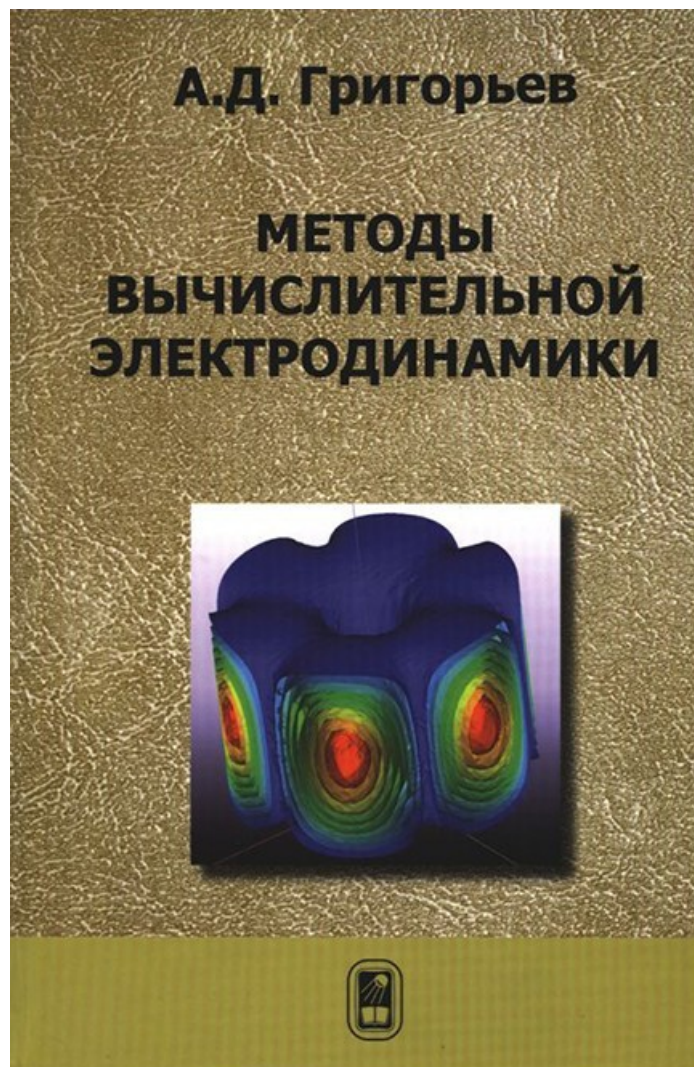


# **Постановка задачи электродинамического моделирования**

# Литература



## Обозначения

$A$  — скалярная величина

$\mathbf{A}$  — векторная величина

# Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
  - Определение целей расчета.**
  - Определение класса задачи.
  - Определение необходимого объема входной и выходной информации.
  - Определение допустимой погрешности результатов.
- Аналитическая обработка.
  - Формулировка уравнений.
  - Формулировка начальных условий.
  - Формулировка граничных условий.
  - Описание формы расчетной области и свойств среды.
  - Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- Решение полученных систем уравнений.
- Обработка результатов.

# Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.  
Определение целей расчета.  
**Определение класса задачи.**  
Определение необходимого объема входной и выходной информации.  
Определение допустимой погрешности результатов.
- Аналитическая обработка.  
Формулировка уравнений.  
Формулировка начальных условий.  
Формулировка граничных условий.  
Описание формы расчетной области и свойств среды.  
Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- Решение полученных систем уравнений.
- Обработка результатов.

---

# Классы электродинамических задач

# Классы электродинамических задач



# Классы электродинамических задач



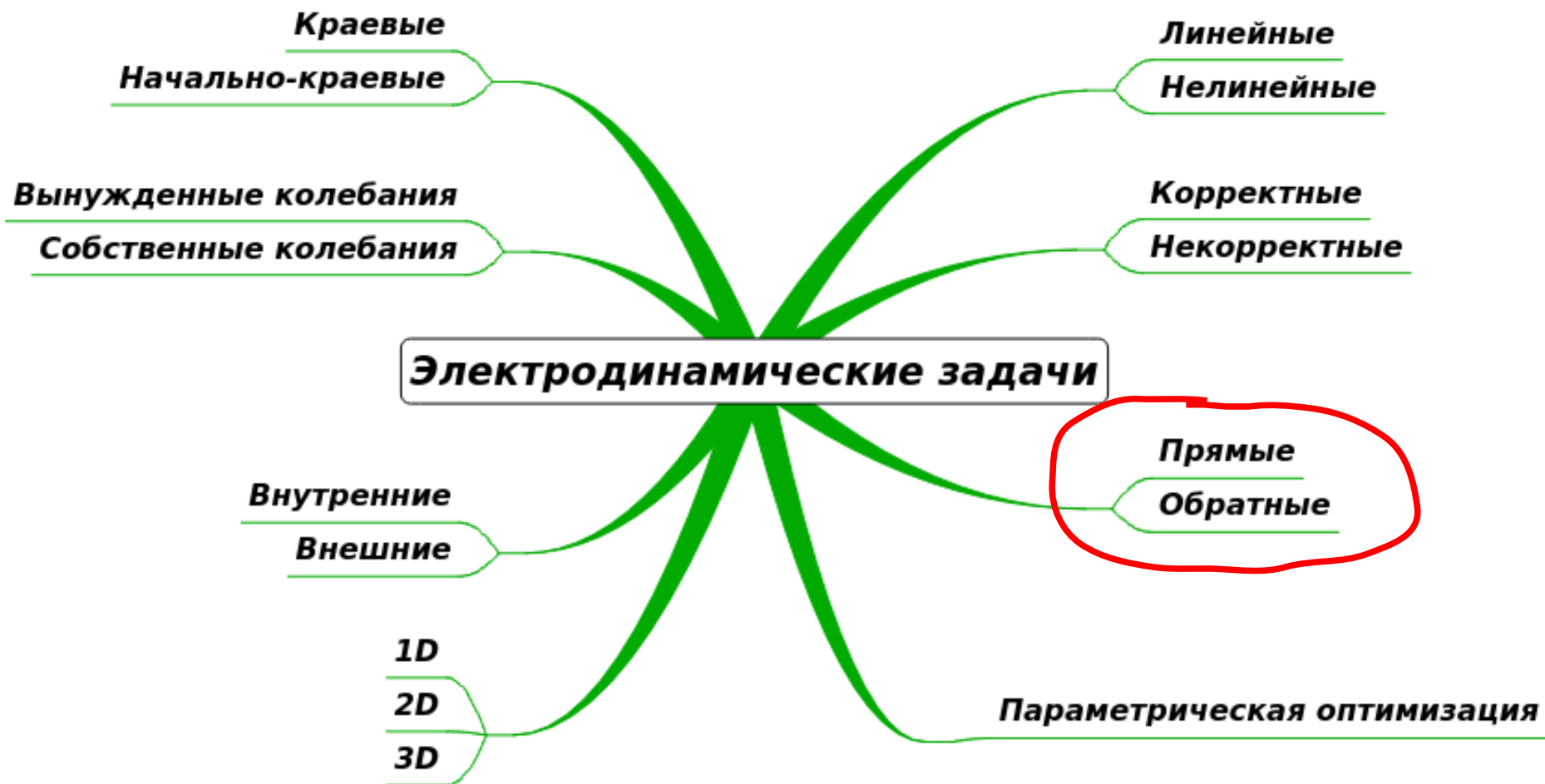


## Нелинейные среды

Среда называется **нелинейной**, отклик которой на действие внешнего излучения нелинейно зависит от амплитуды возмущения.

