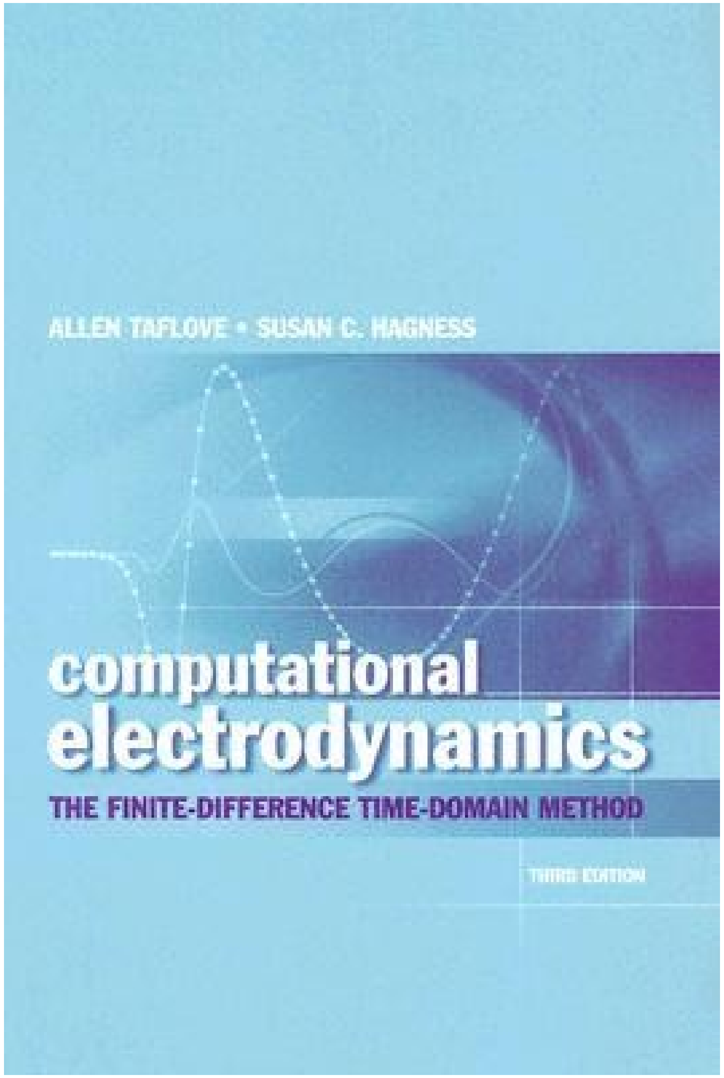
Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет)

«Метод конечных разностей во временной области (FDTD)»

Литература



Allen Taflove,
Susan C. Hagness

Computational
Electrodynamics:
The Finite-Difference
Time-Domain Method

Литература

John B. Schneider.
Understanding the Finite-Difference Time-Domain Method

http://www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd/

Материалы к лекциям

Исходные тексты программ:

https://github.com/Jenyay/modelling

Численный расчет производной функции

Производная функции

$$f'(x_0) = ???$$

Производная функции

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Правая конечно-разностная схема для численного дифференцирования

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+\delta) - f(x_0)}{\delta} + O(\delta)$$

$O(\delta)$ — погрешность вычислений

Ряд Тейлора

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}+R_n$$

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!},\ x_0<\xi<x$$

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора вблизи точки x_0 со смещением δ

$$x = x_0 + \delta$$

$$f(x_0+\delta) = f(x_0) + \delta f'(x_0) + \frac{1}{2!}\delta^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!}\delta^3 f'''(x_0) + \ldots,$$

Выражаем $f'(x_0)$:

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta}-\frac{1}{2}\delta f''(x_0)-\frac{1}{6}\delta^2 f'''(x_0)-\ldots,$$

$$O(\delta)=-\left(\frac{1}{2}\delta f''(x_0)+\ldots\right)$$

Погрешность пропорциональна δ.

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора вблизи точки x_0 со смещением $\pm\delta/2$

$$x = x_0 \pm \frac{\delta}{2}, \quad x - x_0 = \pm\frac{\delta}{2}$$

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) = f\,(x_0) + \frac{\delta}{2} f\,'(x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f\,''(x_0) + \frac{1}{3!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f\,'''(x_0) + \ldots,$$

$$f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) = f\,(x_0) - \frac{\delta}{2} f\,'(x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f\,''(x_0) - \frac{1}{3!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f\,'''(x_0) + \ldots,$$

Вычтем первое выражение из второго

$$f\left(x_0+\frac{\delta}{2}\right)-f\left(x_0-\frac{\delta}{2}\right)=\delta f'(x_0)+\frac{2}{3!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0)+\ldots,$$

Вычтем первое выражение из второго

$$f\left(x_0+\frac{\delta}{2}\right)-f\left(x_0-\frac{\delta}{2}\right)=\delta f'(x_0)+\frac{2}{3!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0)+\ldots,$$

Поделим левую и правую части на δ

$$\frac{f\left(x_0+\frac{\delta}{2}\right)-f\left(x_0-\frac{\delta}{2}\right)}{\delta}=f'(x_0)+\frac{1}{3!}\frac{\delta^2}{2^2}f'''(x_0)+\ldots,$$

Центральная конечно-разностная схема

$$f'(x_0)=\frac{f\left(x_0+\frac{\delta}{2}\right)-f\left(x_0-\frac{\delta}{2}\right)}{\delta}+O\left(\delta^2\right)$$

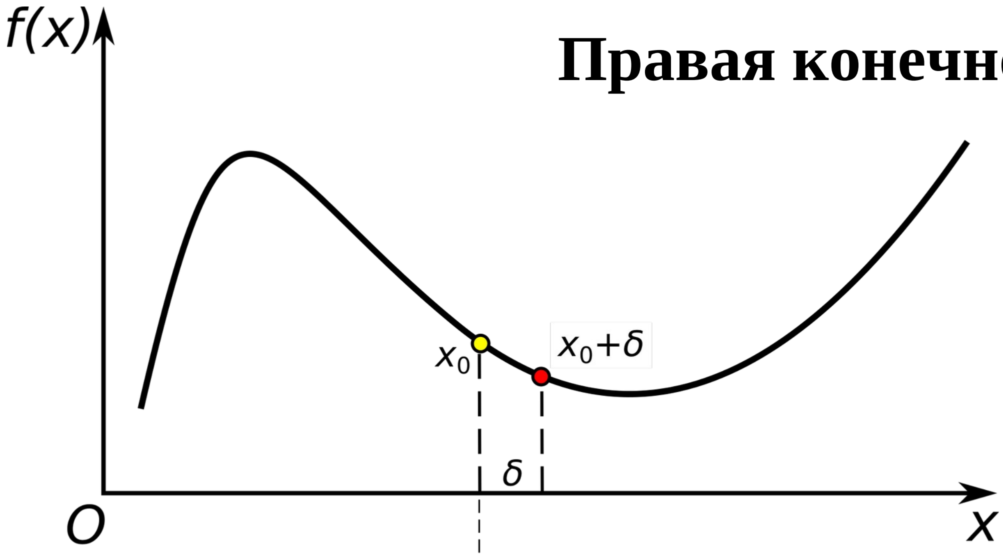
Отбрасываем $O(\delta^2)$

$$\boxed{f'(x_0)\approx\frac{f\left(x_0+\frac{\delta}{2}\right)-f\left(x_0-\frac{\delta}{2}\right)}{\delta}}$$

Погрешность пропорциональна δ^2.

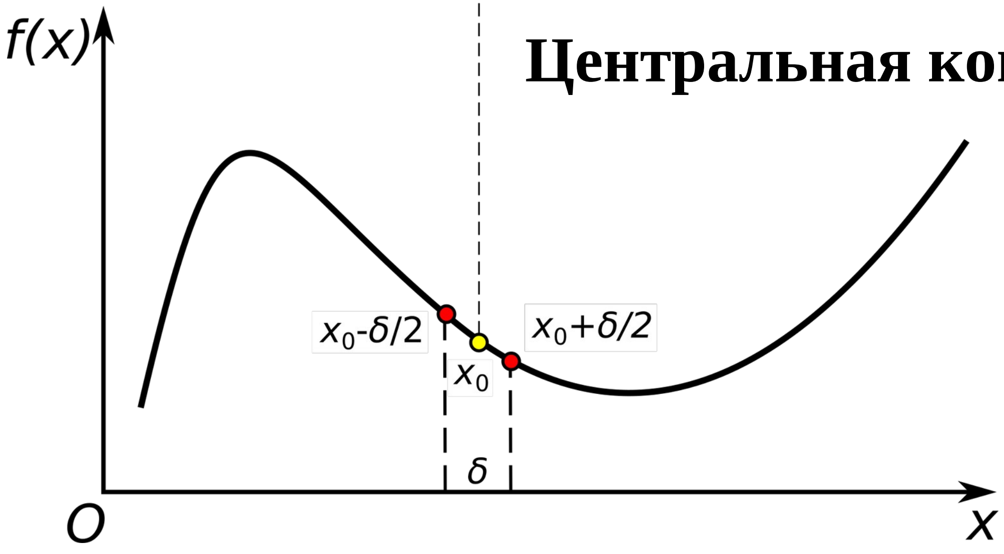
Конечно-разностные схемы

Правая конечно-разностная схема



Погрешность расчета $f\,'(x_0)$ пропорциональна δ

Центральная конечно-разностная схема



Погрешность расчета $f\,'(x_0)$ пропорциональна δ^2

Задания для самостоятельной проработки

1. Оценить погрешность для левой конечно-разностной схемы расчета производной функции.

2. Предложите способ расчета производной с погрешностью, меньшей, чем у центральной конечно-разностной схемы. Оцените погрешность метода.

Уравнения Максвелла

Уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\mathbf{ст}}) =$$

$$= \sigma\mathbf{E} + \mathbf{j}_{\mathbf{ст}}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{x_0} & \mathbf{y_0} & \mathbf{z_0} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Оператор набла (∇) или оператор Гамильтона

$$\nabla \equiv \mathbf{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial}{\partial z}$$

Свойства оператора набла (∇)

$$\nabla\varphi = \mathbf{x_0}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{y_0}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{z_0}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = ?$$

φ - скалярное поле

Свойства оператора набла (∇)

$$\nabla\varphi = \mathbf{x_0}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{y_0}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{z_0}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \mathrm{grad}\,\varphi$$

φ - скалярное поле

Свойства оператора набла (∇)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{a} = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z =$$

$$= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = ?$$

a — векторное поле

Свойства оператора набла (∇)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{a} = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z =$$

$$= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \mathrm{div}\, \boldsymbol{a}$$

a — векторное поле

Свойства оператора набла (∇)

$$\nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{x_0} & \mathbf{y_0} & \mathbf{z_0} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{a}$$

a — векторное поле

Уравнения Максвелла

$$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{j}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$$

$$\mathbf{D}=\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$$

$$\mathbf{B}=\mu\mu_0\mathbf{H}$$

$$\mathbf{j}=\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{E}_{\text{ст}})=$$

$$=\sigma\mathbf{E}+\mathbf{j}_{\text{ст}}$$

$$\nabla\times\mathbf{F}=\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=\mathrm{div}\,\mathbf{F}$$

Одномерный метод FDTD

FDTD. Одномерный случай. Закон Ампера

Пусть поле может меняться только вдоль оси X

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x_0} & \mathbf{y_0} & \mathbf{z_0} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = ?$$

FDTD. Одномерный случай. Закон Ампера

Пусть поле может меняться только вдоль оси X

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x_0} & \mathbf{y_0} & \mathbf{z_0} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \mathbf{x_0} \cdot 0 - \mathbf{y_0} \frac{\partial H_z}{\partial x} + \mathbf{z_0} \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

FDTD. Одномерный случай. Закон Фарадея

Пусть поле может меняться только вдоль оси X

$$-\mu\mu_0\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}=\nabla\times\mathbf{E}=$$

$$=\begin{vmatrix} \mathbf{x_0} & \mathbf{y_0} & \mathbf{z_0} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}=?$$

FDTD. Одномерный случай. Закон Фарадея

Пусть поле может меняться только вдоль оси X

$$-\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x_0} & \mathbf{y_0} & \mathbf{z_0} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \mathbf{x_0} \cdot 0 - \mathbf{y_0} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{z_0} \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

FDTD. Одномерный случай

Объединяем предыдущие уравнения

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} = -\mathbf{y_0}\frac{\partial H_z}{\partial x} + \mathbf{z_0}\frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$-\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mathbf{y_0}\frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{z_0}\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

FDTD. Одномерный случай

$$\mathbf{x_0}\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}+\mathbf{y_0}\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t}+\mathbf{z_0}\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t}+\mathbf{x_0}\,j_x+\mathbf{y_0}\,j_y+\mathbf{z_0}\,j_z=$$

$$-\mathbf{y_0}\frac{\partial H_z}{\partial x}+\mathbf{z_0}\frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$-\mathbf{x_0}\mu\mu_0\frac{\partial H_x}{\partial t}-\mathbf{y_0}\mu\mu_0\frac{\partial H_y}{\partial t}-\mathbf{z_0}\mu\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial t}=-\mathbf{y_0}\frac{\partial E_z}{\partial x}+\mathbf{z_0}\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

FDTD. Одномерный случай

Или в скалярном виде:

$$\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \qquad \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + j_x = 0$$

$$\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \qquad \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} + j_z = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$-\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \qquad \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + j_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

FDTD. Одномерный случай

Или в скалярном виде:

$$\mu\mu_0\frac{\partial H_x}{\partial t}=0 \qquad \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}+j_x=0$$

$$\mu\mu_0\frac{\partial H_y}{\partial t}=\frac{\partial E_z}{\partial x} \qquad \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t}+j_z=\frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$-\mu\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial t}=\frac{\partial E_y}{\partial x} \qquad \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t}+j_y=-\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

FDTD. Одномерный случай

Пусть существуют только E_z и H_y компоненты поля

$$\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} + j_z = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

Дискретизация

$$E_z(x, t) = E_z(m\Delta x, q\Delta t\ ) = E_z^q[m]$$

$$H_y(x, t) = H_y(m\Delta x, q\Delta t\ ) = H_y^q[m]$$

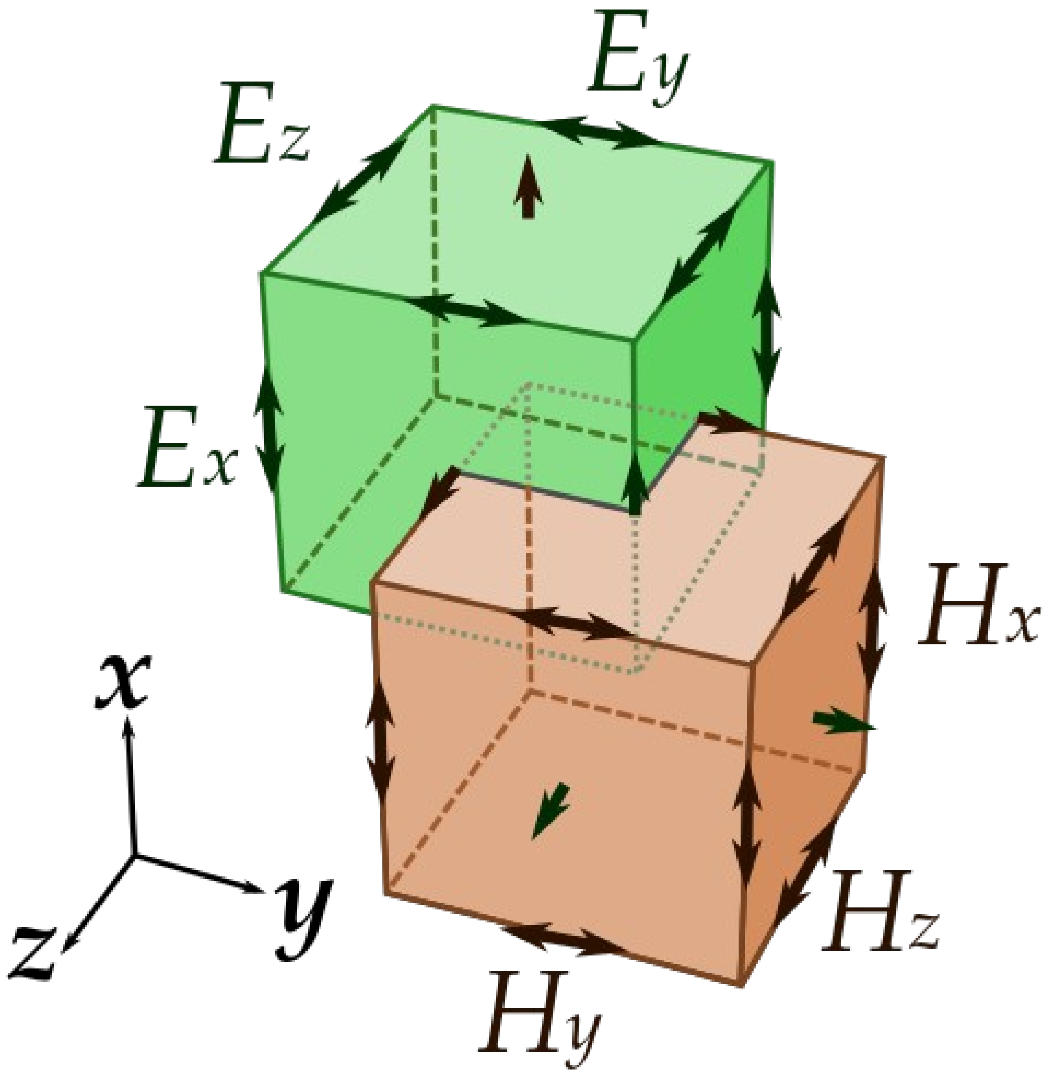
Δx — пространственное смещение

Δt — временное смещение

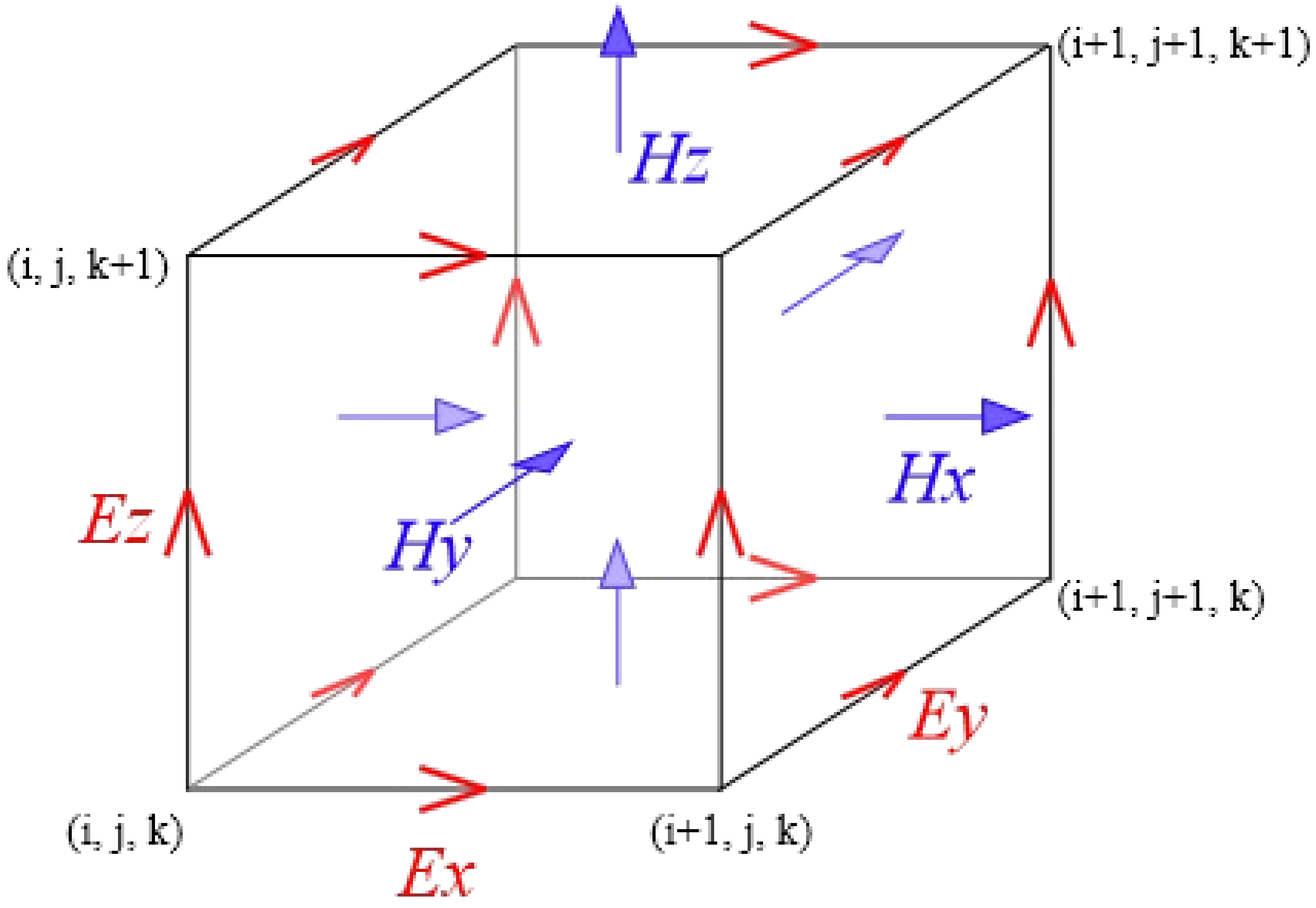
m — номер пространственного шага

q — номер временного шага

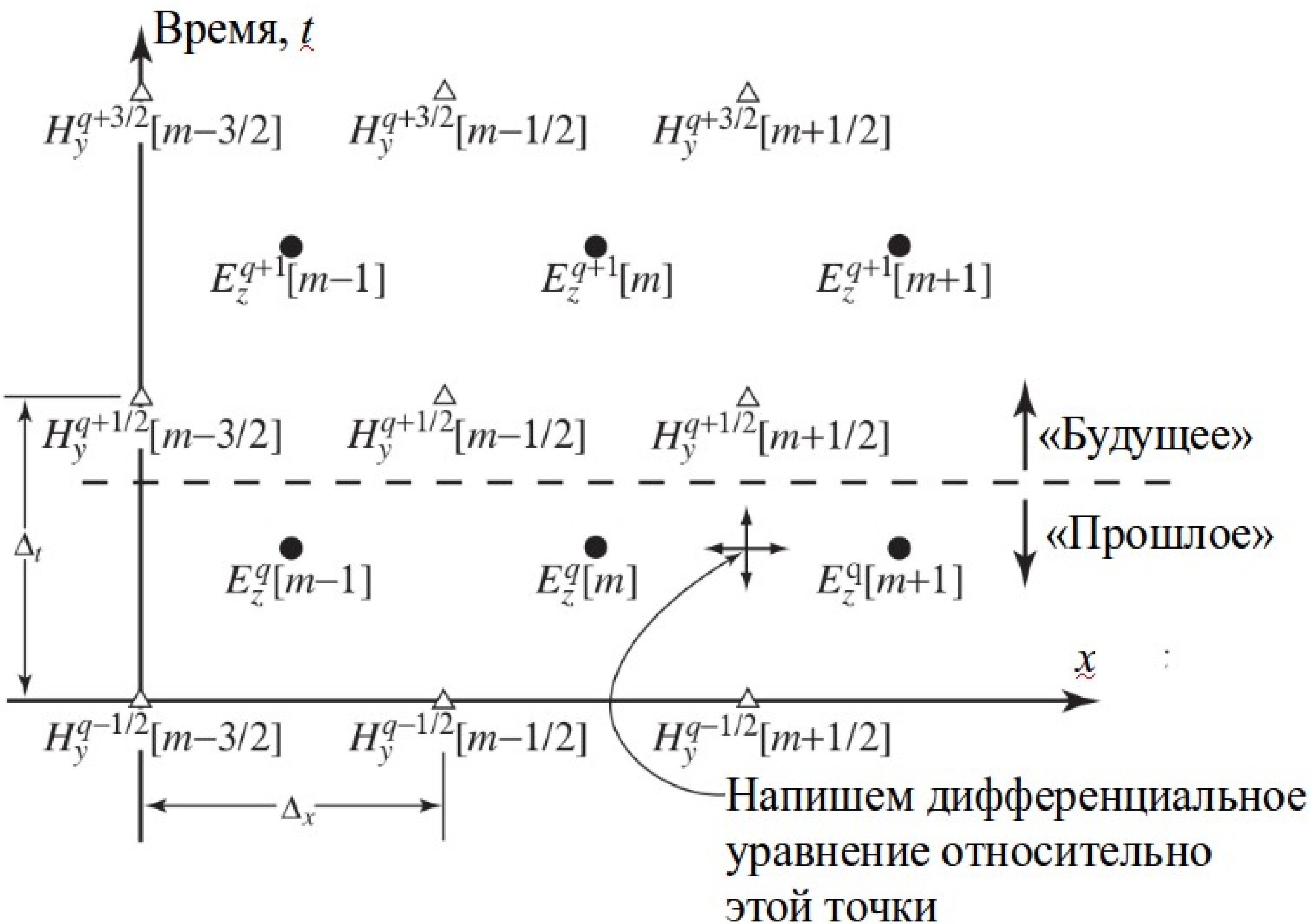
Трехмерная ячейка для метода FDTD (ячейка Йи, Yee cell)



Трехмерная ячейка для метода FDTD (ячейка Йи, Yee cell)



Пространственно-временная сетка для одномерного случая



Переходим к конечным разностям. Закон Фарадея

$$\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\underline{\partial t}}\bigg|_{(m+1/2)\Delta x,\, q\Delta t} = \frac{\partial E_z}{\underline{\partial x}}\bigg|_{(m+1/2)\Delta x,\, q\Delta t}$$

Переходим к конечным разностям. Закон Фарадея

$$\mu\mu_0 \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{E_z^q[m+1] - E_z^q[m]}{\Delta_x}$$

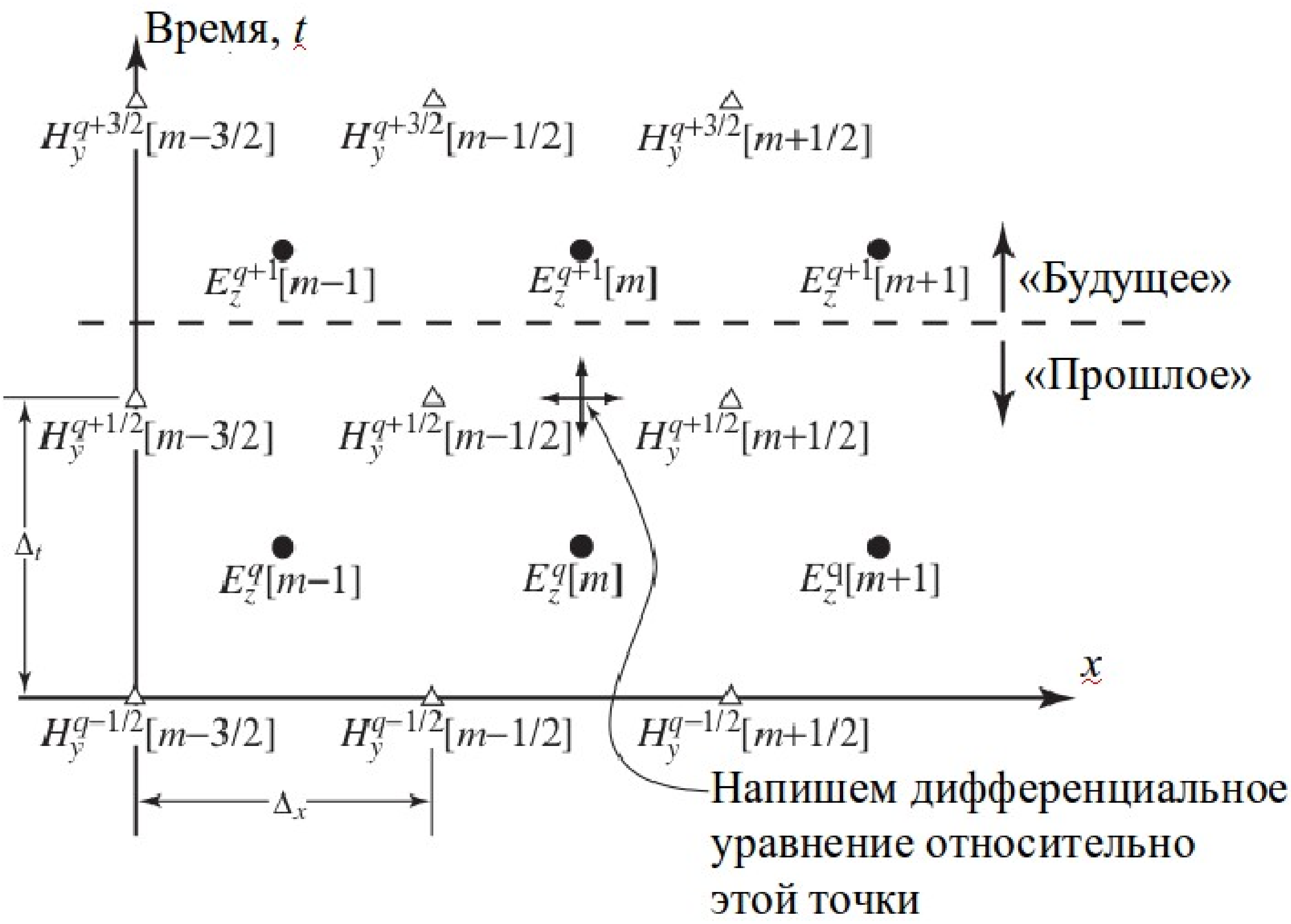
Переходим к конечным разностям. Закон Фарадея

Из предыдущего уравнения

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2] =$$

$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x}\left(E_z^q[m+1] - E_z^q[m]\right)$$

Пространственно-временная сетка для одномерного случая



Переходим к конечным разностям. Закон Ампера

$$\left.\left(\varepsilon\,\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\underline{\partial t}} + j_z\right)\right|_{m\Delta x,(q+1/2)\Delta t} = \left.\frac{\partial H_y}{\underline{\partial x}}\right|_{m\Delta x,(q+1/2)\Delta t}$$

Переходим к конечным разностям. Закон Ампера

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m]-E_z^{q}[m]}{\Delta_t}+j_z^{q+1/2}[m]=$$

$$=\frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2]-H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x}$$

Переходим к конечным разностям. Закон Ампера

$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$=E_z^q[m]+\frac{\Delta_t}{\varepsilon\,\varepsilon_0\Delta_x}\left(H_y^{q+1/2}[m+1/2]-H_y^{q+1/2}[m-1/2]\right)-$$

$$-\frac{\Delta_t}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\,j_z^{q+1/2}[m]$$

Основные единицы системы СИ

- Длина — м
- Масса — кг
- Время — с
- Сила тока — А
- Температура — К
- Количество вещества — моль
- Сила света — кд

$$\frac{\Delta_t}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\,\dot{j}_z^{\,q+1/2} \Rightarrow \left[\frac{c\cdot м\cdot A}{Ф\cdot м^2}\right]=\left[\frac{c\cdot A}{Ф\cdot м}\right]$$

$$[Ф]=\left[\frac{A^2\cdot c^4}{кг\cdot м^2}\right]$$

$$\frac{\Delta_t}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\,\dot{j}_z^{q+1/2} \Rightarrow \left[\frac{с\cdot м\cdot А}{Ф\cdot м^2}\right] = \left[\frac{с\cdot А}{Ф\cdot м}\right] = \left[\frac{с\cdot А\cdot кг\cdot м^2}{м\cdot А^2\cdot с^4}\right] =$$

$$= \left[\frac{м\cdot кг}{А\cdot с^3}\right] = \left[\frac{В}{м}\right]$$

$$[В] = \left[\frac{м^2\cdot кг}{А\cdot с^3}\right]$$

Формулы для метода конечных разностей во временной области

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2] = H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}\left(E_z^q[m+1] - E_z^q[m]\right)$$

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]\right) - \frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0} j_z^{q+1/2}[m]$$

Учет источника сигнала

$$E_z^{q+1}[m] \leftarrow E_z^{q}[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x}\left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$

$$E_z^{q+1}[m] \leftarrow E_z^{q+1}[m] - \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0} j_z^{q+1/2}[m]$$

или

$$E_z^{q+1}[m] \leftarrow E_z^{q+1}[m] + E_{z\,cm}^{q+1/2}[m]$$

Критерий устойчивости Куранта-Фридриха-Леви

$$v_{max}\Delta_t \leqslant \frac{1}{\sqrt{\Delta_x^{-2}+\Delta_y^{-2}+\Delta_z^{-2}}}$$

$$v_{max} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{min}\mu_{min}}}$$

$$\text{Если } \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \Delta$$

$$v_{max}\Delta_t \leqslant \frac{\Delta}{\sqrt{N}}$$

N — размерность пространства (N = 1, 2, 3)

Критерий устойчивости для одномерной задачи

$c\Delta_t$ — максимальное расстояние, которое может пройти волна за один временной шаг Δ_t в вакууме.

