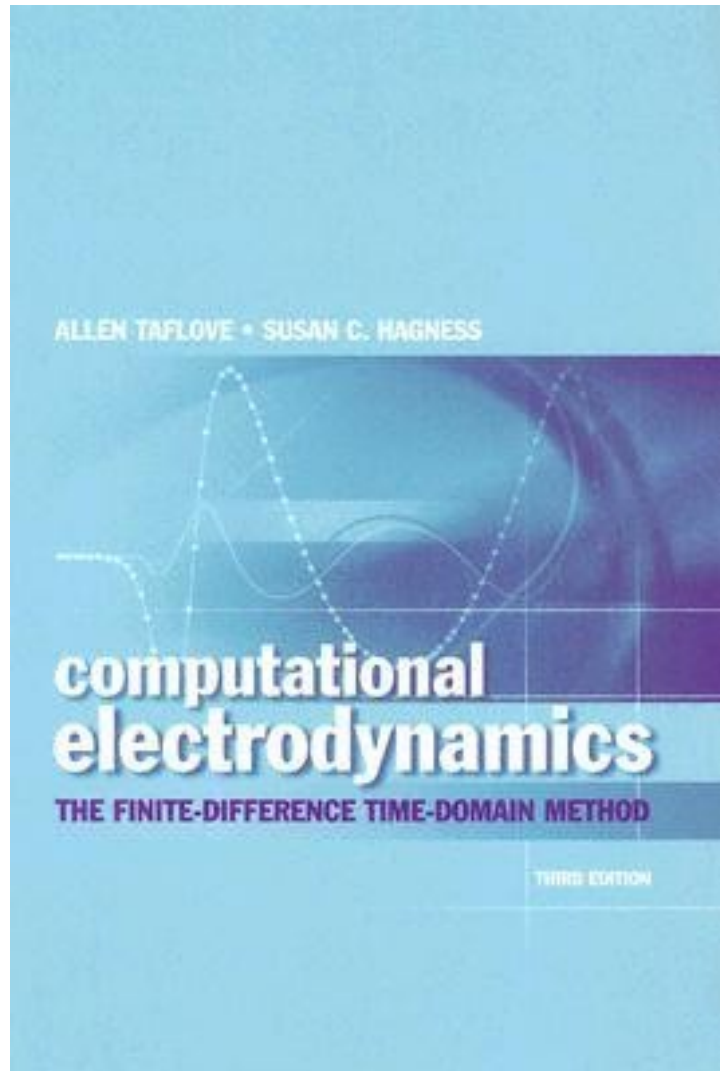


**Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет)**

Моделирование антенн и микроволновых устройств

**«Метод конечных разностей
во временной области (FDTD)»**

Литература



Allen Taflove,
Susan C. Hagness

Computational
Electrodynamics:
The Finite-Difference
Time-Domain Method

Литература

John B. Schneider.
Understanding the Finite-Difference Time-
Domain Method

<http://www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd/>

Материалы к лекциям

Исходные тексты программ:

<https://github.com/Jenyay/modelling>

Численный расчет производной функции

Производная функции

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Правая разностная схема для численного дифференцирования

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \delta) - f(x_0)}{\delta} + O(\delta)$$

$O(\delta)$ — погрешность вычислений

Ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!} =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!}, x_0 < \xi < x$$

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора
вблизи точки x_0 со смещением δ

$$x = x_0 + \delta$$

$$f(x_0 + \delta) = f(x_0) + \delta f'(x_0) + \frac{1}{2!} \delta^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!} \delta^3 f'''(x_0) + \dots,$$

Выражаем $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \delta) - f(x_0)}{\delta} - \frac{1}{2} \delta f''(x_0) - \frac{1}{6} \delta^2 f'''(x_0) - \dots,$$

$$O(\delta) = -\left(\frac{1}{2} \delta f''(x_0) + \dots\right)$$

Погрешность пропорциональна δ .

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора
вблизи точки x_0 со смещением $\pm\delta/2$

$$x = x_0 \pm \frac{\delta}{2}, \quad x - x_0 = \pm \frac{\delta}{2}$$

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) = f(x_0) + \frac{\delta}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots,$$

$$f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) = f(x_0) - \frac{\delta}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots,$$

Вычтем первое выражение из второго

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) = \delta f'(x_0) + \frac{2}{3!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots,$$

Вычтем первое выражение из второго

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) = \delta f'(x_0) + \frac{2}{3!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots,$$

Поделим левую и правую части на δ

$$\frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)}{\delta} = f'(x_0) + \frac{1}{3!} \frac{\delta^2}{2^2} f'''(x_0) + \dots,$$