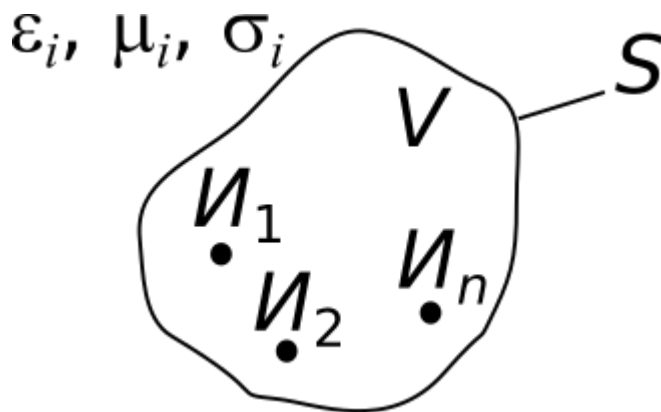
В **нелинейных** средах не выполняется принцип суперпозиции: отклик на сумму возмущений не равен сумме откликов на отдельные возмущения.

# Классы электродинамических задач



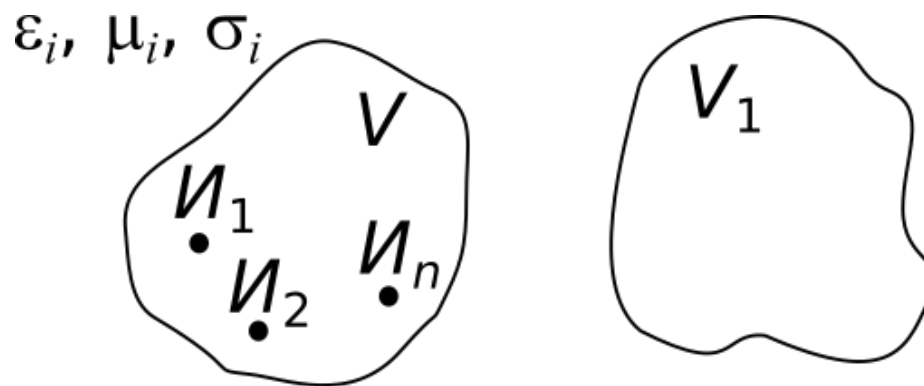
## Прямая задача электродинамики

**Прямая задача электродинамики (задача анализа)** — определение электромагнитного поля в некоторой области  $V$  с определенными начальными и граничными условиями на поверхности  $S$ , созданное заданными источниками.

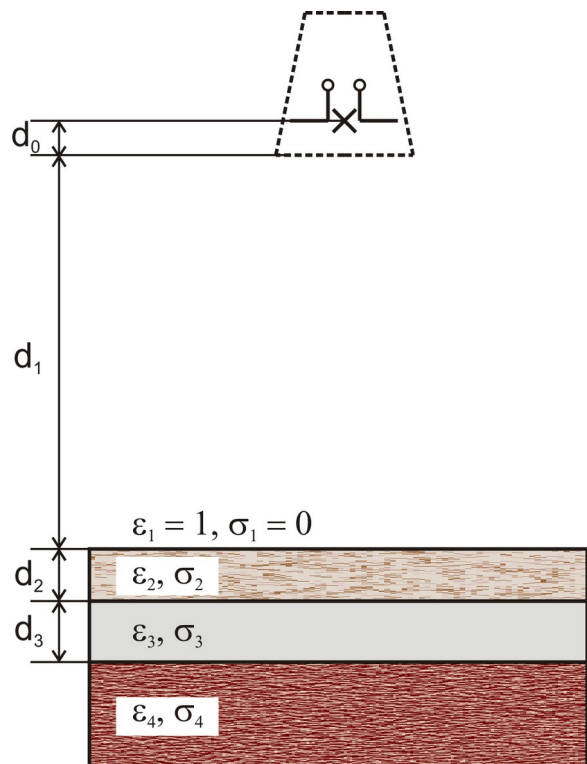


## Обратная задача электродинамики

**Обратная задача электродинамики (задача синтеза)** — определение параметров среды и (или) источников в области  $V$  по известному распределению электромагнитного поля в некоторой другой области  $V_1$ , которая может не совпадать с  $V$ .



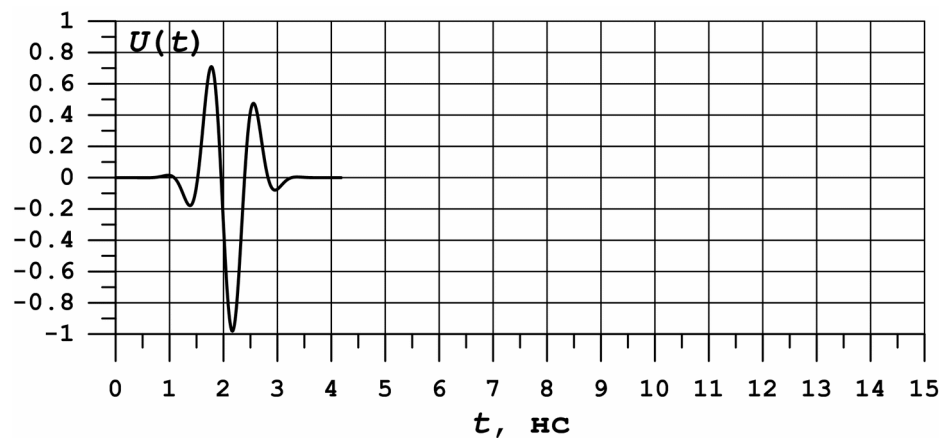
# Пример обратной задачи — диагностика многослойной среды радаром подповерхностного зондирования



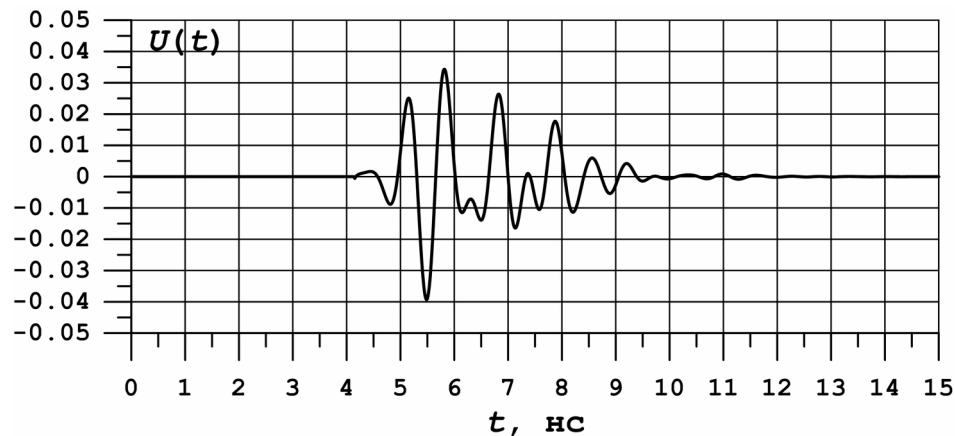
## Параметры среды

1.  $\epsilon_1 = 1.0$ ,  $d_1 = 0.5$  м
2.  $\epsilon_2 = 4.0$ ,  $d_2 = 0.10$  м
3.  $\epsilon_3 = 1.0$ ,  $d_3 = 0.105$  м
4.  $\epsilon_4 = 4.0$

## Зондирующий сигнал



## Отраженный сигнал



# Классы электродинамических задач



## Корректно поставленная задача

Задача  $y = A(x)$  называется корректно поставленной, если для любых входных данных  $x$  из некоторого класса решение  $y$  существует, единственно и устойчиво по входным данным.