Число Куранта

$$S_c = c\Delta_t / \Delta_x$$

Условие устойчивости

$$c\Delta_t \leq \Delta_x$$

или

$$S_c \leq 1$$

Коэффициенты в конечно-разностной схеме

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$=H_y^{q-1/2}[m+1/2]+\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}\left(E_z^q[m+1]-E_z^q[m]\right)$$

$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$=E_z^q[m]+\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\left(H_y^{q+1/2}[m+1/2]-H_y^{q+1/2}[m-1/2]\right)$$

Коэффициенты в конечно-разностной схеме

$$\frac{1}{\mu\mu_0}\frac{\Delta_t}{\Delta_x}=\frac{1}{\mu\mu_0}\frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{\Delta_t}{\Delta_x}=\frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{c\,\Delta_t}{\Delta_x}=\frac{1}{\mu W_0}S_c$$

$$W_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$$ - волновое сопротивление свободного пространства

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$ - скорость света в вакууме

$\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м

$\varepsilon_0 = 1 / (\mu_0 c^2) = 8.85\cdot10^{-12}$ Ф/м

Коэффициенты в конечно-разностной схеме

$$\frac{1}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\frac{\Delta_t}{\Delta_x}=\frac{1}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{\Delta_t}{\Delta_x}=\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{c\,\Delta_t}{\Delta_x}=\frac{W_0}{\varepsilon}S_c$$

$$W_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$$

- волновое сопротивление свободного пространства

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

- скорость света в вакууме

Коэффициенты в конечно-разностной схеме

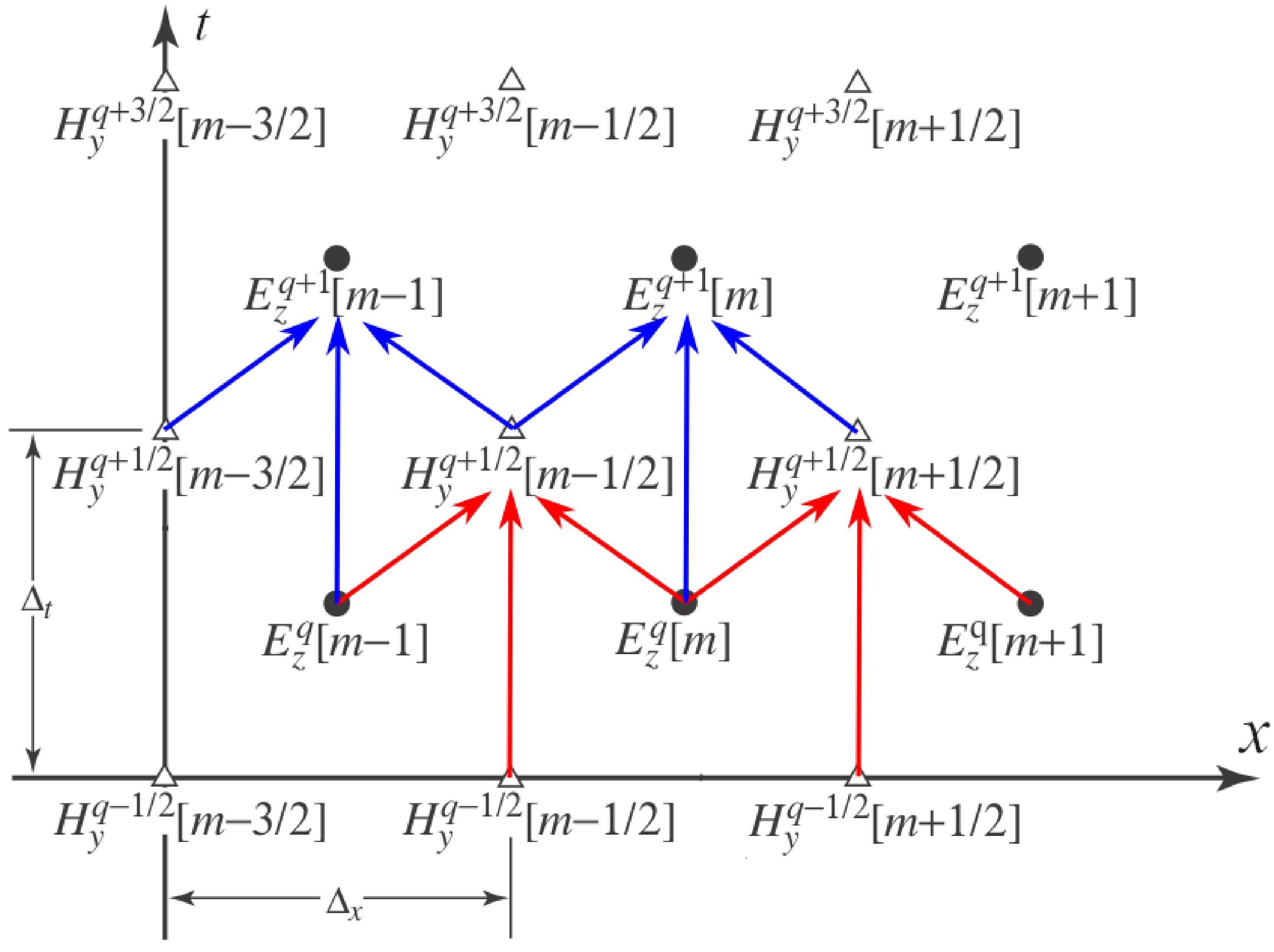
$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$=H_y^{q-1/2}[m+1/2]+\left(E_z^q[m+1]-E_z^q[m]\right)\frac{1}{\mu W_0}S_c$$

$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$=E_z^q[m]+\left(H_y^{q+1/2}[m+1/2]-H_y^{q+1/2}[m-1/2]\right)\frac{W_0}{\varepsilon}S_c$$

Расчет полей H_y и E_z в одномерном методе FDTD



Задания для самостоятельной проработки

3. Получите формулы для одномерного метода FDTD в случае, если существуют компоненты поля E_y, H_z.

Хранение компонент поля в реализации FDTD

Индекс →	0	1	2	3		M-4	M-3	M-2	M-1
Ez	E_0	E_1	E_2	E_3	• • •	$E_{M\text{-}4}$	$E_{M\text{-}3}$	$E_{M\text{-}2}$	$E_{M\text{-}1}$

Индекс →	0	1	2	3		M-4	M-3	M-2	M-1
Hy	$H_{1/2}$	$H_{1+1/2}$	$H_{2+1/2}$	$H_{3+1/2}$	• • •	$H_{M\text{-}4+1/2}$	$H_{M\text{-}3+1/2}$	$H_{M\text{-}2+1/2}$	$H_{M\text{-}1+1/2}$

Хранение компонент поля в реализации FDTD

Индекс →	0	1	2	3		M-4	M-3	M-2	M-1
Ez	**?**	E_1	E_2	E_3	• • •	$E_{M\text{-}4}$	$E_{M\text{-}3}$	$E_{M\text{-}2}$	$E_{M\text{-}1}$

Индекс →	0	1	2	3		M-4	M-3	M-2	M-1
Hy	$H_{1/2}$	$H_{1+1/2}$	$H_{2+1/2}$	$H_{3+1/2}$	• • •	$H_{M\text{-}4+1/2}$	$H_{M\text{-}3+1/2}$	$H_{M\text{-}2+1/2}$	**?**

Хранение компонент поля в реализации FDTD

Индекс →	0	1	2	3		M-4	M-3	M-2	M-1
Ez	**0**	E_1	E_2	E_3	• • •	$E_{M\text{-}4}$	$E_{M\text{-}3}$	$E_{M\text{-}2}$	$E_{M\text{-}1}$

Индекс →	0	1	2	3		M-4	M-3	M-2	M-1
Hy	$H_{1/2}$	$H_{1+1/2}$	$H_{2+1/2}$	$H_{3+1/2}$	• • •	$H_{M\text{-}4+1/2}$	$H_{M\text{-}3+1/2}$	$H_{M\text{-}2+1/2}$	**0**

Источник
в разностной схеме

$$E_{\text{ист.}}(t) = E_{\text{ист.}}(q\Delta_t) = e^{-\left(\frac{q\Delta_t - 30\Delta_t}{10\Delta_t}\right)^2} = e^{-\left(\frac{q-30}{10}\right)^2} = E_{\text{ист.}}[q]$$

Схема алгоритма FDTD

Начало

Задание начальных условий E_z^0, $H_y^{1/2}$

Цикл по времени t = [1...maxTime - 1]:

  Цикл по пространству m = [0...maxSize - 2]:

    Расчет $H_y^{q+1/2}$

  Цикл по пространству m = [1...maxSize - 1]:

    Расчет E_z^{q+1}

  Ввод поля с помощью источников возбуждения

Вывод результатов

Конец

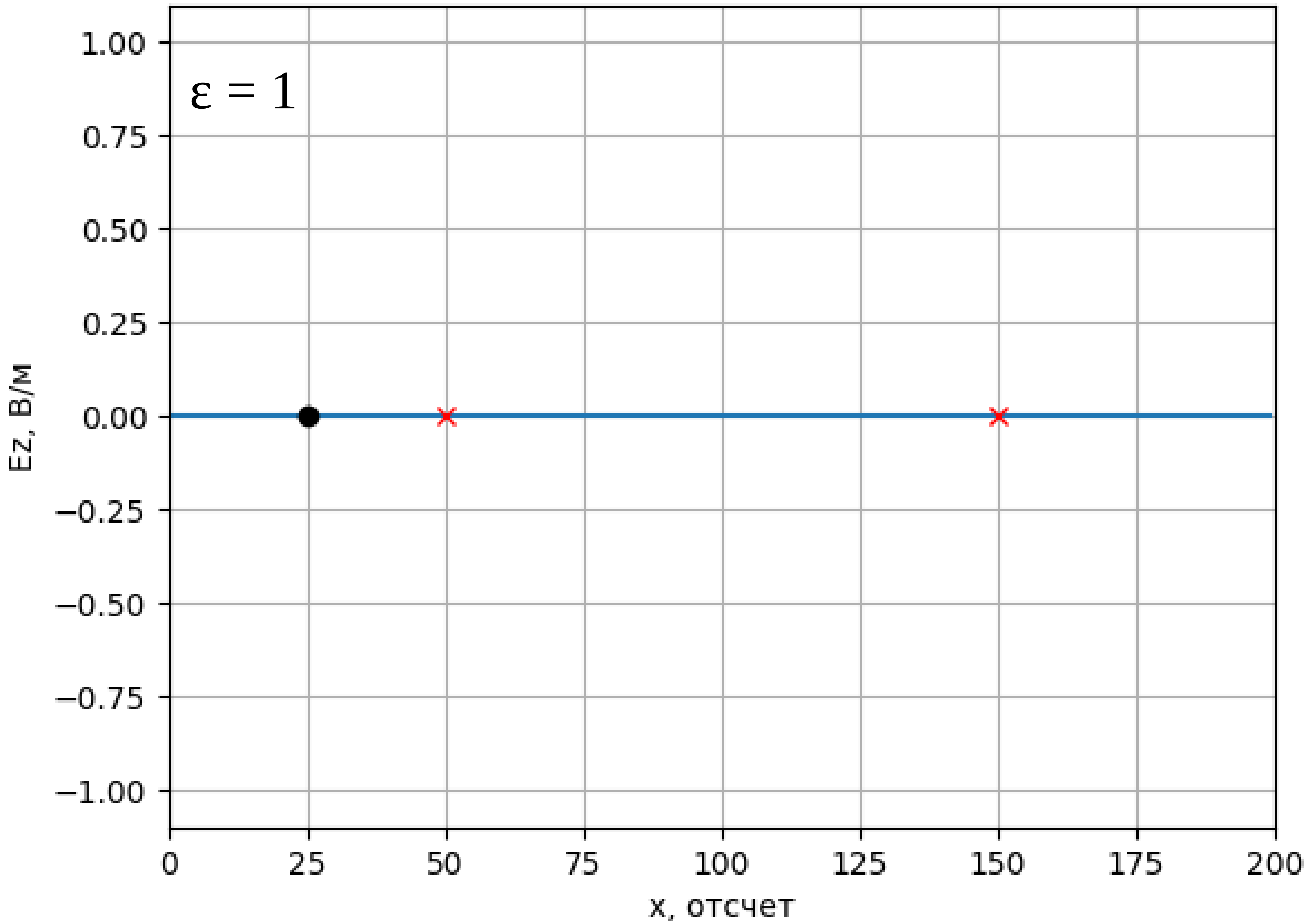
Реализация одномерного FDTD на Python

Распространение импульса в свободном пространстве.

Число Куранта равно 1.

fdtd_first_version_01.py
fdtd_first_version_02.py
fdtd_first_version_03.py
fdtd_first_version_04.py
fdtd_first_version_05.py
fdtd_first_version_06.py

Измерение скорости распространения волны (fdtd_first_version_speed.py)



Отображение компонент поля E и H

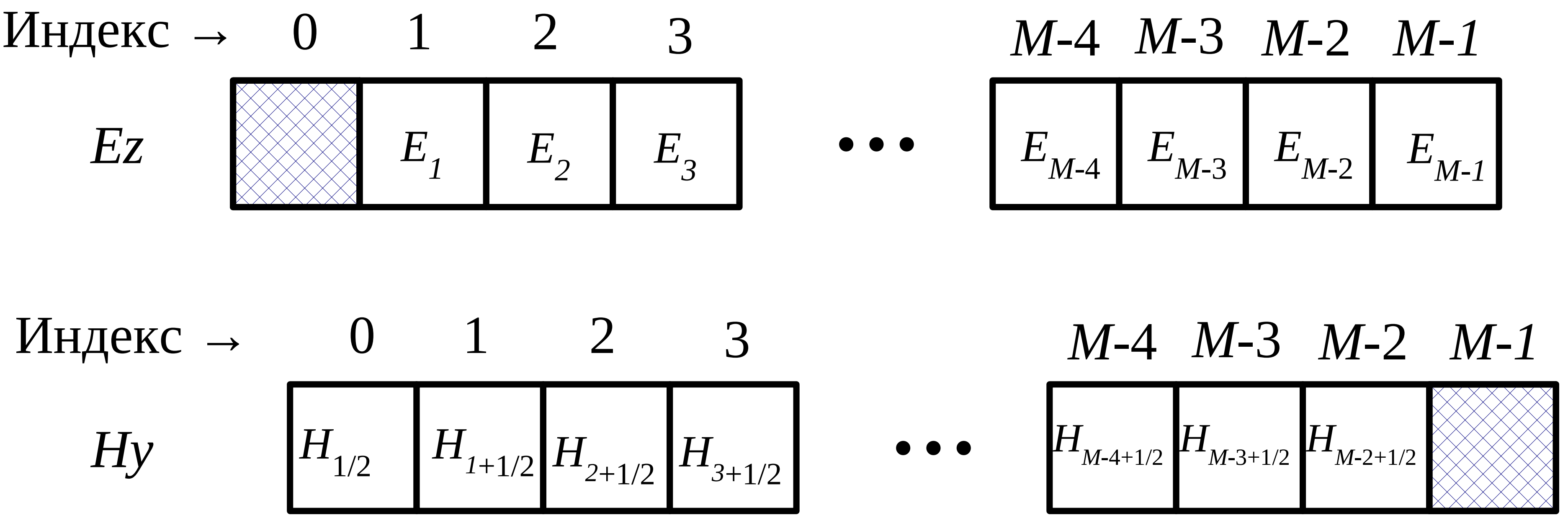
fdtd_first_version_EH.py

Достоверность расчета

- Скорость распространение волны в вакууме равна скорости света.
- Коэффициент отражения электрической компоненты поля от PEC равен -1.
- Коэффициент отражения электрической компоненты поля от PMC равен +1.
- Коэффициент отражения магнитной компоненты поля от PEC равен +1.
- Коэффициент отражения магнитной компоненты поля от PMC равен -1.

Простейшие поглощающие граничные условия

Хранение компонент поля в реализации FDTD



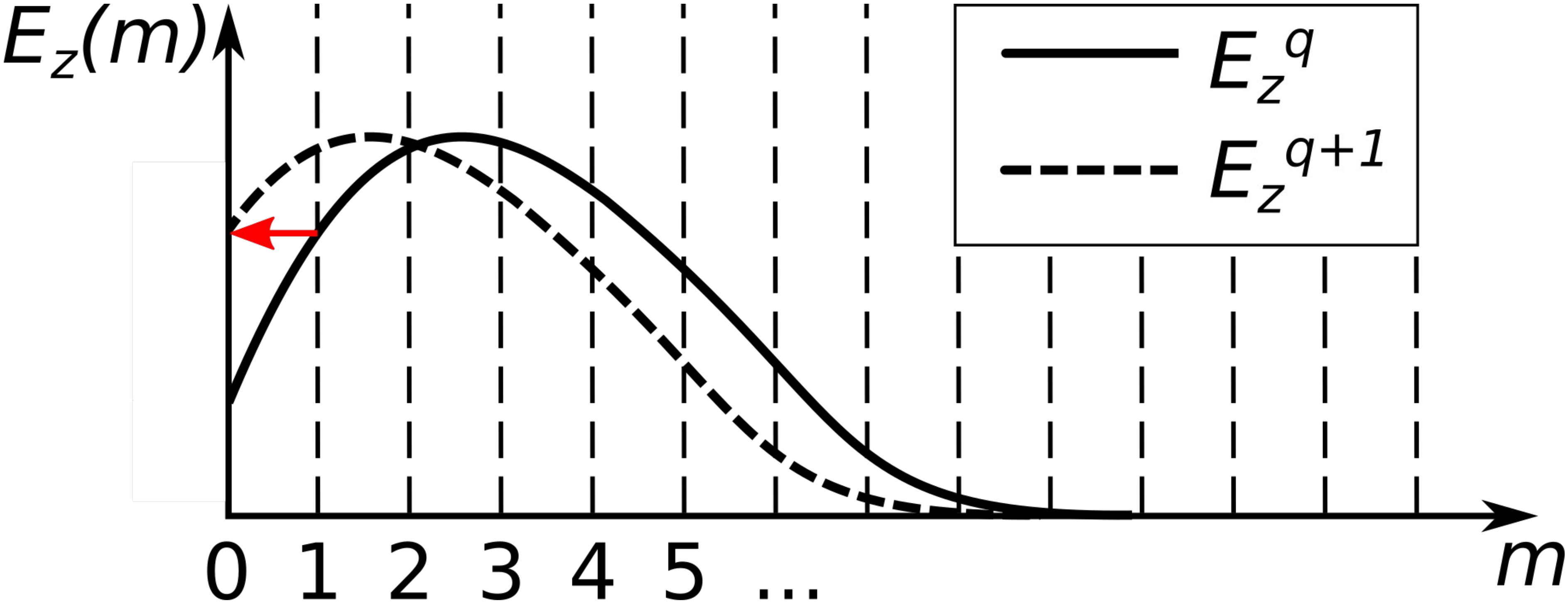
Простейшее поглощающие граничные условия

Работают только для $S_c = 1$

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1]$$

$$H_y^{q+1/2}[\text{end}] = H_y^{q-1/2}[\text{end}-1]$$

Простейшее поглощающие граничные условия

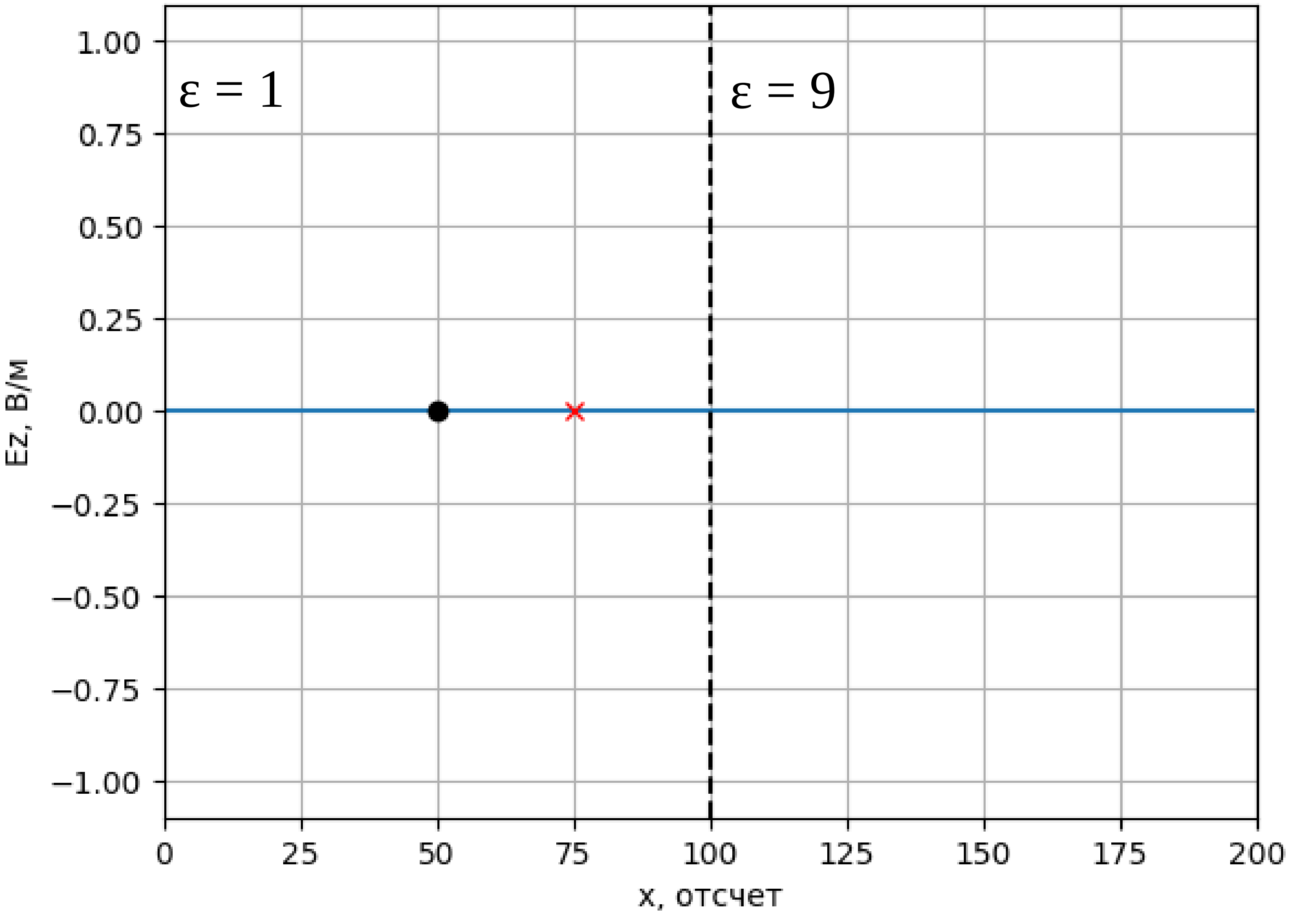


Демонстрация поглощающих условий

fdtd_abc_simple.py

Моделирование распространения электромагнитной волны в неоднородных средах

Геометрия решаемой задачи (fdtd_heterogen_01.py)



Конечно-разностная схема

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$=H_y^{q-1/2}[m+1/2]+\left(E_z^q[m+1]-E_z^q[m]\right)\frac{1}{\mu W_0}S_c$$

$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$=E_z^q[m]+\left(H_y^{q+1/2}[m+1/2]-H_y^{q+1/2}[m-1/2]\right)\frac{W_0}{\varepsilon}S_c$$

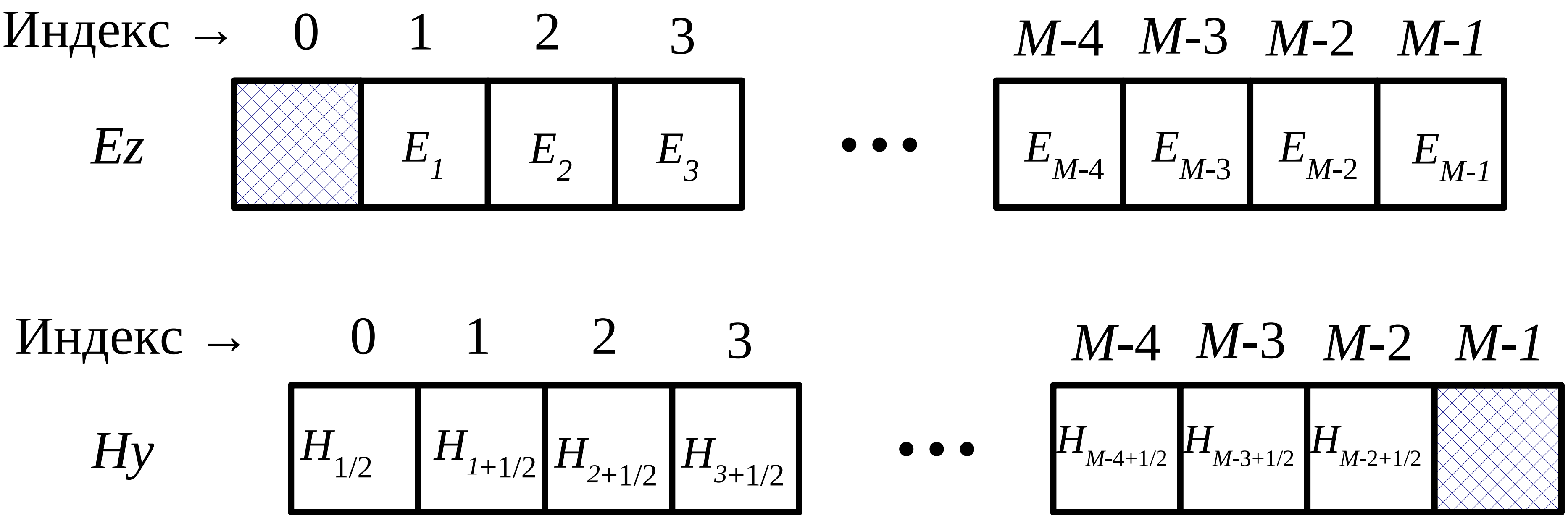
Учет параметров среды

Если $\varepsilon = f(m)$

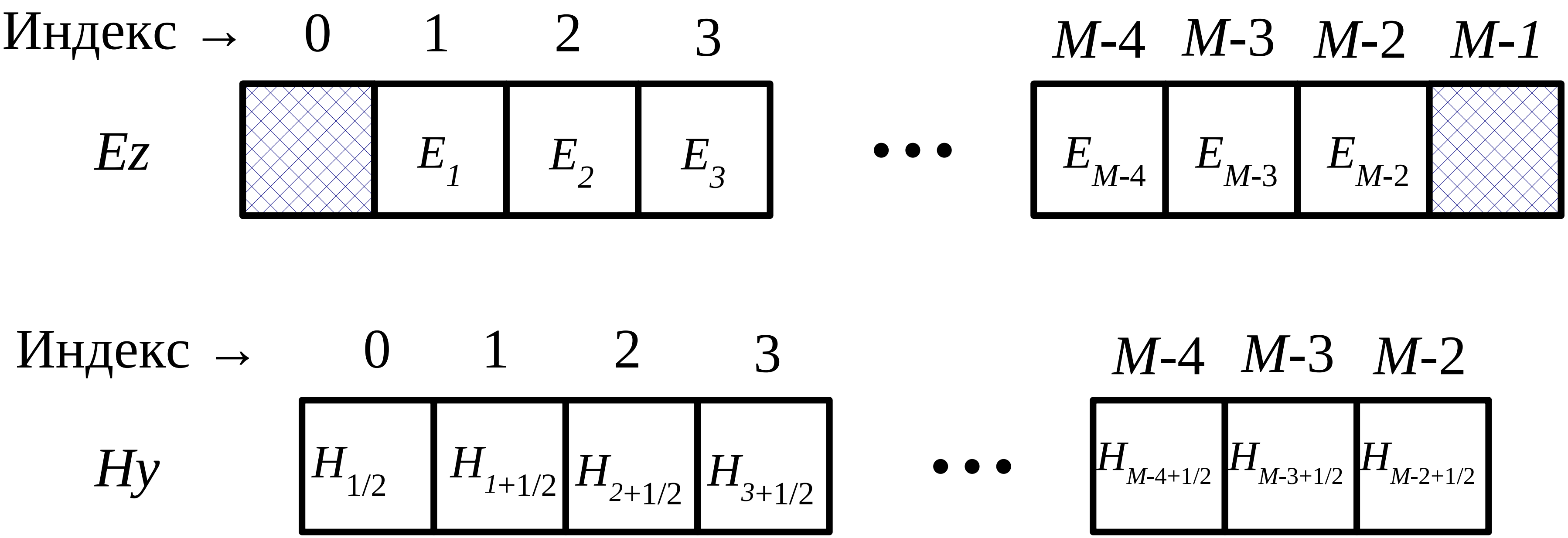
```
Ez[m] = Ez[m] + (Hy[m] - Hy[m - 1]) * Sc * W0 / eps[m]

Hy[m] = Hy[m] + (Ez[m + 1] - Ez[m]) * Sc / (W0 * mu[m])
```

Структура массивов полей



Структура массивов полей



Демонстрация моделирования распространения электромагнитной волны в неоднородных средах

fdtd_heterogen_02.py

Коэффициенты отражения и прохождения

Для волны, падающей по нормали:

Коэффициент отражения:

$$\Gamma = \frac{\dot{E}_{отр}}{\dot{E}_{пад}} = \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}$$

Коэффициент прохождения:

$$T = \frac{\dot{E}_{пр}}{\dot{E}_{пад}} = \frac{2W_2}{W_2 + W_1}$$

$$W = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = W_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Коэффициенты отражения и прохождения идеального диэлектрика

Для границы раздела двух диэлектриков

$\mu_1 = \mu_2 = 1$

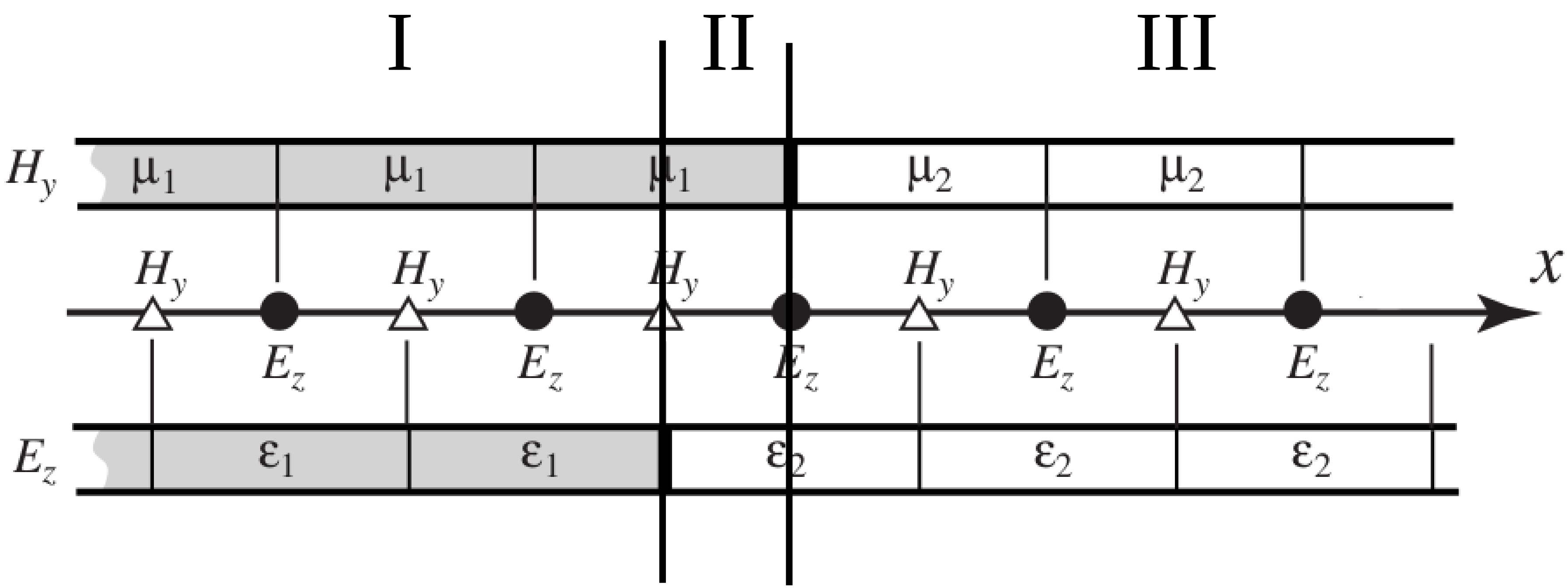
Коэффициент отражения:

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}}$$

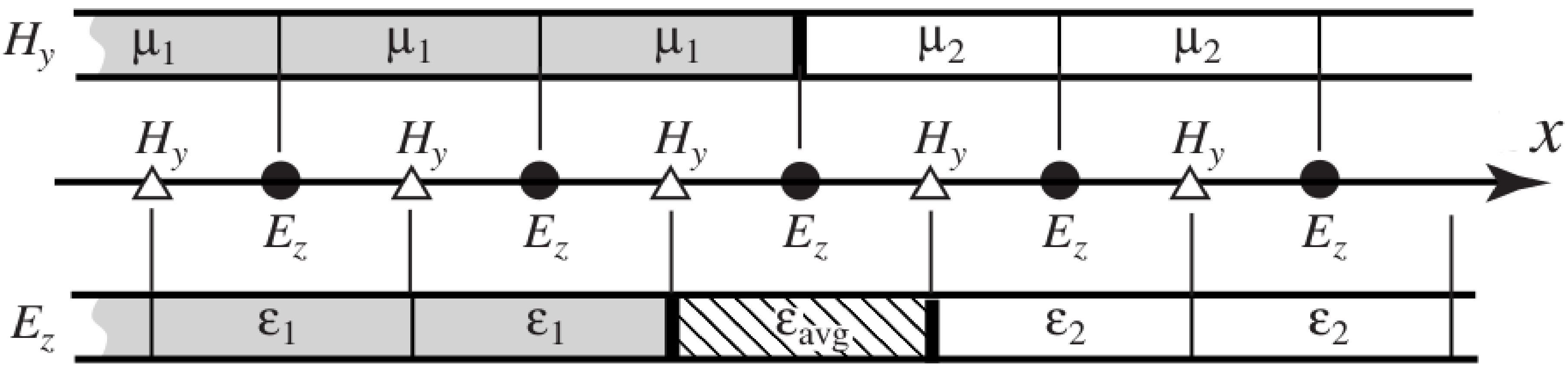
Коэффициент прохождения:

$$T = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}}$$

Погрешность из-за дискретной сетки



Погрешность из-за дискретной сетки



Метод
Total-Field / Scattered-Field

Метод
Total-Field / Scattered-Field

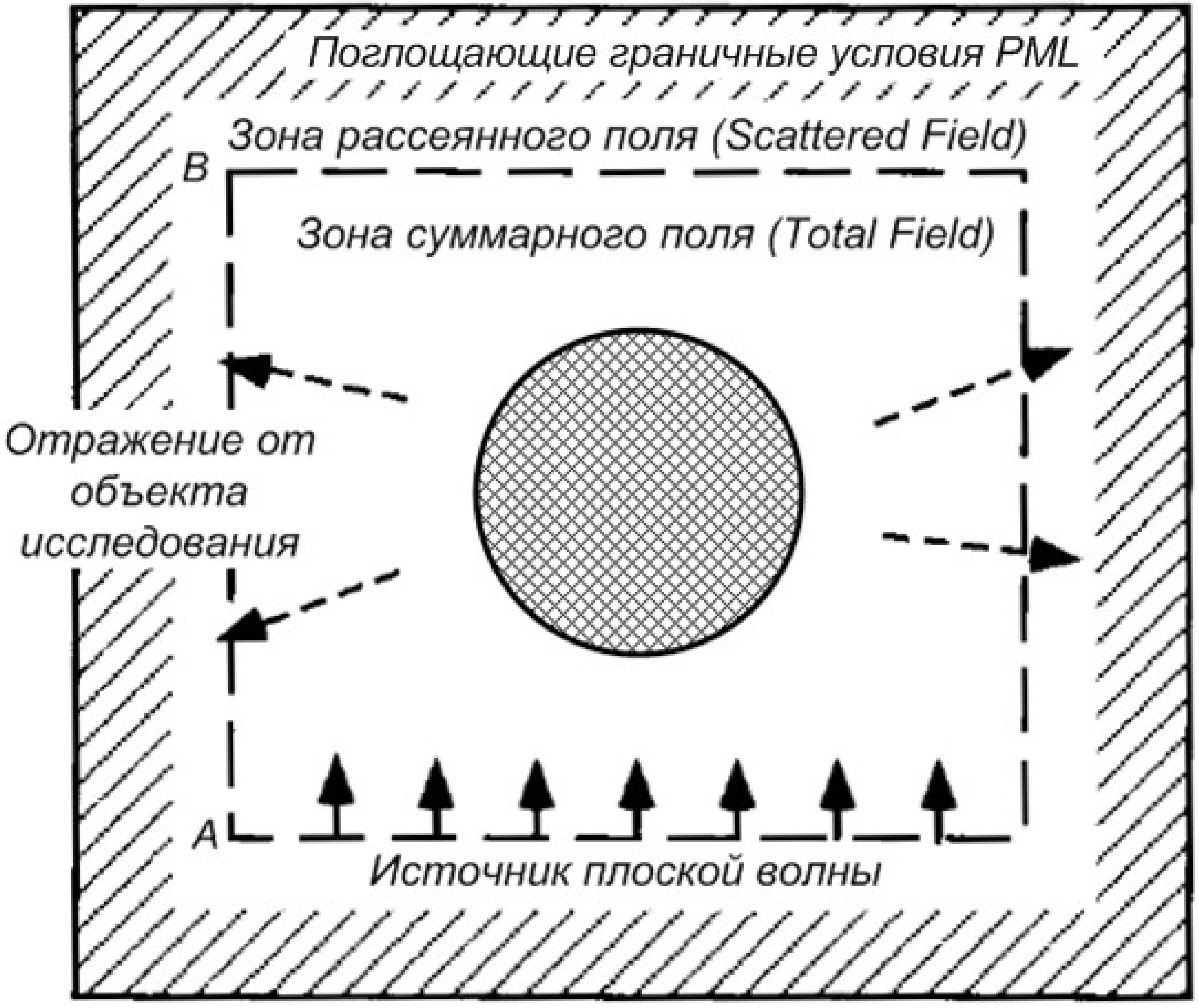
$$\mathbf{E}_{\text{полн}} = \mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{расс}}$$

$$\mathbf{H}_{\text{полн}} = \mathbf{H}_{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\text{расс}}$$

$\mathbf{E}_{\text{пад}}$, $\mathbf{H}_{\text{пад}}$ могут быть рассчитаны в любой момент времени в любой точке пространства.