Центральная конечно-разностная схема

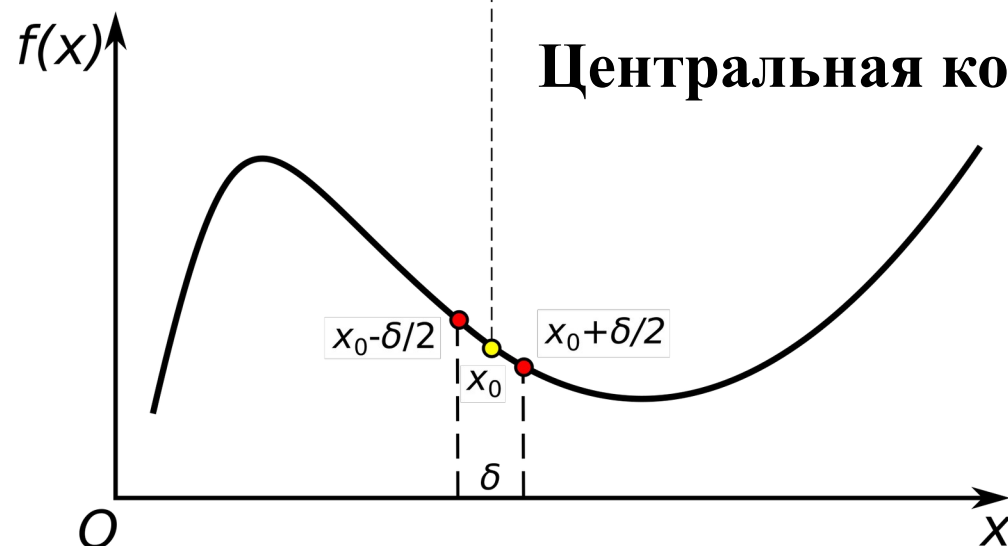
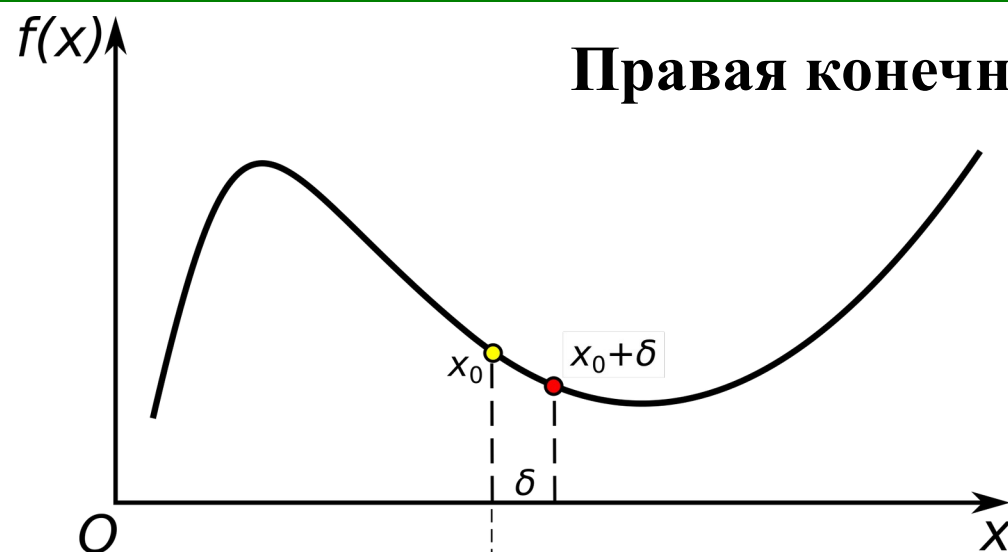
$$f'(x_0) = \frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)}{\delta} + O(\delta^2)$$

Отбрасываем $O(\delta^2)$

$$f'(x_0) \approx \frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)}{\delta}$$

Погрешность пропорциональна δ^2 .

Конечно-разностные схемы



Уравнения Максвелла

Уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{сТ}}) = \\ &= \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_{\text{сТ}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Оператор набла (∇) или оператор Гамильтона

18

$$\nabla \equiv \mathbf{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial}{\partial z}$$

Свойства оператора набла (∇)

$$\nabla \varphi = \mathbf{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = ?$$

φ - скалярное поле

Свойства оператора набла (∇)

$$\nabla \varphi = \mathbf{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \text{grad } \varphi$$

φ - скалярное поле

Свойства оператора набла (∇)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{a} &= \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \\ &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = ?\end{aligned}$$

\mathbf{a} — векторное поле

Свойства оператора набла (∇)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{a} &= \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \\ &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{a}\end{aligned}$$

\mathbf{a} — векторное поле

Свойства оператора набла (∇)

$$\nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \text{rot } \mathbf{a}$$

\mathbf{a} — векторное поле

Уравнения Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ст}}) = \\ &= \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_{\text{ст}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{F}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \text{div } \mathbf{F}$$

Одномерный метод FDTD

FDTD. Одномерный случай.

