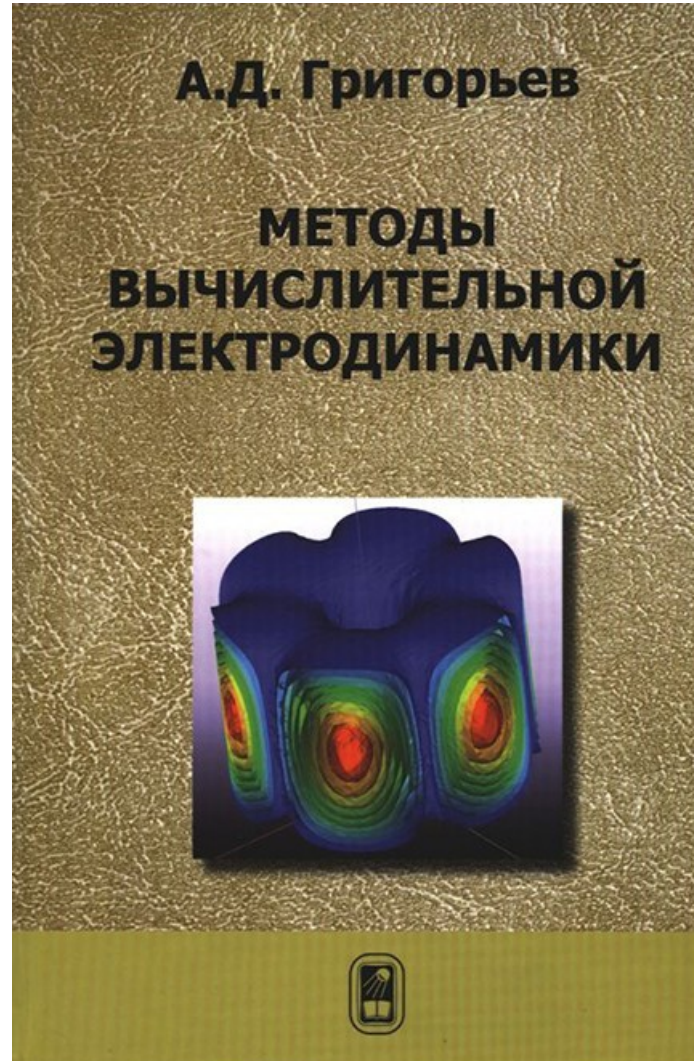


**Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет)**

Моделирование электродинамических задач численными методами

**Тема лекции:
«Постановка задачи
электродинамического моделирования»**

Литература



Обозначения

A — скалярная величина

\mathbf{A} — векторная величина

Численные методы электродинамики

Особенности численных методов решения задач

1. Решение задачи получается в результате выполнения определенной конечной последовательности арифметических действий (алгоритма), которая не может быть выражена с помощью одной или нескольких математических формул, связывающие исходные величины с заданными.
2. Алгоритм решения предусматривает полностью формализованные процедуры получения всех промежуточных и окончательных результатов из строго определенного набора исходных данных.

Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
 - Определение целей расчета.**
 - Определение класса задачи.
 - Определение необходимого объема входной и выходной информации.
 - Определение допустимой погрешности результатов.
- Аналитическая обработка.
 - Формулировка уравнений.
 - Формулировка начальных условий.
 - Формулировка граничных условий.
 - Описание формы расчетной области и свойств среды.
 - Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- Решение полученных систем уравнений.
- Обработка результатов.

Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
 - Определение целей расчета.
 - Определение класса задачи.**
 - Определение необходимого объема входной и выходной информации.
 - Определение допустимой погрешности результатов.
- Аналитическая обработка.
 - Формулировка уравнений.
 - Формулировка начальных условий.
 - Формулировка граничных условий.
 - Описание формы расчетной области и свойств среды.
 - Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- Решение полученных систем уравнений.
- Обработка результатов.