$\mathbf{E}_{\text{расс}}$, $\mathbf{H}_{\text{расс}}$ изначально не известны.

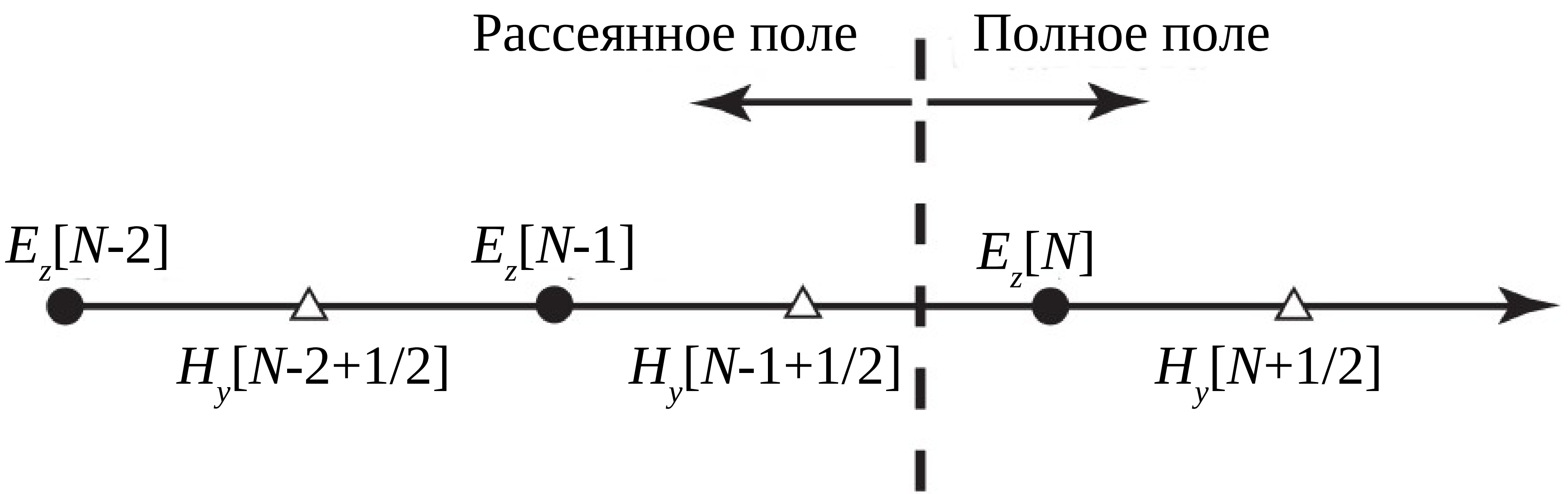
Метод Total-Field / Scattered-Field



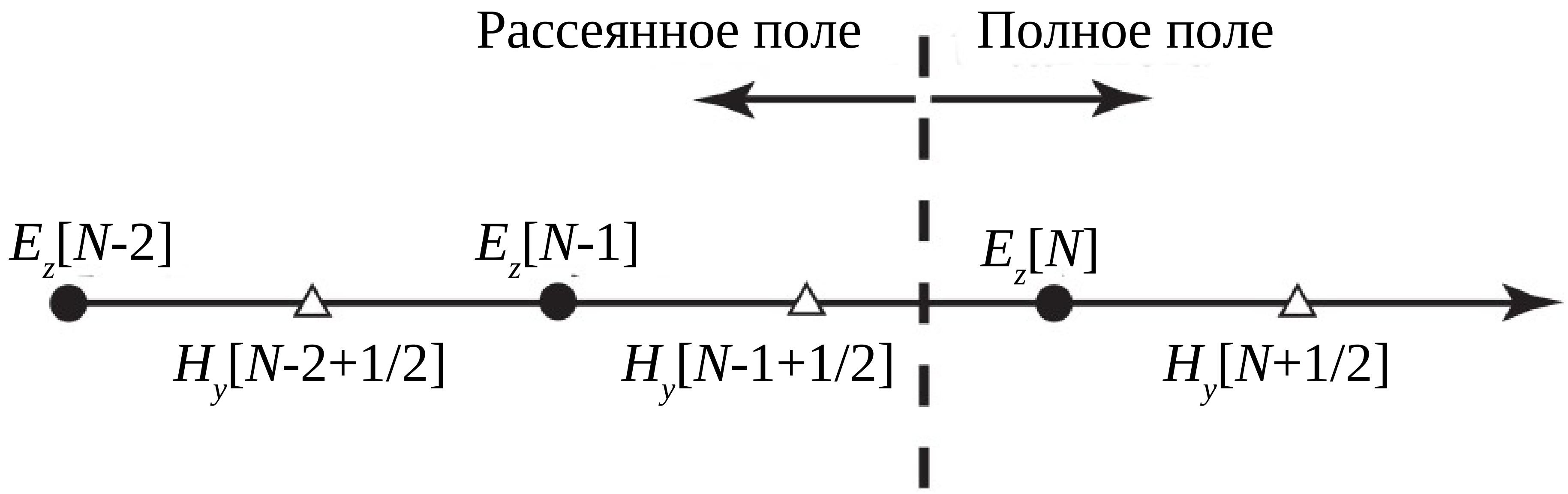
Метод Total-Field / Scattered-Field

$$\mathbf{E}_{\text{полн}} = \mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{расс}}$$

$$\mathbf{H}_{\text{полн}} = \mathbf{H}_{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\text{расс}}$$



Метод Total-Field / Scattered-Field. Левая граница



$H_y[N\text{-}1 + 1/2] = H_y[N - 1/2]$ — последняя ячейка в области рассеянного поля.

$E_z[N]$ — первая ячейка в области полного поля.

Метод
Total-Field / Scattered-Field

Важно! Только рассеянное поле должно использоваться при обновлении ячеек в области рассеянного поля.

Только полное поле должно использоваться при обновлении ячеек в области полного поля

Поле на границе Total-Field / Scattered-Field

Рассмотрим электрическую компоненту поля E_z

проблема

$$\overbrace{E_z^{q+1}[N]}^{полн} = \overbrace{E_z^{q}[N]}^{полн} + \frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\left(\overbrace{H_y^{q+1/2}[N+1/2]}^{полн} - \overbrace{H_y^{q+1/2}[N-1/2]}^{расс}\right)$$

Поле на границе
Total-Field / Scattered-Field

Введем дополнительный магнитный источник в точке (N − 1/2)Δx

$$\overbrace{E_z^{q+1}[N]}^{\text{полн}} = \overbrace{E_z^{q}[N]}^{\text{полн}} +$$

$$+\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\left(\overbrace{H_y^{q+1/2}[N+1/2]}^{\text{полн}} - \left\{\overbrace{H_y^{q+1/2}[N-1/2]}^{\text{расс}} + \overbrace{H_y^{inc}[N-1/2,q+1/2]}^{\text{пад}}\right\}\right)$$

Поле на границе
Total-Field / Scattered-Field

Введем дополнительный магнитный источник в точке (N − 1/2)Δx

$$\overbrace{E_z^{q+1}[N]}^{полн} = \overbrace{E_z^{q}[N]}^{полн} +$$

$$+\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\left(\overbrace{H_y^{q+1/2}[N+1/2]}^{полн} - \left\{\overbrace{H_y^{q+1/2}[N-1/2]}^{расс} + \overbrace{\left(-\frac{1}{W}E_z^{inc}[N-1/2, q+1/2]\right)}^{пад}\right\}\right)$$

Total-Field / Scattered-Field

$$E_z^{q+1}[N] \leftarrow E_z^{q}[N] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\Delta_x}\left(H_y^{q+1/2}[N+1/2] - H_y^{q+1/2}[N-1/2]\right)$$

$$\boxed{E_z^{q+1}[N] \leftarrow E_z^{q+1}[N] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\Delta_x}\frac{1}{W}E_z^{inc}[N-1/2,q+1/2]}$$

Total-Field / Scattered-Field

$$E_z^{q+1}[N] = E_z^{q+1}[N] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\frac{1}{W}E_z^{inc}[N-1/2, q+1/2]$$

$$W = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = W_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x} = \frac{W_0 S_c}{\varepsilon}$$

$$E_z^{q+1}[N] = E_z^{q+1}[N] + \frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}E_z^{inc}[N-1/2, q+1/2]$$

Для свободного пространства и если $S_c = 1$:

$$E_z^{q+1}[N] = E_z^{q+1}[N] + E_z^{inc}[N - \underline{1/2}, q + \underline{1/2}]$$

Поле на границе
Total-Field / Scattered-Field

проблема

$$\overbrace{H_y^{q+1/2}[N-1/2]}^{\text{расс}} = \overbrace{H_y^{q-1/2}[N-1/2]}^{\text{расс}} + \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}\left(\overbrace{E_z^{q}[N]}^{\text{полн}} - \overbrace{E_z^{q}[N-1]}^{\text{расс}}\right)$$

Поле на границе Total-Field / Scattered-Field

$$\overbrace{H_y^{q+1/2}[N-1/2]}^{расс} = \overbrace{H_y^{q-1/2}[N-1/2]}^{расс} +$$

$$+\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}\left(\overbrace{\left(\overbrace{E_z^q[N]}^{полн} - \overbrace{E_z^{inc}[N,q]}^{пад}\right)}^{расс} - \overbrace{E_z^q[N-1]}^{расс}\right)$$

Поле на границе
Total-Field / Scattered-Field

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] \leftarrow H_y^{q-1/2}[N-1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}\left(E_z^q[N] - E_z^q[N-1]\right)$$

$$\boxed{H_y^{q+1/2}[N-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N-1/2] - \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}E_z^{inc}[N,q]}$$

Поле на границе
Total-Field / Scattered-Field

Для свободного пространства и $S_c = 1$:

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] \leftarrow H_y^{q-1/2}[N-1/2] + \frac{1}{W_0}\left(E_z^q[N] - E_z^q[N-1]\right)$$

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N-1/2] - \frac{1}{W_0}E_z^{inc}[N,q]$$

Поле на границе Total-Field / Scattered-Field. Левая граница

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N-1/2] - \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x} E_z^{inc}[N, q]$$

$$E_z^{q+1}[N] \leftarrow E_z^{q+1}[N] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\frac{1}{W} E_z^{inc}[N-1/2, q+1/2]$$

Поле на границе Total-Field / Scattered-Field. Левая граница

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N-1/2] - \frac{S_c}{W_0\mu} E_z^{inc}[N, q]$$

$$E_z^{q+1}[N] \leftarrow E_z^{q+1}[N] + \frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} E_z^{inc}[N-1/2, q+1/2]$$

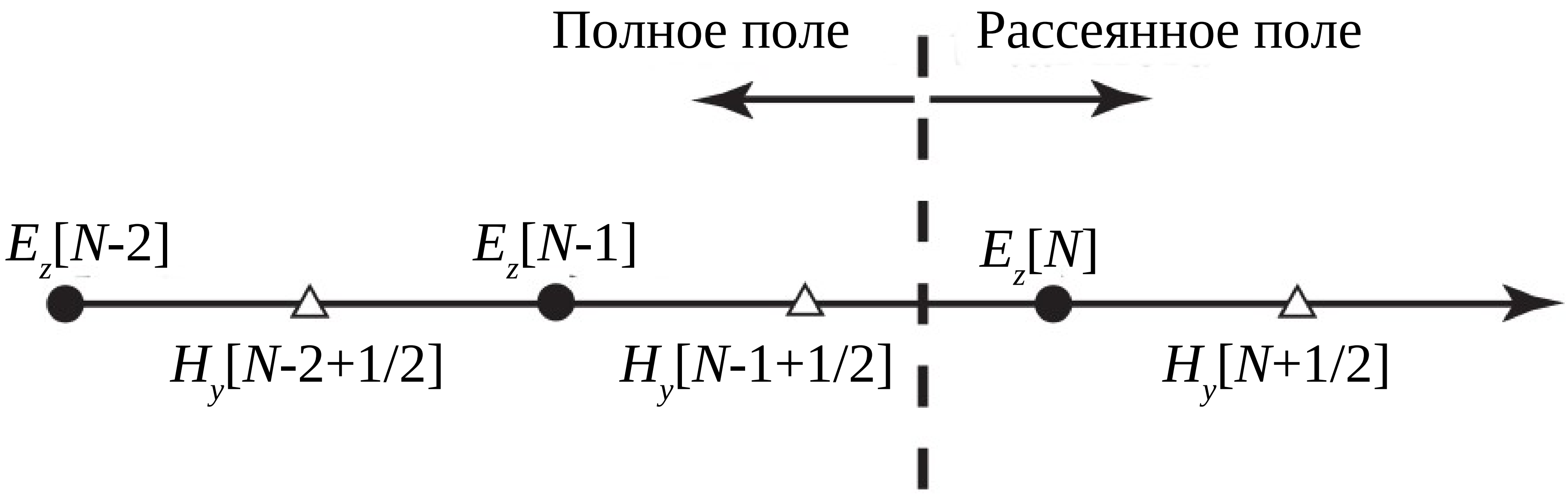
Поле на границе Total-Field / Scattered-Field для свободного пространства и S_c=1.

Левая граница

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N-1/2] - \frac{1}{W_0} E_z^{inc}[N,q]$$

$$E_z^{q+1}[N] \leftarrow E_z^{q+1}[N] + E_z^{inc}[N-1/2, q+1/2]$$

Метод Total-Field / Scattered-Field. Правая граница



$H_y[N\text{-}1 + 1/2] = H_y[N - 1/2]$ — последняя ячейка в области полного поля.

$E_z[N]$ — первая ячейка в области рассеянного поля.

Поле на границе Total-Field / Scattered-Field. Правая граница

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N-1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x} E_z^{inc}[N,q]$$

$$E_z^{q+1}[N] \leftarrow E_z^{q+1}[N] - \frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\frac{1}{W} E_z^{inc}[N-1/2, q+1/2]$$

Поле на границе Total-Field / Scattered-Field. Правая граница

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N-1/2] + \frac{S_c}{W_0 \mu} E_z^{inc}[N, q]$$

$$E_z^{q+1}[N] \leftarrow E_z^{q+1}[N] - \frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} E_z^{inc}[N-1/2, q+1/2]$$

Поле на границе Total-Field / Scattered-Field для свободного пространства и S_c=1. Правая граница

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N-1/2] + \frac{1}{W_0} E_z^{inc}[N, q]$$

$$E_z^{q+1}[N] \leftarrow E_z^{q+1}[N] - E_z^{inc}[N-1/2, q+1/2]$$

Схема алгоритма FDTD с использованием метода Total Field / Scattered field

Начало

Задание начальных условий E_z^{0}, $H_y^{1/2}$

Цикл по времени t = [0...maxTime - 1]:

Цикл по пространству m = [0...maxSize - 2]:

Расчет $H_y^{q+1/2}$

Ввод поля H^{inc}[N, t]

Цикл по пространству m = [1...maxSize - 1]:

Расчет E_z^{q+1}

Ввод поля E^{inc}[N-1/2, t+1/2]

Вывод результатов

Конец

Уравнение плоской волны для гауссова сигнала

Волновое уравнение

Волновое уравнение при отсутствии сторонних токов:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

Одномерное волновое уравнение

f — одномерная функция

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

Решение одномерного волнового уравнения

$f(\xi)$ — решение волнового уравнения, если:

- $f(\xi)$ дважды дифференцируема
- ξ можно заменить на $t \pm x / v$ (для одномерного случая)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0}}$$

$$f(\xi) = f(t \pm x / v) = f(x, t)$$

Гауссов импульс в дискретной форме

$$f(t) = f(q\Delta_t) = e^{-\left(\frac{(q-d_g)\Delta_t}{w_g \Delta_t}\right)^2} = e^{-\left(\frac{q-d_g}{w_g}\right)^2} = f[q]$$

Гауссов импульс в дискретной форме

Делаем замену *t* на *t - x / v*

$$t-\frac{x}{v}=q\Delta_t-\frac{m\Delta_x}{v}=q\Delta_t-\frac{m\Delta_x\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}=$$

$$=\left(q-\frac{m\Delta_x\sqrt{\varepsilon\mu}}{c\Delta_t}\right)\Delta_t=\left(q-\frac{m\sqrt{\varepsilon\mu}}{S_c}\right)\Delta_t$$

Для свободного пространства и $S_c = 1$:

$$t-\frac{x}{c}=(q-m)\Delta_t$$

Уравнение плоской волны в форме гауссова импульса в дискретном виде

$$E_z^{\mathrm{inc}}[m,q]=e^{-\left(\frac{\left(q-m\sqrt{\varepsilon\mu}/S_c\right)\Delta_t-d_g\Delta_t}{w_g\Delta_t}\right)^2}=e^{-\left(\frac{\left(q-m\sqrt{\varepsilon\mu}/S_c\right)-d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$H_y^{\mathrm{inc}}[m,q]=-\frac{1}{W}E_z^{\mathrm{inc}}[m,q]=-\frac{1}{W}e^{-\left(\frac{\left(q-m\sqrt{\varepsilon\mu}/S_c\right)-d_g}{w_g}\right)^2}$$

Уравнение плоской волны в форме гауссова импульса в дискретном виде

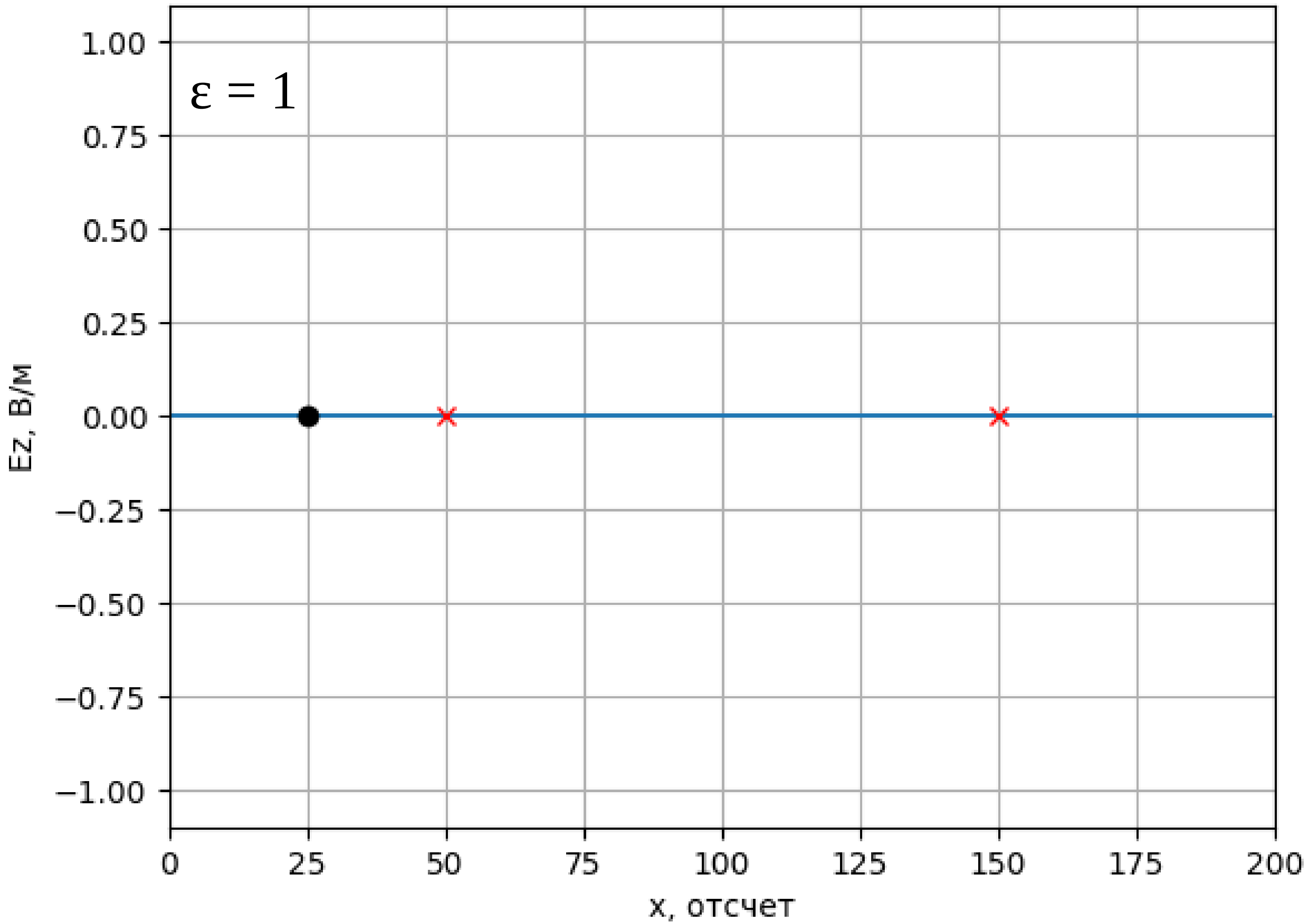
Для свободного пространства и $S_c = 1$:

$$E_z^{\text{inc}}[m,q] = e^{-\left(\frac{(q-m)\Delta_t - d_g\Delta_t}{w_g\Delta_t}\right)^2} = e^{-\left(\frac{(q-m)-d_g}{w_g}\right)^2}$$

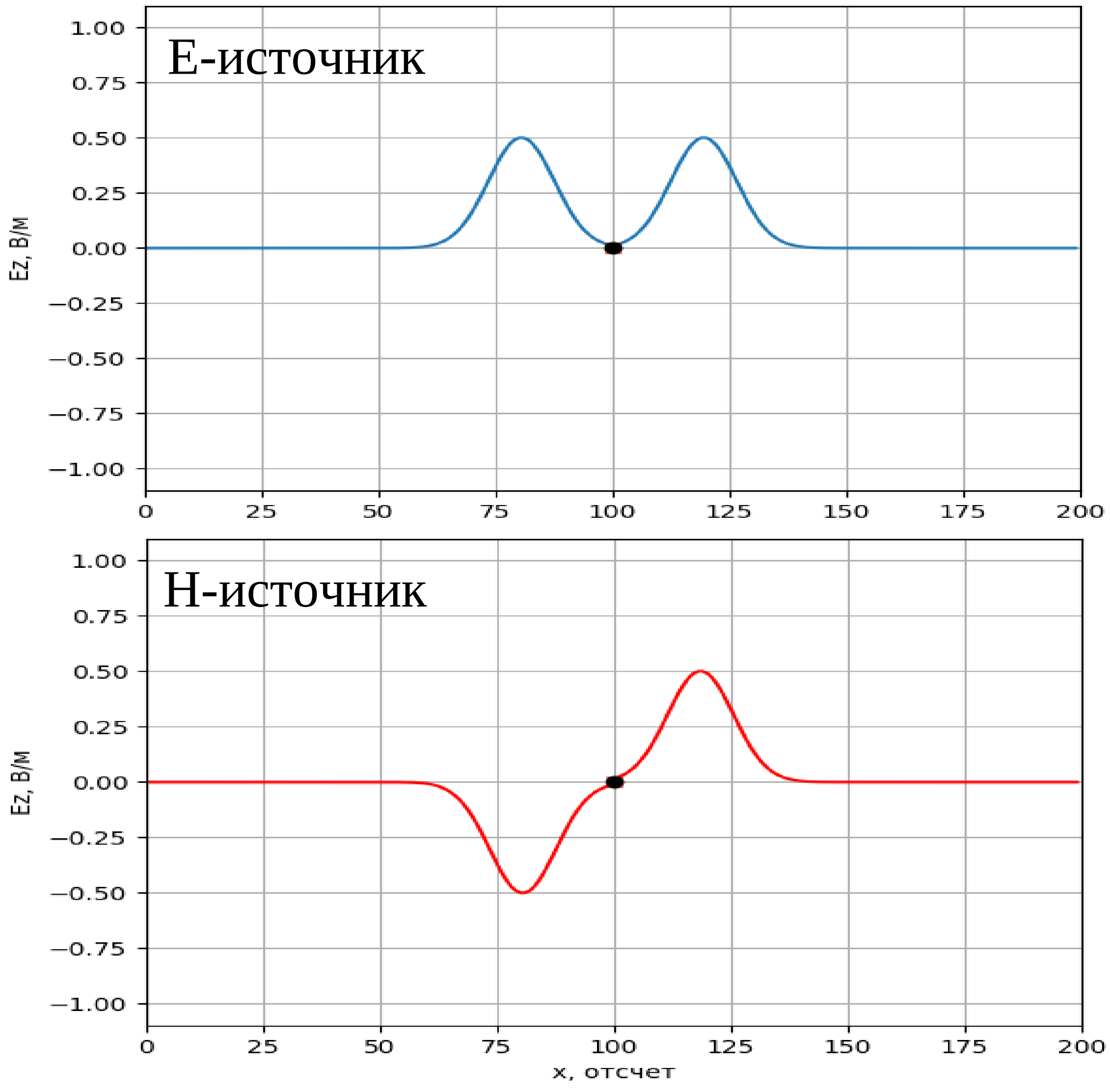
$$H_y^{\text{inc}}[m,q] = -\frac{1}{W_0}E_z^{\text{inc}}[m,q] = -\frac{1}{W_0}e^{-\left(\frac{(q-m)-d_g}{w_g}\right)^2}$$

Демонстрации метода
Total Field / Scattered Field

Демонстрация метода TFSF (fdtd_tfsf_gauss.py)



Источники при использовании метода полного поля / рассеянного поля. Левая граница



Поле на границе Total-Field / Scattered-Field

Пусть для введенного источника $x = 0$ соответствует N-й ячейке

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] = H_y^{q+1/2}[N-1/2] - \frac{1}{W_0} E_z^{inc}[0,q]$$

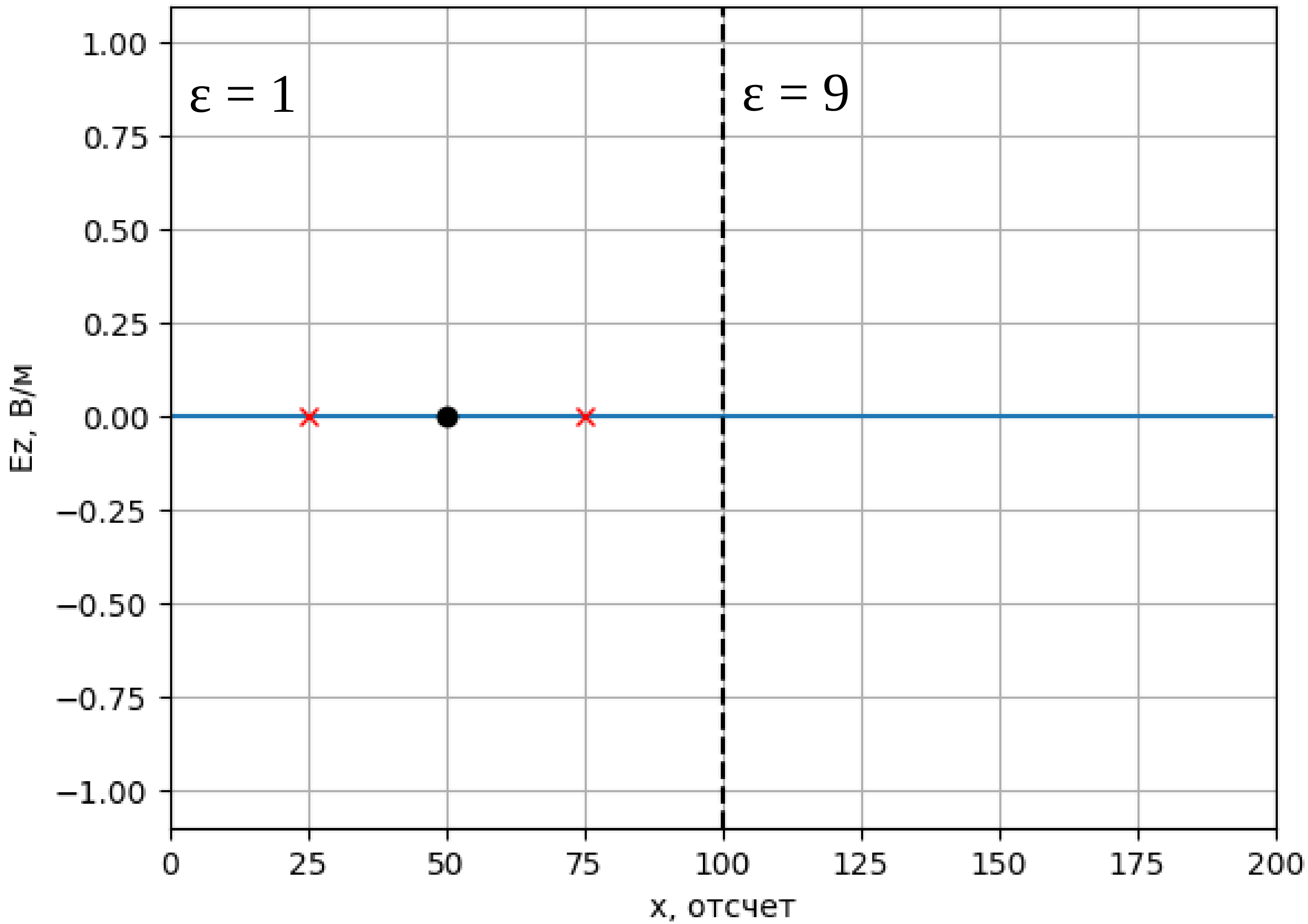
$$E_z^{q+1}[N] = E_z^{q+1}[N] + E_z^{inc}[-1/2, q+1/2]$$