## Устойчивость задачи

Пусть  $\delta x$  — погрешность входных данных

$$y + \delta y = A(x + \delta x)$$

$\delta y = A(x + \delta x) - A(x)$  — неустранимая погрешность решения.

Если решение непрерывно зависит от входных данных, т.е. всегда  $\|\delta y\| \rightarrow 0$  при  $\|\delta x\| \rightarrow 0$ , то задача называется устойчивой по входным данным; в противном случае задача неустойчива по входным данным.



# Классы электродинамических задач



## Краевые задачи

Для решения задачи используются уравнения Максвелла, записанные через комплексные амплитуды.

Решение производится в частотной области.

Анализ стационарных процессов.

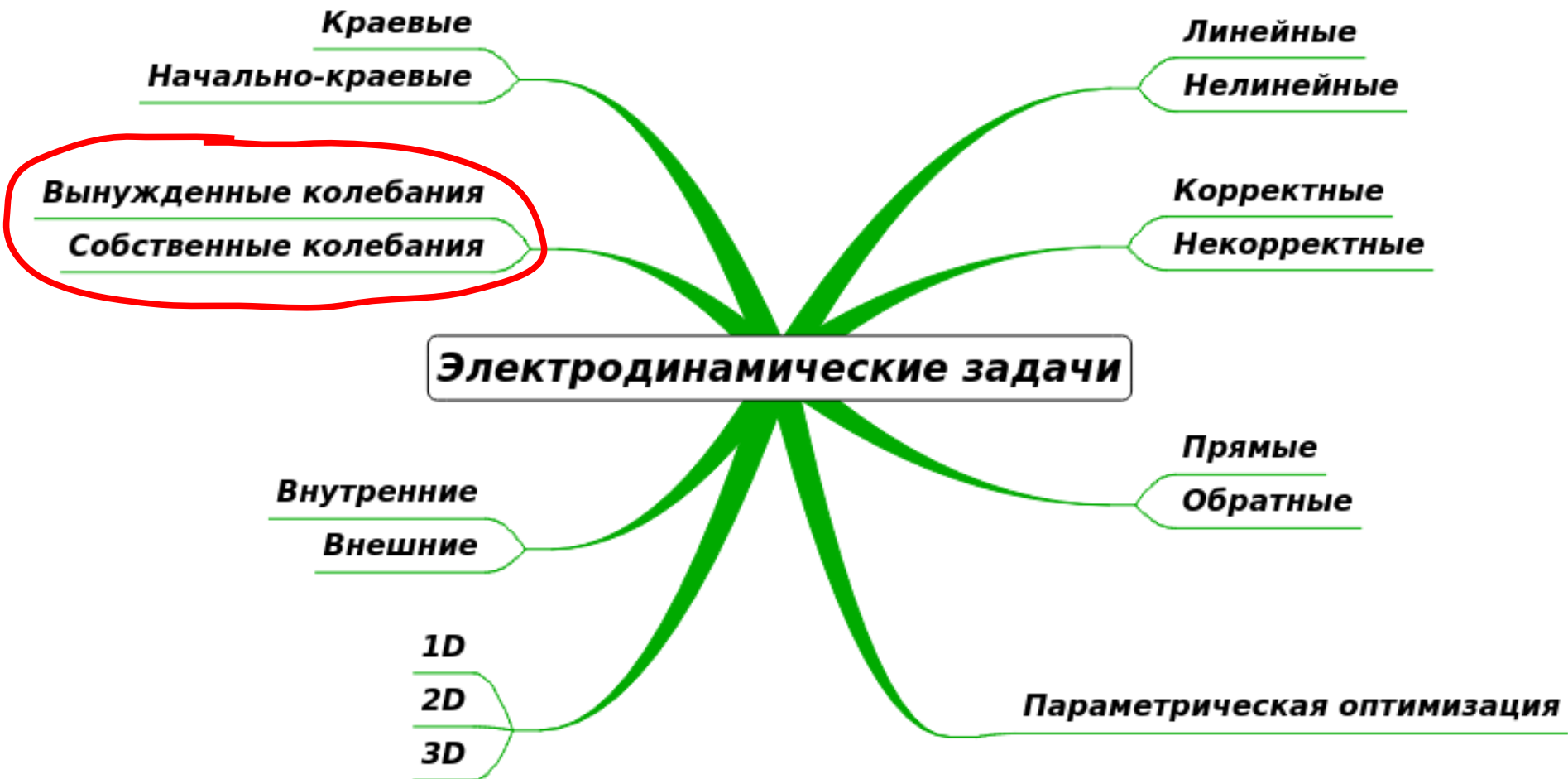
## Начально-краевые задачи

Для решения задачи используются уравнения Максвелла, записанные для мгновенных значений.

Решение производится во временной области.

Анализ переходных процессов.

# Классы электродинамических задач



# Классы электродинамических задач



## Внутренняя задача

Необходимо найти решение уравнений Максвелла или соответствующих им волновых уравнений в области  $V$ , ограниченной поверхностью  $S$ .

Это решение должно удовлетворять на поверхности  $S$  граничным условиям.

# Требования для решения внутренней задачи во временной области

Решение внутренней задачи существует и единственно, если:

1. В начальный момент времени  $t_0$  во всем объеме  $V$  заданы значения напряженностей электрического и магнитного полей.
2. На поверхности  $S$  заданы касательные составляющие  $\mathbf{E}_\tau$  или  $\mathbf{H}_\tau$ , или на части поверхности заданы  $\mathbf{E}_\tau$ , а на остальной части —  $\mathbf{H}_\tau$ .
3. В объеме  $V$  или его части электропроводность среды отлична от 0.

# Требования для решения внутренней задачи в частотной области

Решение внутренней задачи существует и единственно, если:

1. На поверхности  $S$  заданы касательные составляющие  $\mathbf{E}_\tau$  или  $\mathbf{H}_\tau$ , или на части поверхности заданы  $\mathbf{E}_\tau$ , а на остальной части —  $\mathbf{H}_\tau$ .
2. В объеме  $V$  или его части мнимые части  $\varepsilon$  и (или)  $\mu$  среды отлична от 0.



## Внешняя задача

Область моделирования не ограничена.

Например, задача излучения: в свободном безграничном пространстве необходимо найти решение неоднородного волнового уравнения, удовлетворяющего условию излучения на бесконечности.

Доказать, что решение этой задачи существует и оно единственно.