Закон Ампера

26

Пусть поле может меняться только вдоль оси X

$$\epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = ?$$

FDTD. Одномерный случай.

Закон Ампера

27

Пусть поле может меняться только вдоль оси X

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \mathbf{x}_0 \cdot 0 - \mathbf{y}_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

FDTD. Одномерный случай.

Закон Фарадея

28

Пусть поле может меняться только вдоль оси X

$$-\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} =$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = ?$$

FDTD. Одномерный случай. Закон Фарадея

29

Пусть поле может меняться только вдоль оси X

$$\begin{aligned} -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \nabla \times \mathbf{E} = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \mathbf{x}_0 \cdot 0 - \mathbf{y}_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{aligned}$$

FDTD. Одномерный случай

Объединяем предыдущие уравнения

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} = -\mathbf{y}_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$-\mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mathbf{y}_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

FDTD. Одномерный случай

$$\mathbf{x}_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mathbf{y}_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \mathbf{z}_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} + \mathbf{x}_0 j_x + \mathbf{y}_0 j_y + \mathbf{z}_0 j_z =$$

$$- \mathbf{y}_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$- \mathbf{x}_0 \mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} - \mathbf{y}_0 \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} - \mathbf{z}_0 \mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = - \mathbf{y}_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

FDTD. Одномерный случай

Или в скалярном виде:

$$\mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0$$

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + j_x = 0$$

$$\mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} + j_z = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$-\mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + j_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

FDTD. Одномерный случай

Или в скалярном виде:

$$\mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0$$

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + j_x = 0$$

$$\mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} + j_z = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$-\mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + j_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

FDTD. Одномерный случай

Пусть существуют только E_z и H_y компоненты поля

$$\mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} + j_z = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