Источники для метода Total-Field / Scattered-Field

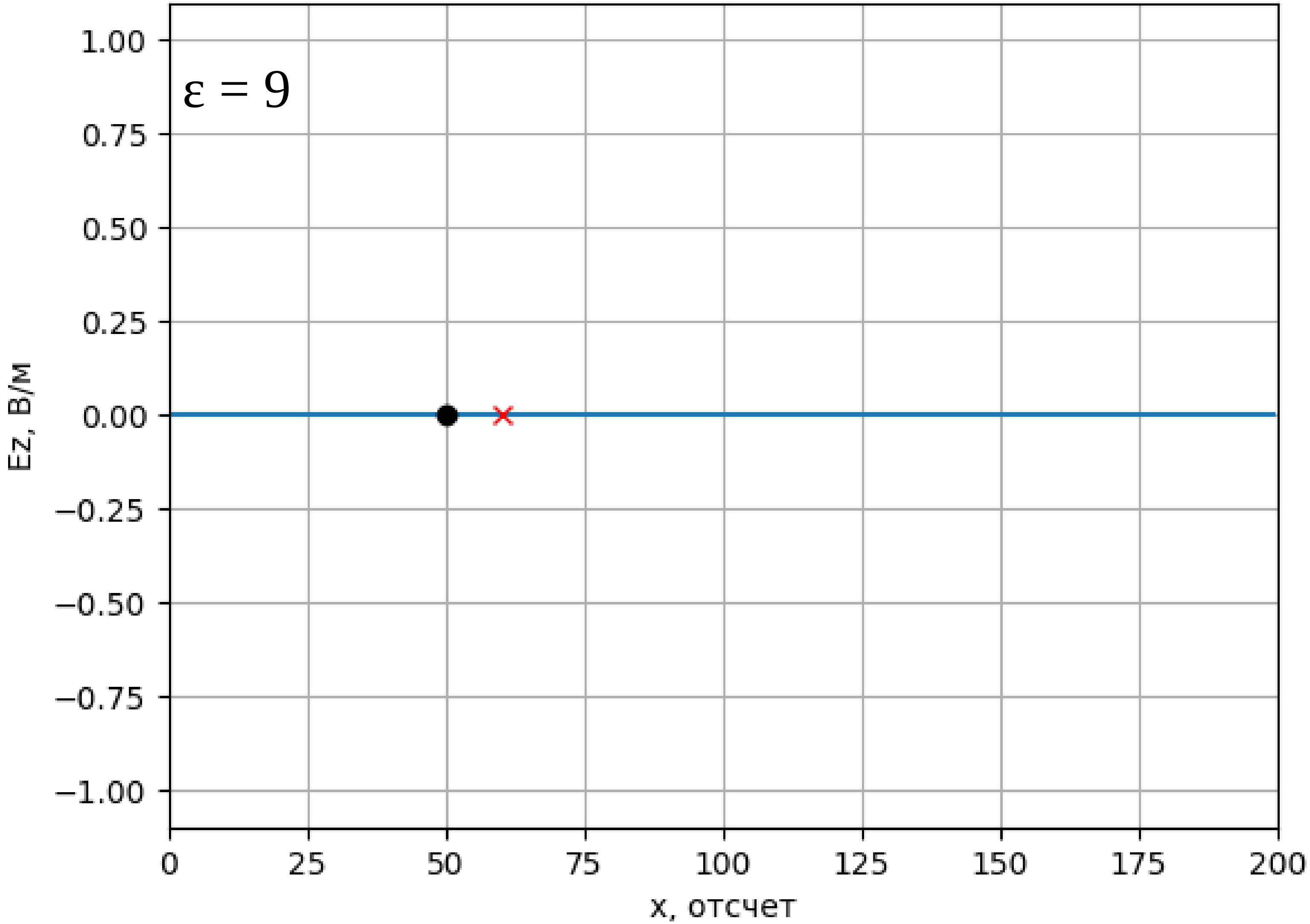
$$E_z^{\mathrm{inc}}\left[-1/2,q+1/2\right]=e^{-\left(\frac{\left(\left(q+0.5\right)-\left(-0.5\right)\right)-d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$E_z^{\mathrm{inc}}\left[0,q\right]=e^{-\left(\frac{q-d_g}{w_g}\right)^2}$$

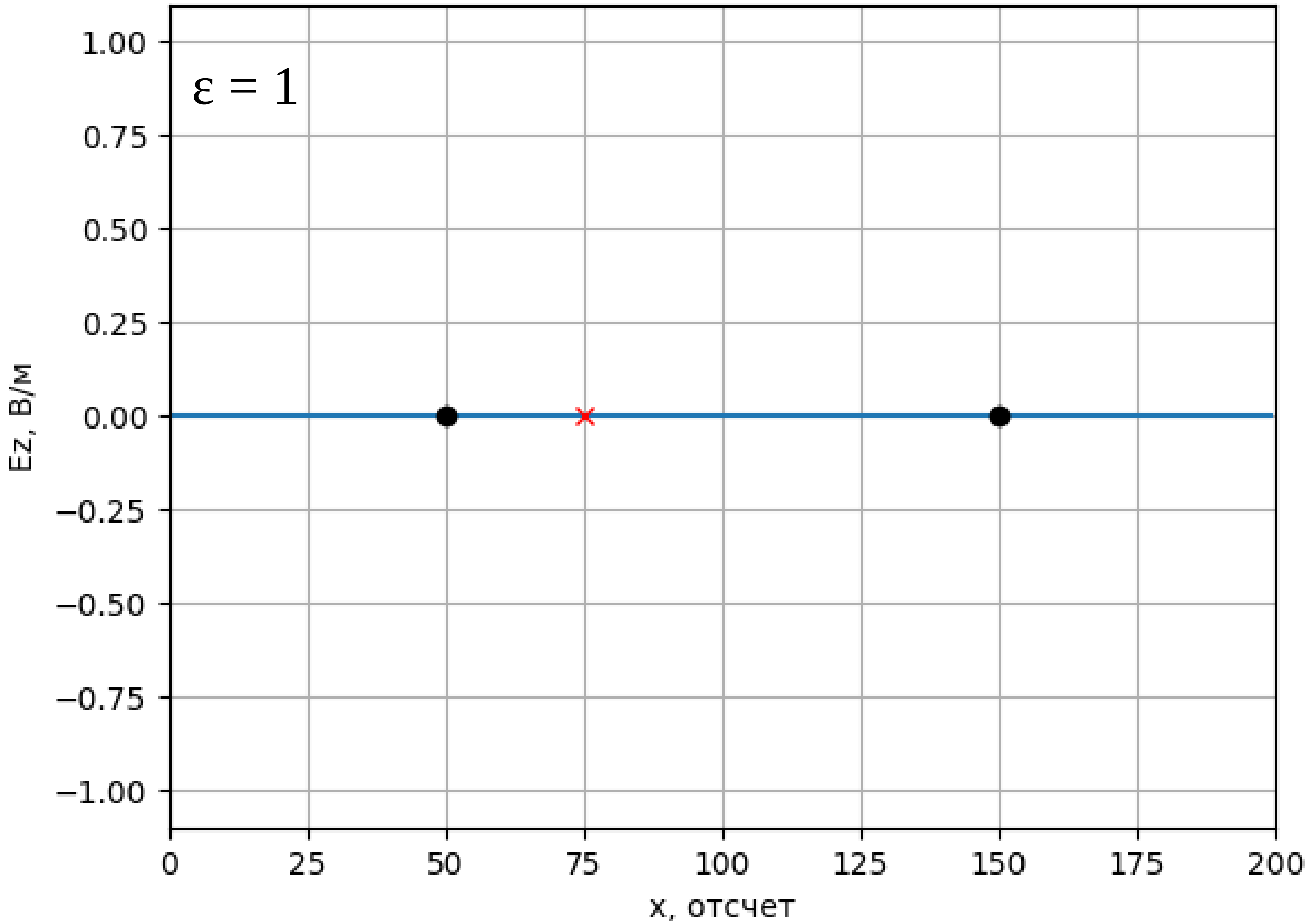
Распространение электромагнитной волны в неоднородных средах с использованием метода TFSF (fdtd_tfsf_heterogen.py)



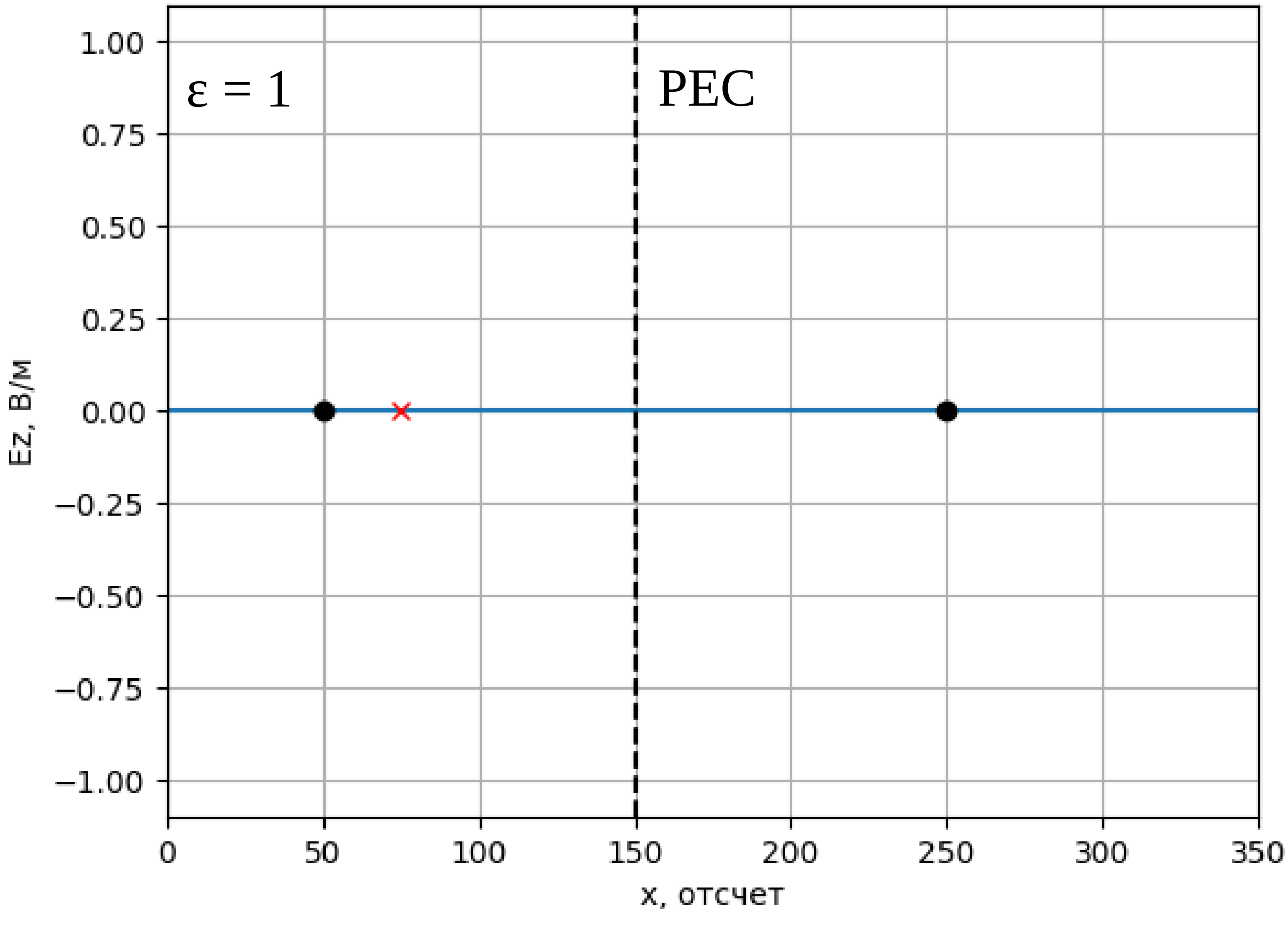
Метод Total Field / Scattered Field с источником, расположенным в диэлектрике (fdtd_tfsf_medium_gauss.py)



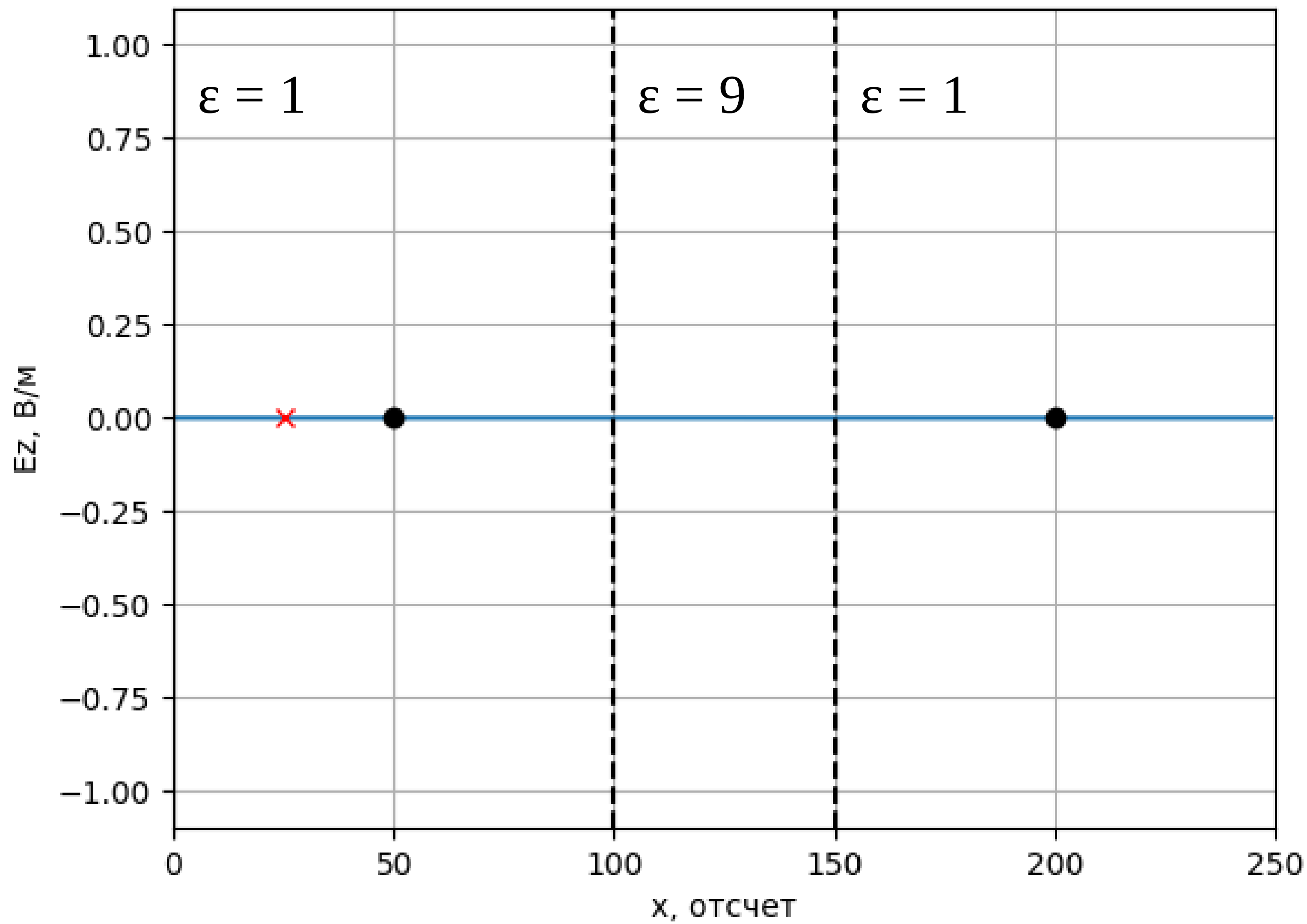
Метод Total Field / Scattered Field с использованием двух границ (fdtd_tfsf_left_right_gauss.py)



Метод Total Field / Scattered Field с использованием двух границ (fdtd_tfsf_left_right_gauss_pec.py)



Метод Total Field / Scattered Field с использованием двух границ (fdtd_tfsf_layer_gauss.py)



Моделирование распространения электромагнитной волны в среде с потерями

Закон Ампера для среды с потерями

При $\mathbf{j}_{\text{ст}} = 0$

$$\mathbf{j} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H}$$

или

$$\sigma \mathbf{E} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H}$$

Закон Ампера для среды с потерями

Для одномерного случая:

$$\sigma E_z + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

Закон Ампера для среды с потерями в дискретном виде

Запишем производные в дискретном виде для точки (mΔ_x; (q + 1/2)Δ_t):

$$\sigma E_z^{q+1/2}[m] + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^{q}[m]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x}$$

Закон Ампера для среды с потерями в дискретном виде

проблема

$$\sigma E_z^{q+1/2}[m] + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^{q}[m]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x}$$

$$E_z^{q+1/2}[m] \approx \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^{q}[m]}{2}$$

Закон Ампера для среды с потерями в дискретном виде

$$E_z^{q+1/2}[m] \approx \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^{q}[m]}{2}$$

тогда:

$$\sigma \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^{q}[m]}{2} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^{q}[m]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x}$$

Расчет электрической компоненты поля для среды с потерями

$$E_z^{q+1}[m] = \frac{1 - \dfrac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \dfrac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_z^q[m] +$$

$$+ \frac{\dfrac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x}}{1 + \dfrac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$

Расчет электрической компоненты поля для среды с потерями

$$E_z^{q+1}[m] = \frac{1 - \dfrac{\sigma \Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}{1 + \dfrac{\sigma \Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}} E_z^q[m] +$$

$$+ \frac{\dfrac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0 \Delta_x}}{1 + \dfrac{\sigma \Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}} \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$

Расчет электрической компоненты поля для среды с потерями

Для случая σ = 0 См/м:

$$E_z^{q+1}[m] =$$

$$= E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\Delta_x}\left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]\right)$$

Закон Фарадея для среды с потерями

$$-\mathbf{j}_m - \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}$$

или

$$-\sigma_m \mathbf{H} - \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}$$

Закон Фарадея для среды с потерями

Для одномерного случая:

$$\sigma_m H_y + \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

Закон Фарадея для среды с потерями в дискретном виде

Запишем производные в дискретном виде
для точки ((m + 1/2)Δ_x; qΔ_t):

проблема

$$\sigma_m H_y^q[m+1/2]+\mu\mu_0\frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2]-H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{\Delta_t}=$$

$$=\frac{E_z^q[m+1]-E_z^q[m]}{\Delta_x}$$

$$H_y^q[m+1/2] \approx \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] + H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{2}$$

Закон Фарадея для среды с потерями в дискретном виде

$$H_y^q[m+1/2] \approx \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] + H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{2}$$

$$\sigma_m \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] + H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{2} +$$

$$+\mu\mu_0 \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{E_z^q[m+1] - E_z^q[m]}{\Delta_x}$$

Расчет магнитной компоненты поля для среды с потерями

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=\frac{1-\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}H_y^{q-1/2}[m+1/2]+$$

$$+\frac{\dfrac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}\left(E_z^q[m+1]-E_z^q[m]\right)$$

Расчет магнитной компоненты поля для среды с потерями

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2] = \frac{1 - \dfrac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \dfrac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} H_y^{q-1/2}[m+1/2] +$$

$$+ \frac{\dfrac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \Delta_x}}{1 + \dfrac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \left(E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right)$$

Расчет магнитной компоненты поля

Для случая $\sigma_m = 0$:

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2]+\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}\left(E_z^q[m+1]-E_z^q[m]\right)$$

Моделирование среды с потерями. Комментарии к реализации

Реализуем случай

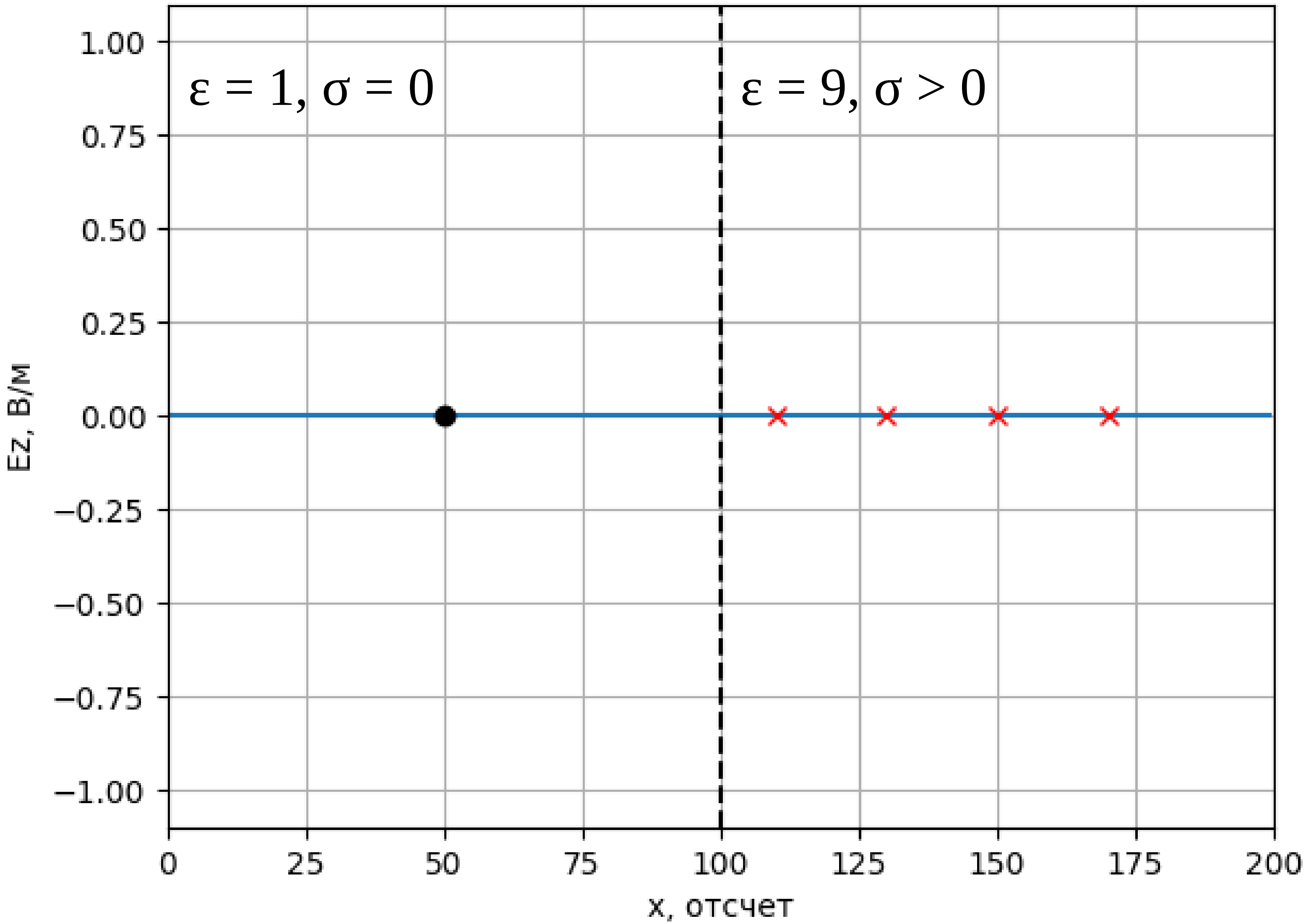
$\sigma_m = 0$, $Sc = 1$

$$loss = \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}$$

$$ceze = \frac{1 - loss}{1 + loss}$$

$$cezh = \frac{W_0 / \varepsilon}{1 + loss}$$

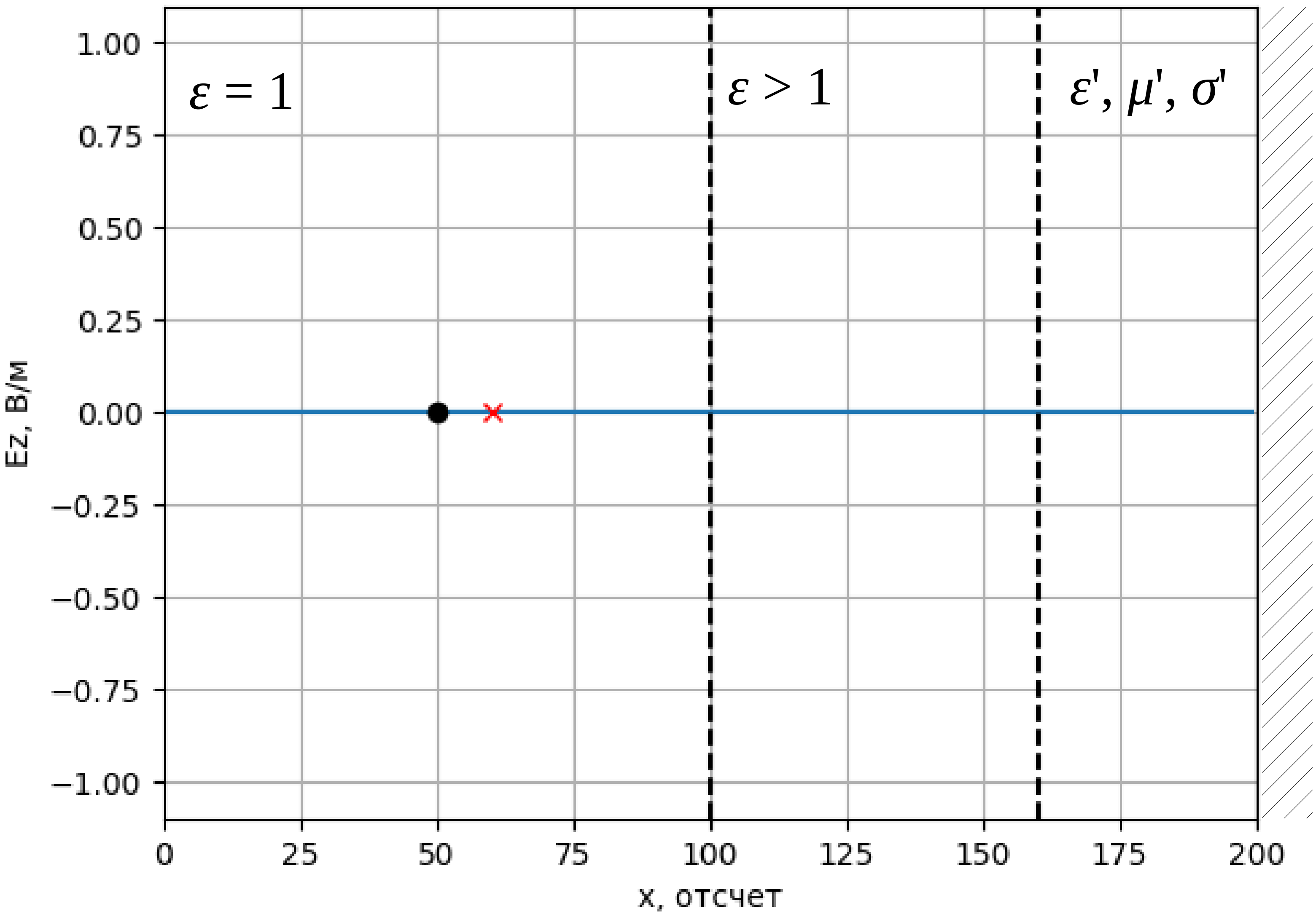
Геометрия решаемой задачи (fdtd_loss.py)



Поглощающие граничные условия

Поглощающие граничные условия с использованием полностью согласованного слоя

Геометрия решаемой задачи



Коэффициент отражения

Для волны, падающей по нормали:

$$\Gamma = \frac{\dot{E}_{отр}}{\dot{E}_{пад}} = \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}$$

Волновое сопротивление в среде с потерями

$$W=\sqrt{\frac{\mu\mu_0\left(1-i\,\dfrac{\sigma_m}{\omega\mu\mu_0}\right)}{\varepsilon\varepsilon_0\left(1-i\,\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\right)}}=W_0\sqrt{\frac{\mu\left(1-i\,\dfrac{\sigma_m}{\omega\mu\mu_0}\right)}{\varepsilon\left(1-i\,\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\right)}}$$

Волновое сопротивление в среде с потерями

$$W=\sqrt{\frac{\mu\mu_0\left(1-i\,\dfrac{\sigma_m}{\omega\mu\mu_0}\right)}{\varepsilon\varepsilon_0\left(1-i\,\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\right)}}=W_0\sqrt{\frac{\mu\left(1-i\,\dfrac{\sigma_m}{\omega\mu\mu_0}\right)}{\varepsilon\left(1-i\,\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\right)}}$$

Если $\dfrac{\sigma_m}{\omega\mu\mu_0}=\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}$, то $W=W_0\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$

Реализация поглощающих граничных условий

$$loss_m = \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0} \qquad loss_e = \frac{\sigma \Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$

Если

$$\frac{\sigma_m}{\omega\mu\mu_0} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}$$, то

$$\frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0} = \frac{\sigma \Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$ или $$loss_m = loss_e$$

Реализация поглощающих граничных условий

$$loss_e = loss_m = loss = \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0} = \frac{\sigma \Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0} = 0.02$$

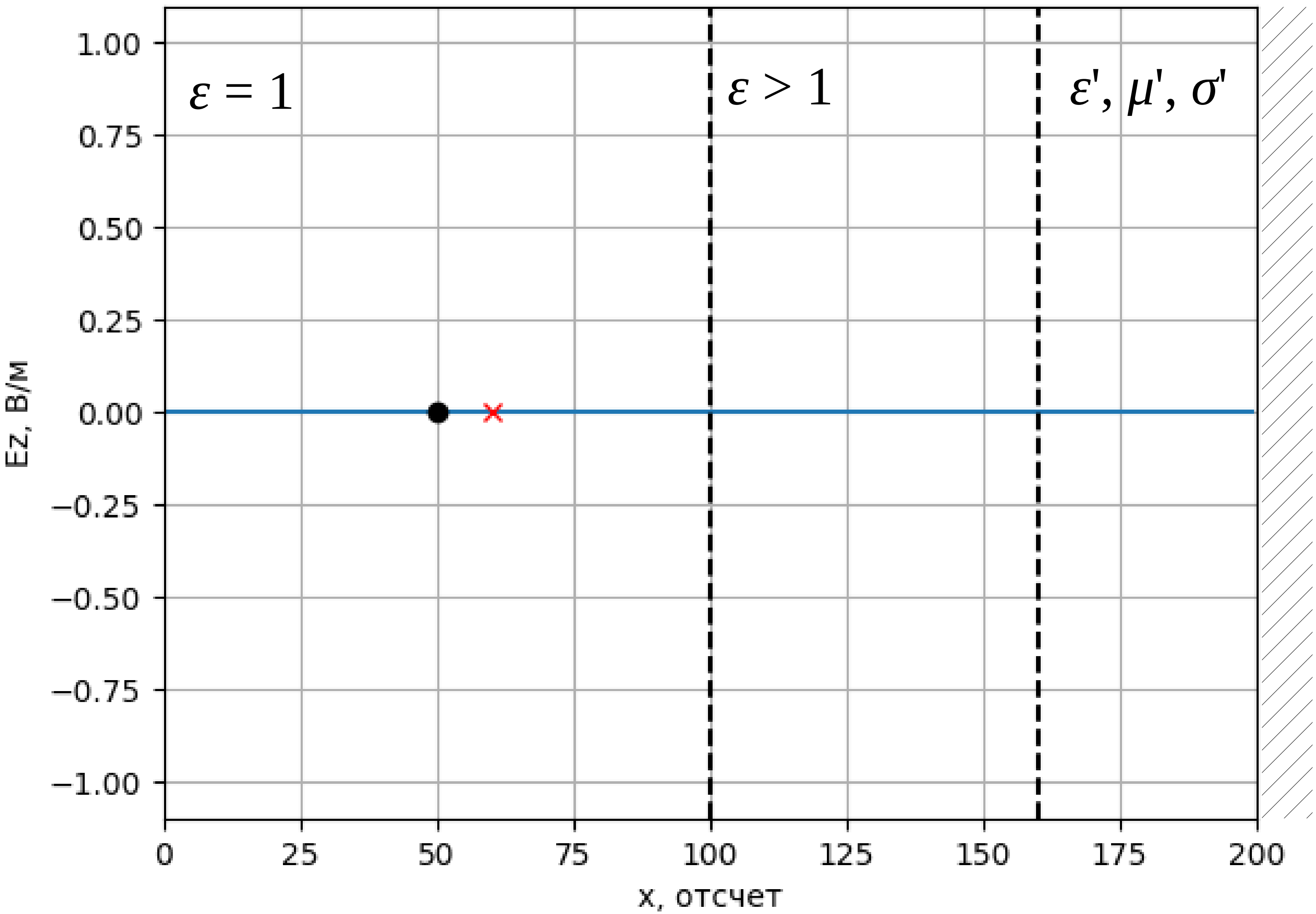
$$ceze = \frac{1 - loss}{1 + loss}$$

$$cezh = \frac{W_0 / \varepsilon}{1 + loss}$$

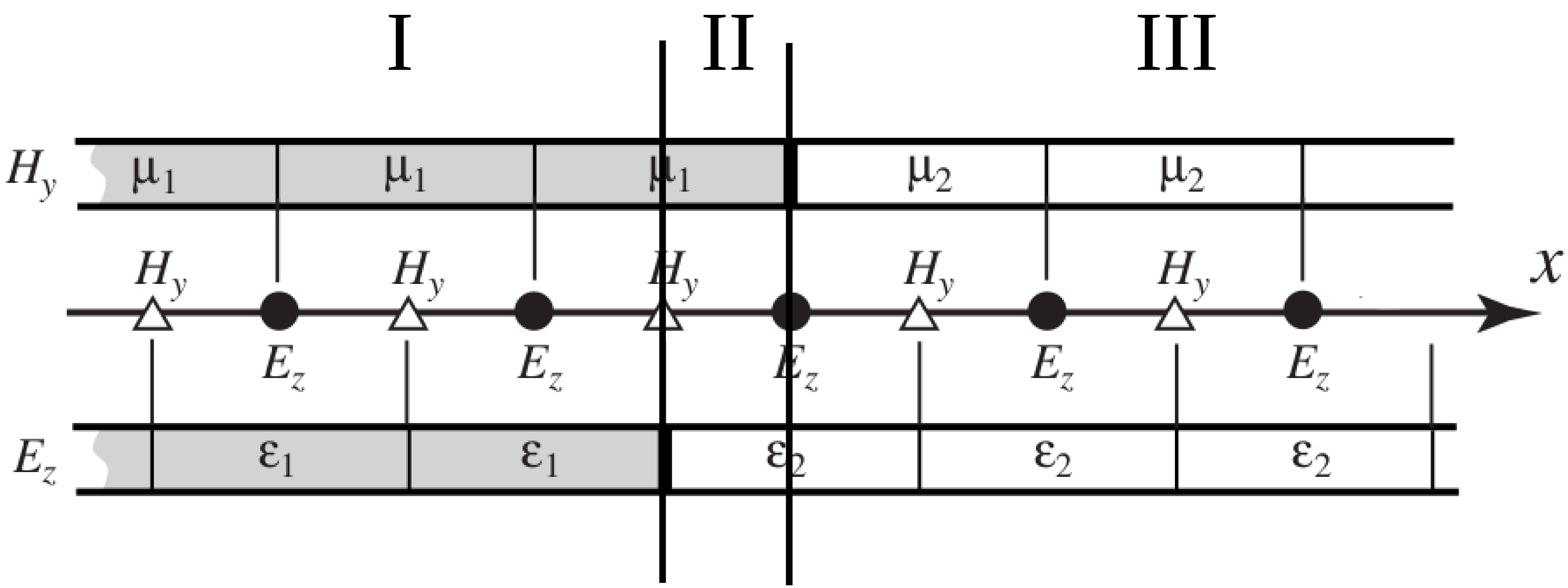
$$chye = \frac{1 / W_0}{1 + loss}$$

$$chyh = \frac{1 - loss}{1 + loss}$$

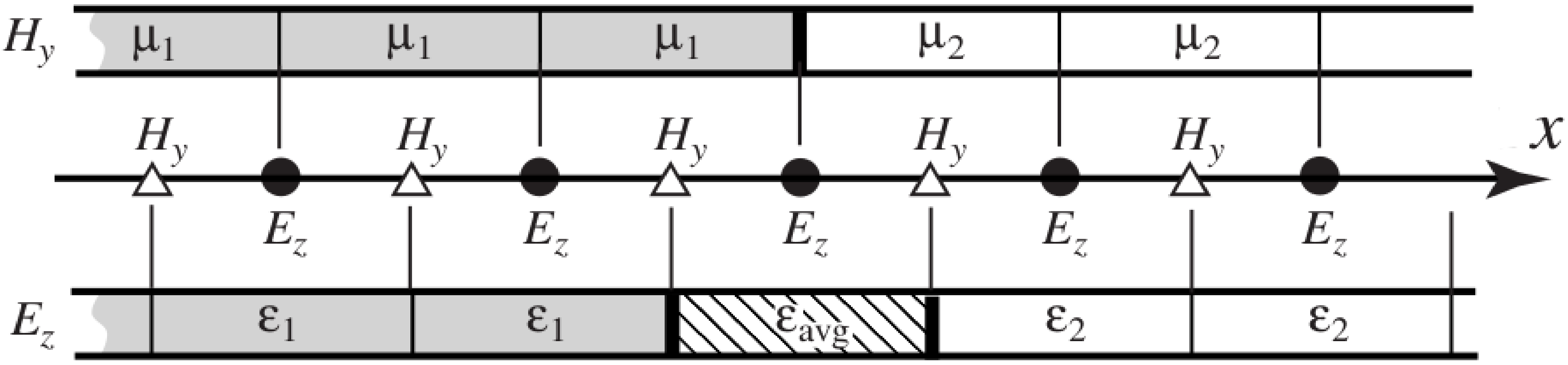
Демонстрация граничных условий с использованием полностью согласованного слоя (fdtd_loss_boundary.py)