# Требования для решения внешней задачи

Решение внешней задачи существует и единственно, если:

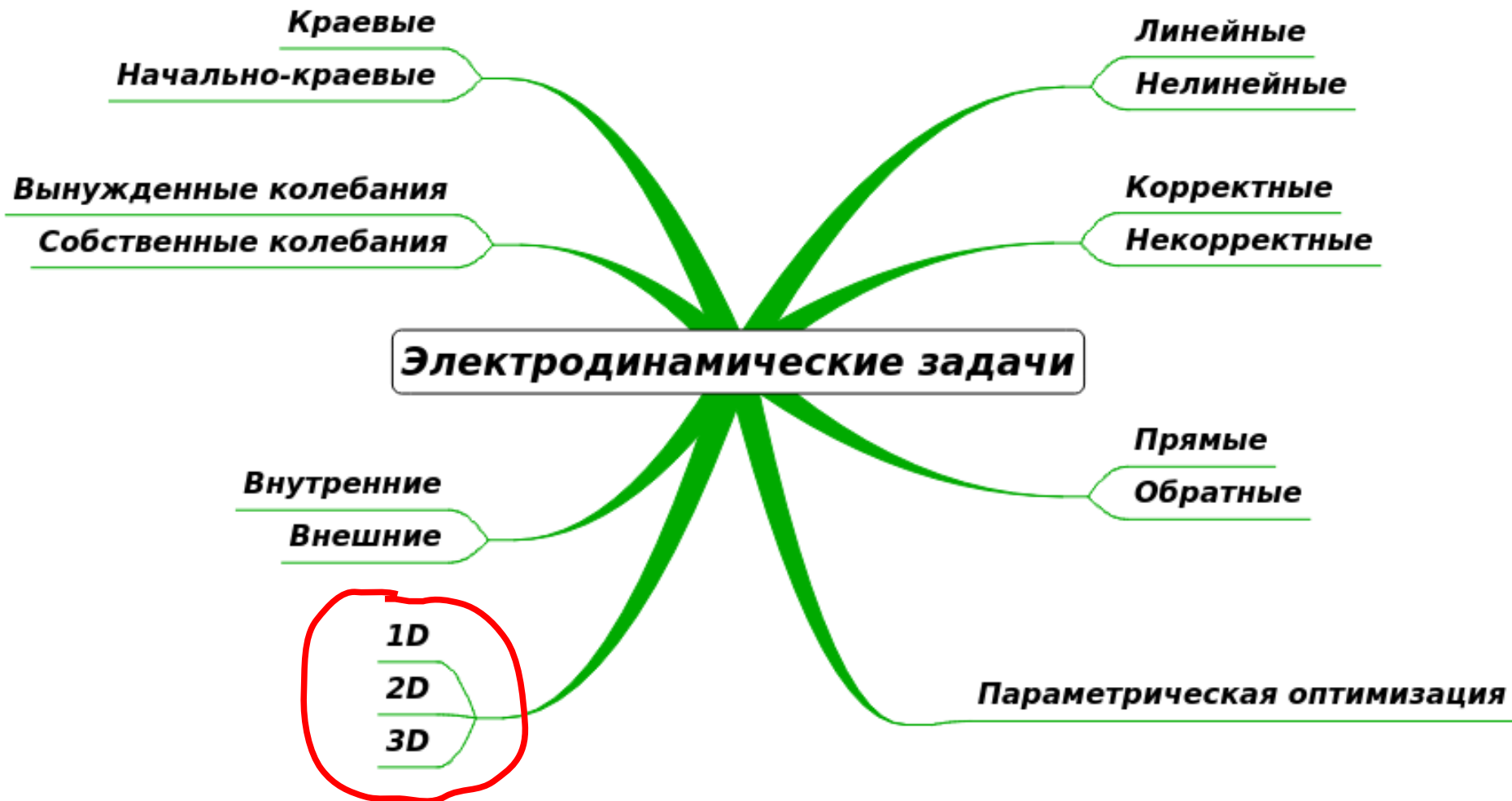
на поверхности областей, вне которых задано ЭМ поле, заданы касательные составляющие  $\mathbf{E}_\tau$  или  $\mathbf{H}_\tau$ , а энергия ЭМ поля, создаваемого источниками конечной интенсивности и размера, во всем пространстве остается конечной.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_V (\epsilon_a |\vec{E}|^2 + \mu_a |\vec{H}|^2) r^2 dr d\theta d\phi < \infty \quad (1.1)$$

$r$  — расстояние от источников

$V$  — заполняет все пространство

# Классы электродинамических задач



# Классы электродинамических задач



# Алгоритмы оптимизации

- Алгоритм градиентного спуска.
- Алгоритм Нелдера-Мида (симплекс-метод).
- Алгоритм имитации отжига.
- Генетический алгоритм.
- Алгоритм роя частиц.
- Алгоритм дифференциальной эволюции.
- ...

# Классы задач, решаемые в дальнейшем

- Линейные задачи.
- Корректные задачи.
- Прямые задачи (задачи анализа).
- Начально-краевые задачи.
- Задачи о вынужденных колебаниях.
- Размерности задачи - 1D, 2D.
- Внутренние задачи.

# Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
  - Определение целей расчета.
  - Определение класса задачи.
  - Определение необходимого объема входной и выходной информации.**
  - Определение допустимой погрешности результатов.
- Аналитическая обработка.
  - Формулировка уравнений.
  - Формулировка начальных условий.
  - Формулировка граничных условий.
  - Описание формы расчетной области и свойств среды.
  - Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- Решение полученных систем уравнений.
- Обработка результатов.

# Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
  - Определение целей расчета.
  - Определение класса задачи.
  - Определение необходимого объема входной и выходной информации.
  - Определение допустимой погрешности результатов.**
- Аналитическая обработка.
  - Формулировка уравнений.
  - Формулировка начальных условий.
  - Формулировка граничных условий.
  - Описание формы расчетной области и свойств среды.
  - Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- Решение полученных систем уравнений.
- Обработка результатов.



## Точность решения

Математическая точность решения должна быть в несколько раз (2 — 4 раза) выше, чем ожидаемая точность модели.

## Источники погрешности

- Погрешность за счет неточности исходных данных.
- Погрешность математической модели.
- Погрешность метода за счет дискретизации задачи.
- Вычислительная погрешность.