Классы электродинамических задач

Классы электродинамических задач

- **Линейные и нелинейные задачи.**
- Корректные и некорректные задачи.
- Прямые и обратные задачи (задачи анализа и задачи синтеза).
- Краевые и начально-краевые задачи.
- Задачи о вынужденных колебаниях и задачи о собственных (свободных) колебаниях (задачи на собственные значения).
- Определение размерности задачи (1D, 2D, 3D).
- Внутренние задачи и внешние задачи.
- Задачи параметрической оптимизации.

Нелинейные среды

Среда называется нелинейной, отклик которой на действие внешнего излучения нелинейно зависит от амплитуды возмущения.

В нелинейных средах не выполняется принцип суперпозиции: отклик на сумму возмущений не равен сумме откликов на отдельные возмущения.

Классы электродинамических задач

- Линейные и нелинейные задачи.
- **Корректные и некорректные задачи.**
- Прямые и обратные задачи (задачи анализа и задачи синтеза).
- Краевые и начально-краевые задачи.
- Задачи о вынужденных колебаниях и задачи о собственных (свободных) колебаниях (задачи на собственные значения).
- Определение размерности задачи (1D, 2D, 3D).
- Внутренние задачи и внешние задачи.
- Задачи параметрической оптимизации.

Корректно поставленная задача

Задача $y = A(x)$ называется корректно поставленной, если для любых входных данных x из некоторого класса решение y существует, единственно и устойчиво по входным данным.

Устойчивость задачи

Пусть δx — погрешность входных данных

$$y + \delta y = A(x + \delta x)$$

$\delta y = A(x + \delta x) - A(x)$ — неустранимая погрешность решения.

Если решение непрерывно зависит от входных данных, т.е. всегда $\|\delta y\| \rightarrow 0$ при $\|\delta x\| \rightarrow 0$, то задача называется устойчивой по входным данным; в противном случае задача неустойчива по входным данным.

Классы электродинамических задач

- Линейные и нелинейные задачи.
- Корректные и некорректные задачи.
- **Прямые и обратные задачи (задачи анализа и задачи синтеза).**
- Краевые и начально-краевые задачи.
- Задачи о вынужденных колебаниях и задачи о собственных (свободных) колебаниях (задачи на собственные значения).
- Определение размерности задачи (1D, 2D, 3D).
- Внутренние задачи и внешние задачи.
- Задачи параметрической оптимизации.

Прямая задача электродинамики

Прямая задача электродинамики (задача анализа) — определение электромагнитного поля в некоторой области V с определенными начальными и граничными условиями на поверхности S , созданное заданными источниками.

Обратная задача электродинамики

Обратная задача электродинамики (задача синтеза) — определение параметров среды и (или) источников в области V по известному распределению электромагнитного поля в некоторой другой области V_1 , которая может не совпадать с V .

Классы электродинамических задач

- Линейные и нелинейные задачи.
- Корректные и некорректные задачи.
- Прямые и обратные задачи (задачи анализа и задачи синтеза).
- **Краевые и начально-краевые задачи.**
- Задачи о вынужденных колебаниях и задачи о собственных (свободных) колебаниях (задачи на собственные значения).
- Определение размерности задачи (1D, 2D, 3D).
- Внутренние задачи и внешние задачи.
- Задачи параметрической оптимизации.

Краевые задачи

Для решения задачи используются уравнения Максвелла, записанные через комплексные амплитуды.

Решение производится в частотной области.

Анализ стационарных процессов.

Начально-краевые задачи

Для решения задачи используются уравнения Максвелла, записанные для мгновенных значений.

Решение производится во временной области.

Анализ переходных процессов.

Классы электродинамических задач

- Линейные и нелинейные задачи.
- Корректные и некорректные задачи.
- Прямые и обратные задачи (задачи анализа и задачи синтеза).
- Краевые и начально-краевые задачи.
- **Задачи о вынужденных колебаниях и задачи о собственных (свободных) колебаниях (задачи на собственные значения).**
- Определение размерности задачи (1D, 2D, 3D).
- Внутренние задачи и внешние задачи.
- Задачи параметрической оптимизации.