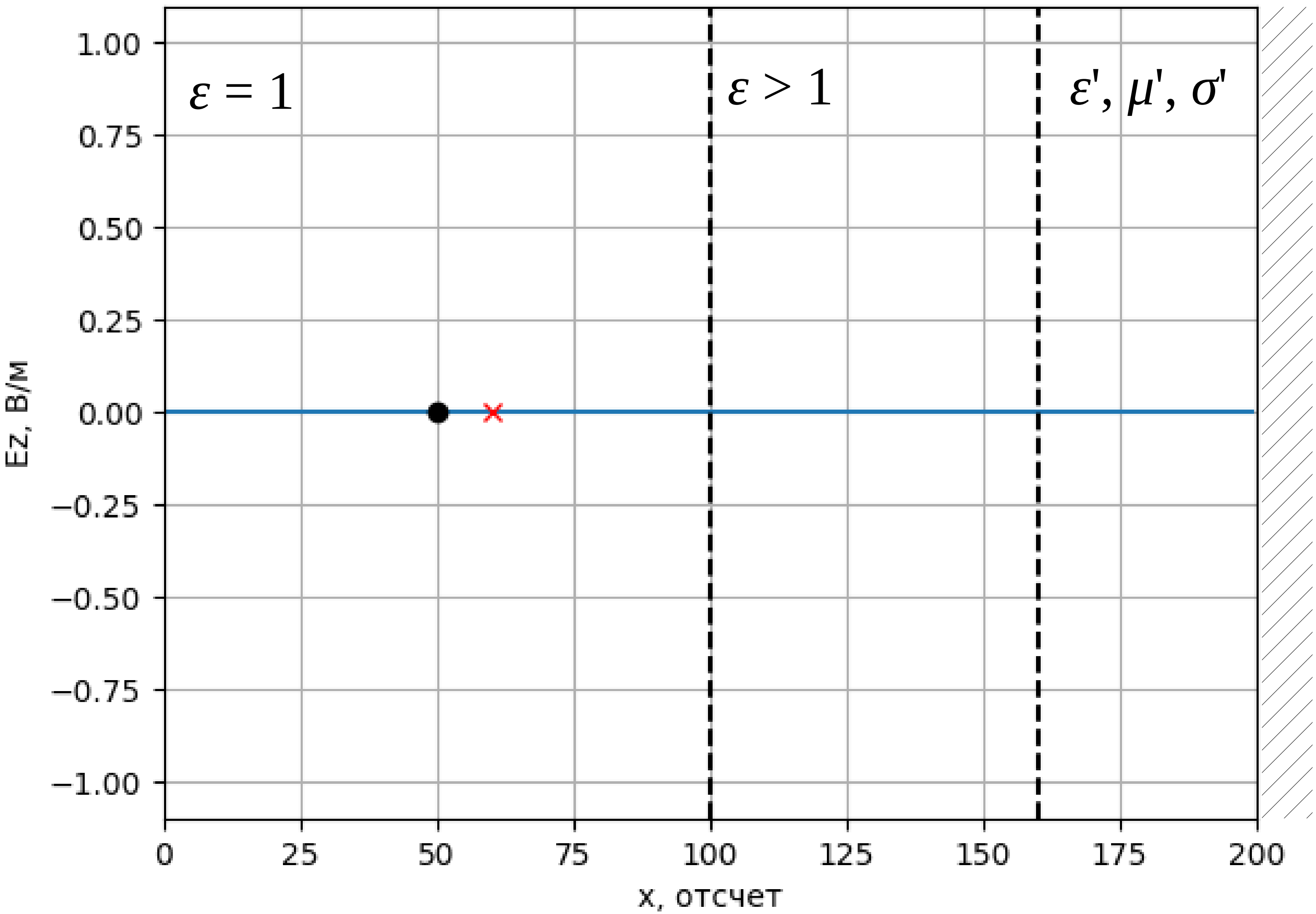
Погрешность из-за дискретной сетки



Погрешность из-за дискретной сетки



Демонстрация граничных условий с использованием полностью согласованного слоя (fdtd_loss_boundary_2.py)



Поглощающие граничные условия (Absorbing boundary condition - ABC)

Типы поглощающих граничных условий

Поглощающие граничные условия можно разделить на две группы:

- Условия, аннигилирующие вытекающие волны.
- Условия, аппроксимирующие уравнение волны, распространяющейся только в одном направлении.

Линейные операторы

Оператор A называются линейным,
если выполняются следующие условия:

- $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2$
- $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}$

Свойства линейных операторов

Для двух линейных операторов A и B выполняются условия:

$$(A + B)(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x})$$

$$(AB)(\mathbf{x}) = A(B(\mathbf{x}))$$

Волновое уравнение в одномерном случае

$$\nabla^2 E_z - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

Волновое уравнение в одномерном случае

Перепишем волновое уравнение в операторном виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E_z = 0$$

Волновое уравнение в одномерном случае

Полученный оператор может быть разложен на произведение двух операторов:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\mu\,\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\mu\,\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_z=0$$

Уравнения адвекции

Любая функция E_z, которая удовлетворяет хотя бы одному из следующих уравнений, является решением волнового уравнения:

I. $$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

II. $$\frac{\partial E_z}{\partial x} + \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

Уравнения адвекции

$$E_z\left(t+x/v\right)=E_z\left(t+\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\mu\,\mu_0}\,x\right)$$

- волна, распространяющаяся влево, удовлетворяет первому уравнению адвекции, но не второму.

Покажем это.

Уравнения адвекции

Сделаем замену $$\xi = t + \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}\, x$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

Уравнения адвекции

$$\xi = t + \sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\mu\,\mu_0}\,x$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = 1$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\mu\,\mu_0}$$

Уравнения адвекции

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi}\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi}$$

Уравнения адвекции

Полученные выражения подставляем в первое уравнение адвекции

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\mu\,\mu_0}\,\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial \xi}\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\mu\,\mu_0} - \frac{\partial E_z}{\partial \xi}\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\mu\,\mu_0} = 0$$

$$0 = 0$$

Уравнение удовлетворяется

Уравнения адвекции

Полученные выражения подставляем во второе уравнение адвекции

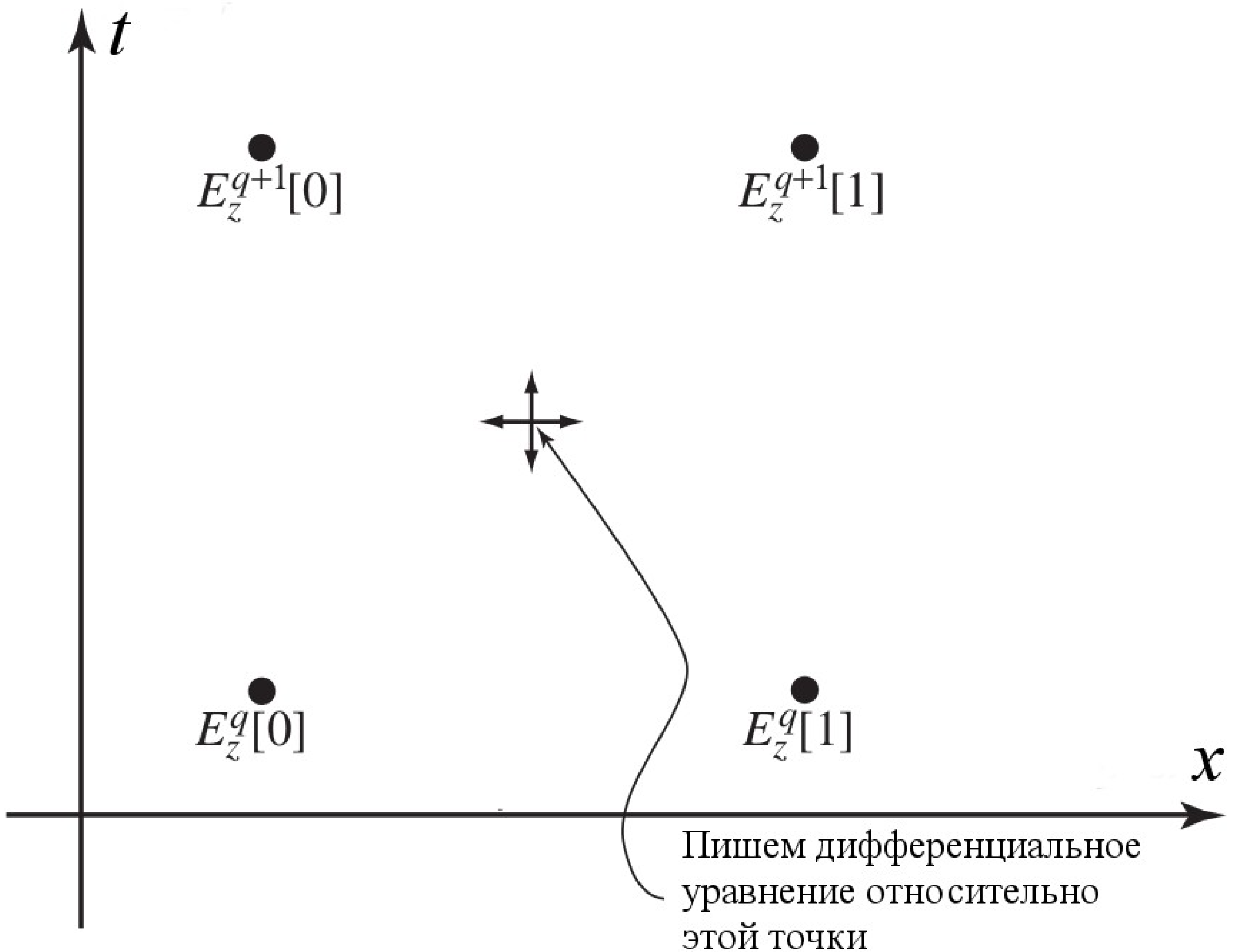
$$\frac{\partial E_z}{\partial x} + \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} + \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} = 0$$

$$2 \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \neq 0$$

Уравнение не удовлетворяется

Поглощающие граничные условия



Поглощающие граничные условия

Запишем производные в уравнении адвекции через конечно-разностную схему

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\,\frac{\partial E_z}{\partial t}\bigg|_{\Delta_x/2,\left(q+\frac{1}{2}\right)\Delta_t} =$$

???

$$= \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\,\frac{E_z^{q+1}[1/2]-E_z^{q}[1/2]}{\Delta_t}$$

Поглощающие граничные условия

$$E_z^{q+1}[1/2] \approx \frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1]}{2}$$

$$E_z^{q}[1/2] \approx \frac{E_z^{q}[0] + E_z^{q}[1]}{2}$$

Поглощающие граничные условия

$$\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\mu\,\mu_0}\,\frac{\partial E_z}{\partial t}\bigg|_{\Delta_x/2,\left(q+\frac{1}{2}\right)\Delta_t} \approx$$

$$\approx \sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\mu\,\mu_0}\,\frac{\dfrac{E_z^{q+1}[0]+E_z^{q+1}[1]}{2}-\dfrac{E_z^{q}[0]+E_z^{q}[1]}{2}}{\Delta_t}$$

Поглощающие граничные условия

Аналогично поступаем со вторым слагаемым в первом уравнении адвекции

$$\left.\frac{\partial E_z}{\partial x}\right|_{\Delta_x/2,\left(q+\frac{1}{2}\right)\Delta_t} =$$

$$= \frac{E_z^{q+1/2}[1] - E_z^{q+1/2}[0]}{\Delta_x} \approx$$

$$\approx \frac{\dfrac{E_z^{q+1}[1] + E_z^{q}[1]}{2} - \dfrac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q}[0]}{2}}{\Delta_x}$$

Поглощающие граничные условия

Подставляем полученные выражения в первое уравнение адвекции

$$\frac{\dfrac{E_z^{q+1}[1]+E_z^{q}[1]}{2}-\dfrac{E_z^{q+1}[0]+E_z^{q}[0]}{2}}{\Delta_x}-$$

$$-\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\mu\,\mu_0}\,\frac{\dfrac{E_z^{q+1}[0]+E_z^{q+1}[1]}{2}-\dfrac{E_z^{q}[0]+E_z^{q}[1]}{2}}{\Delta_t}=0$$

Поглощающие граничные условия

Из полученного уравнения выражаем $E_x^{q+1}[0]$ и учитываем, что:

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}=\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}, \qquad S_c=\frac{c\Delta_t}{\Delta_x}$$

$$\boxed{E_z^{q+1}[0]=E_z^q[1]+\frac{\frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}-1}{\frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}+1}\left(E_z^{q+1}[1]-E_z^q[0]\right)}$$

Поглощающие граничные условия

Аналогично можно вывести условие для правой границы

$$E_z^{q+1}[M] = E_z^q[M-1] + \frac{\frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} - 1}{\frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} + 1}\left(E_z^{q+1}[M-1] - E_z^q[M]\right)$$

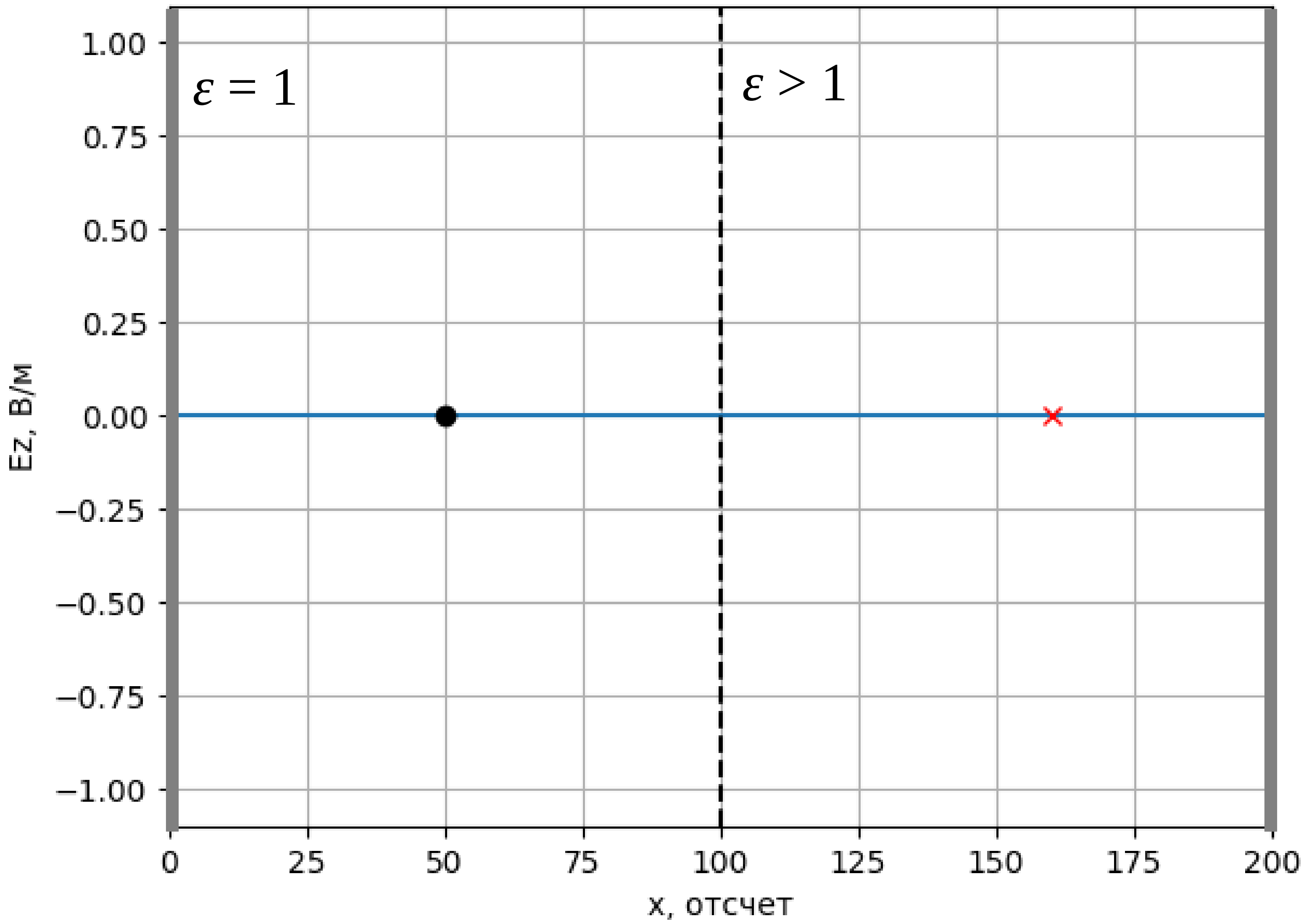
Поглощающие граничные условия

Для свободного пространства и $S_c = 1$ выражения сводятся к виду:

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1]$$

$$E_z^{q+1}[M] = E_z^q[M-1]$$

Демонстрация поглощающих граничных условий (ABC) первой степени (fdtd_abc_first.py)



Формулировка граничных условий ABC первой степени с использованием дискретных операторов

Операторы для граничных условий ABC

Введем несколько новых операторов:

I — оператор идентичности.

$$I\,E_z^q[m] = E_z^q[m]$$

s_x^w — оператор <u>пространственного</u> сдвига (сдвиг вправо).

$$s_x^w\,E_z^q[m] = E_z^q[m+w]$$

s_t^w — оператор обратного <u>временного</u> сдвига.

$$s_t^w\,E_z^q[m] = E_z^{q+w}[m]$$

Свойства линейных операторов

Введенные операторы коммутативны
(можно менять порядок их применения)

$$s_x^w s_t^w = s_t^w s_x^w$$

$$I s_x^w = s_x^w$$

$$I s_t^w = s_t^w$$

$$I I = I$$

Уравнения адвекции

I. $$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

II. $$\frac{\partial E_z}{\partial x} + \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

Использование дискретных операторов для граничных условий АВС первого порядка

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\,\frac{\partial E_z}{\partial t}\bigg|_{\Delta_x/2,\left(q+\frac{1}{2}\right)\Delta_t} \approx$$

$$\approx \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\,\frac{\dfrac{E_z^{q+1}[0]+E_z^{q+1}[1]}{2}-\dfrac{E_z^{q}[0]+E_z^{q}[1]}{2}}{\Delta_t}$$

Использование дискретных операторов для граничных условий ABC первого порядка

Пространственное усреднение с помощью введенных операторов записывается следующим образом:

$$\frac{E_z^{q+1}[m]+E_z^{q+1}[m+1]}{2}=$$

$$=\frac{I\,E_z^{q+1}[m]+s_x^1 E_z^{q+1}[m]}{2}=$$

$$=\left(\frac{I+s_x^1}{2}\right)E_z^{q+1}[m]$$

Использование дискретных операторов для граничных условий ABC первого порядка

Временное усреднение с помощью введенных операторов записывается следующим образом:

$$\frac{E_z^{q+1}[m]+E_z^{q}[m]}{2}=$$

$$=\frac{I\,E_z^{q+1}[m]+s_t^{-1}\,E_z^{q+1}[m]}{2}=$$

$$=\left(\frac{I+s_t^{-1}}{2}\right)E_z^{q+1}[m]$$

Поглощающие граничные условия с использованием дискретных операторов

В операторном виде указанные действия выглядят следующим образом:

$$\left.\frac{\partial E_z}{\partial t}\right|_{\Delta_x/2,\left(q+\frac{1}{2}\right)\Delta_t} \approx \frac{\left(\frac{I+s_x^1}{2}\right)E_z^{q+1}[0]-\left(\frac{I+s_x^1}{2}\right)s_t^{-1}E_z^{q+1}[0]}{\Delta_t}=$$

$$=\left(\frac{I+s_x^1}{2}\right)\left(\frac{I-s_t^{-1}}{\Delta_t}\right)E_z^{q+1}[0]=$$

$$=\frac{1}{2\Delta_t}\left(I-s_t^{-1}+s_x^1-s_x^1\cdot s_t^{-1}\right)E_z^{q+1}[0]=$$

$$=\frac{1}{2\Delta_t}\left(E_z^{q+1}[0]-E_z^q[0]+E_z^{q+1}[1]-E_z^q[1]\right)$$

Поглощающие граничные условия с использованием операторной записи

Аналогично можем поступить с расчетом производной по пространству:

$$\left.\frac{\partial E_z}{\partial x}\right|_{\Delta_x/2,\left(q+\frac{1}{2}\right)\Delta_t} \approx$$

$$\approx \left(\frac{s_x^1 - I}{\Delta_x}\right)\left(\frac{I + s_t^{-1}}{2}\right) E_z^{q+1}[0] =$$

$$= \frac{1}{2\Delta_x}\left(-I + s_x^1 - s_t^{-1} + s_t^{-1}\cdot s_x^1\right) E_z^{q+1}[0] =$$

$$= \frac{1}{2\Delta_x}\left(-E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1] - E_z^{q}[0] + E_z^{q}[1]\right)$$

Поглощающие граничные условия с использованием операторной записи

Запишем конечно-разностное выражение для уравнения адвекции:

$$\left\{\left(\frac{s_x^1-I}{\Delta_x}\right)\left(\frac{I+s_t^{-1}}{2}\right)-\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{I+s_x^1}{2}\right)\left(\frac{I-s_t^{-1}}{\Delta_t}\right)\right\}E_z^{q+1}[0]=0$$

Решение этого уравнения для $E_z^{q+1}[0]$ даст выражение

$$E_z^{q+1}[0]=E_z^q[1]+\frac{\frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}-1}{\frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}+1}\left(E_z^{q+1}[1]-E_z^q[0]\right)$$

Поглощающие граничные условия (Absorbing boundary condition — ABC) второй степени

Волновое уравнение в одномерном случае

Мы получим более точное решение уравнения адвекции и уменьшим отражение, если применим оператор адвекции дважды:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\mu\,\mu_0}\,\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-\sqrt{\varepsilon\,\varepsilon_0\mu\,\mu_0}\,\frac{\partial}{\partial t}\right)E_z=0$$

Волновое уравнение в одномерном случае

Конечно-разностная схема для оператора адвекции второй степени в операторном виде:

$$\left[\left\{\left(\frac{s_x^1 - I}{\Delta_x}\right)\left(\frac{I + s_t^{-1}}{2}\right) - \sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{I + s_x^1}{2}\right)\left(\frac{I - s_t^{-1}}{\Delta_t}\right)\right\}\times\right.$$

$$\left.\left\{\left(\frac{s_x^1 - I}{\Delta_x}\right)\left(\frac{I + s_t^{-1}}{2}\right) - \sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{I + s_x^1}{2}\right)\left(\frac{I - s_t^{-1}}{\Delta_t}\right)\right\}\right] E_z^{q+1}[0] = 0$$

Поглощающее граничное условие второй степени

Если раскрыть скобки и решить это уравнение относительно $E_z^{q+1}[0]$, то мы получим

$$E_z^{q+1}[0]=\underbrace{\frac{-1}{1/S'_c+2+S'_c}}_{k_1}\left\{\underbrace{\left(\frac{1}{S'_c}-2+S'_c\right)}_{k_2}\left(E_z^{q+1}[2]+E_z^{q-1}[0]\right)+\right.$$

$$+\underbrace{2\left(S'_c-\frac{1}{S'_c}\right)}_{k_3}\left(E_z^{q}[0]+E_z^{q}[2]-E_z^{q+1}[1]-E_z^{q-1}[1]\right)-$$

$$\left.-\underbrace{4\left(\frac{1}{S'_c}+S'_c\right)}_{k_4}E_z^{q}[1]\right\}-E_z^{q-1}[2]$$

Поглощающее граничное условие второй степени

В предыдущем выражении:

$$S'_c = \frac{\Delta_t}{\sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0}\,\Delta_x} = \frac{S_c}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$$

Поглощающее граничное условие второй степени

Для свободного пространства и $S_c = 1$ граничное условие преобразуется к виду:

$$E_z^{q+1}[0] = 2E_z^{q}[1] - E_z^{q-1}[2]$$

Поглощающее граничное условие второй степени

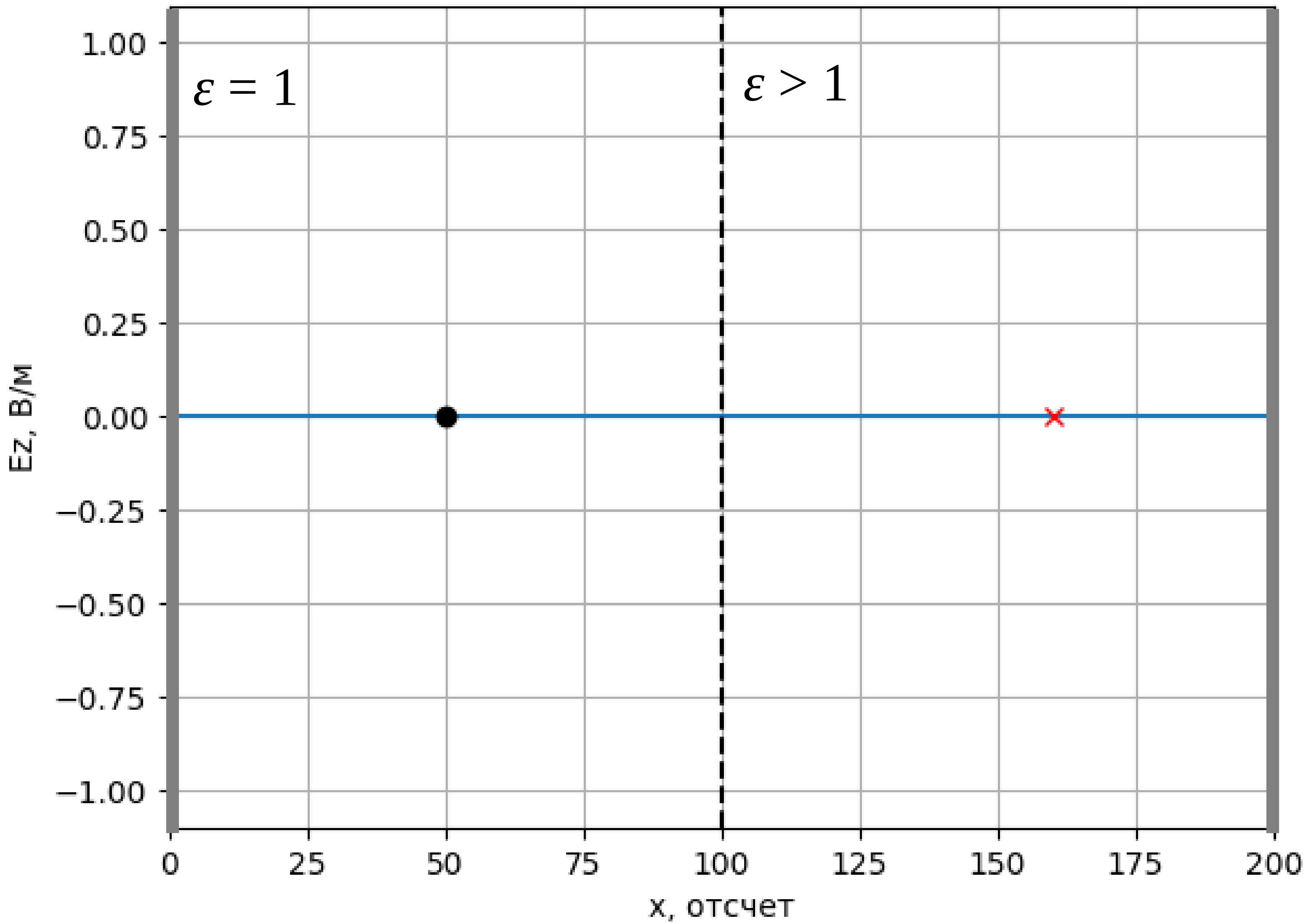
Граничные условия справа выглядят аналогично, только они отражены «зеркально». Преобразуются пространственные координаты:

$$0 \rightarrow M$$
$$1 \rightarrow M-1$$
$$2 \rightarrow M-2$$

В индексации Python:

$$0 \rightarrow -1$$
$$1 \rightarrow -2$$
$$2 \rightarrow -3$$

Демонстрация поглощающих граничных условий (ABC) второй степени (fdtd_abc_second.py)

