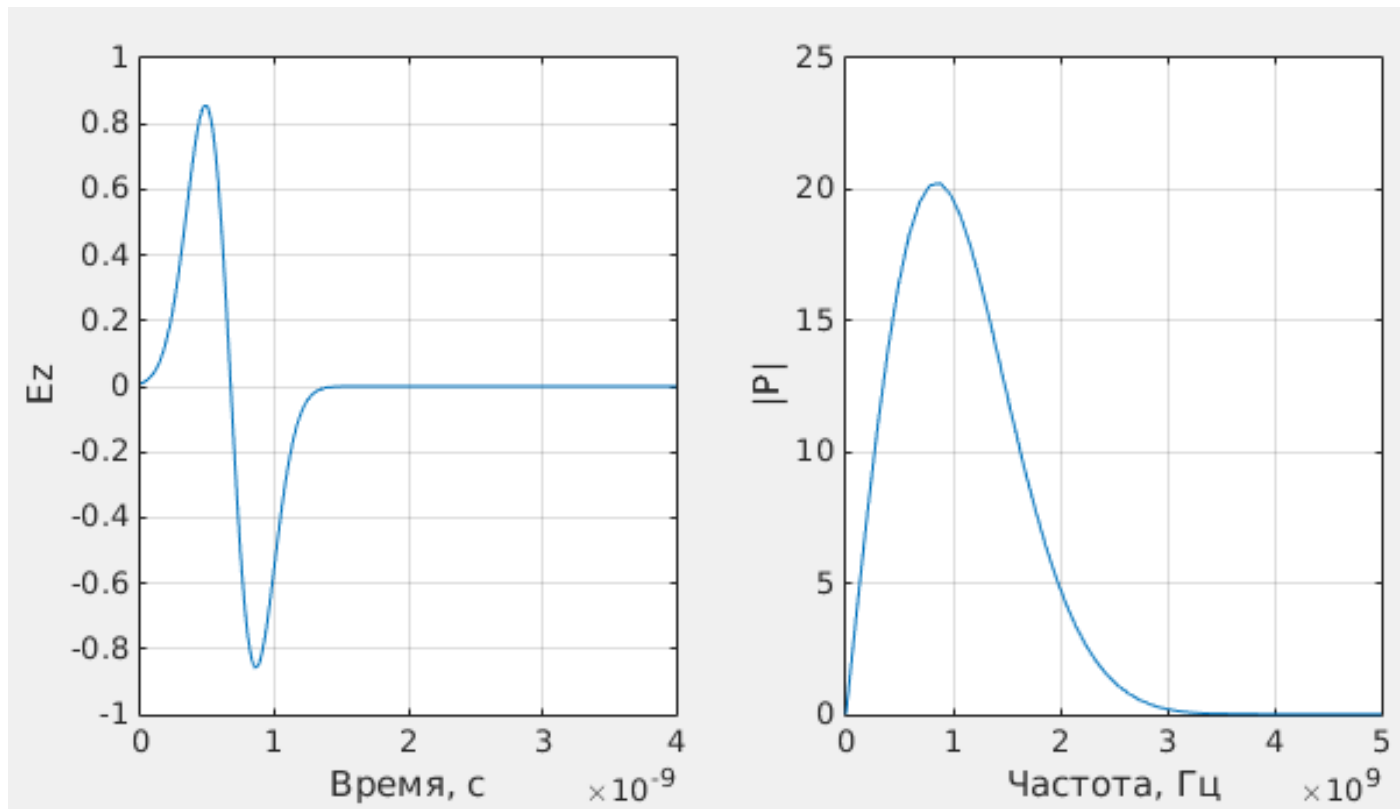
# Недостатки гауссова импульса

- В спектре присутствует постоянная составляющая.
- Максимальное значение спектра всегда на частоте 0 ГГц.
- Сигнал с постоянной составляющей нельзя излучить.

# Дифференцированный гауссов импульс

193

$$f_g(t) = -2A \left( \frac{t - d_g}{w_g} \right) e^{-\left( \frac{t - d_g}{w_g} \right)^2}$$



# Спектр дифференцированного гауссова импульса

Если заданы требования к сигналу:

- $F_{\max}$  — «максимальная» частота в спектре сигнала.
- $A_{\max}$  — уровень ослабления спектра сигнала на частоте  $F_{\max}$  и ослабление в момент времени  $t = 0$  ( $A_{\max} > 1$ ).

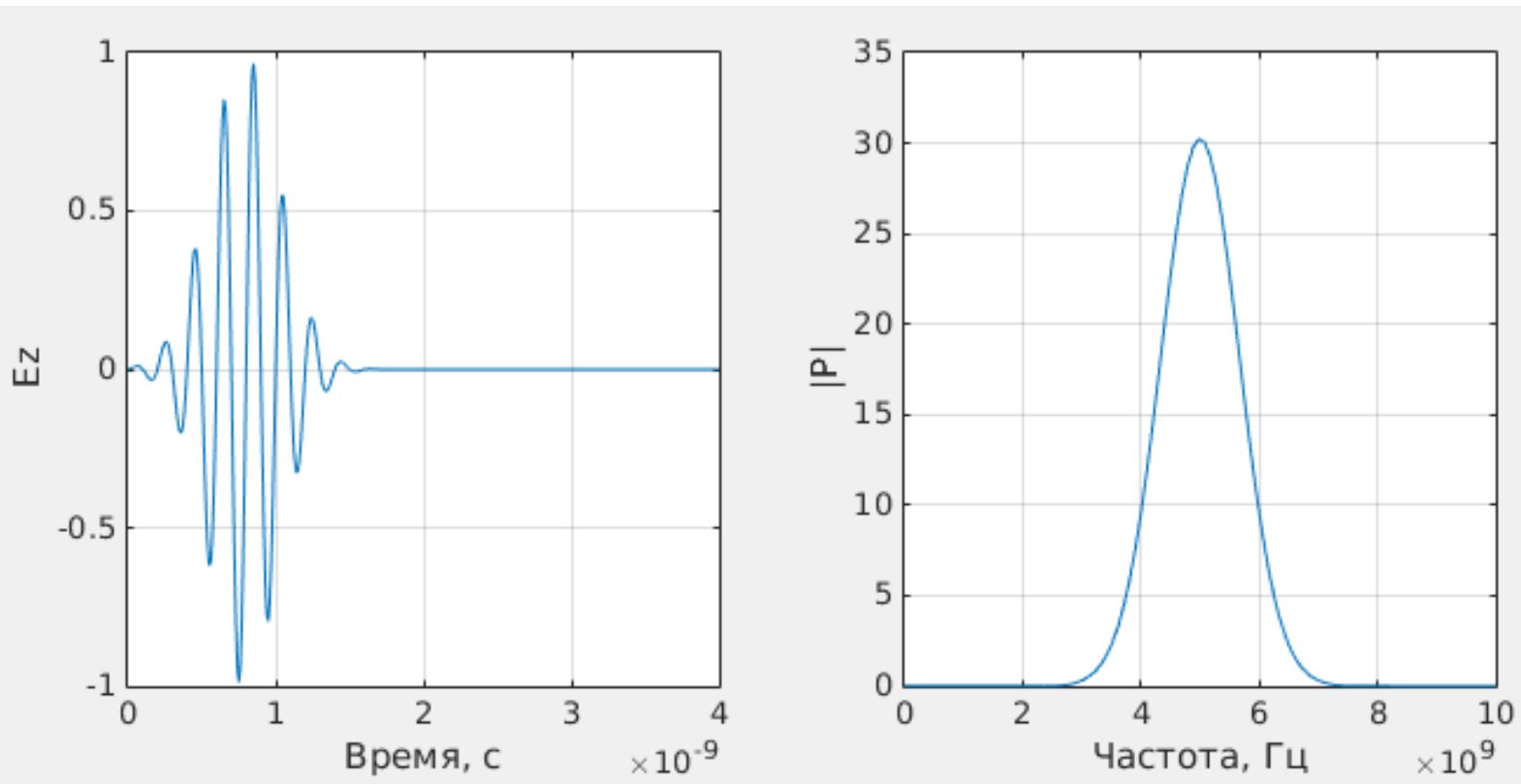
$$f_g(t) = -2A \left( \frac{t - d_g}{w_g} \right) e^{-\left( \frac{t - d_g}{w_g} \right)^2}$$