Классы электродинамических задач

- Линейные и нелинейные задачи.
- Корректные и некорректные задачи.
- Прямые и обратные задачи (задачи анализа и задачи синтеза).
- Краевые и начально-краевые задачи.
- Задачи о вынужденных колебаниях и задачи о собственных (свободных) колебаниях (задачи на собственные значения).
- **Определение размерности задачи (1D, 2D, 3D).**
- Внутренние задачи и внешние задачи.
- Задачи параметрической оптимизации.

Классы электродинамических задач

- Линейные и нелинейные задачи.
- Корректные и некорректные задачи.
- Прямые и обратные задачи (задачи анализа и задачи синтеза).
- Краевые и начально-краевые задачи.
- Задачи о вынужденных колебаниях и задачи о собственных (свободных) колебаниях (задачи на собственные значения).
- Определение размерности задачи (1D, 2D, 3D).
- **Внутренние задачи и внешние задачи.**
- Задачи параметрической оптимизации.

Внутренняя задача

Необходимо найти решение уравнений Максвелла или соответствующих им волновых уравнений в области V , ограниченной поверхностью S .

Это решение должно удовлетворять на поверхности S граничным условиям.

Требования для решения внутренней задачи во временной области

Решение внутренней задачи существует и единственно, если:

1. В начальный момент времени t_0 во всем объеме V заданы значения напряженностей электрического и магнитного полей.
2. На поверхности S заданы касательные составляющие \mathbf{E}_τ или \mathbf{H}_τ , или на части поверхности заданы \mathbf{E}_τ , а на остальной части — \mathbf{H}_τ .
3. В объеме V или его части электропроводность среды отлична от 0.

Требования для решения внутренней задачи в частотной области

Решение внутренней задачи существует и единственно, если:

1. На поверхности S заданы касательные составляющие \mathbf{E}_τ или \mathbf{H}_τ , или на части поверхности заданы \mathbf{E}_τ , а на остальной части — \mathbf{H}_τ .
2. В объеме V или его части мнимые части ε и (или) μ среды отлична от 0.

Внешняя задача

Область моделирования не ограничена.

Например, задача излучения: в свободном безграничном пространстве необходимо найти решение неоднородного волнового уравнения, удовлетворяющего условию излучения на бесконечности.

Доказать, что решение этой задачи существует и оно единственно.

Требования для решения внешней задачи

Решение внешней задачи существует и единственно, если:
на поверхности областей, вне которых задано ЭМ поле, заданы касательные составляющие \mathbf{E}_τ или \mathbf{H}_τ , а энергия ЭМ поля, создаваемого источниками конечной интенсивности и размера, во всем пространстве остается конечной.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_V (\epsilon_a |\vec{E}|^2 + \mu_a |\vec{H}|^2) r^2 dr d\theta d\varphi < \infty \quad (1.1)$$

r — расстояние от источников

V — заполняет все пространство

Классы электродинамических задач

- Линейные и нелинейные задачи.
- Корректные и некорректные задачи.
- Прямые и обратные задачи (задачи анализа и задачи синтеза).
- Краевые и начально-краевые задачи.
- Задачи о вынужденных колебаниях и задачи о собственных (свободных) колебаниях (задачи на собственные значения).
- Определение размерности задачи (1D, 2D, 3D).
- Внутренние задачи и внешние задачи.
- **Задачи параметрической оптимизации.**

Алгоритмы оптимизации

- Алгоритм градиентного спуска.
- Алгоритм Нелдера-Мида (симплекс-метод).
- Алгоритм имитации отжига.
- Генетический алгоритм.
- Алгоритм роя частиц.
- ...

Классы задач, решаемые в дальнейшем

- Линейные задачи.
- Корректные задачи.
- Прямые задачи (задачи анализа).
- Начально-краевые задачи.
- Задачи о вынужденных колебаниях.
- Размерности задачи - 1D, 2D.
- Внутренние задачи.

Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
 - Определение целей расчета.
 - Определение класса задачи.
 - Определение необходимого объема входной и выходной информации.**
 - Определение допустимой погрешности результатов.
- Аналитическая обработка.
 - Формулировка уравнений.
 - Формулировка начальных условий.
 - Формулировка граничных условий.
 - Описание формы расчетной области и свойств среды.
 - Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- Решение полученных систем уравнений.
- Обработка результатов.

Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
 - Определение целей расчета.
 - Определение класса задачи.
 - Определение необходимого объема входной и выходной информации.
 - Определение допустимой погрешности результатов.**
- Аналитическая обработка.
 - Формулировка уравнений.
 - Формулировка начальных условий.
 - Формулировка граничных условий.
 - Описание формы расчетной области и свойств среды.
 - Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- Решение полученных систем уравнений.
- Обработка результатов.

Точность решения

Математическая точность решения должна быть в несколько раз (2 — 4 раза) выше, чем ожидаемая точность модели.

Источники погрешности

- Погрешность за счет неточности исходных данных.
- Погрешность математической модели.
- Погрешность метода за счет дискретизации задачи.
- Вычислительная погрешность.

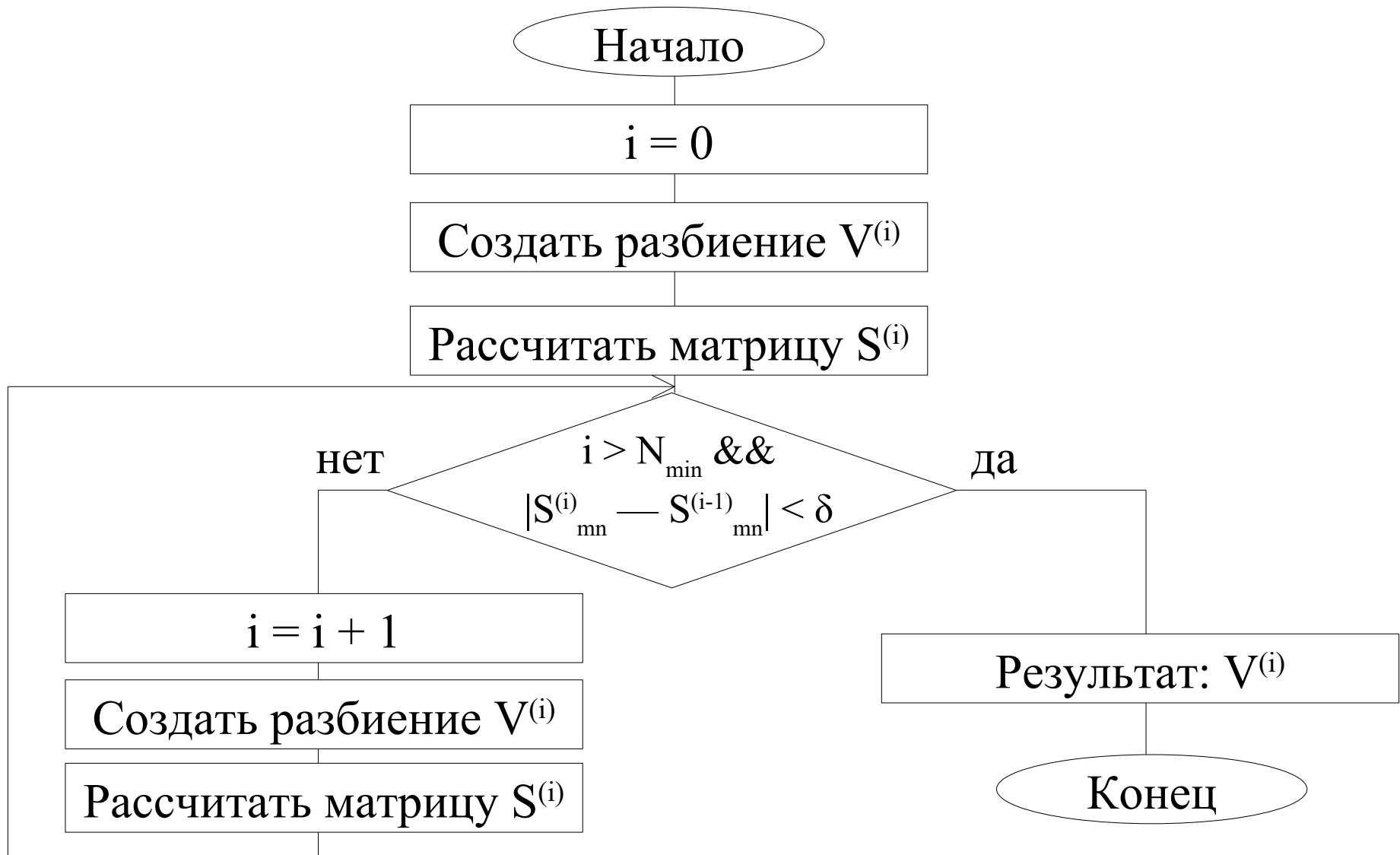
Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
 - Определение целей расчета.
 - Определение класса задачи.
 - Определение необходимого объема входной и выходной информации.
 - Определение допустимой погрешности результатов.
- Аналитическая обработка.
 - Формулировка уравнений.
 - Формулировка начальных условий.
 - Формулировка граничных условий.
 - Описание формы расчетной области и свойств среды.
 - Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- Решение полученных систем уравнений.
- Обработка результатов.

Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
 - Определение целей расчета.
 - Определение класса задачи.
 - Определение необходимого объема входной и выходной информации.
 - Определение допустимой погрешности результатов.
- Аналитическая обработка.
 - Формулировка уравнений.
 - Формулировка начальных условий.
 - Формулировка граничных условий.
 - Описание формы расчетной области и свойств среды.
 - Выбор метода решения.
- **Дискретизация модели.**
- Решение полученных систем уравнений.
- Обработка результатов.

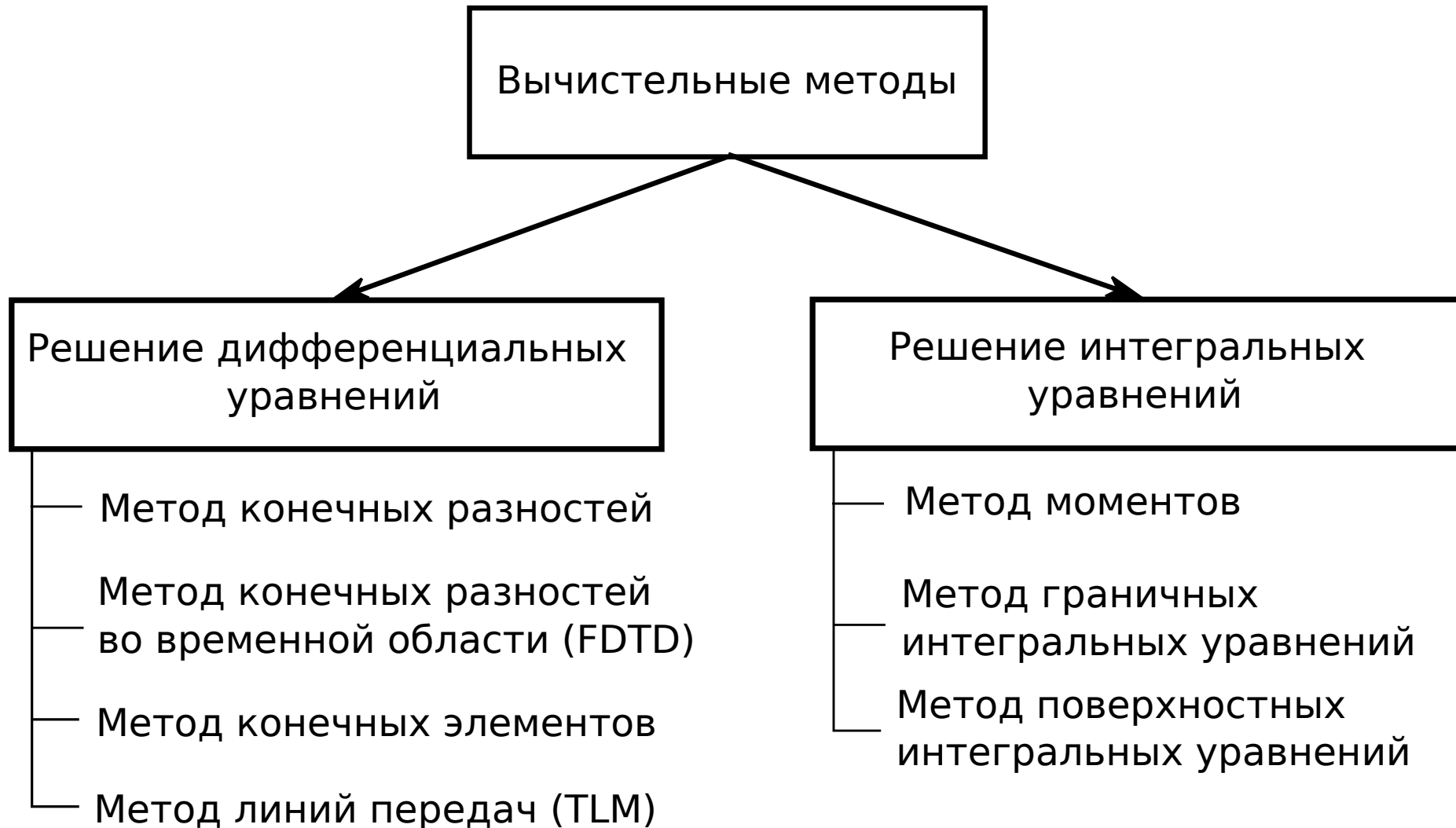
Итерационный алгоритм создания сетки разбиения



Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
 - Определение целей расчета.
 - Определение класса задачи.
 - Определение необходимого объема входной и выходной информации.
 - Определение допустимой погрешности результатов.
- Аналитическая обработка.
 - Формулировка уравнений.
 - Формулировка начальных условий.
 - Формулировка граничных условий.
 - Описание формы расчетной области и свойств среды.
 - Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- **Решение полученных систем уравнений.**
- Обработка результатов.

Классификация вычислительных методов



Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
 - Определение целей расчета.
 - Определение класса задачи.
 - Определение необходимого объема входной и выходной информации.
 - Определение допустимой погрешности результатов.
- Аналитическая обработка.
 - Формулировка уравнений.
 - Формулировка начальных условий.
 - Формулировка граничных условий.
 - Описание формы расчетной области и свойств среды.
 - Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- Решение полученных систем уравнений.
- **Обработка результатов.**

Граничные условия

Граничные условия

Граничные условия — соотношения между векторами поля в двух очень близких точках, находящихся по обе стороны границы раздела двух сред.

Поверхность раздела двух диэлектриков

Касательные составляющие напряженностей электрического и магнитного полей должны удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_{\tau 1} - \mathbf{E}_{\tau 2}) &= \mathbf{J}_s^m \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_{\tau 2} - \mathbf{H}_{\tau 1}) &= \mathbf{J}_s^e\end{aligned}$$

\mathbf{n} — нормаль к поверхности раздела, направленная из первой среды во вторую,

\mathbf{J}_s^e — поверхностная плотность электрического тока, протекающего по поверхности раздела,

\mathbf{J}_s^m — поверхностная плотность магнитного тока, протекающего по поверхности раздела.