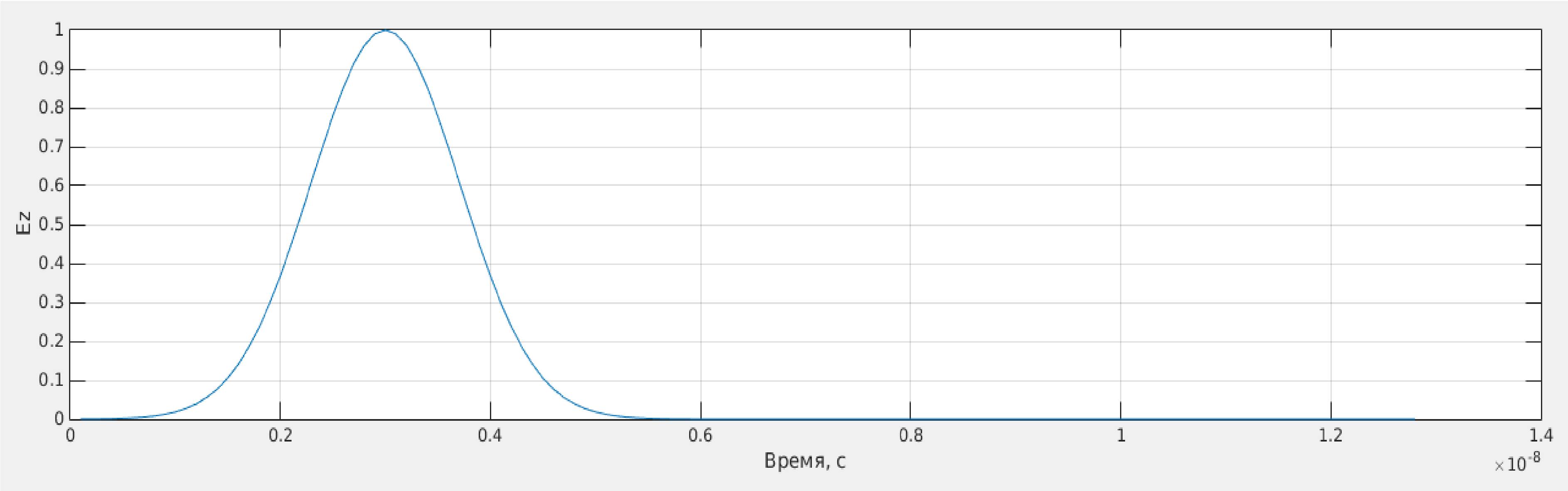


Источники возбуждения

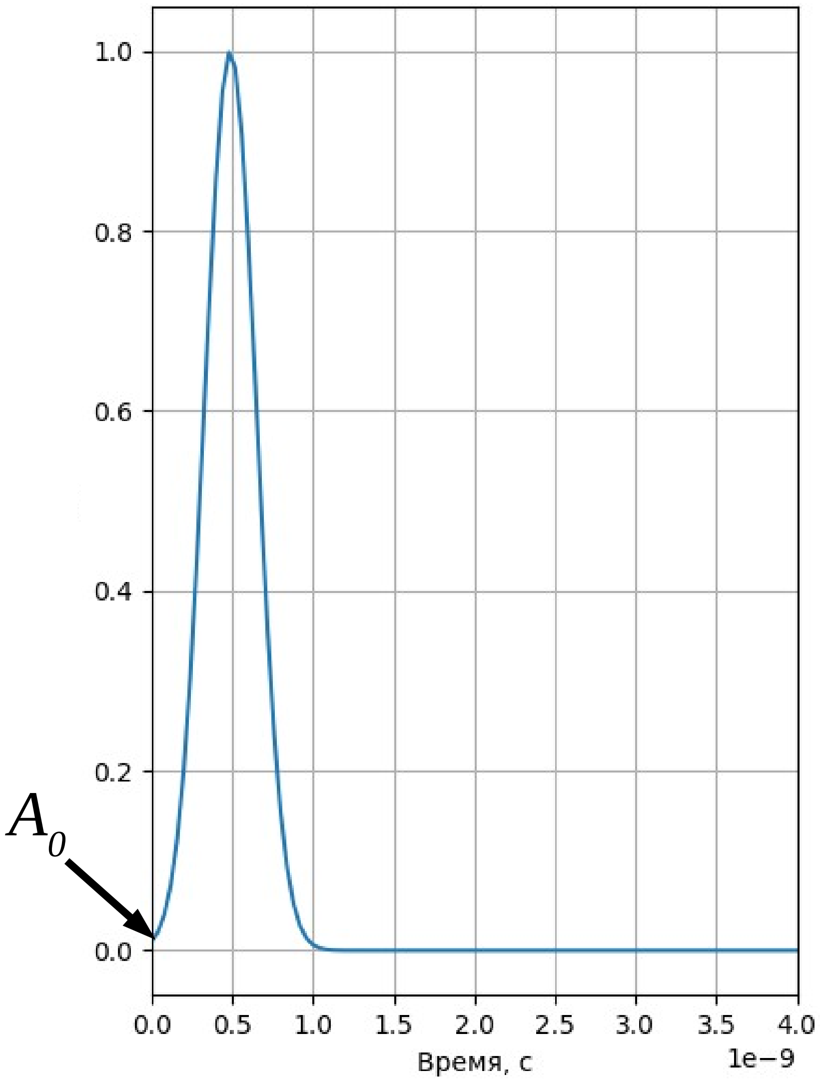
Гауссов импульс

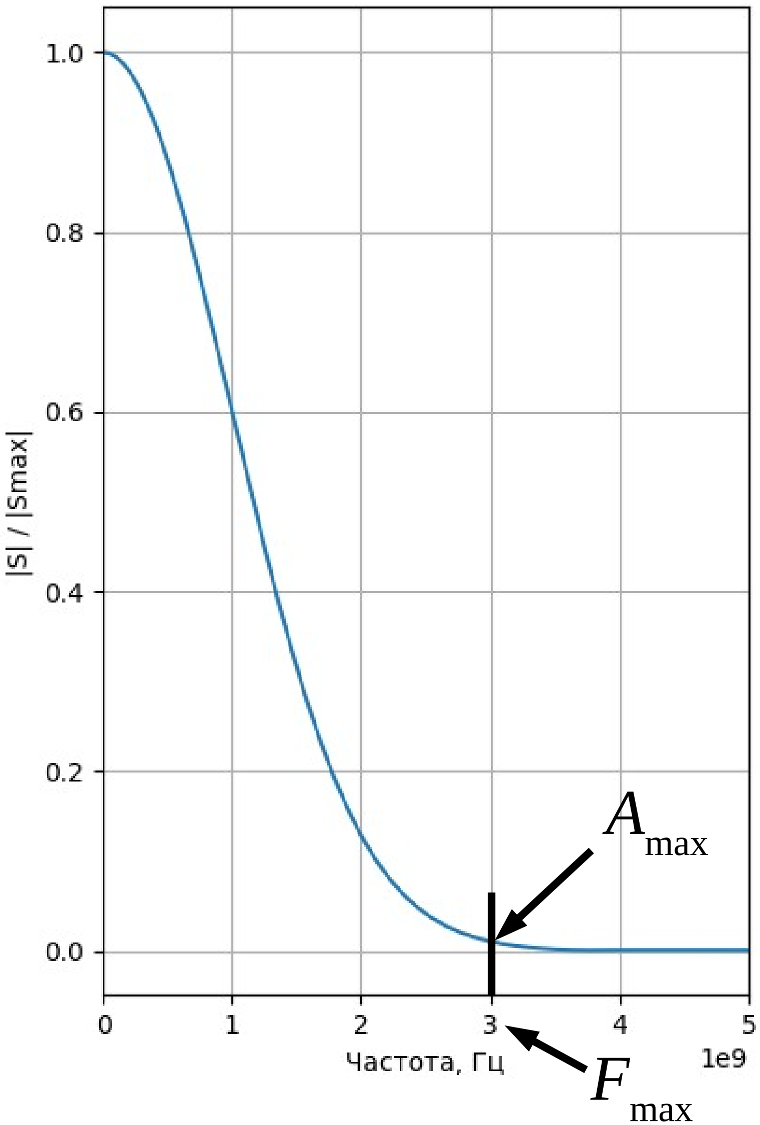
Гауссов импульс

$$f_g(t) = A_m e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$



Спектр гауссова импульса





Спектр гауссова импульса

Если заданы требования к сигналу:

- $A_0 > 1$— уровень ослабления сигнала в момент времени $t = 0$.
- $F_{\max}$ — «максимальная» частота в спектре сигнала.
- $A_{\max} > 1$— уровень ослабления спектра сигнала на частоте $F_{\max}$.

$$f_g(t) = A_m e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$w_g = \frac{\sqrt{\ln\left(A_{\max}\right)}}{\pi F_{\max}}$$

$$d_g = w_g \sqrt{\ln\left(A_0\right)}$$

Демонстрация спектра гауссова импульса

spectrum_gauss.py

Недостатки гауссова импульса

- В спектре присутствует постоянная составляющая.
- Максимальное значение спектра всегда на частоте 0 ГГц.
- Сигнал с постоянной составляющей нельзя излучить.

Уравнение плоской волны для гауссова импульса в дискретном виде

Уравнение плоской волны для гауссова импульса в дискретном виде

$$f[m,q]=e^{-\left(\frac{\left(q-m\sqrt{\varepsilon\mu}/S_c\right)-N_{dg}}{N_{wg}}\right)^2}$$

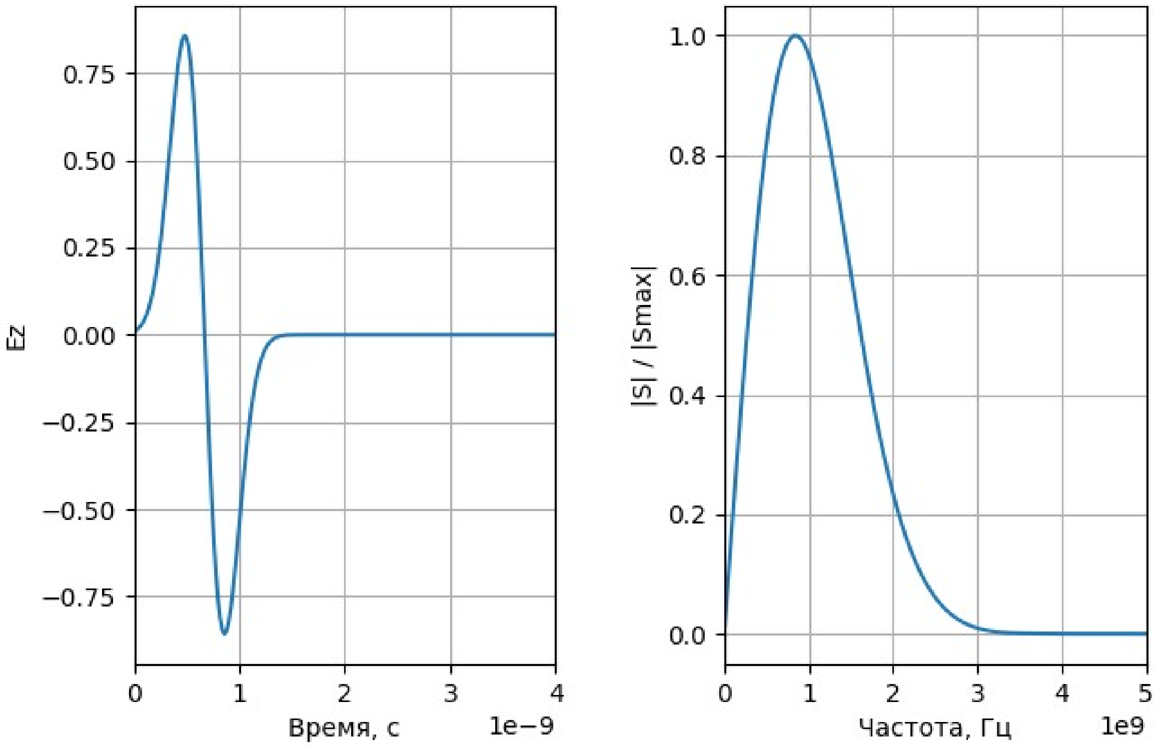
$$N_{wg}=w_g/\Delta_t$$

$$N_{dg}=d_g/\Delta_t$$

Дифференцированный гауссов импульс

Дифференцированный гауссов импульс

$$f_g(t) = -2A_m\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$



Спектр дифференцированного гауссова импульса

Если заданы требования к сигналу:

- $F_{\max}$ — «максимальная» частота в спектре сигнала.
- $A_{\max} > 1$ — уровень ослабления спектра сигнала на частоте $F_{\max}$ и ослабление в момент времени $t = 0$.

$$f_g(t) = -2A_m\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$w_g = \frac{\sqrt{\ln\left(5.5A_{\max}\right)}}{\pi F_{\max}}$$

$$d_g = w_g\sqrt{\ln\left(2.5A_{max}\sqrt{\ln\left(2.5A_{max}\right)}\right)}$$

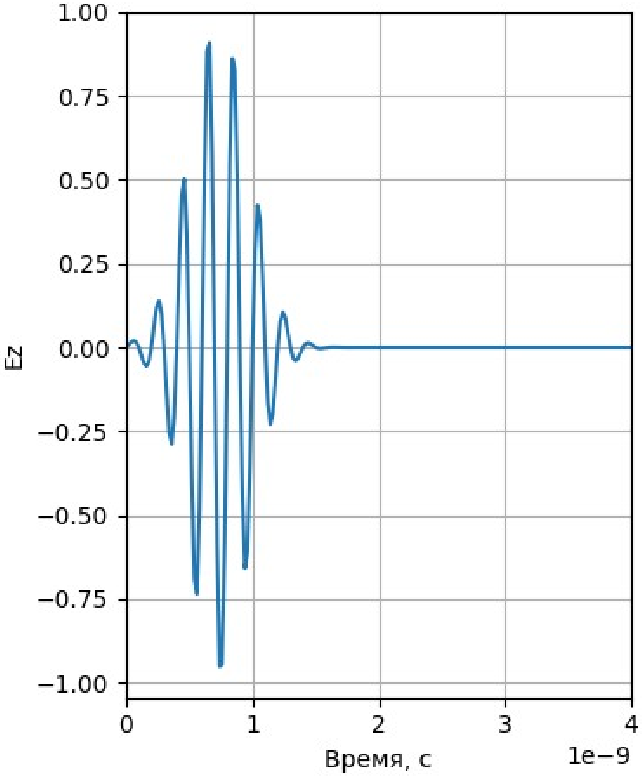
Демонстрация спектра дифференцированного гауссова импульса

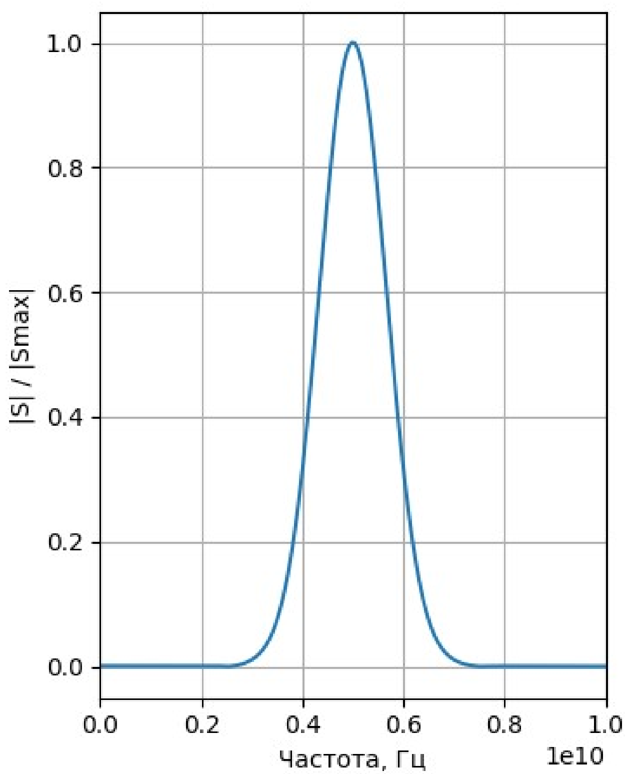
spectrum_gauss_diff.py

Модулированный гауссов импульс

Модулированный гауссов импульс

$$f_g(t) = A_m \sin(2\pi f_0 t) e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$





Спектр модулированного гауссова импульса

Если заданы требования к сигналу:

- f_0 — центральная частота в спектре сигнала.
- $A_{\max} > 1$ — уровень ослабления спектра сигнала на частоте $F_{\max}$.
- A_0 — ослабление огибающей сигнала в момент времени $t = 0$
- ΔF — ширина спектра по уровню ослабления $A_{\max}$.

$$f_g(t) = A_m \sin(2\pi f_0 t)\, e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$w_g = \sqrt{\ln(A_{\max})} / (\pi \Delta F) \qquad d_g = w_g \sqrt{\ln(A_0)}$$

Демонстрация спектра модулированного гауссова импульса

spectrum_gauss_mod.py

Уравнение плоской волны для модулированного гауссова импульса в дискретном виде

Уравнение плоской волны для модулированного гауссова импульса в дискретном виде

$f(\xi)$ — решение волнового уравнения, если:

- $f(\xi)$ дважды дифференцируема
- ξ можно заменить на $t \pm x / v$ (для одномерного случая)

Уравнение плоской волны для модулированного гауссова импульса в дискретном виде

В выражении для модулированного гауссова импульса заменим t на $t \pm x / v$

$$f_g(t) = \sin(2\pi f_0 t) e^{-\left(\frac{t - d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$f_g(t, x) = \sin\left(2\pi f_0\left(t \pm \frac{x\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\right)\right) e^{-\left(\frac{t \pm \frac{x\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} - d_g}{w_g}\right)^2}$$

Уравнение плоской волны для модулированного гауссова импульса в дискретном виде

$$\lambda_0 = N_{\lambda_0} \Delta x, \qquad w_g = N_{wg} \Delta_t, \qquad d_g = N_{dg} \Delta_t,$$

$$\frac{x}{c} = \frac{m \Delta_x}{c} = \frac{m \Delta_t}{S_c},$$

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{N_{\lambda_0} \Delta x} = \frac{S_c}{N_{\lambda_0} \Delta_t}$$

Уравнение плоской волны для модулированного гауссова импульса в дискретном виде

$$f_g[m,q]=\sin\left(\frac{2\pi S_c}{N_{\lambda_0}\Delta_t}\left(q\Delta_t\pm\frac{m\Delta_t\sqrt{\varepsilon\mu}}{S_c}\right)\right)e^{-\left(\frac{q\Delta_t\pm\frac{m\Delta_t\sqrt{\varepsilon\mu}}{S_c}-N_{dg}\Delta_t}{N_{wg}\Delta_t}\right)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$f_g[m,q]=\sin\left(\frac{2\pi}{N_{\lambda_0}}\left(qS_c\pm m\sqrt{\varepsilon\mu}\right)\right)e^{-\left(\frac{q\pm\frac{m\sqrt{\varepsilon\mu}}{S_c}-N_{dg}}{N_{wg}}\right)^2}$$

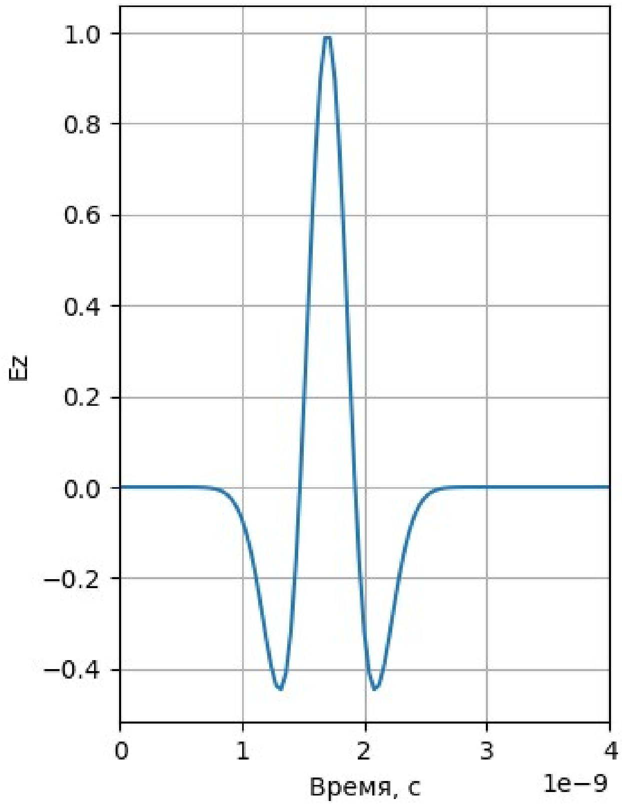
Демонстрация модулированного гауссова импульса при использовании метода Total Field / Scattered Field

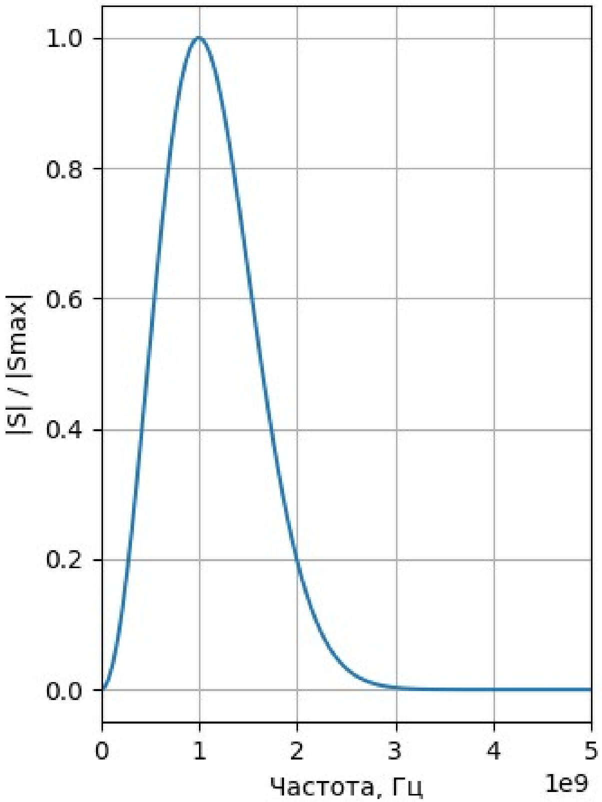
fdtd_tfsf_medium_gauss_mod.py

Вейвлет Рикера

Вейвлет Рикера

$$f_r(t) = \left(1 - 2\{\pi f_p [t - d_r]\}^2\right) e^{-\{\pi f_p [t - d_r]\}^2}$$





Вейвлет Рикера

Если заданы требования к сигналу:

- f_P — «пиковая» частота в спектре сигнала.

$$f_r(t) = \left(1 - 2\{\pi f_p[t - d_r]\}^2\right) e^{-\{\pi f_p[t - d_r]\}^2}$$

$$d_r = M_d \frac{1}{f_p}$$

M_d — коэффициент задержки

Спектр вейвлета Рикера

$$F_r(\omega) = -\frac{2}{f_p\sqrt{\pi}}\left(\frac{\omega}{2\pi f_p}\right)^2 \exp\left(-jd_r\omega - \left(\frac{\omega}{2\pi f_p}\right)^2\right)$$

Вейвлет Рикера в терминах длин волн

$$\lambda_p = N_p \Delta_x, \quad f_p = \frac{c}{\lambda_p} = \frac{c}{N_p \Delta_x}$$

Вейвлет Рикера в терминах длин волн

$$\lambda_p = N_p \Delta_x, \quad f_p = \frac{c}{\lambda_p} = \frac{c}{N_p \Delta_x}$$

$$S_c = \frac{c\,\Delta_t}{\Delta_x} \Rightarrow \Delta_x = \frac{c\,\Delta_t}{S_c}$$

$$f_p = \frac{S_c}{N_p \Delta_t}$$

Вейвлет Рикера
в терминах длин волн

$$f_p = \frac{S_c}{N_p \Delta_t}$$

Тогда задержка может быть представлена как:

$$d_r = M_d \frac{1}{f_p} = M_d \frac{N_p \Delta_t}{S_c}$$

Вейвлет Рикера в дискретном виде

$$f_r[q] = \left(1 - 2\pi^2 \left[\frac{S_c q}{N_p} - M_d\right]^2\right) \exp\left(-\pi^2 \left[\frac{S_c q}{N_p} - M_d\right]^2\right)$$

Демонстрация спектра вейвлета Рикера

spectrum_ricker.py

Уравнение плоской волны для вейвлета Рикера в дискретном виде

Уравнение плоской волны для вейвлета Рикера в дискретном виде

В выражении для вейвлета Рикера заменим t на $t \pm x / c$

$$f_r\left(t \pm \frac{x}{c}\right) = f_r(x, t) = \left(1 - 2\pi^2 f_p^2 \left(t \pm \frac{x}{c} - d_r\right)^2\right) e^{-\pi^2 f_p^2 \left(t \pm \frac{x}{c} - d_r\right)^2}$$

Уравнение плоской волны для вейвлета Рикера в дискретном виде

Запишем предыдущее выражение через число Куранта и длину волны, учитывая, что

$$\frac{x}{c}=\frac{m\Delta_x}{c}=\frac{m\Delta_t}{S_c}, \qquad f_p=\frac{S_c}{N_p\Delta_t}, \qquad d_r=M_d\frac{1}{f_p}=M_d\frac{N_p\Delta_t}{S_c}$$

$$f_r[m,q]=\left(1-2\pi^2\left[\frac{S_c q\pm m}{N_p}-M_d\right]^2\right)e^{-\pi^2\left[\frac{S_c q\pm m}{N_p}-M_d\right]^2}$$

Демонстрация вейвлета Рикера при использовании метода Total Field / Scattered Field

fdtd_tfsf_ricker.py

Уравнение плоской волны для гармонического сигнала в дискретном виде

Гармонический сигнал

$$f_h(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

или в дискретном виде

$$f_h(q\Delta_t) = A\cos(\omega q\Delta_t + \phi_0)$$

Гармонический сигнал в терминах длин волн

Если задана длина волны в виде: $\lambda = N_\lambda \cdot \Delta_x$, то

$$f = \frac{c}{\lambda}, \quad \omega t = \frac{2\pi c}{\lambda} t$$

$$f_h(q\Delta_t) = A\cos\left(\frac{2\pi c}{N_\lambda \Delta_x} q\Delta_t + \phi_0\right)$$

$$f_h[q] = A\cos\left(\frac{2\pi S_c}{N_\lambda} q + \phi_0\right)$$

Уравнение плоской волны в дискретном виде

$$T = \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{c} = \frac{N_{\lambda}\Delta_x}{c}$$

Количество временных шагов на период:

$$\frac{T}{\Delta_t} = \frac{N_{\lambda}\Delta_x}{c\,\Delta_t} = \frac{N_{\lambda}}{S_c}$$

Уравнение плоской волны в дискретном виде

$$f_h(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \phi_0) = A\cos\left(\omega\left(t - \frac{k}{\omega}x\right) + \phi_0\right)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}$$

$$x = m\Delta_x$$

Уравнение плоской волны в дискретном виде

тогда:

$$\omega\left(t-\frac{k}{\omega}x\right)=\frac{2\pi c}{N_\lambda\Delta_x}\left(q\Delta_t-\frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}m\Delta_x\right)$$

Уравнение плоской волны в дискретном виде

тогда:

$$\omega\left(t-\frac{k}{\omega}x\right)=\frac{2\pi c}{N_\lambda \Delta_x}\left(q\Delta_t-\frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}m\Delta_x\right)$$

Вынесем за скобки Δ_x / c

$$\omega\left(t-\frac{k}{\omega}x\right)=\frac{2\pi}{N_\lambda}\left(q\frac{\Delta_t c}{\Delta_x}-\sqrt{\mu\varepsilon}\,m\right)=\frac{2\pi}{N_\lambda}\left(S_c q-\sqrt{\mu\varepsilon}\,m\right)$$

Уравнение плоской волны в дискретном виде

В дискретном виде:

$$f_h[m,q]=A\cos\left(\frac{2\pi}{N_\lambda}\left(S_c q-\sqrt{\mu\varepsilon}\,m\right)+\phi_0\right)$$

Обычно используют:

$$f_h[m,q]=A\sin\left(\frac{2\pi}{N_\lambda}\left(S_c q-\sqrt{\mu\varepsilon}\,m\right)+\phi_0\right)$$

Демонстрация гармонического сигнала при использовании метода Total Field / Scattered Field

fdtd_tfsf_sin.py
fdtd_tfsf_medium_sin.py

Демонстрация стоячей волны

fdtd_tfsf_sin.py
fdtd_swr.py

Программирование источников с использованием объектно-ориентированного подхода

fdtd_sources_oop.py
fdtd_sources_oop_tfsf.py

Численная дисперсия

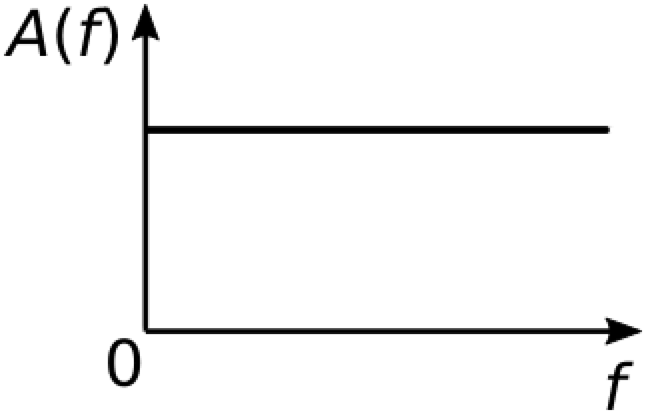
Численная дисперсия

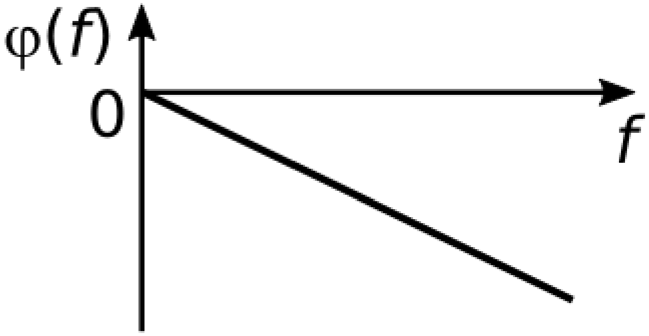
Дисперсия — зависимость фазовой скорости волны от частоты.

$$v_{ф} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega \lambda}{2\pi}$$

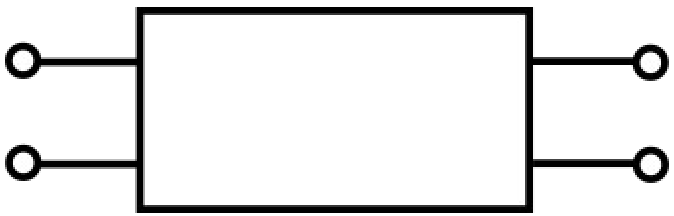
Область пространства как фильтр

Параметры фильтра без дисперсии

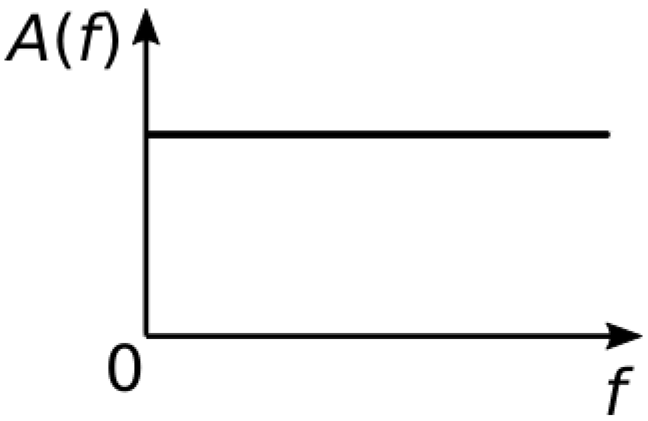


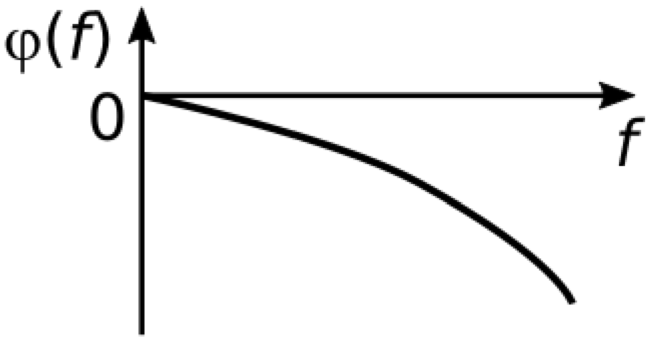


Область пространства как фильтр



Параметры фильтра с дисперсией





Волновое уравнение в одномерном случае

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

Ряд Тейлора

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}+R_n$$

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!},\ x_0<\xi<x$$

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора вблизи точки x_0 со смещением δ справа и слева

$$x = x_0 + \delta \qquad x - x_0 = \delta$$

$$f\left(x_0 + \delta\right) = f\left(x_0\right) + \delta f'\left(x_0\right) + \frac{1}{2!}\delta^2 f''\left(x_0\right) + \frac{1}{3!}\delta^3 f'''\left(x_0\right) + \ldots$$

$$x = x_0 - \delta \qquad x - x_0 = -\delta$$

$$f\left(x_0 - \delta\right) = f\left(x_0\right) - \delta f'\left(x_0\right) + \frac{1}{2!}\delta^2 f''\left(x_0\right) - \frac{1}{3!}\delta^3 f'''\left(x_0\right) + \ldots$$

Расчет второй производной в дискретном виде

Сложим выражения для $f(x + \delta)$ и $f(x - \delta)$

$$f\left(x_0+\delta\right)+f\left(x_0-\delta\right)=2f\left(x_0\right)+\frac{2}{2!}\delta^2 f''\left(x_0\right)+O\left(\delta^4\right)$$

$$\boxed{f''\left(x_0\right)=\frac{f\left(x_0+\delta\right)+f\left(x_0-\delta\right)-2f\left(x_0\right)}{\delta^2}+O\left(\delta^2\right)}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}\right|_{m,q} = \frac{E_z^q[m+1] + E_z^q[m-1] - 2E_z^q[m]}{(\Delta_x)^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}\right|_{m,q} = \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^{q-1}[m] - 2E_z^q[m]}{(\Delta_t)^2}$$

Подставляем выражения для вторых производных
в волновое уравнение

$$\frac{E_z^q[m+1]+E_z^q[m-1]-2E_z^q[m]}{(\Delta_x)^2}-\frac{1}{v^2}\frac{E_z^{q+1}[m]+E_z^{q-1}[m]-2E_z^q[m]}{(\Delta_t)^2}=0$$

Выражаем $E_z^{q+1}[m]$

$$\boxed{E_z^{q+1}[m]=\frac{v^2(\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2}\left(E_z^q[m+1]+E_z^q[m-1]-2E_z^q[m]\right)-E_z^{q-1}[m]+2E_z^q[m]}$$

Пусть E_z^q — плоская волна с гармоническим колебанием

$$E_z^q[m] = e^{j\left(\omega q\,\Delta_t - \dot{\tilde{k}}\,m\,\Delta_x\right)}$$

$\dot{\tilde{k}} = k' + j\,k''$ — комплексное волновое число в дискретном пространстве