$$w_g = \frac{\sqrt{\ln(5.5 A_{\max})}}{\pi F_{\max}}$$

$$d_g = w_g \sqrt{\ln(2.5 A_{\max} \sqrt{\ln(2.5 A_{\max})})}$$

# Модулированный гауссов импульс

$$f_g(t) = \sin(2\pi f_0 t) e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$



# Спектр модулированного гауссова импульса

Если заданы требования к сигналу:

- $f_0$  — центральная частота в спектре сигнала.
- $A_{\max}$  — уровень ослабления спектра сигнала на частоте  $F_{\max}$  ( $A_{\max} > 1$ ).
- $A_0$  — ослабление огибающей сигнала в момент времени  $t = 0$
- $\Delta F$  — ширина спектра по уровню ослабления  $A_{\max}$ .

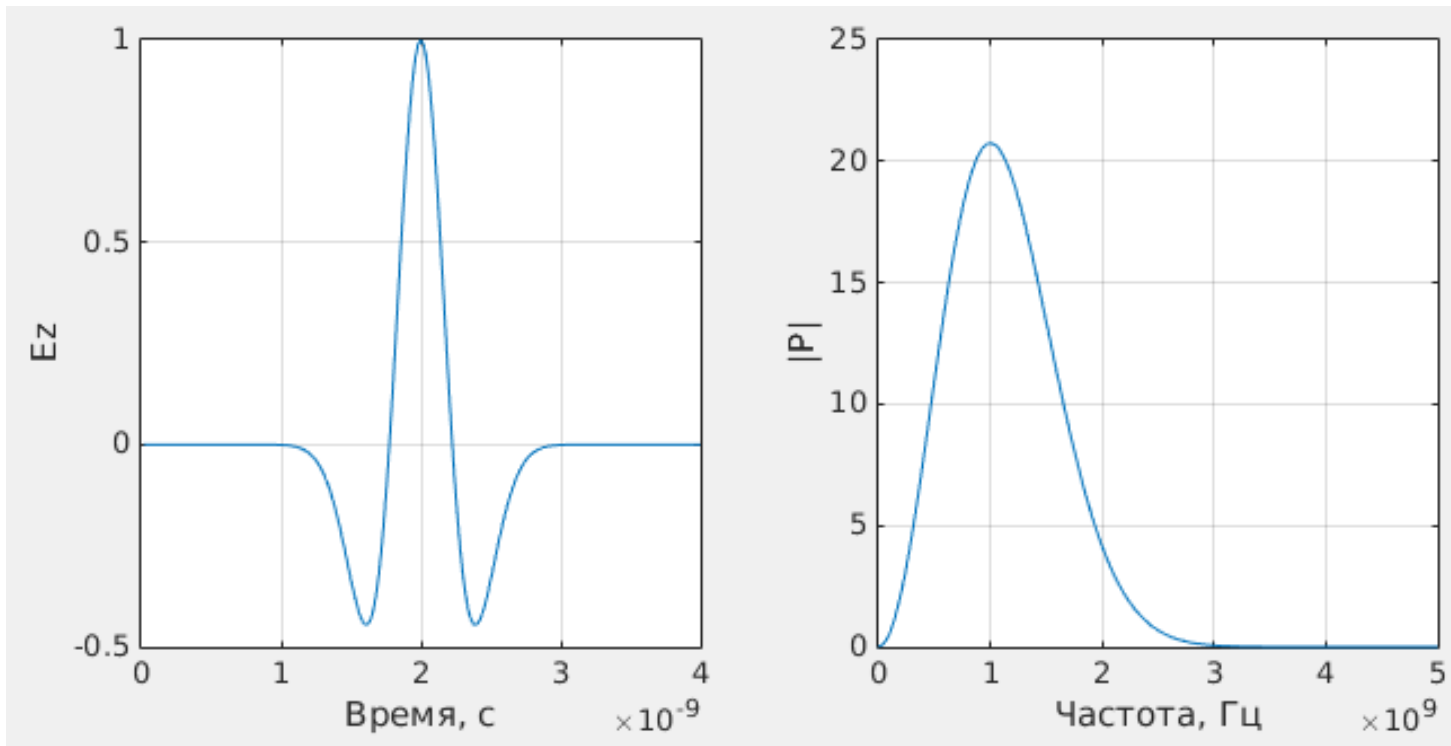
$$f_g(t) = \sin(2\pi f_0 t) e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$w_g = 2 \sqrt{\ln(A_{\max})} / (\pi \Delta F)$$

$$d_g = w_g \sqrt{\ln(A_0)}$$

# Вейвлет Рикера

$$f_r(t) = \left(1 - 2\{\pi f_p[t - d_r]\}^2\right) e^{-\{\pi f_p[t - d_r]\}^2}$$



# Вейвлет Рикера

Если заданы требования к сигналу:

- $f_p$  — «пиковая» частота в спектре сигнала.

$$f_r(t) = \left(1 - 2\{\pi f_p[t - d_r]\}^2\right) e^{-\{\pi f_p[t - d_r]\}^2}$$

$$d_r = M_d \frac{1}{f_p}$$

$M_d$  — коэффициент задержки

# Спектр вейвлета Рикера

$$F_r(\omega) = -\frac{2}{f_p \sqrt{\pi}} \left( \frac{\omega}{2\pi f_p} \right)^2 \exp \left( -jd_r \omega - \left( \frac{\omega}{2\pi f_p} \right)^2 \right)$$



# Вейвлет Рикера в терминах длин волн

$$\lambda_p = N_p \Delta_x, \quad f_p = \frac{c}{\lambda_p} = \frac{c}{N_p \Delta_x}$$

# Вейвлет Рикера в терминах длин волн

$$\lambda_p = N_p \Delta_x, \quad f_p = \frac{c}{\lambda_p} = \frac{c}{N_p \Delta_x}$$

$$S_c = \frac{c \Delta_t}{\Delta_x} \Rightarrow \Delta_x = \frac{c \Delta_t}{S_c}$$

$$f_p = \frac{S_c}{N_p \Delta_t}$$

# Вейвлет Рикера в терминах длин волн

$$f_p = \frac{S_c}{N_p \Delta_t}$$

Тогда задержка может быть представлена как:

$$d_r = M_d \frac{1}{f_p} = M_d \frac{N_p \Delta_t}{S_c}$$

# Вейвлет Рикера в дискретном виде

$$f_r[q] = \left( 1 - 2\pi^2 \left[ \frac{S_c q}{N_p} - M_d \right]^2 \right) \exp \left( -\pi^2 \left[ \frac{S_c q}{N_p} - M_d \right]^2 \right)$$