Дискретизация

$$E_z(x, t) = E_z(m\Delta x, q\Delta t) = E_z^q[m]$$

$$H_y(x, t) = H_y(m\Delta x, q\Delta t) = H_y^q[m]$$

Δx — пространственное смещение

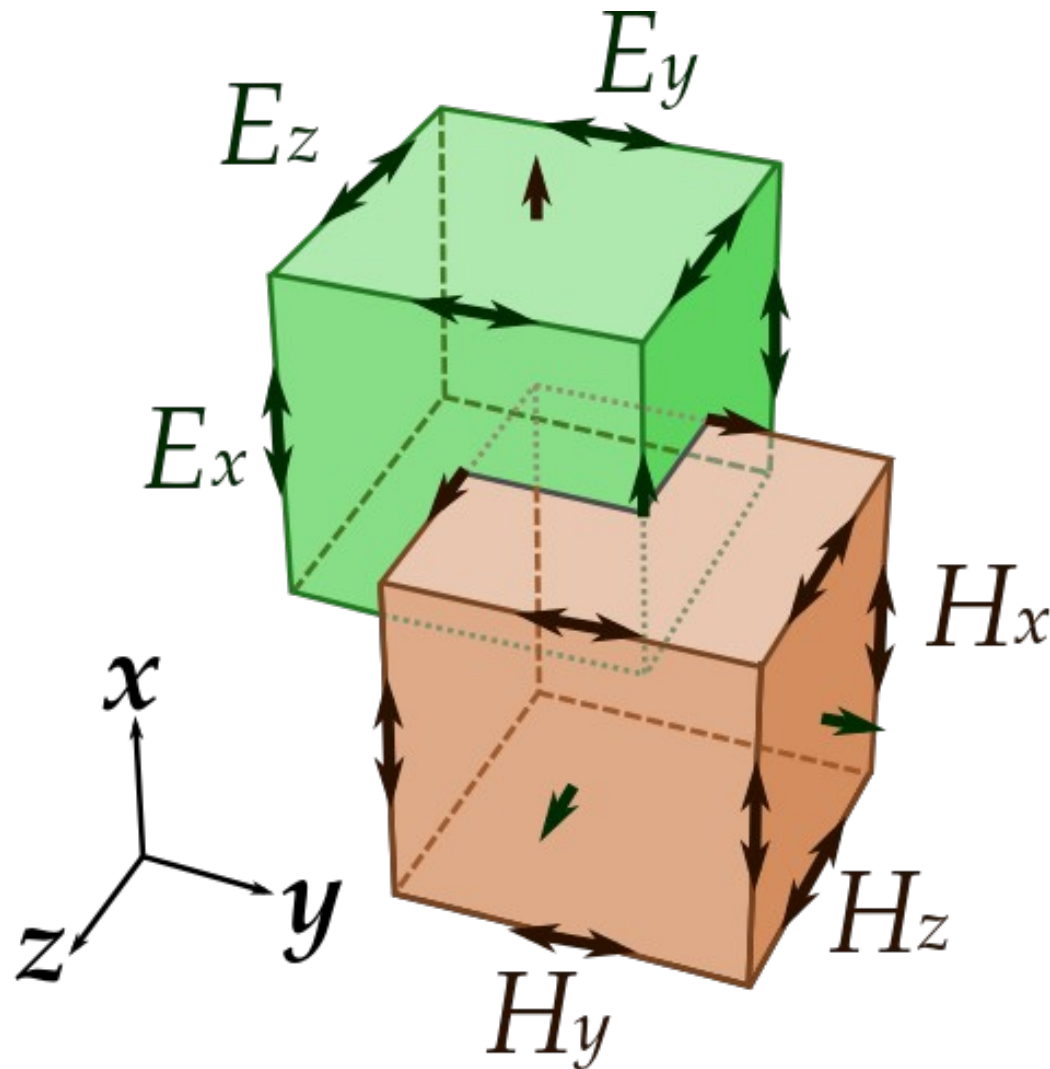
Δt — временное смещение

m — номер пространственного шага

q — номер временного шага

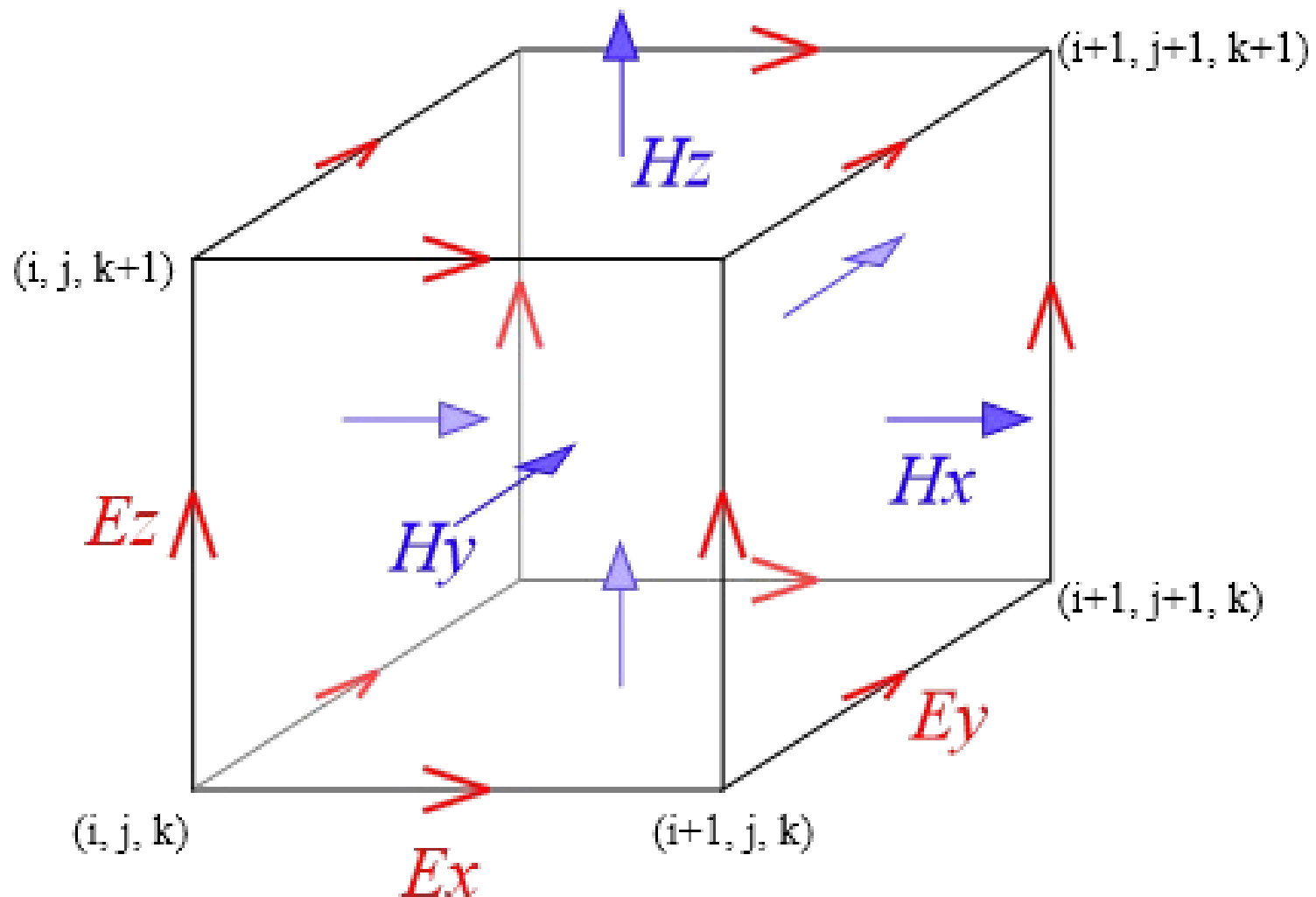
Трёхмерная ячейка для метода FDTD (ячейка Йи, Yee cell)