Подставляем $E_z^q[m]$ в выражение с предыдущего слайда

$$E_z^{q+1}[m]=\frac{v^2(\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2}\left(E_z^q[m+1]+E_z^q[m-1]-2E_z^q[m]\right)-E_z^{q-1}[m]+2E_z^q[m]$$

$$e^{j(\omega(q+1)\Delta_t-\dot{\tilde{k}}m\Delta_x)}=\frac{v^2(\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2}\Big[e^{j(\omega q\Delta_t-\dot{\tilde{k}}(m+1)\Delta_x)}+$$

$$+e^{j(\omega q\Delta_t-\dot{\tilde{k}}(m-1)\Delta_x)}-2e^{j(\omega q\Delta_t-\dot{\tilde{k}}m\Delta_x)}\Big]-$$

$$-e^{j(\omega(q-1)\Delta_t-\dot{\tilde{k}}m\Delta_x)}+2e^{j(\omega q\Delta_t-\dot{\tilde{k}}m\Delta_x)}$$

Делим обе части выражения на $e^{j(\omega q \Delta_t - \dot{\tilde{k}} m \Delta_x)}$

$$e^{j\omega\Delta_t} = \frac{v^2 (\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2} \left(e^{-j\dot{\tilde{k}}\Delta_x} + e^{j\dot{\tilde{k}}\Delta_x} - 2 \right) - e^{-j\omega\Delta_t} + 2$$

Перепишем предыдущее выражение в следующем виде:

$$\frac{e^{j\omega\Delta_t}+e^{-j\omega\Delta_t}}{2}=\frac{v^2\left(\Delta_t\right)^2}{\left(\Delta_x\right)^2}\left(\frac{e^{-j\dot{\tilde{k}}\Delta_x}+e^{j\dot{\tilde{k}}\Delta_x}}{2}-1\right)+1$$

Перепишем предыдущее выражение в следующем виде:

$$\frac{e^{j\omega\Delta_t}+e^{-j\omega\Delta_t}}{2}=\frac{v^2(\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2}\left(\frac{e^{-j\dot{\tilde{k}}\Delta_x}+e^{j\dot{\tilde{k}}\Delta_x}}{2}-1\right)+1$$

Применим формулу Эйлера:

$$\cos u = \frac{e^{ju} + e^{-ju}}{2}$$

$$\cos(\omega \Delta_t) = \frac{v^2 (\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2} \left(\cos(\dot{\tilde{k}} \Delta_x) - 1 \right) + 1$$

Комплексное волновое число в дискретном пространстве

$$\boxed{\dot{\tilde{k}} = \frac{1}{\Delta_x} \arccos\left(\left(\frac{\Delta_x}{v\,\Delta_t} \right)^2 \left(\cos(\omega\,\Delta_t) - 1 \right) + 1 \right)}$$

$v_ф = \dfrac{\omega}{k}$ — фазовая скорость

Частный случай: $\Delta_x \to 0$, $\Delta_t \to 0$

Используем разложение функции cos(u) в ряд Маклорена:

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{(2n)}}{(2n)!}$$

Для малого u будем считать, что

$$\cos u \approx 1 - \frac{u^2}{2!}$$

Частный случай: $\Delta_x \to 0, \Delta_t \to 0$

$$\dot{\tilde{k}} = \frac{1}{\Delta_x} \arccos\left(\left(\frac{\Delta_x}{v\,\Delta_t} \right)^2 \left(\cos(\omega\,\Delta_t) - 1 \right) + 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta_x} \arccos\left(\left(\frac{\Delta_x}{v\,\Delta_t} \right)^2 \left(1 - \frac{(\omega\,\Delta_t)^2}{2} - 1 \right) + 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta_x} \arccos\left(1 - \frac{(\Delta_x)^2}{2} \frac{\omega^2}{v^2} \right) = \frac{1}{\Delta_x} \arccos\left(1 - \frac{1}{2} (k\,\Delta_x)^2 \right)$$

k^2

Частный случай: $\Delta_x \to 0, \Delta_t \to 0$

Для малого Δ_x :

$$1 - \frac{(k\Delta_x)^2}{2} \approx \cos(k\Delta_x)$$

$$\dot{\tilde{k}} = \frac{1}{\Delta_x} \arccos(\cos(k\Delta_x)) = k$$

$\boxed{\text{Нет численной дисперсии}}$

Частный случай: «Магический» шаг по времени

Если $\boxed{\Delta_t = \dfrac{\Delta_x}{v}}$ или $\boxed{v\dfrac{\Delta_t}{\Delta_x} = 1}$

$$\dot{\tilde{k}} = \frac{1}{\Delta_x}\arccos\left(\left(\frac{\Delta_x}{v\,\Delta_t}\right)^2\left(\cos(\omega\,\Delta_t) - 1\right) + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta_x}\arccos\left(\cos(\omega\,\Delta_t) - 1 + 1\right) = \frac{\omega\,\Delta_t}{\Delta_x} = \frac{\omega}{v} = k$$

Нет численной дисперсии

Численная дисперсия

$$\tilde{c} = c \frac{\pi \sqrt{\varepsilon \mu}}{N_\lambda \arcsin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{S_c} \sin\left(\frac{\pi S_c}{N_\lambda} \right) \right)}$$

$\tilde{c}$ – скорость распространения волны в дискретном пространстве

N_λ – Количество ячеек сетки на длину волны

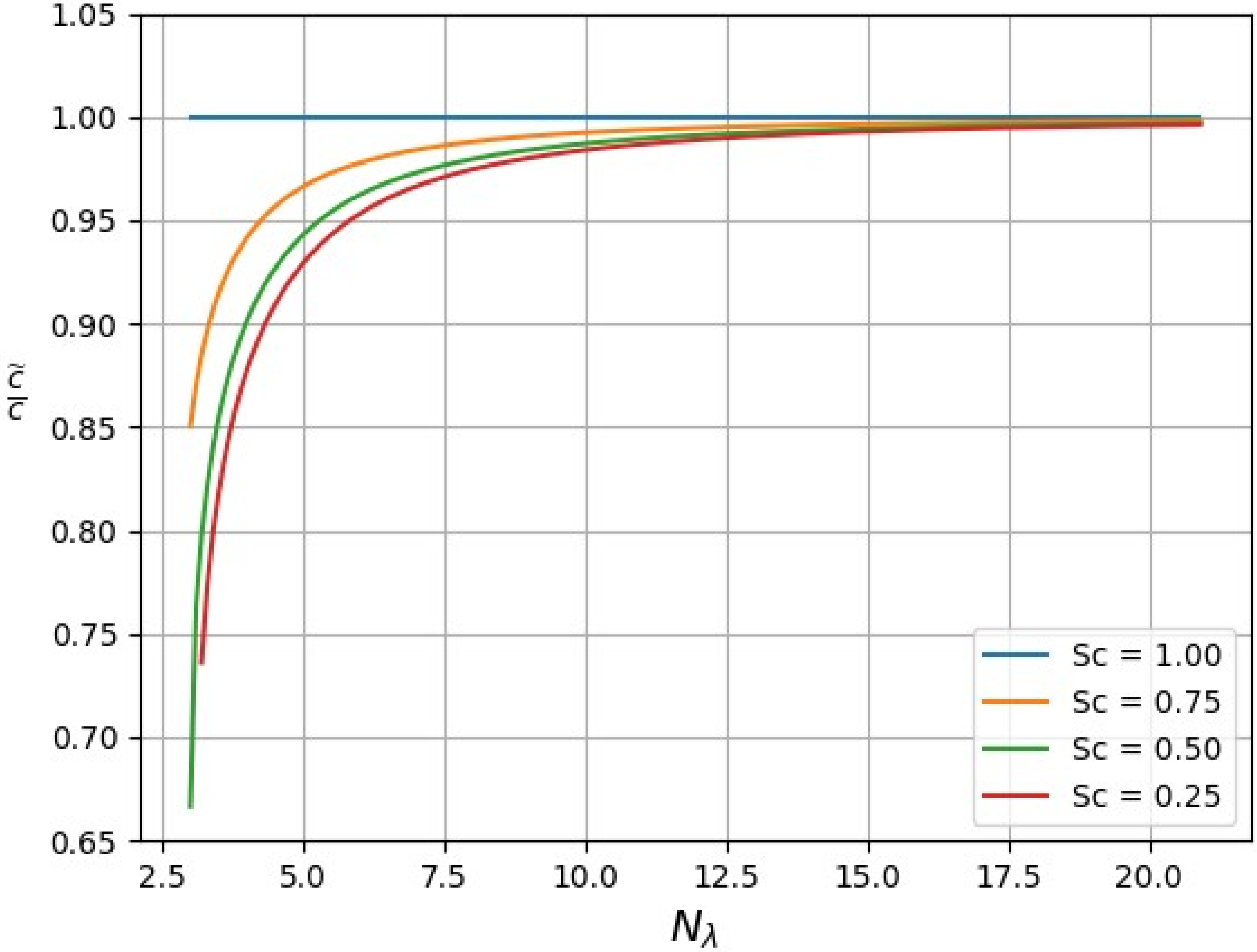
Численная дисперсия

Если Sc = 1, $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$

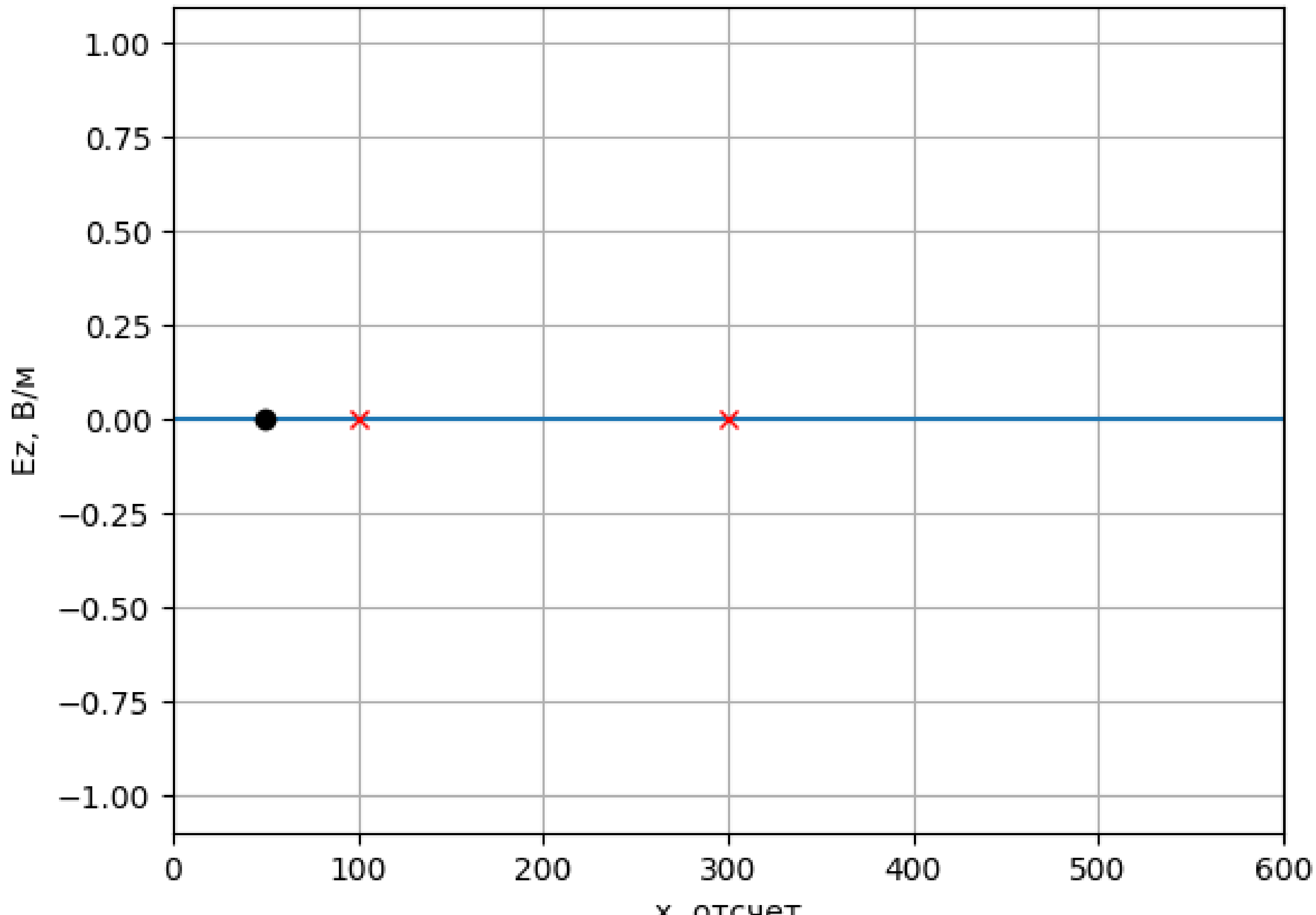
$$\tilde{c} = c\frac{\pi}{N_\lambda \arcsin\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{N_\lambda}\right)\right)} = \frac{c\,\pi\,N_\lambda}{N_\lambda\,\pi} = c$$

$$\boxed{\text{Нет численной дисперсии}}$$

Анализ численной дисперсии (dispersion.py)



Анализ численной дисперсии (fdtd_dispersion_vacuum.py)



Расчет фазовой скорости по фазовому спектру сигнала (fdtd_dispersion.py)

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega \lambda}{2\pi} = \frac{\omega d}{\Delta_\varphi} = \frac{\omega N_d \Delta_x}{\Delta_\varphi}$$

d — расстояние между датчиками, м

N_d — расстояние между датчиками, отсчет

Δ_φ — разность фаз на круговой частоте ω, рад

$$\omega = 2\pi f = 2\pi n \Delta f = \frac{2\pi n}{N_s \Delta_t}$$

n — номер отсчета в спектре сигнала

N_s — количество отсчетов в зарегистрированном сигнале

Расчет фазовой скорости по фазовому спектру сигнала (fdtd_dispersion.py)

$$v_{\phi}=\frac{2\pi n N_d \Delta_x}{N_s \Delta_t \Delta_{\varphi}}=\frac{2\pi n N_d c}{N_s \Delta_{\varphi} S_c}$$

Коэффициенты отражения и прохождения

Для границы раздела двух диэлектриков
$\mu = 1$

Коэффициент прохождения:

$$T = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}}$$

Коэффициент отражения:

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}}$$

Коэффициенты прохождения и отражения в дискретном пространстве

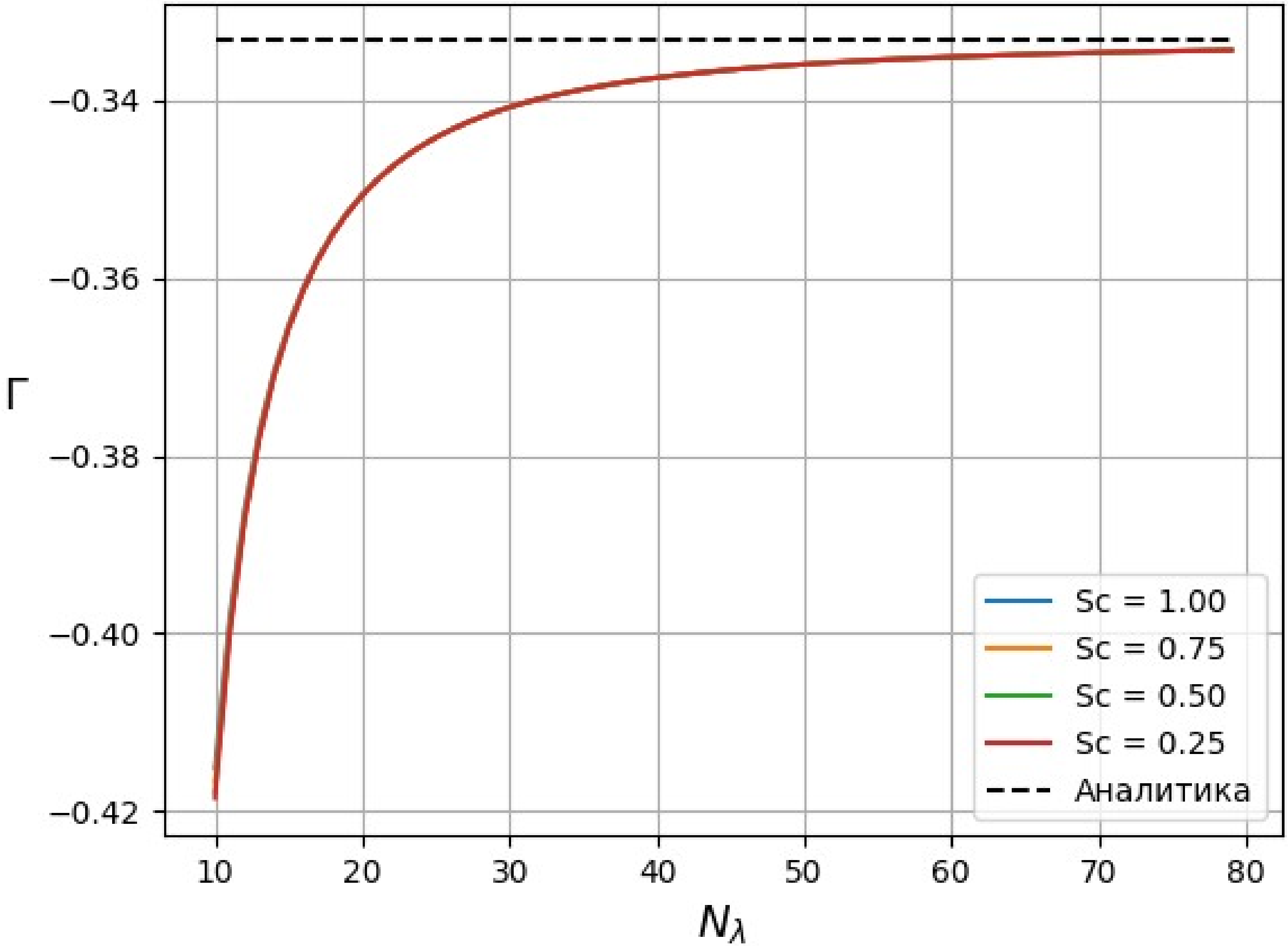
$$\widetilde{T}=\frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\left(\frac{\widetilde{\beta_1}\Delta_x}{2}\right)}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\left(\frac{\widetilde{\beta_2}\Delta_x}{2}\right)+\sqrt{\varepsilon_2}\cos\left(\frac{\widetilde{\beta_1}\Delta_x}{2}\right)}$$

$$\widetilde{\Gamma}=\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\left(\frac{\widetilde{\beta_2}\Delta_x}{2}\right)-\sqrt{\varepsilon_2}\cos\left(\frac{\widetilde{\beta_1}\Delta_x}{2}\right)}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\left(\frac{\widetilde{\beta_2}\Delta_x}{2}\right)+\sqrt{\varepsilon_2}\cos\left(\frac{\widetilde{\beta_1}\Delta_x}{2}\right)}$$

где

$$\frac{\widetilde{\beta_i}\Delta_x}{2}=\arcsin\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_i\mu_i}}{S_c}\sin\left(\frac{\pi S_c}{N_\lambda}\right)\right)$$

Коэффициент прохождения в дискретном пространстве (reflection_error.py)



Использование неравномерной сетки разбиения по пространству

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$=H_y^{q-1/2}[m+1/2]+\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\underline{\Delta_x[m+1/2]}}\left(E_z^q[m+1]-E_z^q[m]\right)$$

$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$=E_z^q[m]+\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\underline{\Delta_x[m]}}\left(H_y^{q+1/2}[m+1/2]-H_y^{q+1/2}[m-1/2]\right)$$

Использование неравномерной сетки разбиения по пространству

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$=H_y^{q-1/2}[m+1/2]+\left(E_z^q[m+1]-E_z^q[m]\right)\frac{1}{\mu W_0}\underline{S_c[m+1/2]}$$

$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$=E_z^q[m]+\left(H_y^{q+1/2}[m+1/2]-H_y^{q+1/2}[m-1/2]\right)\frac{W_0}{\varepsilon}\underline{S_c[m]}$$

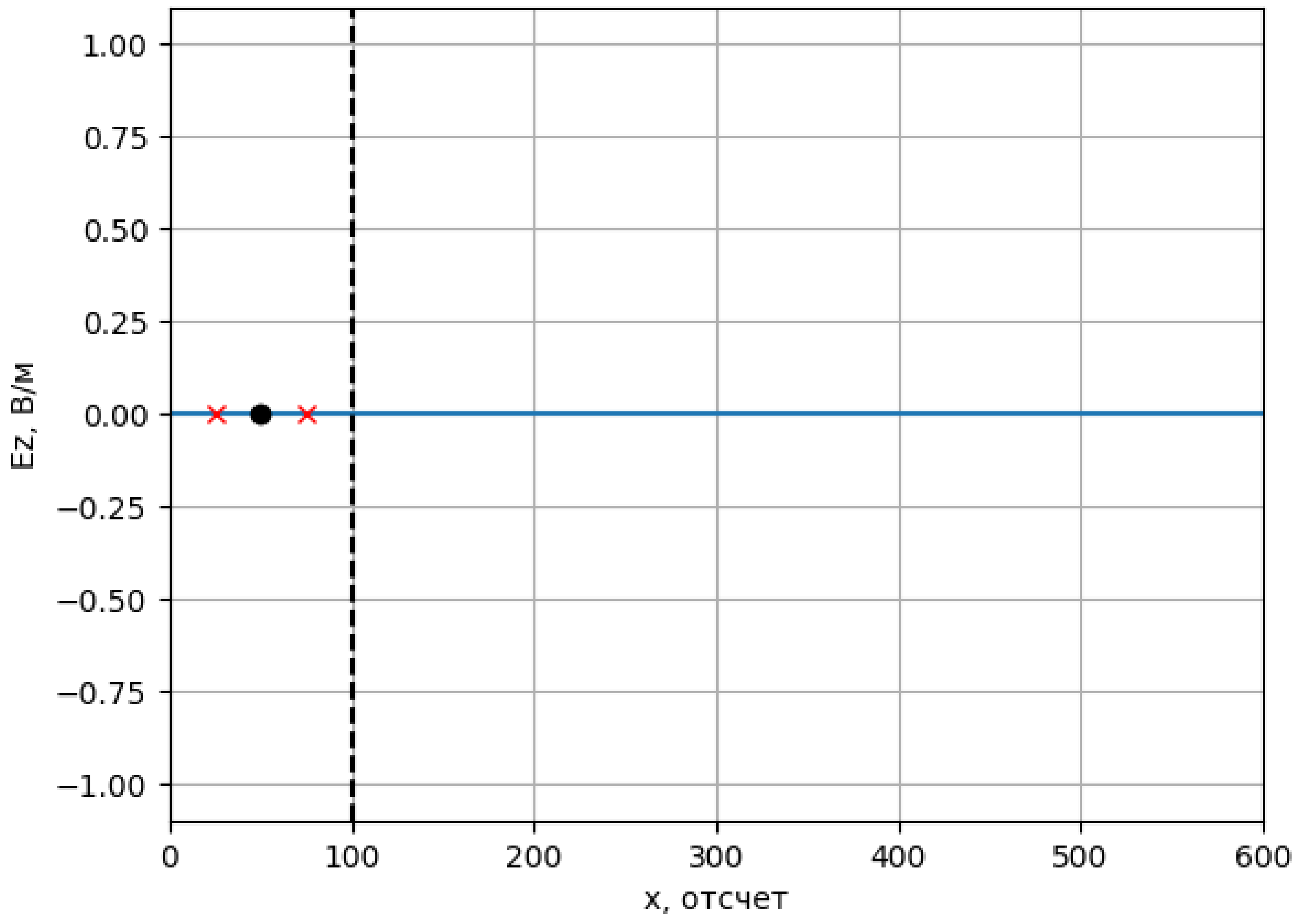
Использование неравномерной сетки разбиения по пространству

$$v \frac{\Delta_t}{\Delta_x} \leqslant 1 \qquad \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{\Delta_t}{\Delta_x} \leqslant 1$$

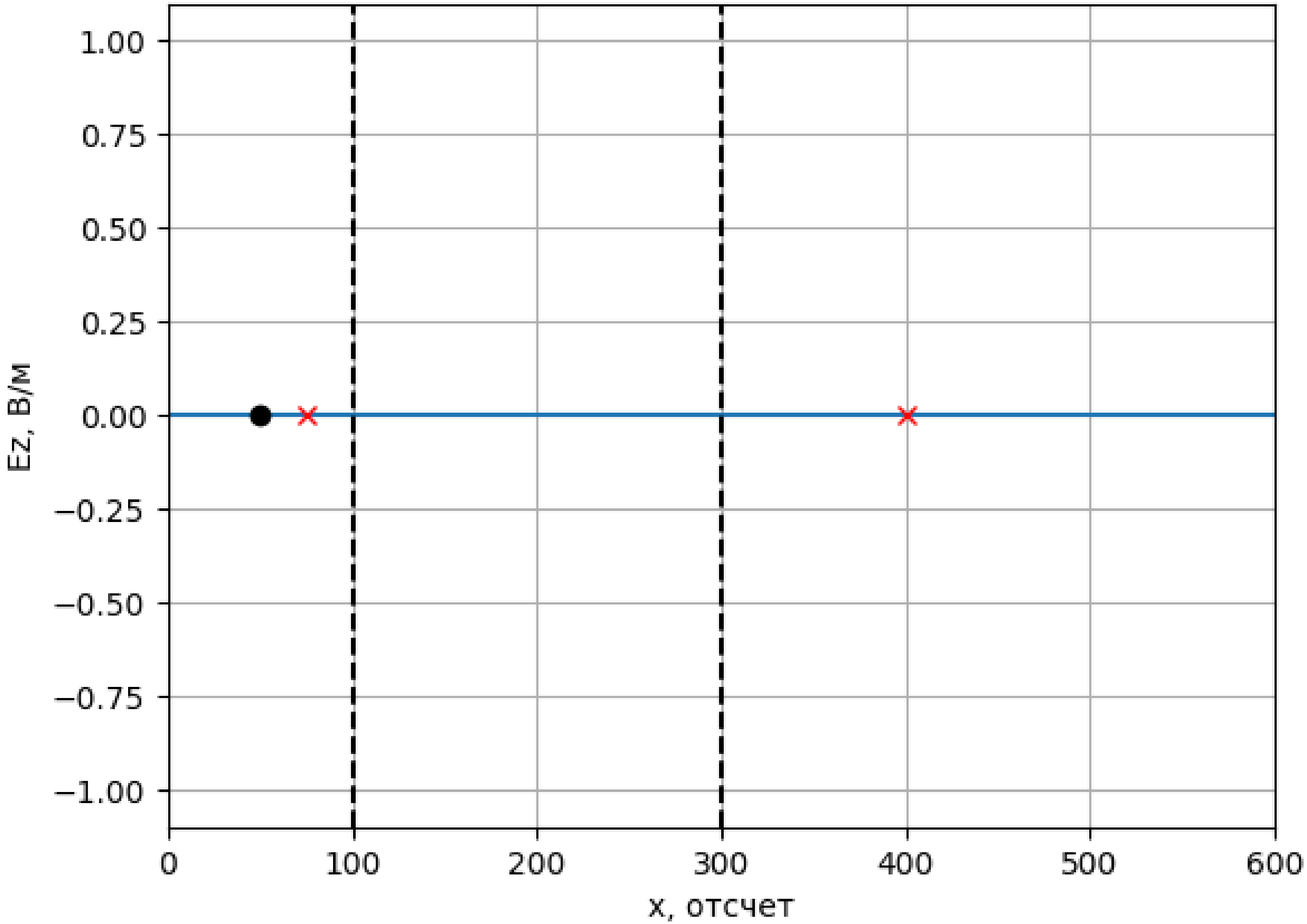
$$\frac{S'_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \leqslant 1$$

$$\boxed{S'_c \leqslant \sqrt{\varepsilon\mu}}$$

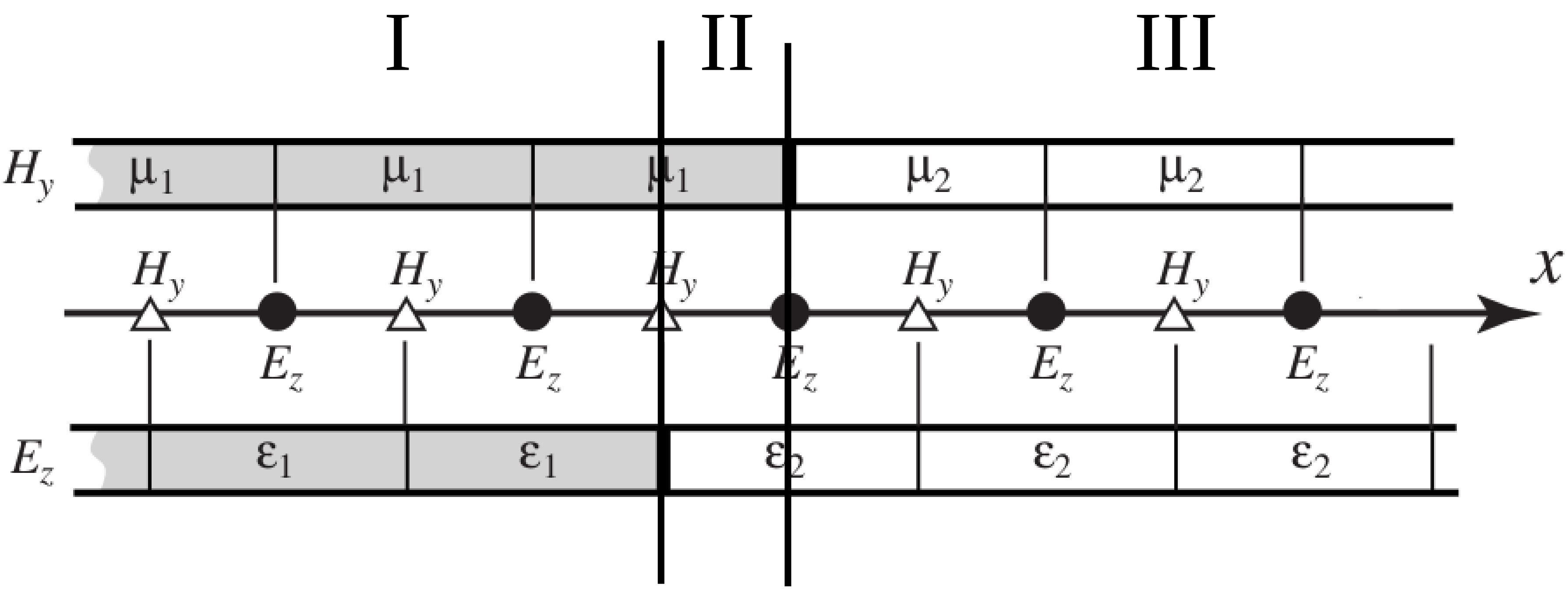
Пример использования неравномерной сетки пространственного разбиения (fdtd_heterogen_sc.py)



Пример использования неравномерной сетки пространственного разбиения (fdtd_heterogen_sc_layer.py)



Проблемы из-за смещенной сетки

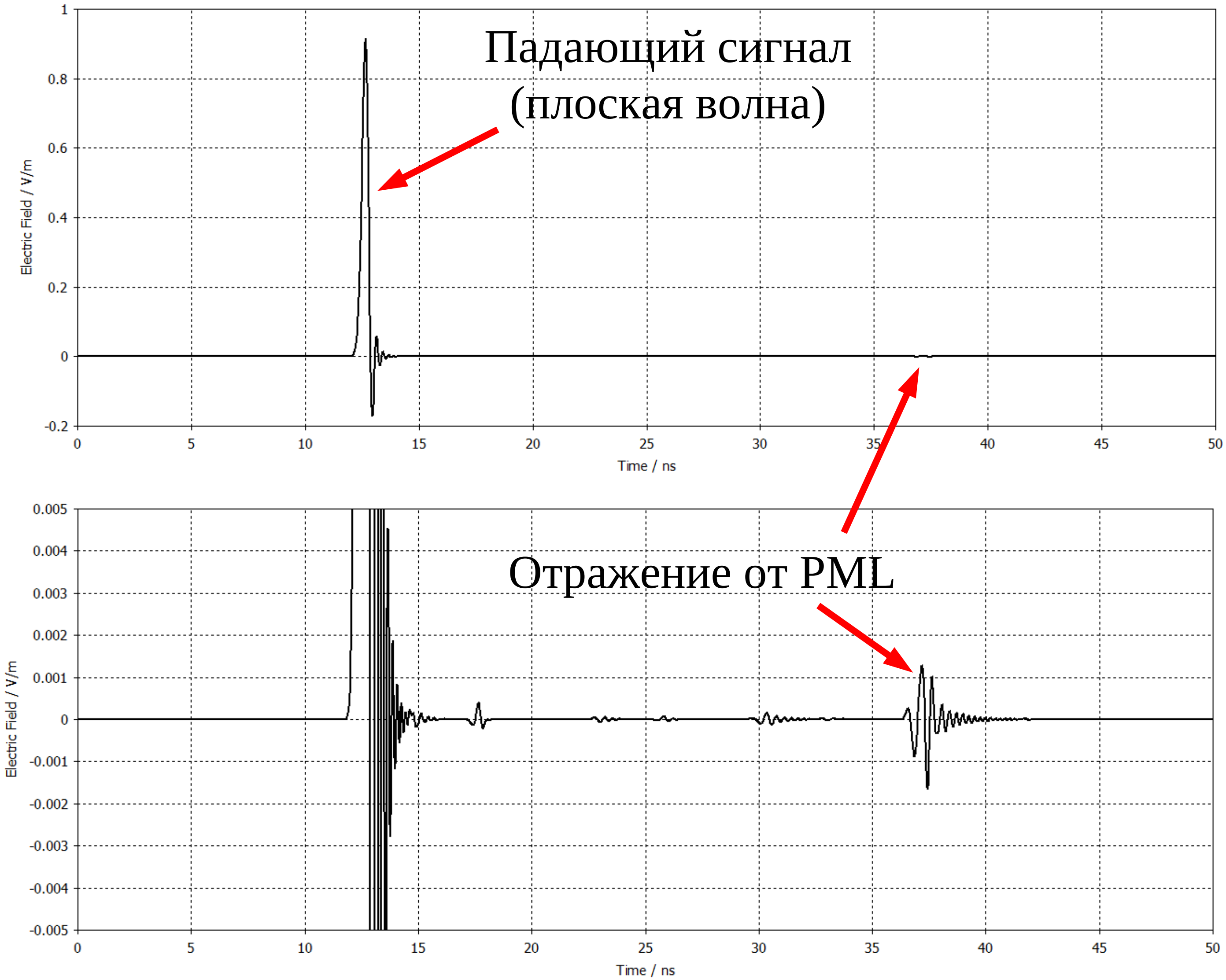


Погрешности метода FDTD

Источники погрешностей метода FDTD

- Численная дисперсия.
- Отражение от границ области моделирования.
- Ступенчатая аппроксимация границ объектов.
- Численный шум.
- Постоянная составляющая тока может создавать остаточные электрические заряды (емкость ячеек сетки).