# Гармонический сигнал при использовании метода Total Field / Scattered Field

# Гармонический сигнал

$$f_h(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

или в дискретном виде

$$f_h(q \Delta_t) = A \cos(\omega q \Delta_t + \varphi_0)$$

# Гармонический сигнал в терминах<sup>213</sup> длин волн

Если задана длина волны в виде:  $\lambda = N_\lambda \cdot \Delta_x$ , то

$$f = \frac{c}{\lambda}, \quad \omega t = \frac{2\pi c}{\lambda} t$$

$$f_h(q \Delta_t) = A \cos \left( \frac{2\pi c}{N_\lambda \Delta_x} q \Delta_t + \varphi_0 \right)$$

$$f_h[q] = A \cos \left( \frac{2\pi S_c}{N_\lambda} q + \varphi_0 \right)$$

# Уравнение плоской волны в дискретном виде

$$T = \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{c} = \frac{N_{\lambda} \Delta_x}{c}$$

Количество временных шагов на период:

$$\frac{T}{\Delta_t} = \frac{N_{\lambda} \Delta_x}{c \Delta_t} = \frac{N_{\lambda}}{S_c}$$



# Уравнение плоской волны в дискретном виде

$$f_h(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{k}{\omega}x\right) + \varphi_0\right)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega \sqrt{\mu \varepsilon}}{c}$$

$$x = m \Delta_x$$

# Уравнение плоской волны в дискретном виде

тогда:

$$\omega \left( t - \frac{k}{\omega} x \right) = \frac{2 \pi c}{N_{\lambda} \Delta_x} \left( q \Delta_t - \frac{\sqrt{\mu \varepsilon}}{c} m \Delta_x \right)$$

# Уравнение плоской волны в дискретном виде

тогда:

$$\omega \left( t - \frac{k}{\omega} x \right) = \frac{2 \pi c}{N_{\lambda} \Delta_x} \left( q \Delta_t - \frac{\sqrt{\mu \varepsilon}}{c} m \Delta_x \right)$$

Вынесем за скобки  $\Delta_x / c$

$$\omega \left( t - \frac{k}{\omega} x \right) = \frac{2 \pi}{N_{\lambda}} \left( q \frac{\Delta_t c}{\Delta_x} - \sqrt{\mu \varepsilon} m \right) = \frac{2 \pi}{N_{\lambda}} \left( S_c q - \sqrt{\mu \varepsilon} m \right)$$

# Уравнение плоской волны в дискретном виде

В дискретном виде:

$$f_h[m, q] = A \cos \left( \frac{2\pi}{N_\lambda} (S_c q - \sqrt{\mu \varepsilon} m) + \varphi_0 \right)$$

Обычно используют:

$$f_h[m, q] = A \sin \left( \frac{2\pi}{N_\lambda} (S_c q - \sqrt{\mu \varepsilon} m) + \varphi_0 \right)$$

**Демонстрация гармонического  
сигнала при использовании  
метода  
Total Field / Scattered Field**

# Демонстрация стоячей волны

`fdtd_tfsf_sin.m`

# Погрешности метода FDTD

# Источники погрешностей метода FDTD

- Численная дисперсия.
- Отражение от границ области моделирования.
- Ступенчатая аппроксимация границ объектов.
- Численный шум.
- Постоянная составляющая тока может создавать остаточные электрические заряды (емкость ячеек сетки).



# Численная дисперсия

Дисперсия — зависимость фазовой скорости распространения волны от частоты.

# Численная дисперсия

$$\frac{\tilde{c}}{c} = \frac{\pi \sqrt{\epsilon \mu}}{N_\lambda \arcsin \left( \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{S_c} \sin \left( \frac{\pi S_c}{N_\lambda} \right) \right)}$$

$\tilde{c}$  — скорость распространения волны в дискретном пространстве

$N_\lambda$  — Количество ячеек сетки на длину волны

# Демонстрация численной дисперсии

`dispersion.m`  
`fdtd_dispersion.m`

# Коэффициенты отражения и прохождения

Для границы раздела двух диэлектриков  
 $\mu = 1$

Коэффициент прохождения:  $T = \frac{2\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}}$

Коэффициент отражения:  $\Gamma = \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}}$

# Коэффициенты прохождения и отражения в дискретном пространстве

$$\tilde{T} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}{\sqrt{\epsilon_1} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) + \sqrt{\epsilon_2} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)} \quad \bigg| \quad \tilde{\Gamma} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) - \sqrt{\epsilon_2} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}{\sqrt{\epsilon_1} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) + \sqrt{\epsilon_2} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}$$

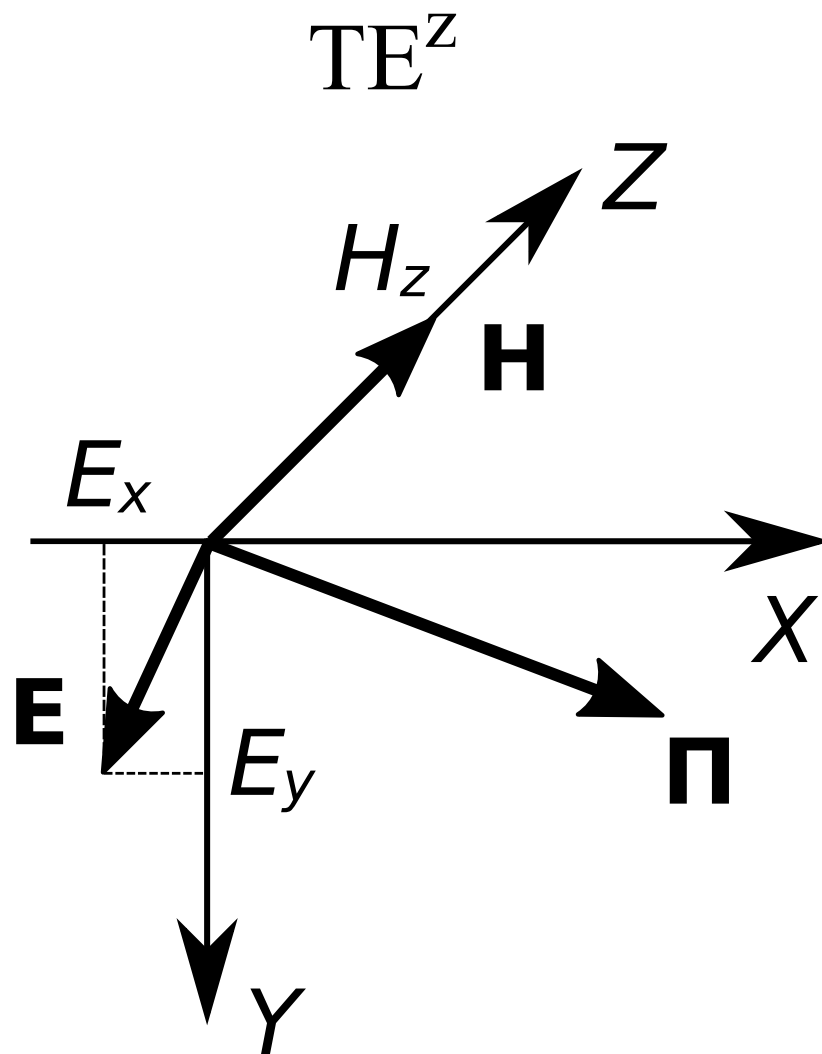
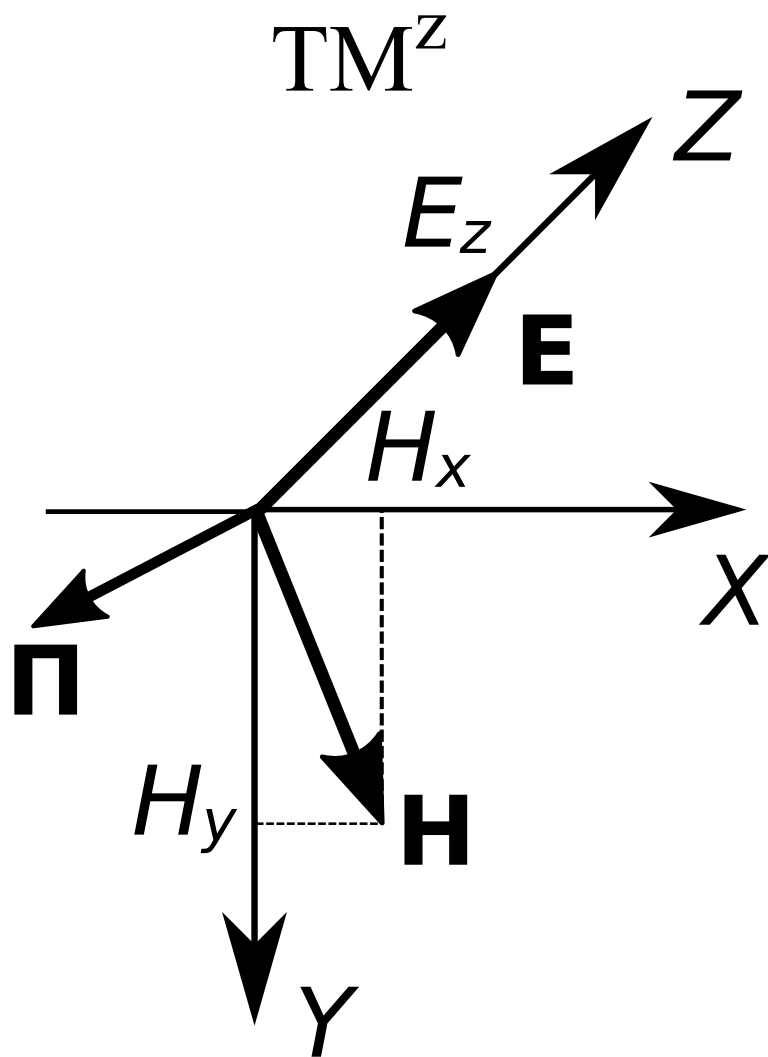
где