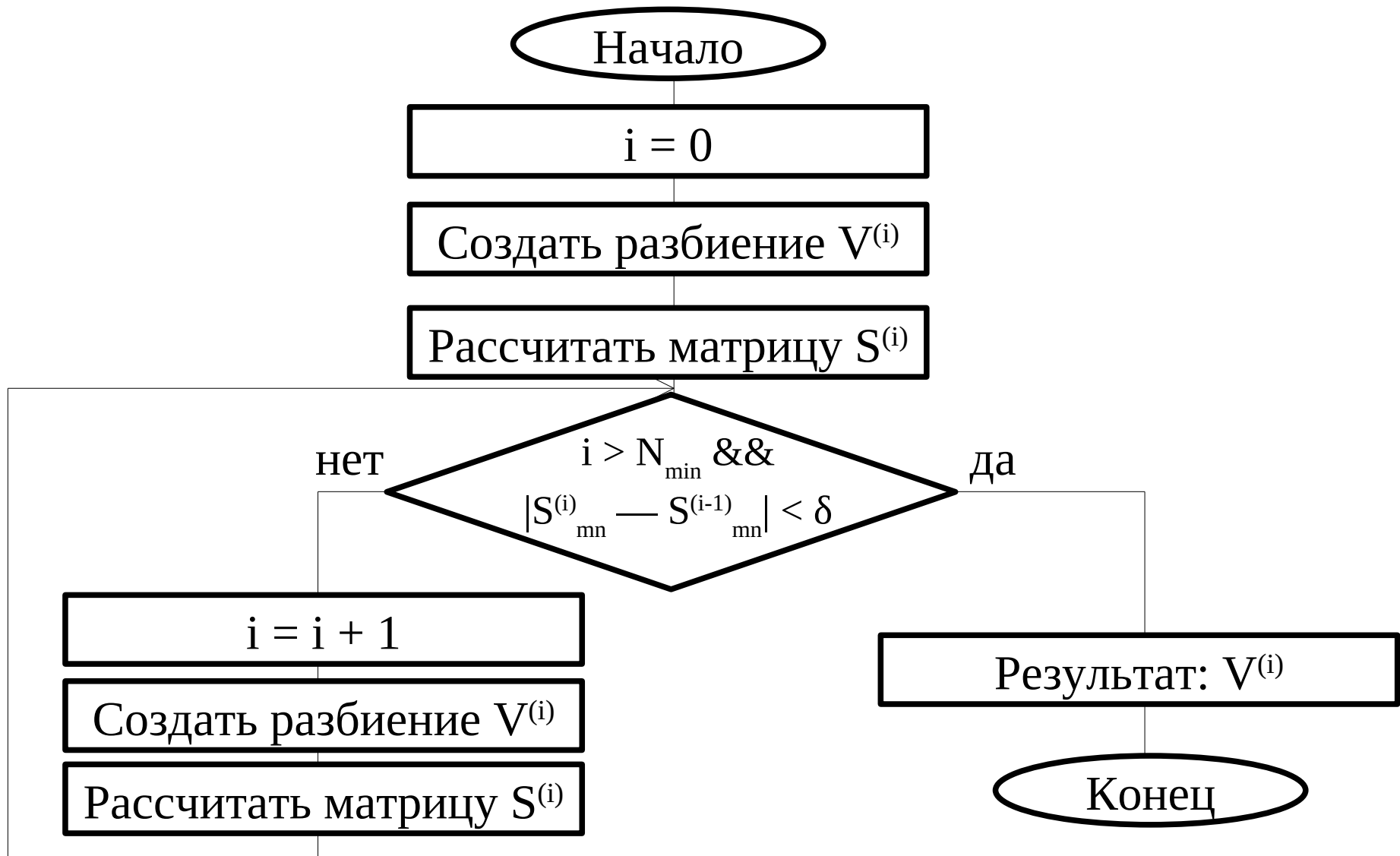
# Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
  - Определение целей расчета.
  - Определение класса задачи.
  - Определение необходимого объема входной и выходной информации.
  - Определение допустимой погрешности результатов.
- **Аналитическая обработка.**
  - Формулировка уравнений.
  - Формулировка начальных условий.
  - Формулировка граничных условий.
  - Описание формы расчетной области и свойств среды.
  - Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- Решение полученных систем уравнений.
- Обработка результатов.

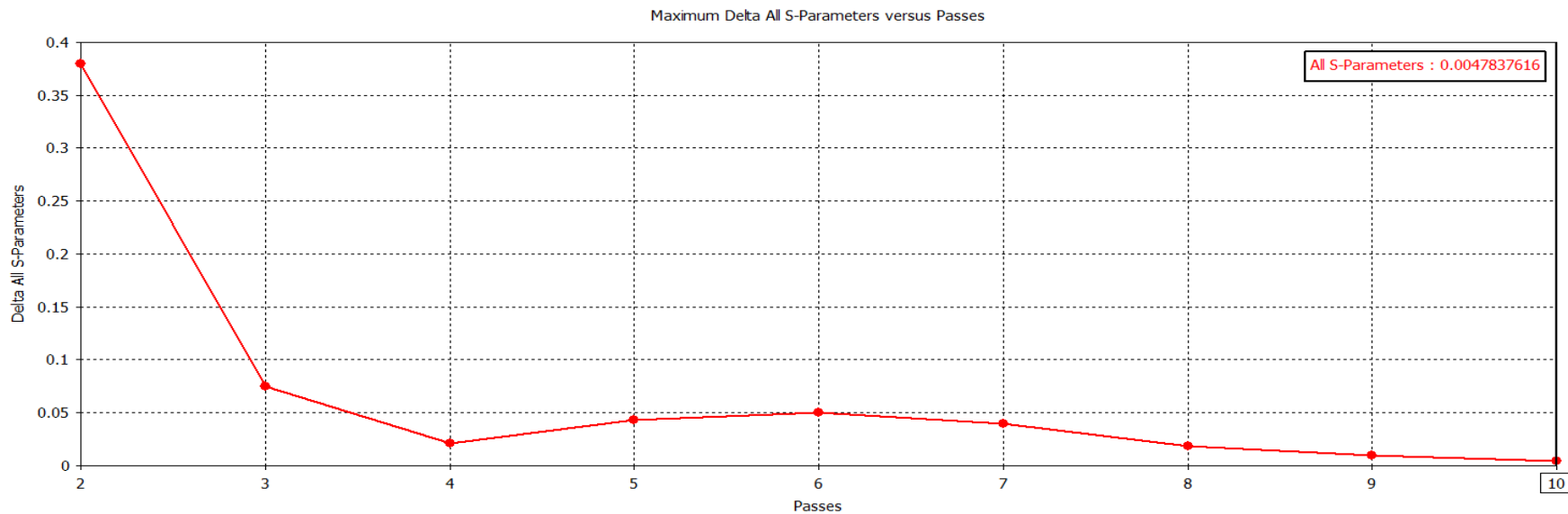
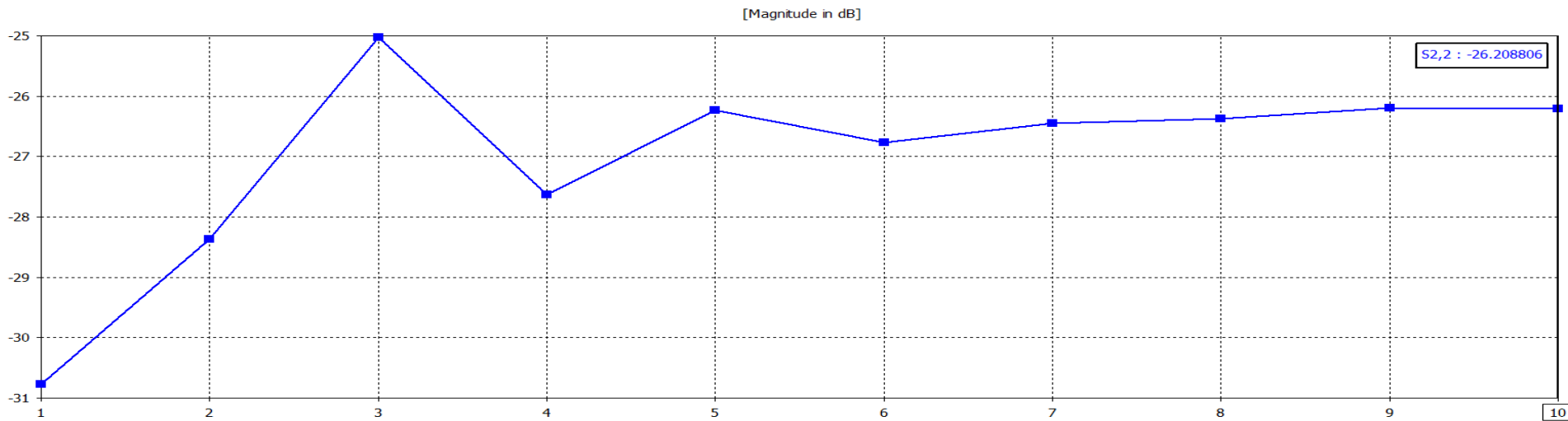
# Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
  - Определение целей расчета.
  - Определение класса задачи.
  - Определение необходимого объема входной и выходной информации.
  - Определение допустимой погрешности результатов.
- Аналитическая обработка.
  - Формулировка уравнений.
  - Формулировка начальных условий.
  - Формулировка граничных условий.
  - Описание формы расчетной области и свойств среды.
  - Выбор метода решения.
- **Дискретизация модели.**
- Решение полученных систем уравнений.
- Обработка результатов.