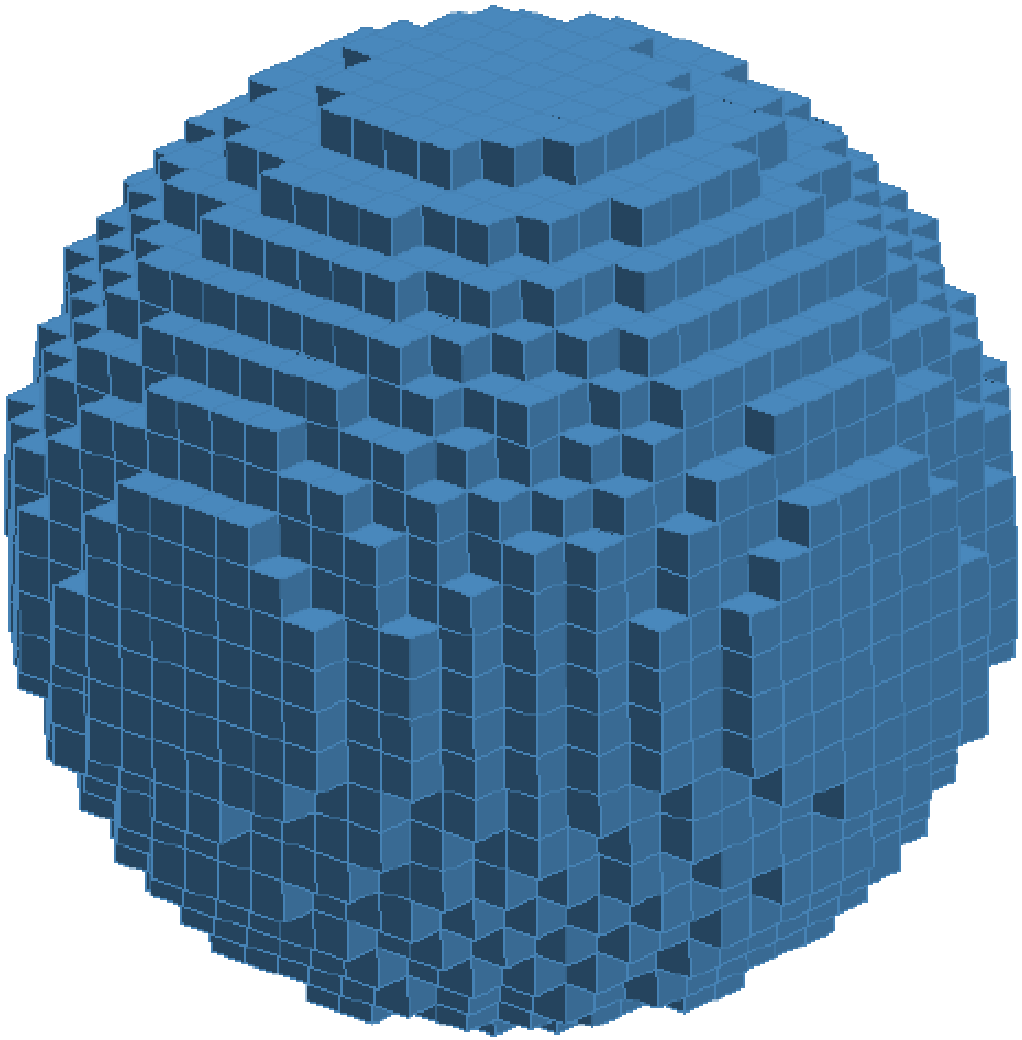
Отражение от границ области моделирования



Источники погрешностей метода FDTD

- Численная дисперсия.
- Отражение от границ области моделирования.
- Ступенчатая аппроксимация границ объектов.
- Численный шум.
- Постоянная составляющая тока может создавать остаточные электрические заряды (емкость ячеек сетки).

Ступенчатая аппроксимация границ объектов



Источники погрешностей метода FDTD

- Численная дисперсия.
- Отражение от границ области моделирования.
- Ступенчатая аппроксимация границ объектов.
- Численный шум.
- Постоянная составляющая тока может создавать остаточные электрические заряды (емкость ячеек сетки).

Модификации метода FDTD

- Метод FDTD в криволинейных системах координат.
- Уменьшение отражений от границ области моделирования.
- Использование неравномерных сеток разбиения.
- Использование ячеек неправильной формы.
- Учет временной дисперсии среды.
- Учет зависимости параметров среды от частоты.
- Метод FDTD с произвольным шагом по времени.

Двумерный метод конечных разностей во временной области

Закон Фарадея

$$-\sigma_m \mathbf{H} - \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x_0} & \mathbf{y_0} & \mathbf{z_0} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \mathbf{x_0} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \mathbf{y_0} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{z_0} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

Закон Ампера

$$\sigma\mathbf{E}+\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\nabla\times\mathbf{H}=$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{x_0} & \mathbf{y_0} & \mathbf{z_0}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0\\ H_x & H_y & H_z\end{vmatrix}=\mathbf{x_0}\frac{\partial H_z}{\partial y}-\mathbf{y_0}\frac{\partial H_z}{\partial x}+\mathbf{z_0}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)$$

Законы Фарадея и Ампера в скалярном виде

$$-\sigma_m H_x - \mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$\sigma_m H_y + \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$-\sigma_m H_z - \mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

$$\sigma E_x + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$\sigma E_y + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$\sigma E_z + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

Законы Фарадея и Ампера в скалярном виде

$$-\sigma_m H_x - \mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$\sigma_m H_y + \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$-\sigma_m H_z - \mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

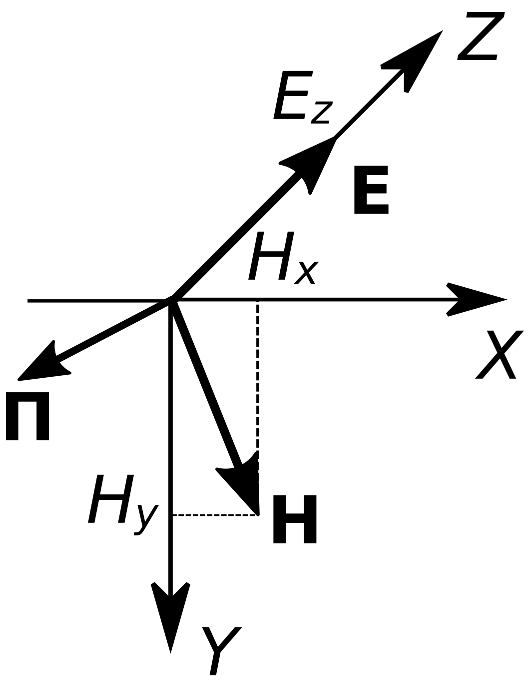
$$\sigma E_x + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$\sigma E_y + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

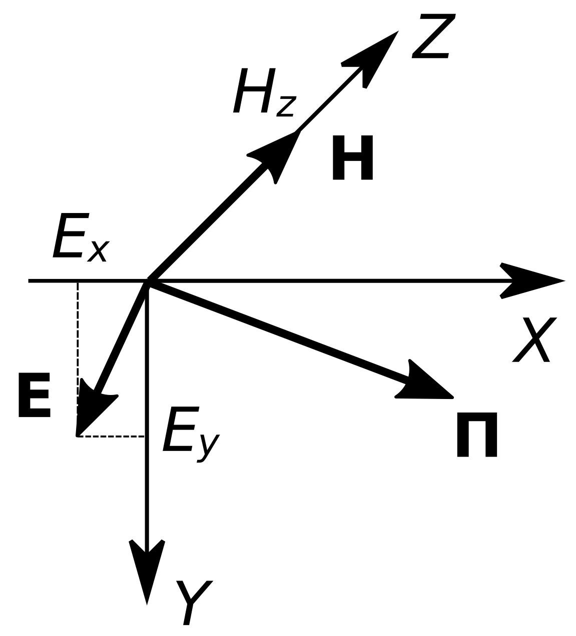
$$\sigma E_z + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

Виды поляризации для двумерного случая

TM^z



TE^z

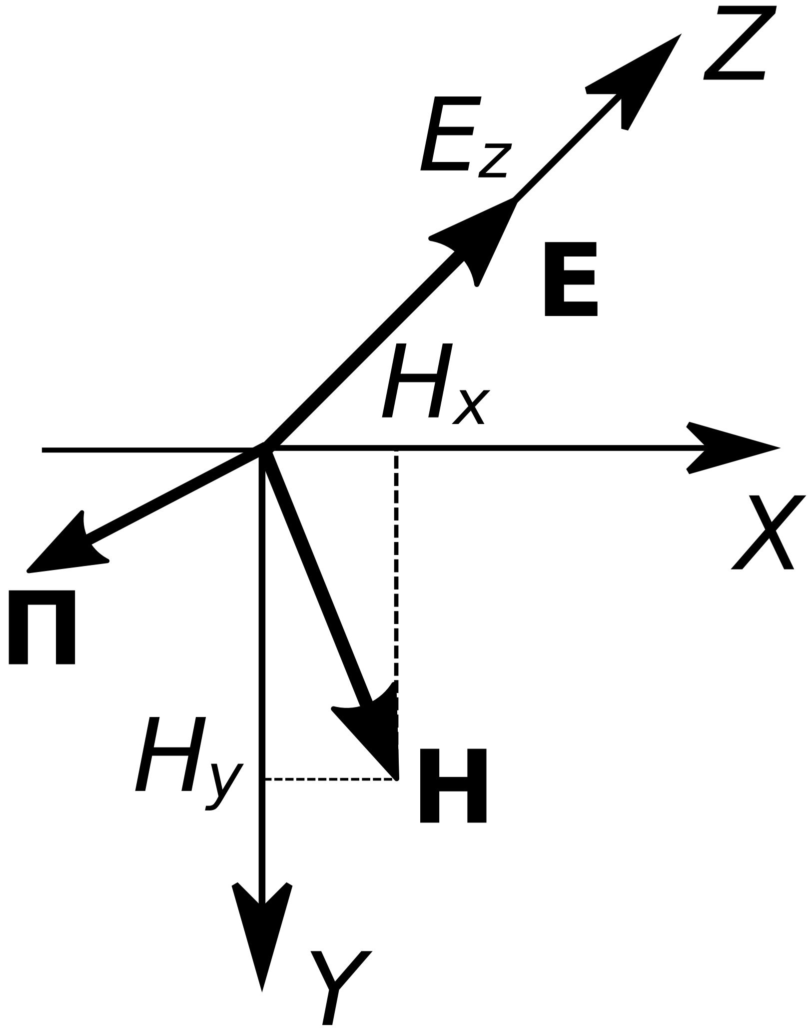


Виды мод электромагнитной волны

- TM - Transverse magnetic — Поперечно-магнитная волна. Нет магнитной составляющей в указанном направлении (E-волна).
- TE - Transverse electric — Поперечно-электрическая волна. нет электрической составляющей в указанном направлении (H-волна).
- TEM - Transverse electromagnetic — Поперечно-электромагнитная волна. нет электрической и магнитной составляющих в указанном направлении.
- Гибридные — есть и электрическая, и магнитная составляющие в указанном направлении.

Двумерный метод конечных разностей во временной области для поляризации TM^z

Поляризация TM^z



Существуют следующие компоненты ЭМ поля:

- E_z
- H_x
- H_y

Метод FDTD для поляризации TM^z. Законы Фарадея и Ампера в скалярном виде

$$-\sigma_m H_x - \mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$\sigma_m H_y + \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\sigma E_z + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

Дискретизация величин E и H

$$H_x(x,y,t) = H_x(m\Delta_x, n\Delta_y, q\Delta_t) = H_x^q[m,n]$$

$$H_y(x,y,t) = H_y(m\Delta_x, n\Delta_y, q\Delta_t) = H_y^q[m,n]$$

$$E_z(x,y,t) = E_z(m\Delta_x, n\Delta_y, q\Delta_t) = E_z^q[m,n]$$

m — индекс по пространству вдоль оси X.
n — индекс по пространству вдоль оси Y.
q — индекс по времени.

Δ_x, Δ_y — размер сетки по осям X и Y соответственно.

Конечно-разностная аппроксимация для закона Фарадея

Запишем конечно-разностную аппроксимацию для точки $(m\Delta_x, (n + 1/2)\Delta_y, q\Delta_t)$

$$-\sigma_m \frac{H_x^{q+1/2}[m,n+1/2]+H_x^{q-1/2}[m,n+1/2]}{2}-$$

$$-\mu\mu_0 \frac{H_x^{q+1/2}[m,n+1/2]+H_x^{q-1/2}[m,n+1/2]}{\Delta_t}=$$

$$=\frac{E_z^{q}[m,n+1]-E_z^{q}[m,n]}{\Delta_y}$$

Конечно-разностная аппроксимация для закона Фарадея

Из полученного уравнения выражаем $H_x^{q+1/2}[m, n+1/2]$:

$$H_x^{q+1/2}[m,n+1/2]=\frac{1-\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}H_x^{q-1/2}[m,n+1/2]-$$

$$-\frac{1}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_y}\left(E_z^q[m,n+1]-E_z^q[m,n]\right)$$

Конечно-разностная аппроксимация для закона Фарадея

Подобным образом выражаем $H_y^{q+1/2}[m+1/2, n]$:

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2,n] = \frac{1-\dfrac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1+\dfrac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} H_y^{q-1/2}[m+1/2,n] +$$

$$+\frac{1}{1+\dfrac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \Delta_x}\left(E_z^q[m+1,n] - E_z^q[m,n]\right)$$

Конечно-разностная аппроксимация для закона Ампера

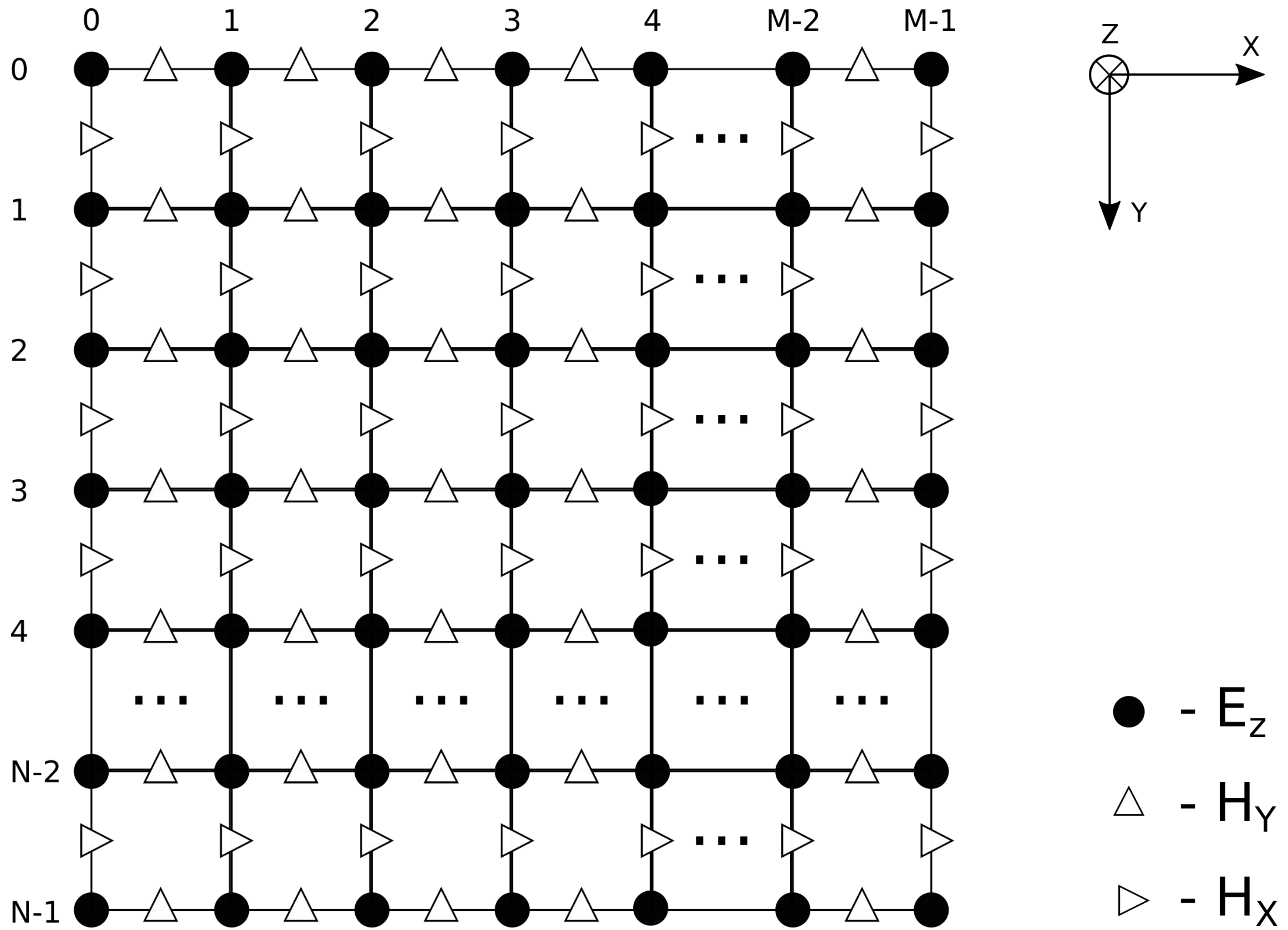
Подобным образом выражаем $E_z^{q+1}[m, n]$ из закона Ампера:

$$E_z^{q+1}[m,n] = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}} E_z^q[m,n] +$$

$$+ \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}} \left(\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0 \Delta_x} \left\{ H_y^{q+1/2}[m+1/2,n] - H_y^{q+1/2}[m-1/2,n] \right\} - \right.$$

$$\left. - \frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0 \Delta_y} \left\{ H_x^{q+1/2}[m,n+1/2] - H_x^{q+1/2}[m,n-1/2] \right\} \right)$$

Пространственная сетка для двумерного метода FDTD. Поляризация TM^z



Особенности реализации двумерного метода FDTD

- Размер массива для компоненты E_z — $M \times N$
- Размер массива для компоненты H_x — $M \times (N - 1)$
- Размер массива для компоненты H_y — $(M - 1) \times N$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{hxh}(m,n+1/2)=\left.\frac{1-\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}\right|_{m\delta,(n+1/2)\delta}$$

$$C_{hxe}(m,n+1/2)=\left.\frac{1}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\delta}\right|_{m\delta,(n+1/2)\delta}$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{hyh}(m+1/2,n)=\left.\frac{1-\dfrac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1+\dfrac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}\right|_{(m+1/2)\delta,\,n\delta}$$

$$C_{hye}(m+1/2,n)=\left.\frac{1}{1+\dfrac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}\,\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\delta}\right|_{(m+1/2)\delta,\,n\delta}$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{eze}(m,n) = \left.\frac{1 - \dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}{1 + \dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}\right|_{m\delta,n\delta}$$

$$C_{ezh}(m,n) = \left.\frac{1}{1 + \dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\delta}\right|_{m\delta,n\delta}$$

Программная реализация конечно-разностной схемы

```
Hx[m, n] = Chxh[m, n] * Hx[m, n] –
            Chxe[m, n] * (Ez[m, n + 1] – Ez[m, n])

Hy[m, n] = Chyh[m, n] * Hy[m, n] +
            Chye[m, n] * (Ez[m + 1, n] – Ez[m, n])

Ez[m, n] = Ceze[m, n] * Ez[m, n] +
            Cezh[m, n] * (Hy[m, n] – Hy[m – 1, n])–
            (Hx[m, n] – Hx[m, n – 1])
```

Стабильность двумерного метода FDTD

Критерий устойчивости Куранта-Фридриха-Леви

$$v_{max}\Delta_t \leqslant \frac{1}{\sqrt{\Delta_x^{-2}+\Delta_y^{-2}+\Delta_z^{-2}}}$$

$$v_{max} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{min}\mu_{min}}}$$

$$\text{Если}\ \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \Delta$$

$$v_{max}\Delta_t \leqslant \frac{\Delta}{\sqrt{N}}$$

N — размерность пространства (1, 2, 3)

Стабильность двумерного метода FDTD

Критерий стабильности для одномерного пространства:

$$S_c = \frac{v\,\Delta_t}{\Delta_x} \leq 1$$

Стабильность двумерного метода FDTD

Критерий стабильности для одномерного пространства:

$$S_c = \frac{v\Delta_t}{\Delta_x} \leq 1$$

Критерий стабильности для N-мерного пространства:

$$S_c = v\Delta_t \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\Delta_n^2}} \leq 1$$

Стабильность двумерного метода FDTD

Критерий стабильности для одномерного пространства:

$$S_c = \frac{v\Delta_t}{\Delta_x} \leq 1$$

Критерий стабильности для N-мерного пространства:

$$S_c = v\Delta_t \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\Delta_n^2}} \leq 1$$

Критерий стабильности для двумерного пространства:

$$S_c = v\Delta_t \sqrt{\frac{1}{\Delta_x^2} + \frac{1}{\Delta_y^2}} \leq 1$$

Стабильность двумерного метода FDTD

Если $\Delta_x = \Delta_y = \boldsymbol{\Delta}$, то

$$S_c = v\,\Delta_t \sqrt{\frac{1}{\Delta^2} + \frac{1}{\Delta^2}} \le 1 \quad \rightarrow \quad S_c = \frac{v\,\Delta_t \sqrt{2}}{\Delta} \le 1$$

Критерий стабильности для N-мерного пространства:

$$S_c = \frac{v\,\Delta_t \sqrt{N}}{\Delta} \le 1$$

или

$$S_c = \frac{v\,\Delta_t}{\Delta} \le \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Стабильность двумерного метода FDTD

Введем коэффициент — аналог одномерного числа Куранта для двумерного случая

$$\boxed{Cdtds = \frac{v\,\Delta_t}{\Delta} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Критерий устойчивости для двумерного FDTD:

$$\boxed{\Delta_t \leq \frac{\Delta}{c\sqrt{2}}}$$

Демонстрация двумерного метода FDTD для поляризации TM^z. Источник цилиндрической волны.

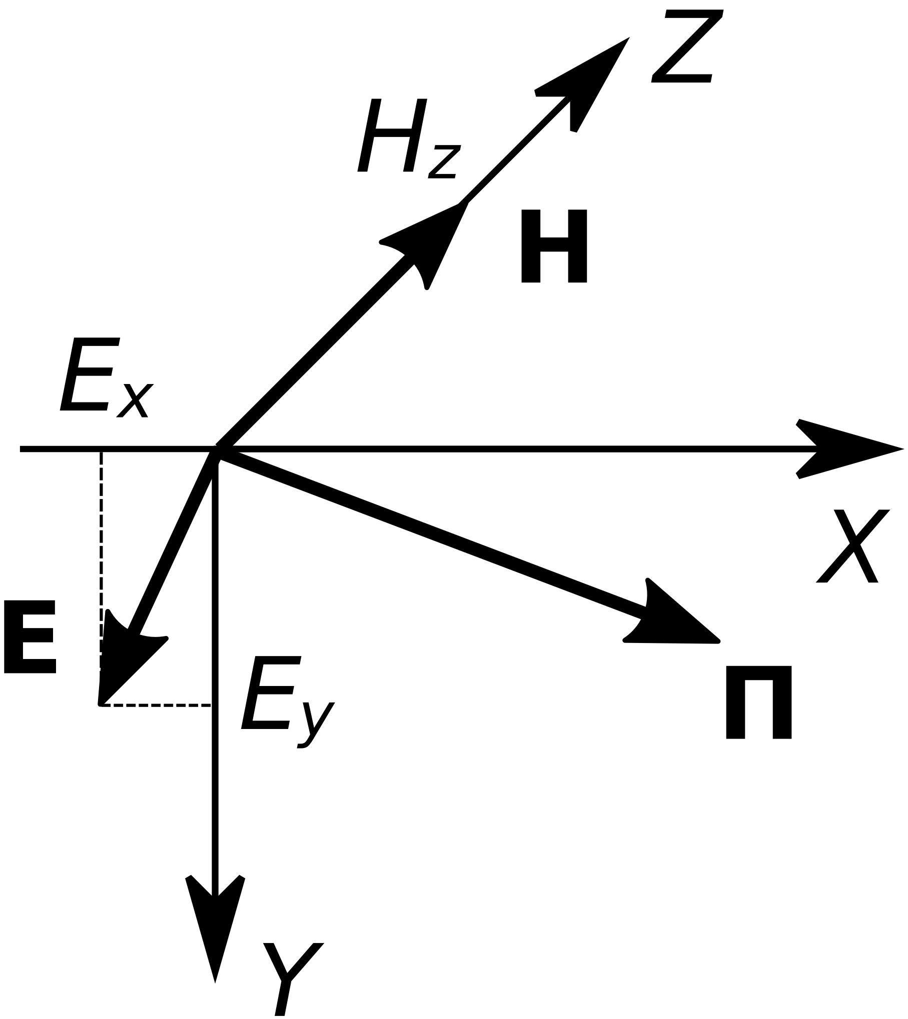
fdtd_2d_TM_first.py

Демонстрация двумерного метода FDTD для поляризации TM^z. Источник плоской волны.

fdtd_2d_TM_plainwave.py

Двумерный метод конечных разностей во временной области для поляризации TE^z

Поляризация TE^z



Существуют следующие компоненты ЭМ поля:

- E_x
- E_y
- H_z

Законы Фарадея и Ампера в скалярном виде

$$\sigma E_x + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$\sigma E_y + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$-\sigma_m H_z - \mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

Дискретизация величин E и H

$$E_x(x,y,t)=E_x(m\Delta_x,n\Delta_y,q\Delta_t)=E_x^q[m,n]$$

$$E_y(x,y,t)=E_y(m\Delta_x,n\Delta_y,q\Delta_t)=E_y^q[m,n]$$

$$H_z(x,y,t)=H_z(m\Delta_x,n\Delta_y,q\Delta_t)=H_z^q[m,n]$$

m — индекс по пространству вдоль оси X.
n — индекс по пространству вдоль оси Y.
q — индекс по времени.

Δ_x, Δ_y — размер сетки по осям X и Y соответственно.

Конечно-разностная схема

$$H_z^{q+1/2}[m+1/2,n+1/2]=\frac{1-\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}H_z^{q-1/2}[m+1/2,n+1/2]-$$

$$-\frac{1}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}\left(\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}\left\{E_y^q[m+1,n+1/2]-E_y^q[m,n+1/2]\right\}-\right.$$

$$\left.-\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_y}\left\{E_x^q[m+1/2,n+1]-E_x^q[m+1/2,n]\right\}\right)$$

Конечно-разностная схема

$$E_x^{q+1}[m+1/2,n]=\frac{1-\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}{1+\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}E_x^{q}[m+1/2,n]+$$

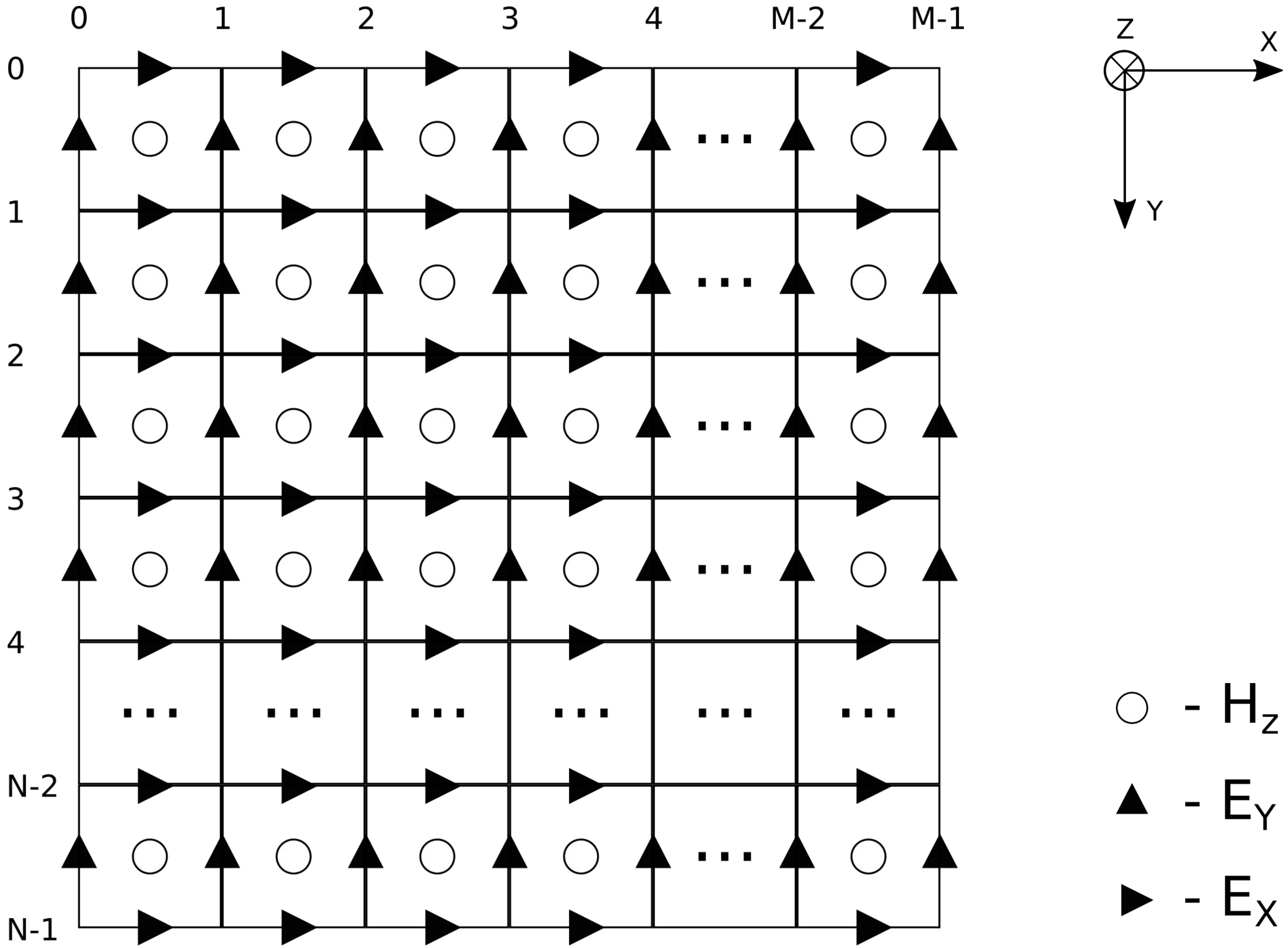
$$+\frac{1}{1+\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_y}\left(H_z^{q+1/2}[m+1/2,n+1/2]-H_z^{q+1/2}[m+1/2,n-1/2]\right)$$

Конечно-разностная схема

$$E_y^{q+1}[m,n+1/2]=\frac{1-\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}{1+\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}E_y^q[m,n+1/2]-$$

$$-\frac{1}{1+\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\left(H_z^{q+1/2}[m+1/2,n+1/2]-H_z^{q+1/2}[m-1/2,n+1/2]\right)$$

Пространственная сетка для двумерного метода FDTD. Поляризация TE^z



Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{hzh}(m+1/2, n+1/2) = \left. \frac{1 - \dfrac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \dfrac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \right|_{(m+1/2)\delta, (n+1/2)\delta}$$

$$C_{hze}(m+1/2, n+1/2) = \left. \frac{1}{1 + \dfrac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\delta} \right|_{(m+1/2)\delta, (n+1/2)\delta}$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{exe}(m+1/2,n) = \left.\frac{1 - \dfrac{\sigma\,\Delta_t}{2\,\varepsilon\,\varepsilon_0}}{1 + \dfrac{\sigma\,\Delta_t}{2\,\varepsilon\,\varepsilon_0}}\right|_{(m+1/2)\delta\,,n\delta}$$

$$C_{exh}(m+1/2,n) = \left.\frac{1}{1 + \dfrac{\sigma\,\Delta_t}{2\,\varepsilon\,\varepsilon_0}}\,\frac{\Delta_t}{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\delta}\right|_{(m+1/2)\delta\,,n\delta}$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{eye}(m,n+1/2)=\left.\frac{1-\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}{1+\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}\right|_{m\delta,(n+1/2)\delta}$$

$$C_{eyh}(m,n+1/2)=\left.\frac{1}{1+\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\delta}\right|_{m\delta,(n+1/2)\delta}$$

Программная реализация конечно-разностной схемы

```
Hz[m, n] = Chzh[m, n] * Hz[m, n] +
               Chze[m, n] * ((Ex[m, n + 1] - Ex[m, n] -
                             (Ey[m + 1, n] - Ey[m, n]))

Ex[m, n] = Cexe[m, n] * Ex[m, n] +
               Cexh[m, n] * (Hz[m, n] - Hz[m, n - 1])

Ey[m, n] = Ceye[m, n] * Ey[m, n] -
               Ceyh[m, n] * (Hz[m, n] - Hz[m - 1, n])
```

Демонстрация двумерного метода FDTD для поляризации TE^z. Источник цилиндрической волны.

fdtd_2d_TE_first.py

Объединенная пространственная сетка для двумерного метода FDTD для двух поляризаций