Поверхность раздела двух диэлектриков

Нормальные составляющие индукции связаны соотношениями:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_{n2} - \mathbf{D}_{n1}) = \rho_s^e$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_{n2} - \mathbf{B}_{n1}) = \rho_s^m$$

\mathbf{n} — нормаль к поверхности раздела, направленная из первой среды во вторую,

ρ_s^e, ρ_s^m — поверхностные плотности электрического и магнитного заряда, находящихся на поверхности раздела

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E} [\text{Кл/м}^2]$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H} [\text{Тл}]$$

Поверхность раздела диэлектрика и идеального проводника

Касательная составляющая вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} равна нулю

$$\mathbf{E}_{\tau 1} = 0$$

Нормальная составляющая вектора напряженности магнитного поля \mathbf{H} равна нулю

$$\mathbf{H}_{n1} = 0$$

$$\mathbf{H}_{\tau 1} \times \mathbf{n} = \mathbf{j}$$

Поверхность раздела диэлектрика и идеального магнетика

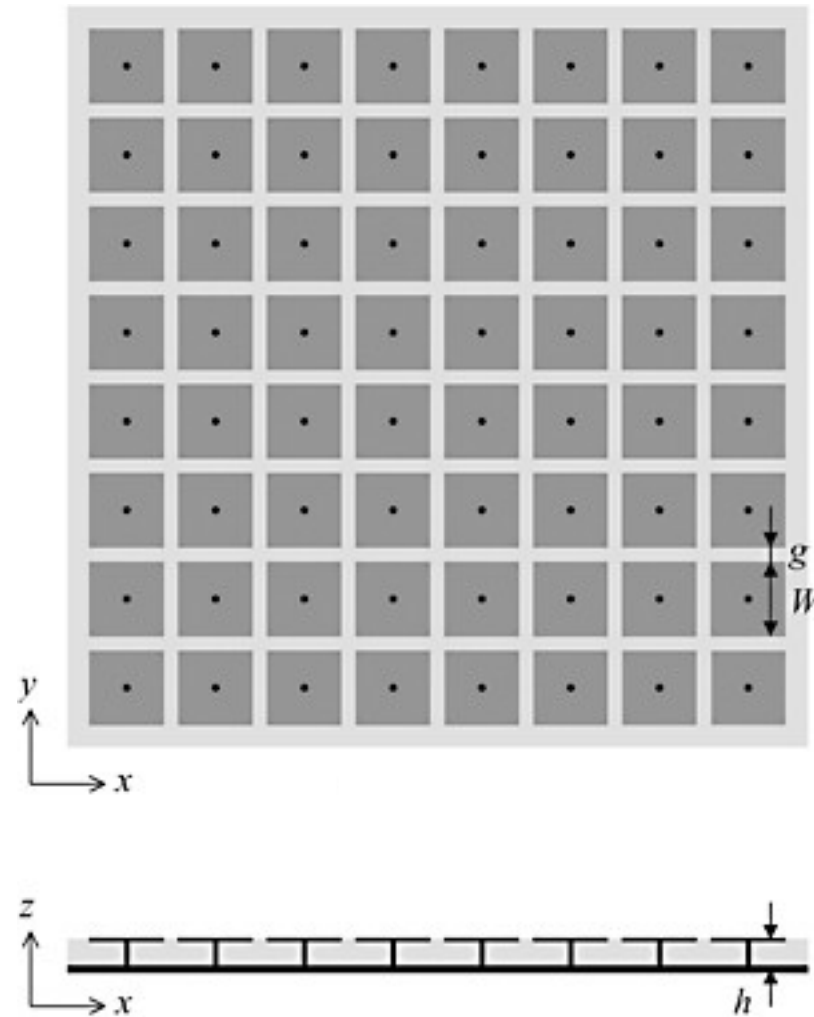
Нормальная составляющая вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} равна нулю

$$E_{n1} = 0$$

Касательная составляющая вектора напряженности магнитного поля \mathbf{H} равна нулю:

$$H_{\tau 1} = 0$$

Electromagnetic Band Gap (EBG)



Поверхность раздела диэлектрика и металла с конечной проводимостью

Поле в диэлектрике с потерями уменьшается экспоненциально:

$$|\dot{\mathbf{E}}(x)| = |\dot{\mathbf{E}}_0| e^{-x/\delta}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$$

δ — глубина проникновения.