$$\frac{\tilde{\beta}_i \Delta_x}{2} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{\epsilon_i \mu_i}}{S_c} \sin\left(\frac{\pi S_c}{N_\lambda}\right)\right)$$

# Демонстрация погрешностей при расчете коэффициента отражения

# Двумерный метод конечных разностей во временной области

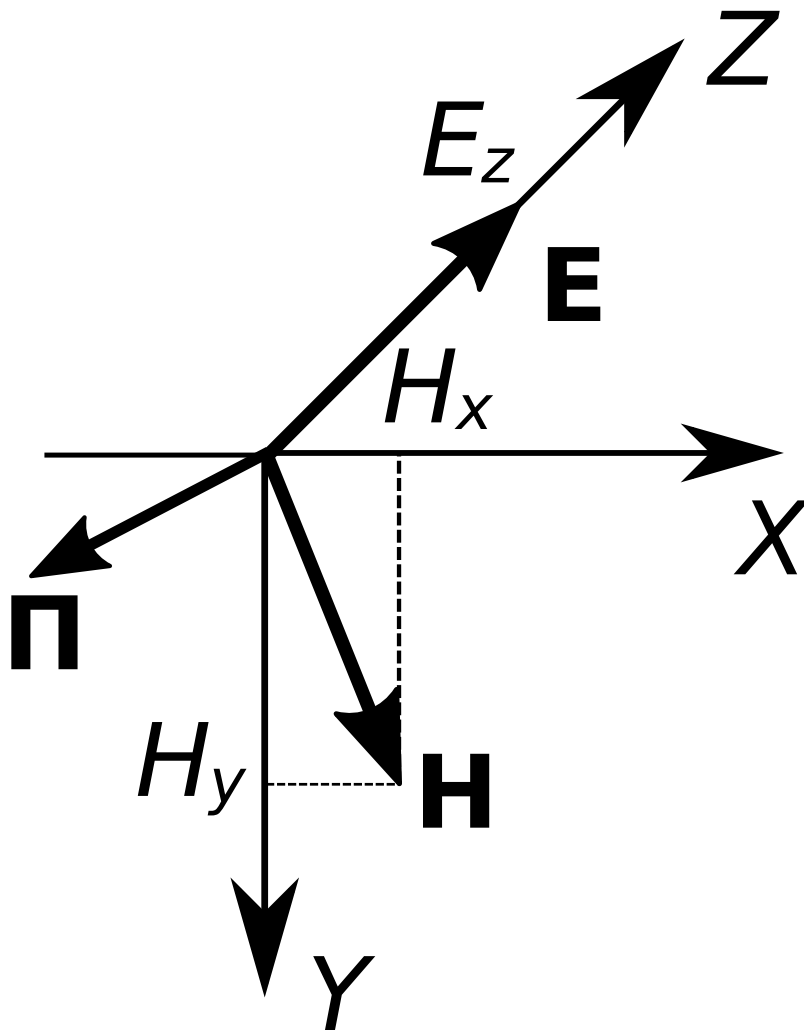
# Виды поляризации для двумерного случая





**Двумерный метод конечных  
разностей во временной области  
для поляризации  $TM^z$**

# Поляризация ТМ<sup>z</sup>



Существуют следующие компоненты ЭМ поля:

- $E_z$
- $H_x$
- $H_y$

# Метод FDTD для поляризации $\text{TM}^z$ .

## Закон Фарадея

$$-\sigma_m \mathbf{H} - \mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & E_z \end{vmatrix} = \mathbf{x}_0 \frac{\partial E_z}{\partial y} - \mathbf{y}_0 \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

# Метод FDTD для поляризации $TM^z$ .

## Закон Ампера

$$\sigma \mathbf{E} + \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{z}_0 \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

# Метод FDTD для поляризации ТМ<sup>z</sup>. Законы Фарадея и Ампера в скалярном виде

239

$$-\sigma_m H_x - \mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$\sigma_m H_y + \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\sigma E_z + \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

## Дискретизация величин E и H

$$H_x(x, y, t) = H_x(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = H_x^q[m, n]$$

$$H_y(x, y, t) = H_y(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = H_y^q[m, n]$$

$$E_z(x, y, t) = E_z(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = E_z^q[m, n]$$