36

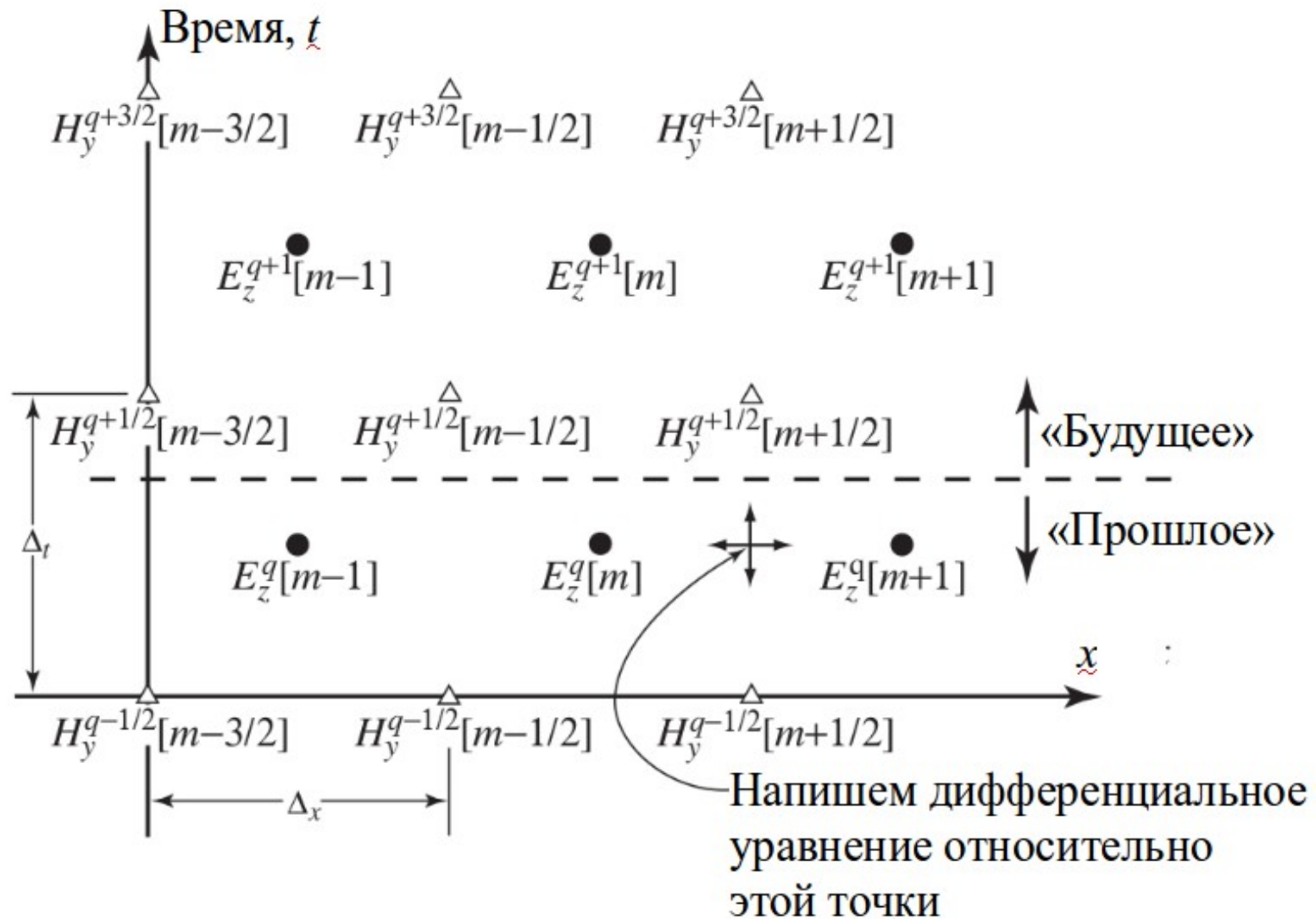


Трёхмерная ячейка для метода FDTD (ячейка Йи, Yee cell)

37



Пространственно-временная сетка для одномерного случая



Переходим к конечным разностям.

Закон Фарадея

$$\mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \Big|_{(m+1/2)\Delta x, q\Delta t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \Big|_{(m+1/2)\Delta x, q\Delta t}$$

Переходим к конечным разностям.