Поверхность раздела диэлектрика и металла с конечной проводимостью

Приближенные граничные условия Леонтовича
(импедансные граничные условия):

$$\dot{\mathbf{E}}_{\tau} = \dot{Z}_s (\dot{\mathbf{H}}_{\tau} \times \mathbf{n})$$

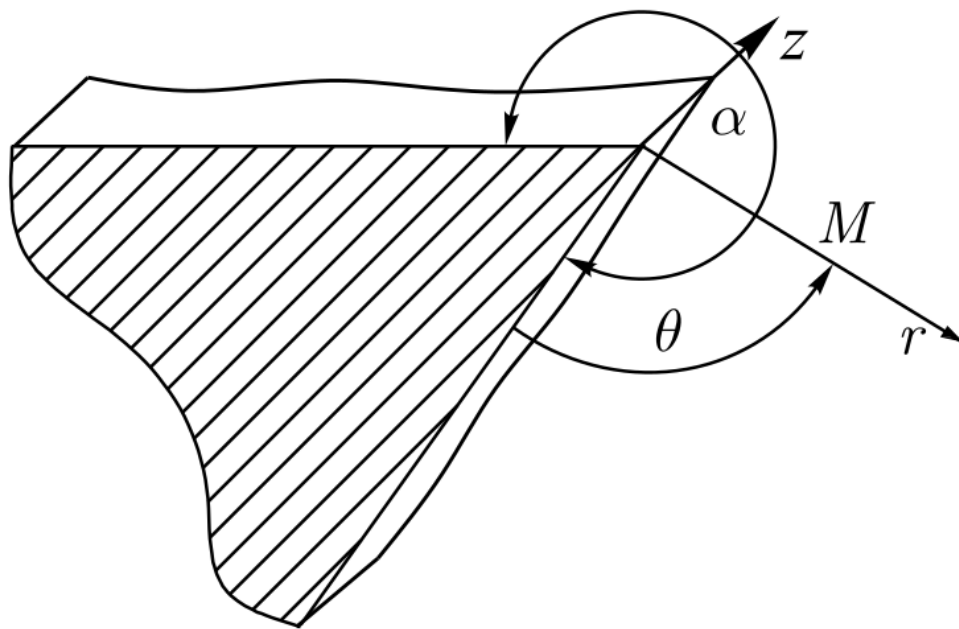
$\dot{\mathbf{E}}_{\tau}, \dot{\mathbf{H}}_{\tau}$ — касательные составляющие комплексных амплитуд напряженности электрического и магнитного полей

\dot{Z}_s — поверхностное сопротивление металла

$$\dot{Z}_s = (1 + i) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \sigma}}$$

Эти условия справедливы, если радиус кривизны поверхности металла много больше глубины проникновения.

Граничные условия на ребре



Электромагнитная энергия, запасенная в любом конечном объеме вблизи ребра, должна оставаться конечной.

Любая составляющая векторов **Е** и **Н** при приближении к ребру должна расти не быстрее, чем $r^{\tau-1}$, $\tau > 0$

r — расстояние от ребра до точки наблюдения.

τ — определяется электрофизическими свойствами сред, образующих ребро, и формой поверхностей раздела.

Lockheed F-117 Nighthawk



Уфимцев П.Я.
**«Метод краевых волн в физической
теории дифракции», 1962 г.**



Условие излучения

Энергия поля должна быть конечной.

Напряженность электрического и магнитного полей должна убывать на бесконечности быстрее, чем $1 / r$.

Условие излучения Зоммерфельда:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ r \left[\frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} - \sqrt{\epsilon \mu} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \right] \right\} = 0$$