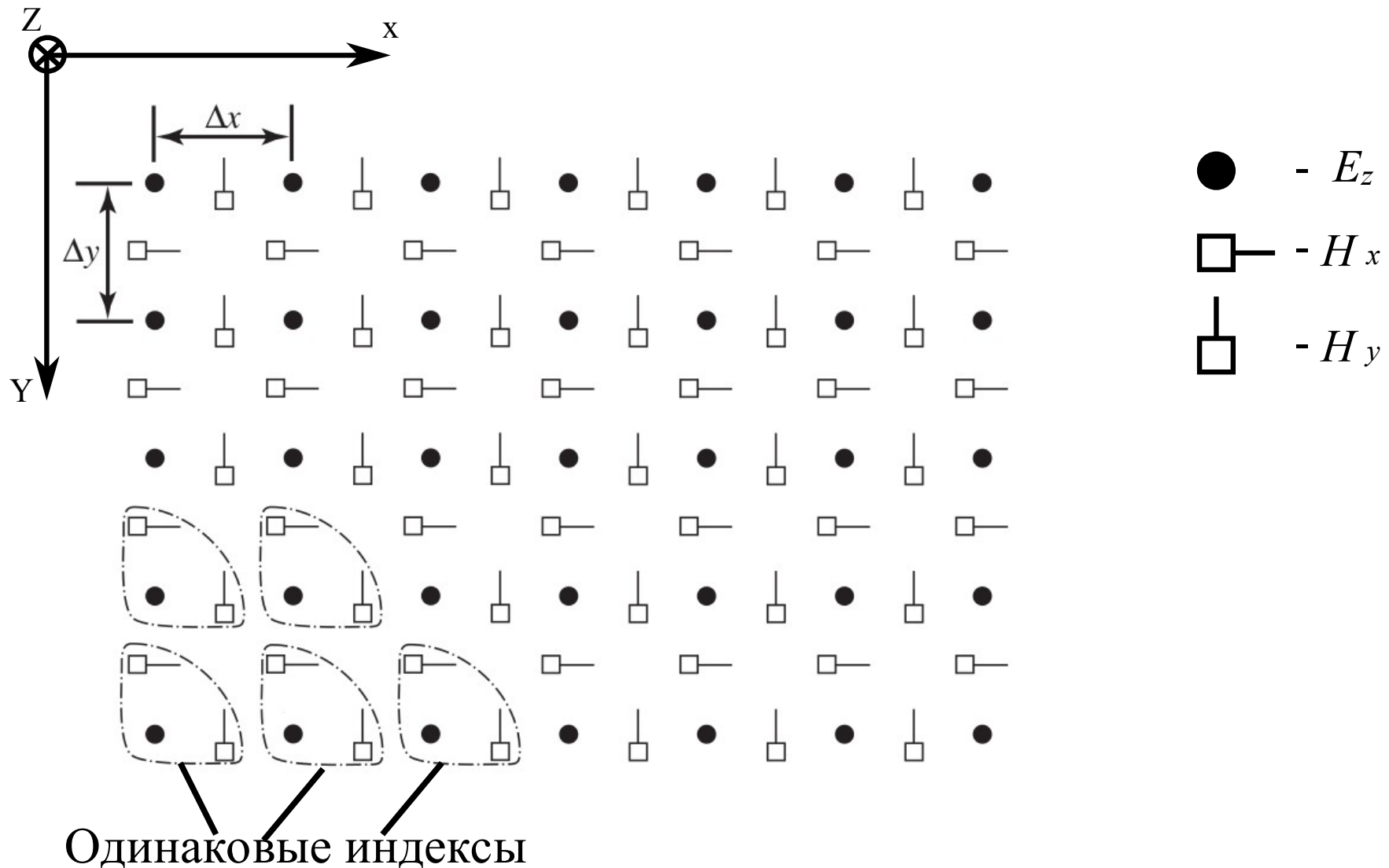
$m$  — индекс по пространству вдоль оси X.

$n$  — индекс по пространству вдоль оси Y.

$q$  — индекс по времени.

$\Delta_x, \Delta_y$  — размер сетки по осям X и Y соответственно.

# Пространственная сетка для двумерного метода FDTD



# Особенности реализации двумерного метода FDTD

- Размер массива для компоненты  $E_z$  —  $M \times N$
- Размер массива для компоненты  $H_x$  —  $M \times (N - 1)$
- Размер массива для компоненты  $H_y$  —  $(M - 1) \times N$



# Конечно-разностная аппроксимация для закона Фарадея

Запишем конечно-разностную аппроксимацию для точки  
 $(m\Delta_x, (n + 1/2)\Delta_y, q\Delta_t)$

$$\begin{aligned}
 & -\sigma_m \frac{H_x^{q+1/2}[m, n+1/2] + H_x^{q-1/2}[m, n+1/2]}{2} - \\
 & -\mu\mu_0 \frac{H_x^{q+1/2}[m, n+1/2] + H_x^{q-1/2}[m, n+1/2]}{\Delta_t} = \\
 & = \frac{E_z^q[m, n+1] - E_z^q[m, n]}{\Delta_y}
 \end{aligned}$$

# Конечно-разностная аппроксимация для закона Фарадея

Из полученного уравнения выражаем  $H_x^{q+1/2}[m, n+1/2]$ :

$$H_x^{q+1/2}[m, n+1/2] = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} H_x^{q-1/2}[m, n+1/2] -$$

$$- \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \Delta_y} \left( E_z^q[m, n+1] - E_z^q[m, n] \right)$$

# Конечно-разностная аппроксимация для закона Фарадея

Подобным образом выражаем  $H_y^{q+1/2}[m+1/2, n]$ :

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2, n] = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} H_y^{q-1/2}[m+1/2, n] +$$

$$+ \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \Delta_x} \left( E_z^q[m+1, n] - E_z^q[m, n] \right)$$

# Конечно-разностная аппроксимация для закона Ампера

Подобным образом выражаем  $E_z^{q+1}[m, n]$  из закона Ампера:

$$\begin{aligned}
 E_z^{q+1}[m, n] = & \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_z^q[m, n] + \\
 & + \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \left( \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \{ H_y^{q+1/2}[m+1/2, n] - H_y^{q+1/2}[m-1/2, n] \} - \right. \\
 & \left. - \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_y} \{ H_x^{q+1/2}[m, n+1/2] - H_x^{q+1/2}[m, n-1/2] \} \right)
 \end{aligned}$$

# Конечно-разностная аппроксимация

Если  $\Delta_x = \Delta_y = \delta$ , то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{hxh}(m, n+1/2) = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \bigg|_{m\delta, (n+1/2)\delta}$$

$$C_{hxe}(m, n+1/2) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \delta} \bigg|_{m\delta, (n+1/2)\delta}$$

# Конечно-разностная аппроксимация

Если  $\Delta_x = \Delta_y = \delta$ , то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{hyh}(m+1/2, n) = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \bigg|_{(m+1/2)\delta, n\delta}$$

$$C_{hye}(m+1/2, n) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \delta} \bigg|_{(m+1/2)\delta, n\delta}$$

# Конечно-разностная аппроксимация

Если  $\Delta_x = \Delta_y = \delta$ , то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{eze}(m, n) = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \bigg|_{m\delta, n\delta}$$

$$C_{ezh}(m, n) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \delta} \bigg|_{m\delta, n\delta}$$

# Программная реализация конечно-разностной схемы

$$\begin{aligned} H_x(m, n) = & C_{hxh}(m, n) * H_x(m, n) - \dots \\ & C_{hxe}(m, n) * (E_z(m, n + 1) - E_z(m, n)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_y(m, n) = & C_{hyh}(m, n) * H_y(m, n) + \dots \\ & C_{hye}(m, n) * (E_z(m + 1, n) - E_z(m, n)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_z(m, n) = & C_{eze}(m, n) * E_z(m, n) + \dots \\ & C_{ezh}(m, n) * (H_y(m, n) - H_y(m - 1, n)) - \dots \\ & (H_x(m, n) - H_x(m, n - 1)); \end{aligned}$$