Закон Фарадея

$$\mu \mu_0 \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{E_z^q[m+1] - E_z^q[m]}{\Delta_x}$$

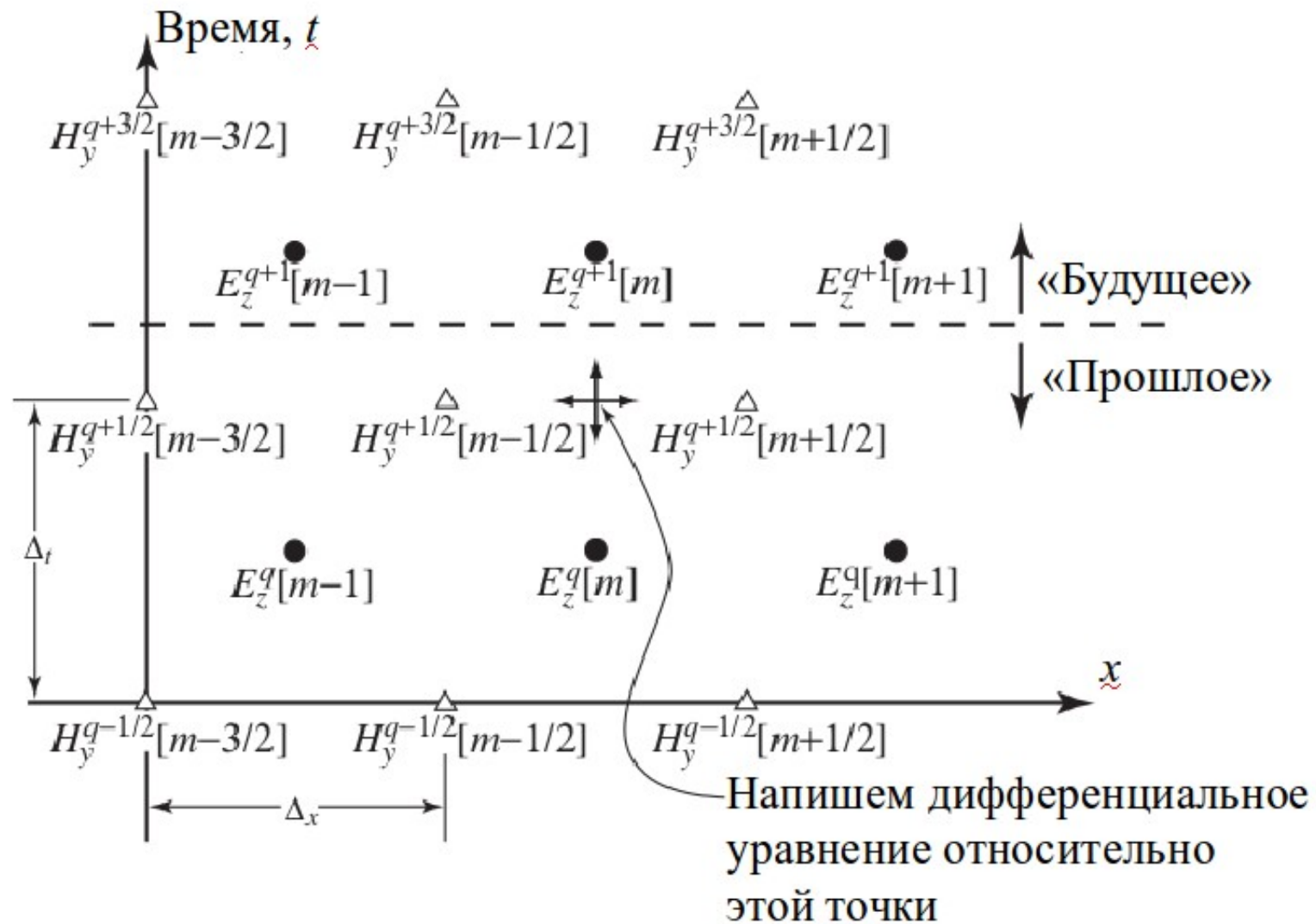
Переходим к конечным разностям.

Закон Фарадея

Из предыдущего уравнения

$$\begin{aligned}
 H_y^{q+1/2}[m+1/2] &= \\
 &= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} \left(E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right)
 \end{aligned}$$

Пространственно-временная сетка для одномерного случая



Переходим к конечным разностям.

Закон Ампера

$$\left(\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} + j_z \right) \bigg|_{m \Delta x, (q+1/2) \Delta t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \bigg|_{m \Delta x, (q+1/2) \Delta t}$$

Переходим к конечным разностям.

Закон Ампера

$$\begin{aligned} \varepsilon \varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^q[m]}{\Delta_t} + j_z^{q+1/2}[m] = \\ = \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x} \end{aligned}$$

Переходим к конечным разностям.