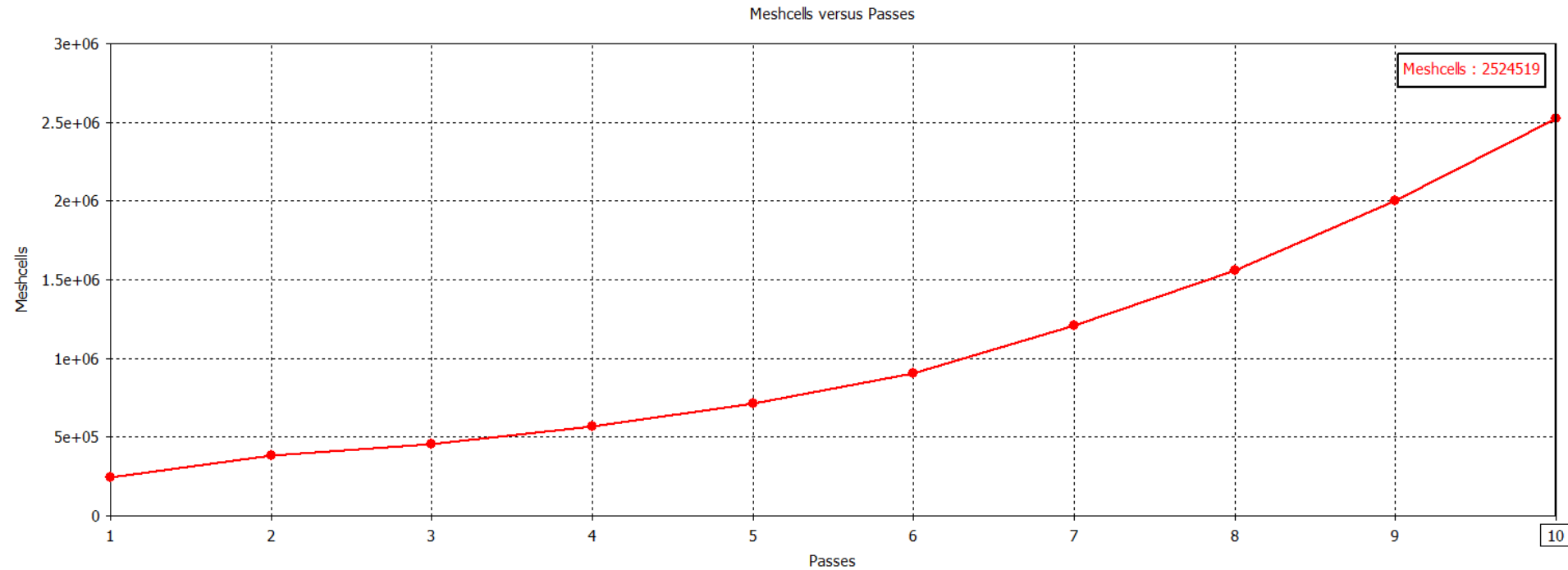
# Итерационный алгоритм создания сетки разбиения