# Стабильность двумерного метода FDTD

# Критерий устойчивости Куранта-Фридриха-Леви

$$v_{max} \Delta_t \leq \frac{1}{\sqrt{\Delta_x^{-2} + \Delta_y^{-2} + \Delta_z^{-2}}}$$

$$v_{max} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{min} \mu_{min}}}$$


---

Если  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \Delta$

$$v_{max} \Delta_t \leq \frac{\Delta}{\sqrt{N}}$$

$N$  — размерность пространства (1, 2, 3)

# Стабильность двумерного метода FDTD

Критерий стабильности для одномерного пространства:

$$S_c = \frac{v \Delta_t}{\Delta_x} \leq 1$$

# Стабильность двумерного метода FDTD

Критерий стабильности для одномерного пространства:

$$S_c = \frac{v \Delta_t}{\Delta_x} \leq 1$$

Критерий стабильности для N-мерного пространства:

$$S_c = v \Delta_t \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{1}{\Delta_n^2}} \leq 1$$

# Стабильность двумерного метода FDTD

Критерий стабильности для одномерного пространства:

$$S_c = \frac{v \Delta_t}{\Delta_x} \leq 1$$

Критерий стабильности для N-мерного пространства:

$$S_c = v \Delta_t \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{1}{\Delta_n^2}} \leq 1$$

Критерий стабильности для двумерного пространства:

$$S_c = v \Delta_t \sqrt{\frac{1}{\Delta_x^2} + \frac{1}{\Delta_y^2}} \leq 1$$

# Стабильность двумерного метода FDTD

Если  $\Delta_x = \Delta_y = \delta$ , то

$$S_c = v \Delta_t \sqrt{\frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\delta^2}} \leq 1 \quad \rightarrow \quad S_c = \frac{v \Delta_t \sqrt{2}}{\delta} \leq 1$$

Критерий стабильности для N-мерного пространства:

$$S_c = \frac{v \Delta_t \sqrt{N}}{\delta} \leq 1$$

или

$$S_c = \frac{v \Delta_t}{\delta} \leq \frac{1}{\sqrt{N}}$$

# Стабильность двумерного метода FDTD

Введем коэффициент — аналог одномерного числа Куранта для двумерного случая

$$C_{dtds} = \frac{v \Delta_t}{\delta} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Критерий устойчивости для двумерного FDTD:

$$\Delta_t \leq \frac{\delta}{c\sqrt{2}}$$

**Демонстрация двумерного метода  
FDTD для поляризации  $TM^z$ .  
Источник цилиндрической волны.**

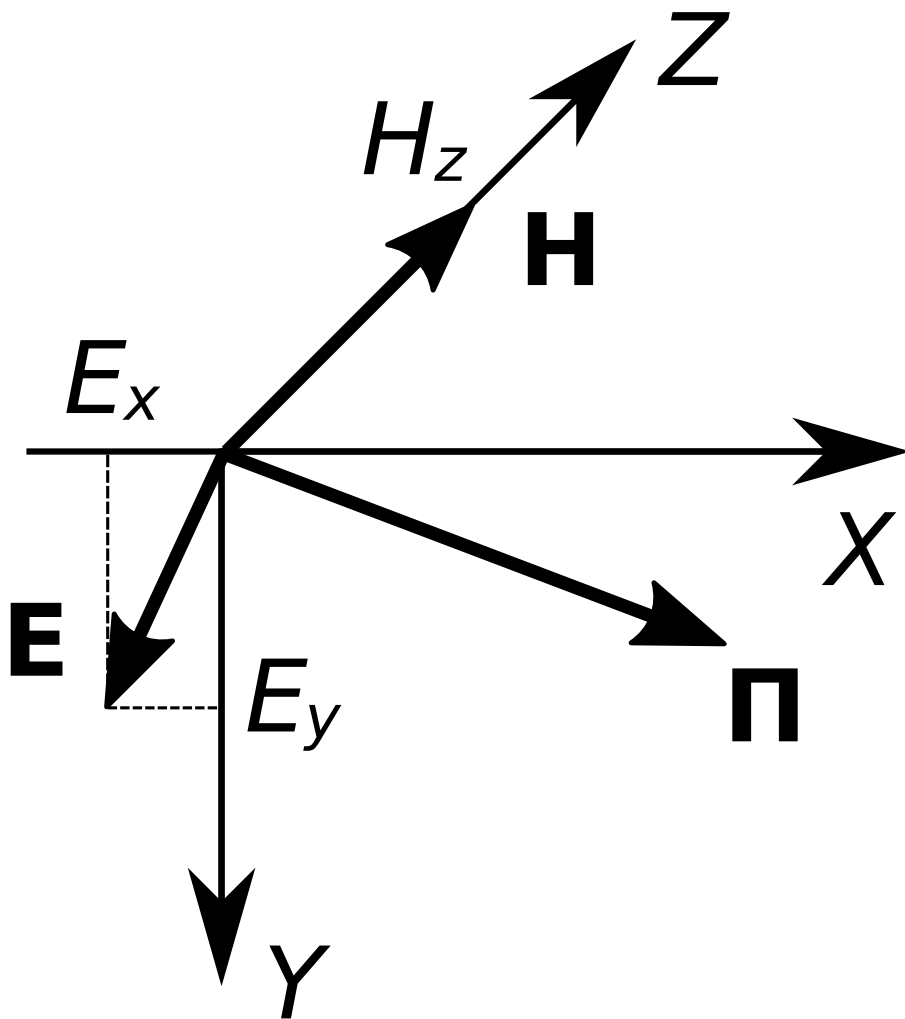
**fdtd\_2d\_TM\_first.m**



**Демонстрация двумерного метода  
FDTD для поляризации  $TM^z$ .  
Источник плоской волны.**

**Двумерный метод конечных  
разностей во временной области  
для поляризации  $TE^z$**

# Поляризация $TE^z$



Существуют следующие  
компоненты ЭМ поля:

- $E_x$
- $E_y$
- $H_z$

# Закон Фарадея

$$-\sigma_m \mathbf{H} - \mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{z}_0 \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

# Закон Фарадея

В скалярном виде предыдущее выражение записывается как:

$$-\sigma_m H_z - \mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

# Закон Ампера

$$\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & H_z \end{vmatrix} = \mathbf{x}_0 \frac{\partial H_z}{\partial y} - \mathbf{y}_0 \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

# Закон Ампера

В скалярном виде предыдущее выражение записывается как:

$$\sigma E_x + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$\sigma E_y + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = - \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

## Дискретизация величин E и H

$$E_x(x, y, t) = E_x(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = E_x^q[m, n]$$

$$E_y(x, y, t) = E_y(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = E_y^q[m, n]$$

$$H_z(x, y, t) = H_z(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = H_z^q[m, n]$$

$m$  — индекс по пространству вдоль оси X.