Закон Ампера

$$\begin{aligned}
 E_z^{q+1}[m] = & \\
 = E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} & \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right) - \\
 & \underline{- \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0} j_z^{q+1/2}[m]}
 \end{aligned}$$

Формулы для метода конечных разностей во временной области

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2] = H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} (E_z^q[m+1] - E_z^q[m])$$

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} (H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]) - \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0} j_z^{q+1/2}[m]$$

Источник сигнала

$$E_z^{q+1}[m] \leftarrow E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$

$$E_z^{q+1}[m] \leftarrow E_z^{q+1}[m] - \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0} j_z^{q+1/2}[m]$$

или

$$E_z^{q+1}[m] \leftarrow E_z^{q+1}[m] + E_{z\,cm}^{q+1/2}[m]$$

Критерий устойчивости Куранта-Фридриха-Леви

$$v_{max} \Delta_t \leq \frac{1}{\sqrt{\Delta_x^{-2} + \Delta_y^{-2} + \Delta_z^{-2}}}$$

$$v_{max} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{min} \mu_{min}}}$$

Если $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \Delta$

$$v_{max} \Delta_t \leq \frac{\Delta}{\sqrt{N}}$$

N — размерность пространства ($N = 1, 2, 3$)

Критерий устойчивости для одномерной задачи

$c\Delta_t$ — максимальное расстояние, которое может пройти волна за один временной шаг Δ_t в вакууме.

Число Куранта

$$S_c = c\Delta_t / \Delta_x$$

Условие устойчивости

$$c\Delta_t \leq \Delta_x$$

или

$$S_c \leq 1$$

Коэффициенты в конечно-разностной схеме

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} (E_z^q[m+1] - E_z^q[m])$$

$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$= E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} (H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2])$$

Коэффициенты в конечно-разностной схеме

$$\frac{1}{\mu \mu_0} \frac{\Delta_t}{\Delta_x} = \frac{1}{\mu \mu_0} \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta_t}{\Delta_x} = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{c \Delta_t}{\Delta_x} = \frac{1}{\mu W_0} S_c$$

$$W_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$$

- волновое сопротивление свободного пространства

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

- скорость света в вакууме

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$$

$$\epsilon_0 = 1 / (\mu_0 c^2) = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

Коэффициенты в конечно-разностной схеме

$$\frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{\Delta_t}{\Delta_x} = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta_t}{\Delta_x} = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{c \Delta_t}{\Delta_x} = \frac{W_0}{\varepsilon} S_c$$

$$W_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$$

- волновое сопротивление свободного пространства

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

- скорость света в вакууме

Коэффициенты в конечно-разностной схеме

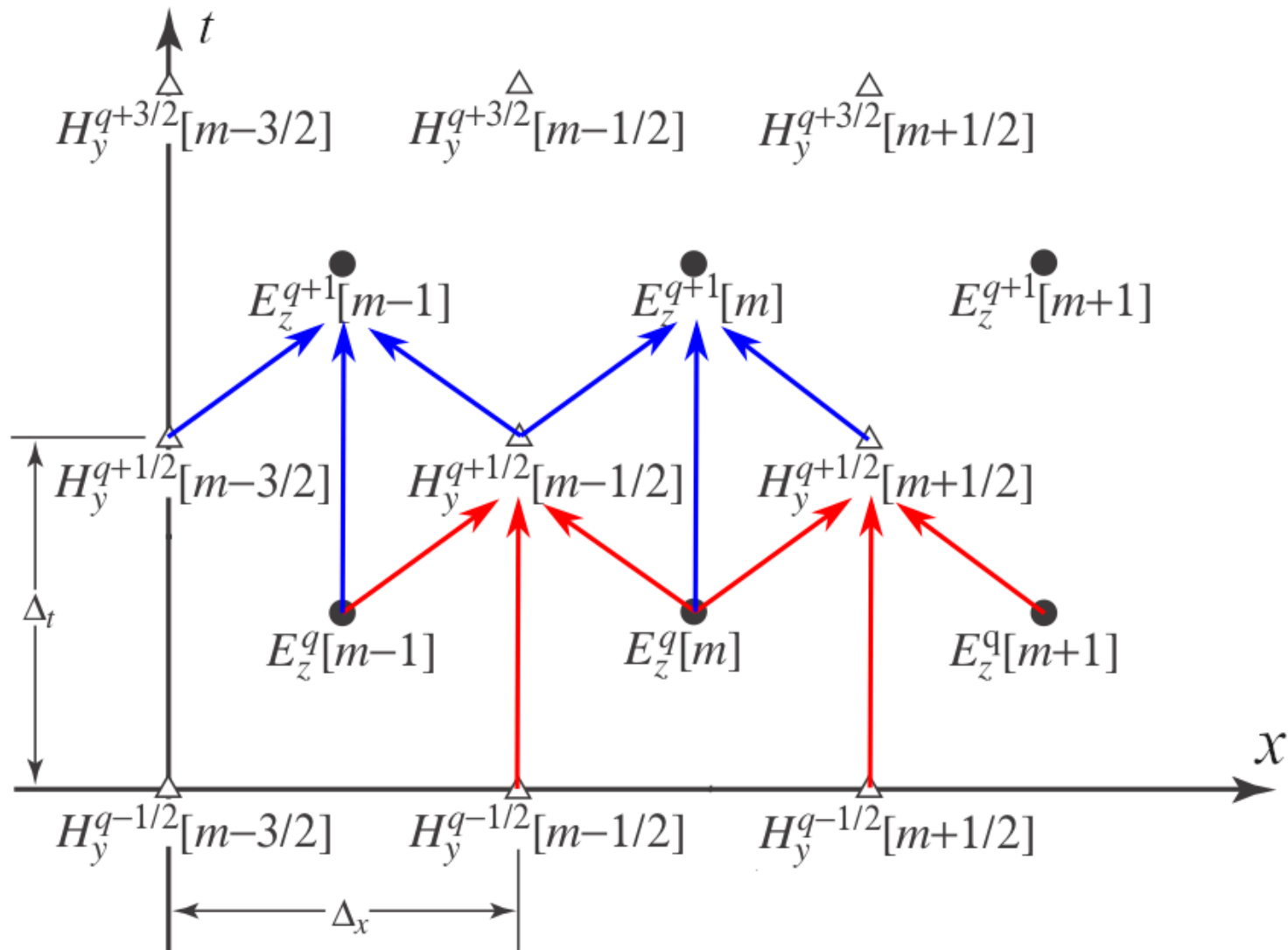
$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \left(E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right) \frac{1}{\mu W_0} S_c$$