# Итерационный алгоритм создания сетки разбиения



# Итерационный алгоритм создания сетки разбиения

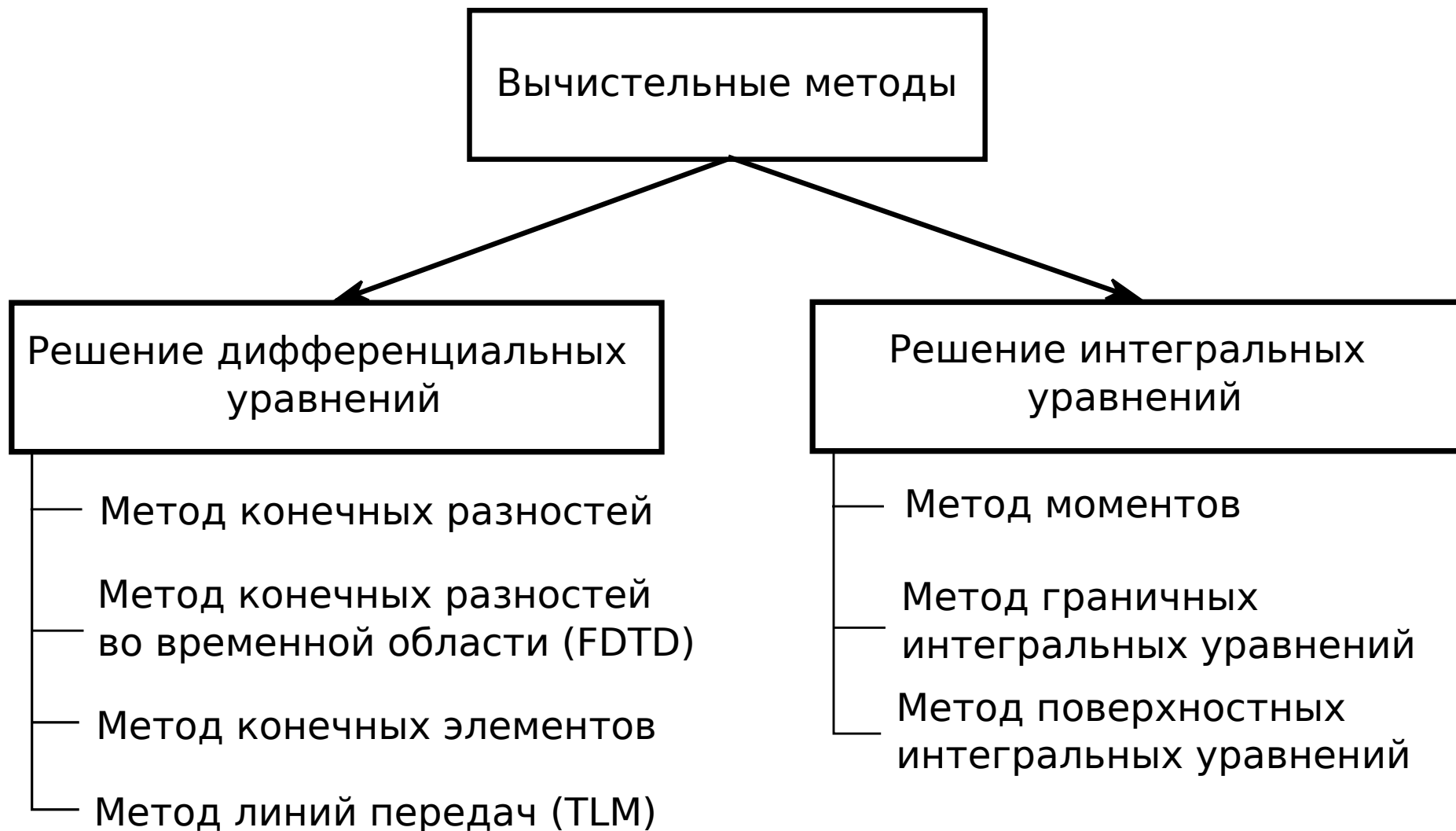


# Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
  - Определение целей расчета.
  - Определение класса задачи.
  - Определение необходимого объема входной и выходной информации.
  - Определение допустимой погрешности результатов.
- Аналитическая обработка.
  - Формулировка уравнений.
  - Формулировка начальных условий.
  - Формулировка граничных условий.
  - Описание формы расчетной области и свойств среды.
  - Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- **Решение полученных систем уравнений.**
- Обработка результатов.



# Классификация вычислительных методов



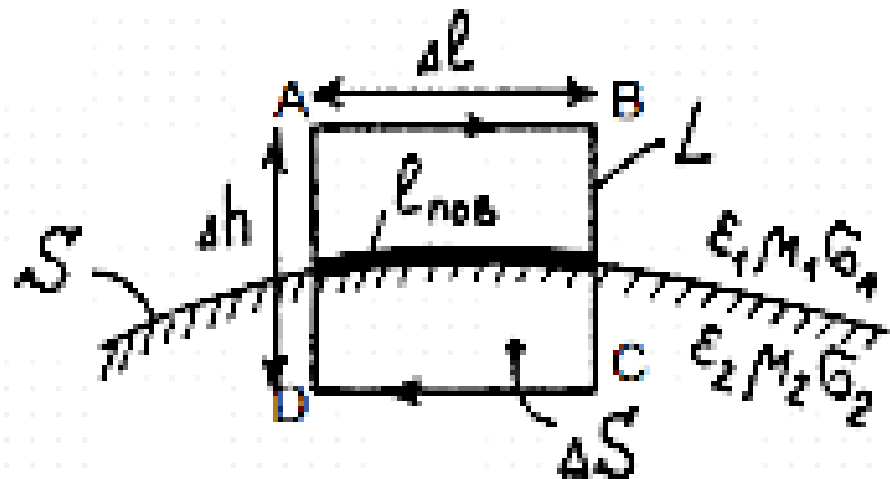
# Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
  - Определение целей расчета.
  - Определение класса задачи.
  - Определение необходимого объема входной и выходной информации.
  - Определение допустимой погрешности результатов.
- Аналитическая обработка.
  - Формулировка уравнений.
  - Формулировка начальных условий.
  - Формулировка граничных условий.
  - Описание формы расчетной области и свойств среды.
  - Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- Решение полученных систем уравнений.
- **Обработка результатов.**

# Граничные условия

## Граничные условия

**Граничные условия** — соотношения между векторами поля в двух очень близких точках, находящихся по обе стороны границы раздела двух сред.



## Поверхность раздела двух диэлектриков

Касательные составляющие напряженностей электрического и магнитного полей должны удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_{\tau 1} - \mathbf{E}_{\tau 2}) &= \mathbf{J}_s^m \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_{\tau 2} - \mathbf{H}_{\tau 1}) &= \mathbf{J}_s^e\end{aligned}$$

$\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности раздела, направленная из первой среды во вторую,

$\mathbf{J}_s^e$  — поверхностная плотность электрического тока, протекающего по поверхности раздела,

$\mathbf{J}_s^m$  — поверхностная плотность магнитного тока, протекающего по поверхности раздела.

# Поверхность раздела двух диэлектриков

Нормальные составляющие индукции связаны соотношениями:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_{n2} - \mathbf{D}_{n1}) = \rho_s^e$$
$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_{n2} - \mathbf{B}_{n1}) = \rho_s^m$$

$\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности раздела, направленная из первой среды во вторую,

$\rho_s^e, \rho_s^m$  — поверхностные плотности электрического и магнитного заряда, находящихся на поверхности раздела

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E} [\text{Кл/м}^2]$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H} [\text{Тл}]$$

# Поверхность раздела диэлектрика и идеального проводника

Касательная составляющая вектора напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  равна нулю

$$\mathbf{E}_{\tau 1} = 0$$

Нормальная составляющая вектора напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  равна нулю

$$\mathbf{H}_{n1} = 0$$

$$\mathbf{H}_{\tau 1} \times \mathbf{n} = \mathbf{j}$$

# Поверхность раздела диэлектрика и идеального магнетика

Нормальная составляющая вектора напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  равна нулю

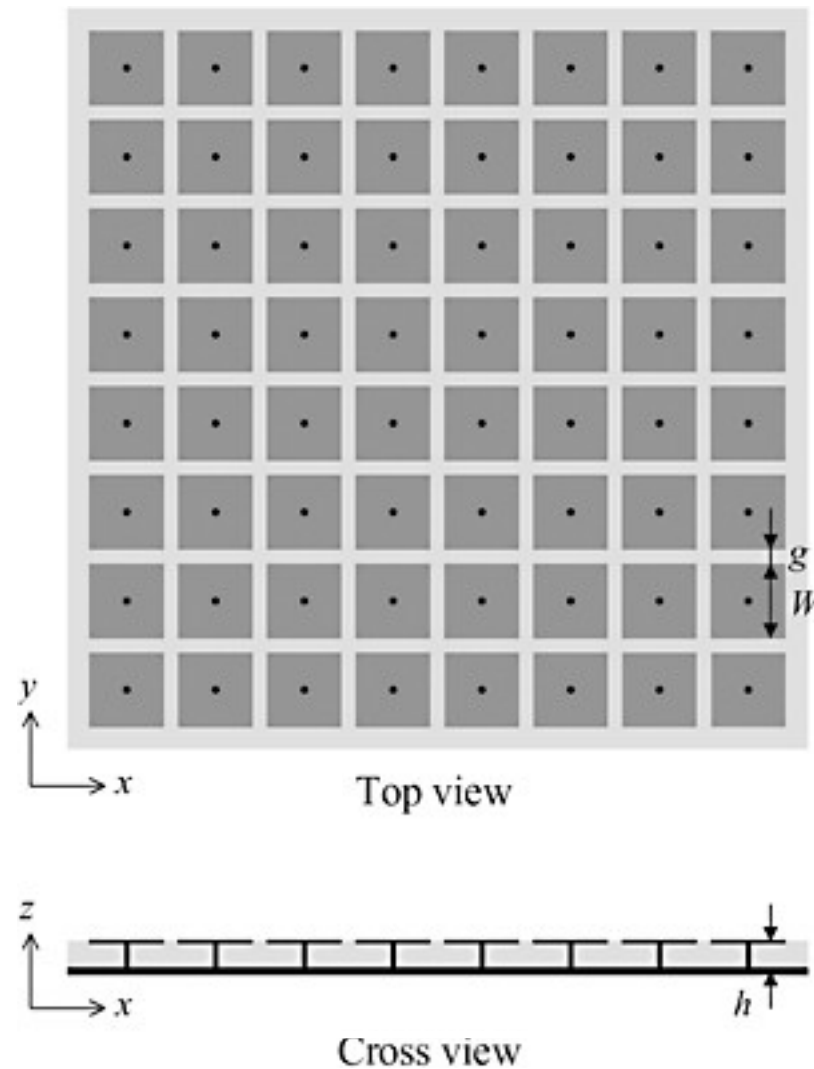
$$E_{n1} = 0$$

Касательная составляющая вектора напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  равна нулю:

$$H_{\tau 1} = 0$$



# Electromagnetic Band Gap (EBG)



# Поверхность раздела диэлектрика и металла с конечной проводимостью

Поле в диэлектрике с потерями уменьшается экспоненциально:

$$|\dot{\mathbf{E}}(x)| = |\dot{\mathbf{E}}_0| e^{-x/\delta}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$$

$\delta$  — глубина проникновения.

# Поверхность раздела диэлектрика и металла с конечной проводимостью

Приближенные граничные условия Леонтовича  
(импедансные граничные условия):

$$\dot{\mathbf{E}}_{\tau} = \dot{Z}_s (\dot{\mathbf{H}}_{\tau} \times \mathbf{n})$$

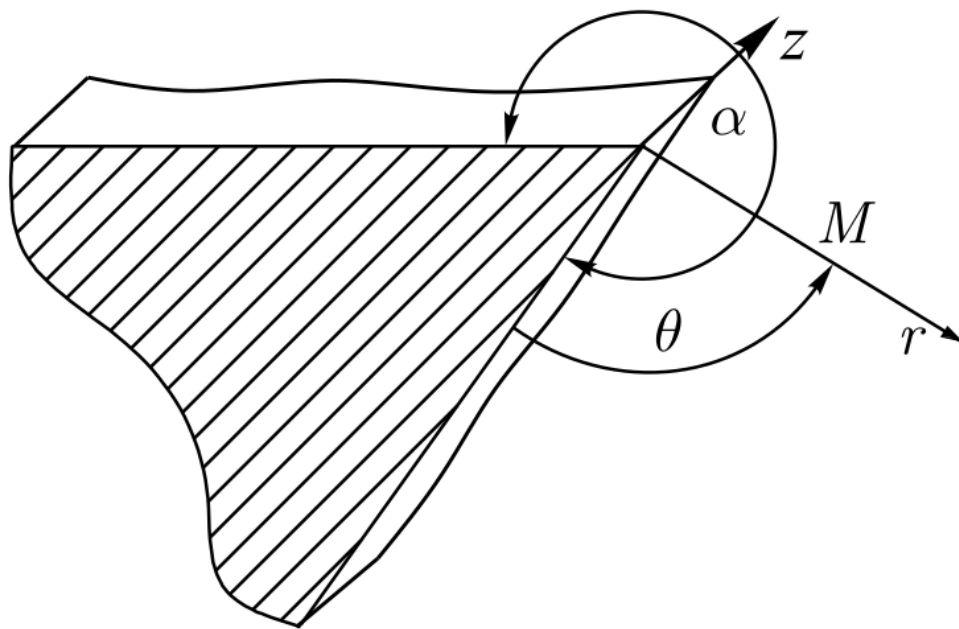
$\dot{\mathbf{E}}_{\tau}, \dot{\mathbf{H}}_{\tau}$  — касательные составляющие комплексных амплитуд напряженности электрического и магнитного полей

$\dot{Z}_s$  — поверхностное сопротивление металла

$$\dot{Z}_s = (1 + i) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \sigma}}$$

Эти условия справедливы, если радиус кривизны поверхности металла много больше глубины проникновения.

## Граничные условия на ребре



Электромагнитная энергия, запасенная в любом конечном объеме вблизи ребра, должна оставаться конечной.

Любая составляющая векторов **E** и **H** при приближении к ребру должна расти не быстрее, чем  $r^{\tau-1}$ ,  $\tau > 0$

$r$  — расстояние от ребра до точки наблюдения.

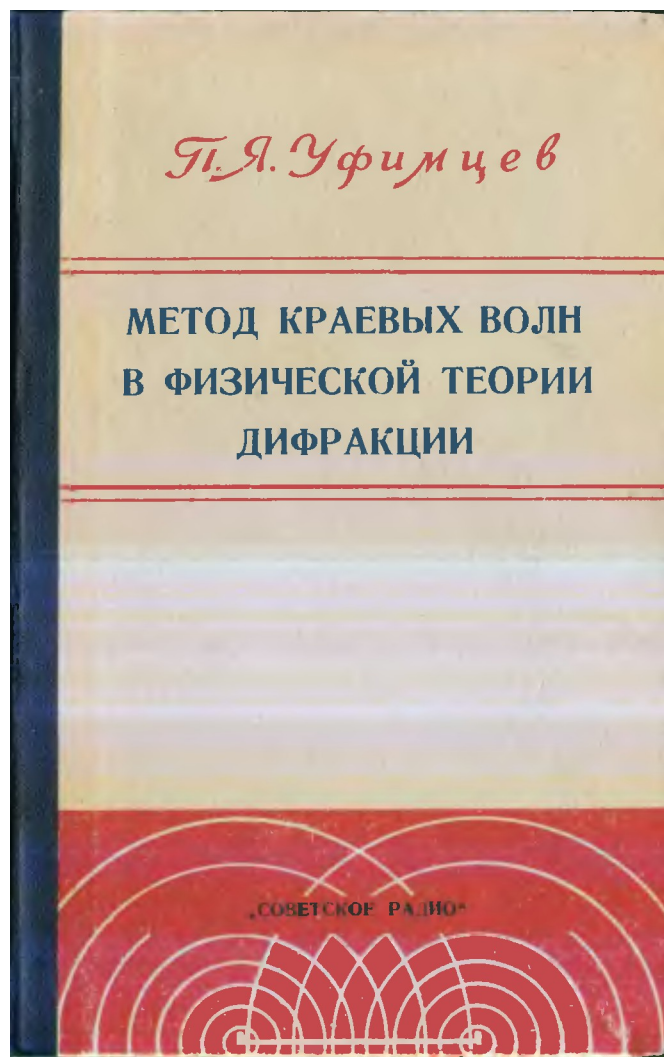
$\tau$  — определяется электрофизическими свойствами сред, образующих ребро, и формой поверхностей раздела.

# Lockheed F-117 Nighthawk





**Уфимцев П.Я.**  
**«Метод краевых волн в физической**  
**теории дифракции», 1962 г.**



## Условие излучения

Энергия поля должна быть конечной.

Напряженность электрического и магнитного полей должна убывать на бесконечности быстрее, чем  $1 / r$ .

Условие излучения Зоммерфельда:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ r \left[ \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} - \sqrt{\epsilon \mu} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \right] \right\} = 0$$