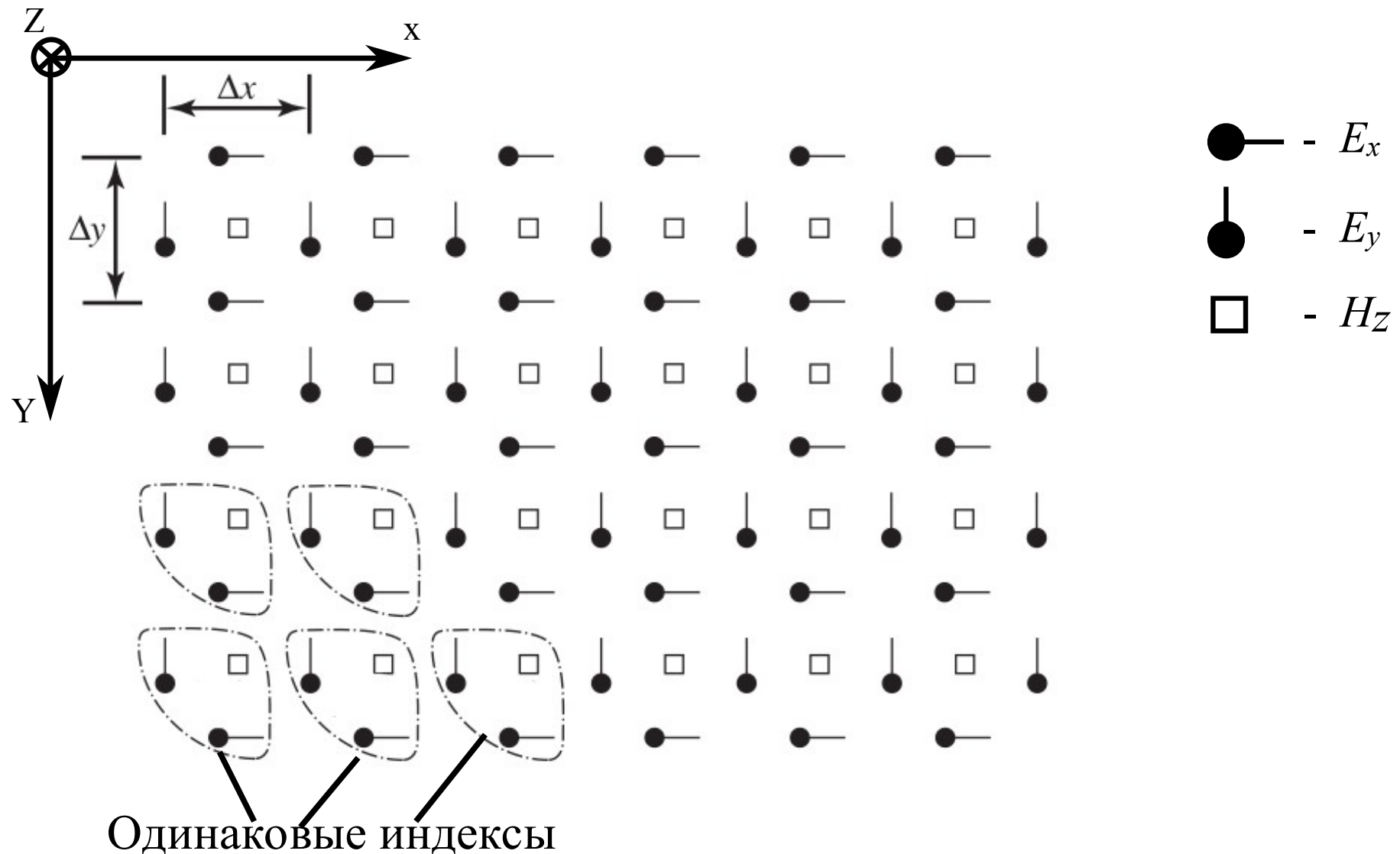
$n$  — индекс по пространству вдоль оси Y.

$q$  — индекс по времени.

$\Delta_x, \Delta_y$  — размер сетки по осям X и Y соответственно.



# Пространственная сетка для двумерного метода FDTD



# Конечно-разностная схема

$$\begin{aligned}
 H_z^{q+1/2}[m+1/2, n+1/2] = & \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} H_z^{q-1/2}[m+1/2, n+1/2] - \\
 & - \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \left( \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \Delta_x} \{ E_y^q[m+1, n+1/2] - E_y^q[m, n+1/2] \} - \right. \\
 & \left. - \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \Delta_y} \{ E_x^q[m+1/2, n+1] - E_x^q[m+1/2, n] \} \right)
 \end{aligned}$$

# Конечно-разностная схема

$$E_x^{q+1}[m+1/2, n] = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_x^q[m+1/2, n] +$$

$$+ \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_y} \left( H_z^{q+1/2}[m+1/2, n+1/2] - H_z^{q+1/2}[m+1/2, n-1/2] \right)$$

# Конечно-разностная схема

$$E_y^{q+1}[m, n+1/2] = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_y^q[m, n+1/2] -$$

$$- \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left( H_z^{q+1/2}[m+1/2, n+1/2] - H_z^{q+1/2}[m-1/2, n+1/2] \right)$$

# Конечно-разностная аппроксимация

Если  $\Delta_x = \Delta_y = \delta$ , то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{hzh}(m+1/2, n+1/2) = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \bigg|_{(m+1/2)\delta, (n+1/2)\delta}$$

$$C_{hze}(m+1/2, n+1/2) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \delta} \bigg|_{(m+1/2)\delta, (n+1/2)\delta}$$

# Конечно-разностная аппроксимация

Если  $\Delta_x = \Delta_y = \delta$ , то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{exe}(m+1/2, n) = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \bigg|_{(m+1/2)\delta, n\delta}$$

$$C_{exh}(m+1/2, n) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \delta} \bigg|_{(m+1/2)\delta, n\delta}$$

# Конечно-разностная аппроксимация

Если  $\Delta_x = \Delta_y = \delta$ , то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{eye}(m, n+1/2) = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \bigg|_{m\delta, (n+1/2)\delta}$$

$$C_{eyh}(m, n+1/2) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \delta} \bigg|_{m\delta, (n+1/2)\delta}$$

# Программная реализация конечно-разностной схемы

$$\begin{aligned} H_z(m, n) = & C_{hzh}(m, n) * H_z(m, n) + \dots \\ & C_{hze}(m, n) * ((E_x(m, n + 1) - E_x(m, n) - \dots \\ & (E_y(m + 1, n) - E_y(m, n))); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_x(m, n) = & C_{exe}(m, n) * E_x(m, n) + \dots \\ & C_{exh}(m, n) * (H_z(m, n) - H_z(m, n - 1)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_y(m, n) = & C_{eye}(m, n) * E_y(m, n) - \dots \\ & C_{eyh}(m, n) * (H_z(m, n) - H_z(m - 1, n)); \end{aligned}$$



# Размеры массивов компонент поля $E$ и $H$

Для применения граничных условий АВС необходимо, чтобы на границе области моделирования существовали касательные компоненты поля  $E$ .

Поэтому для сетки размера  $M \times N$  размеры массивов для хранения компонент полей следующие:

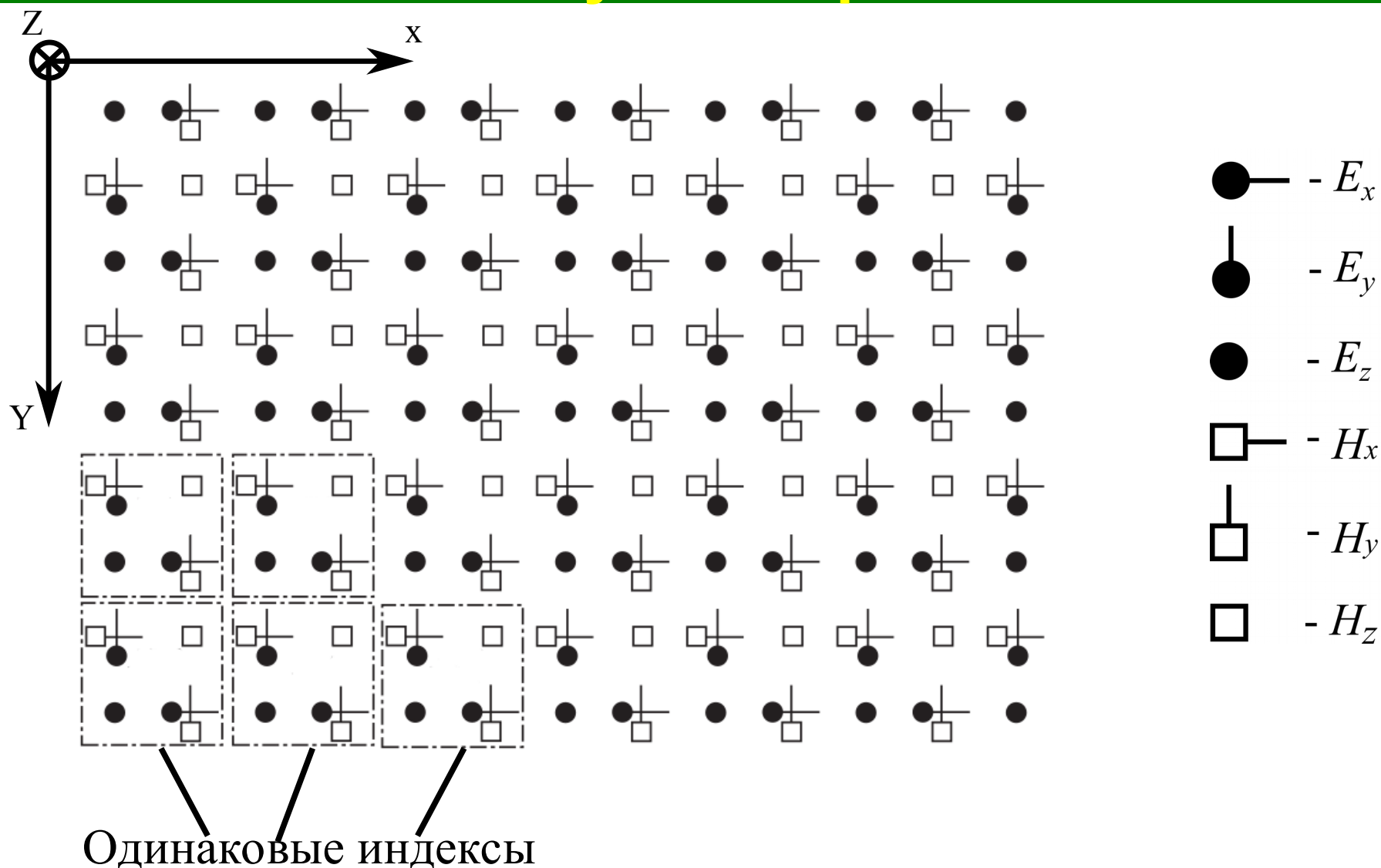
- $E_x[(M - 1) \times N]$
- $E_y[M \times (N - 1)]$
- $H_z[(M - 1) \times (N - 1)]$

**Демонстрация двумерного метода  
FDTD для поляризации  $TM^z$ .  
Граничные условия ABC.**

`fdtd_2d_TM_plainwave_abc.m`

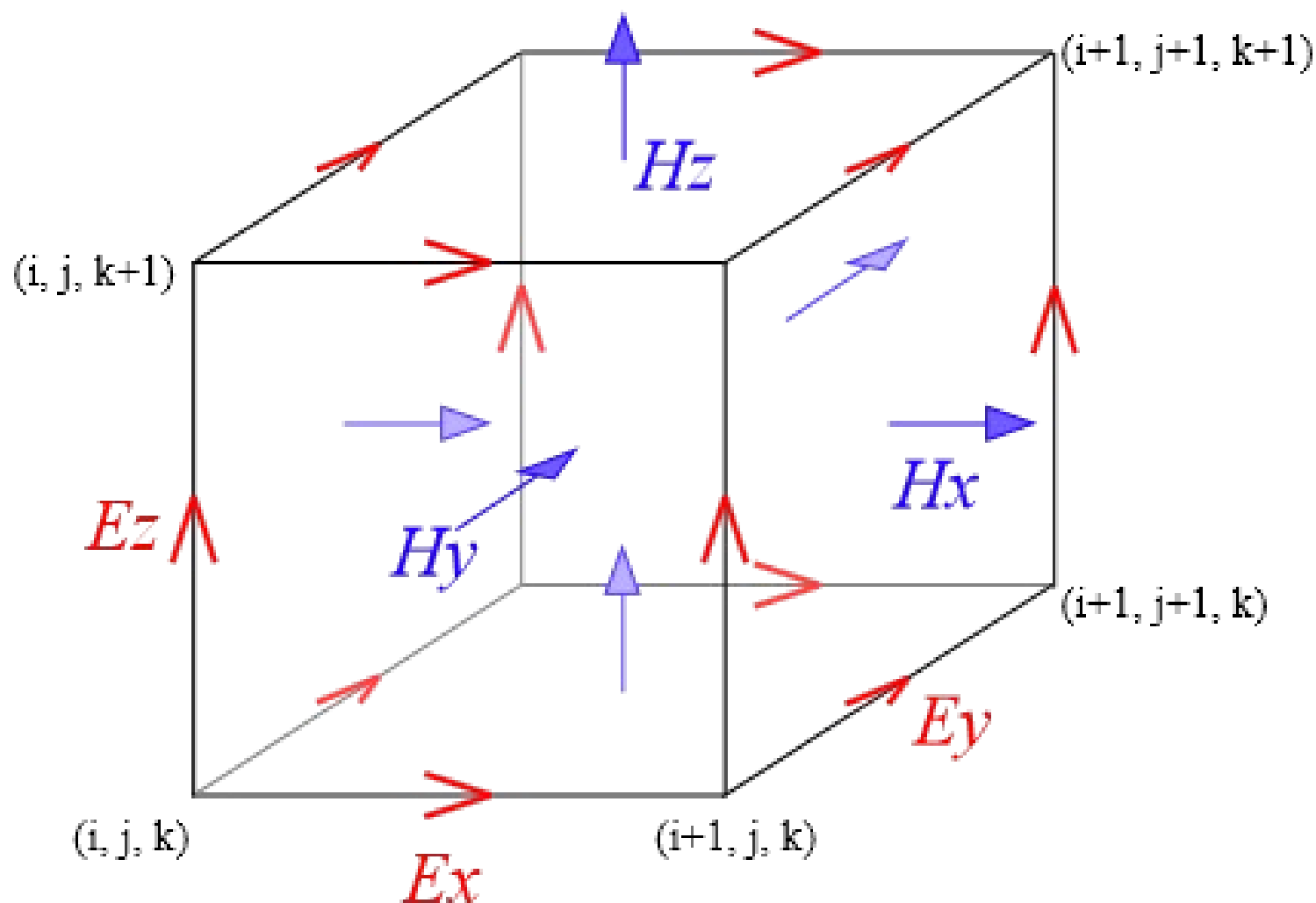
# Объединенная пространственная сетка для двумерного метода FDTD для двух поляризаций

277



# Ячейка для трехмерного метода FDTD

278



# Модификации метода FDTD

- Метод FDTD в криволинейных системах координат.
- Уменьшение отражений от границ области моделирования.
- Использование неравномерных сеток разбиения.
- Использование ячеек неправильной формы.
- Учет временной дисперсии среды.
- Учет зависимости параметров среды от частоты.
- Метод FDTD с произвольным шагом по времени.