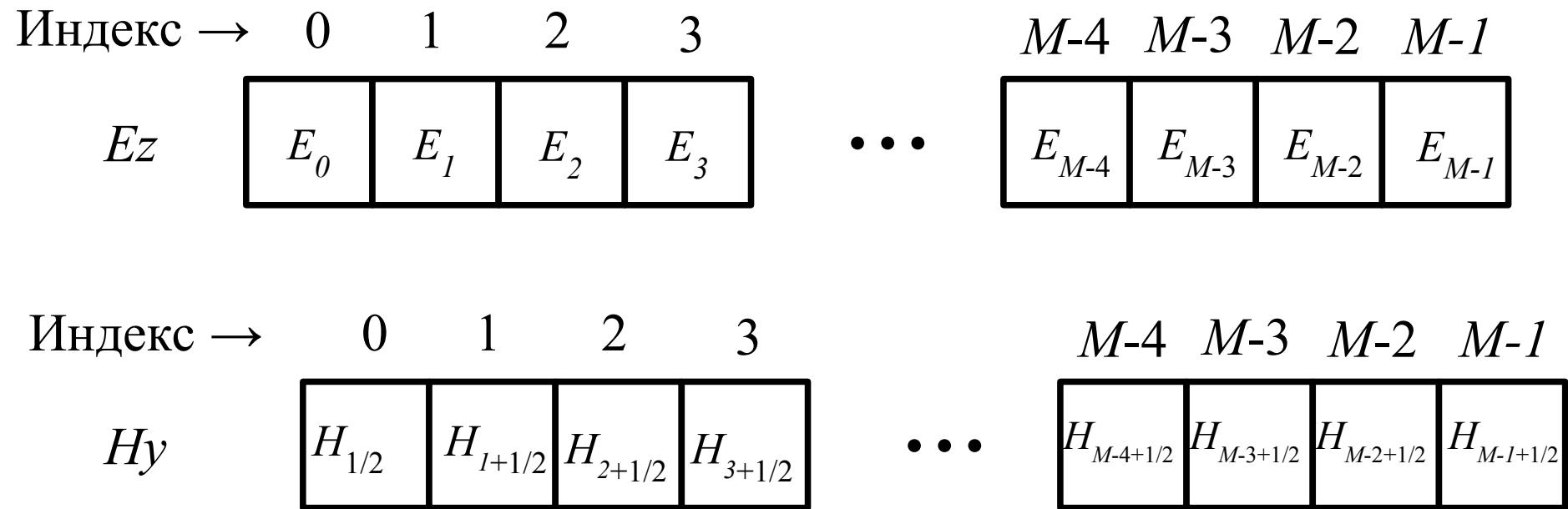
$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$= E_z^q[m] + \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right) \frac{W_0}{\varepsilon} S_c$$

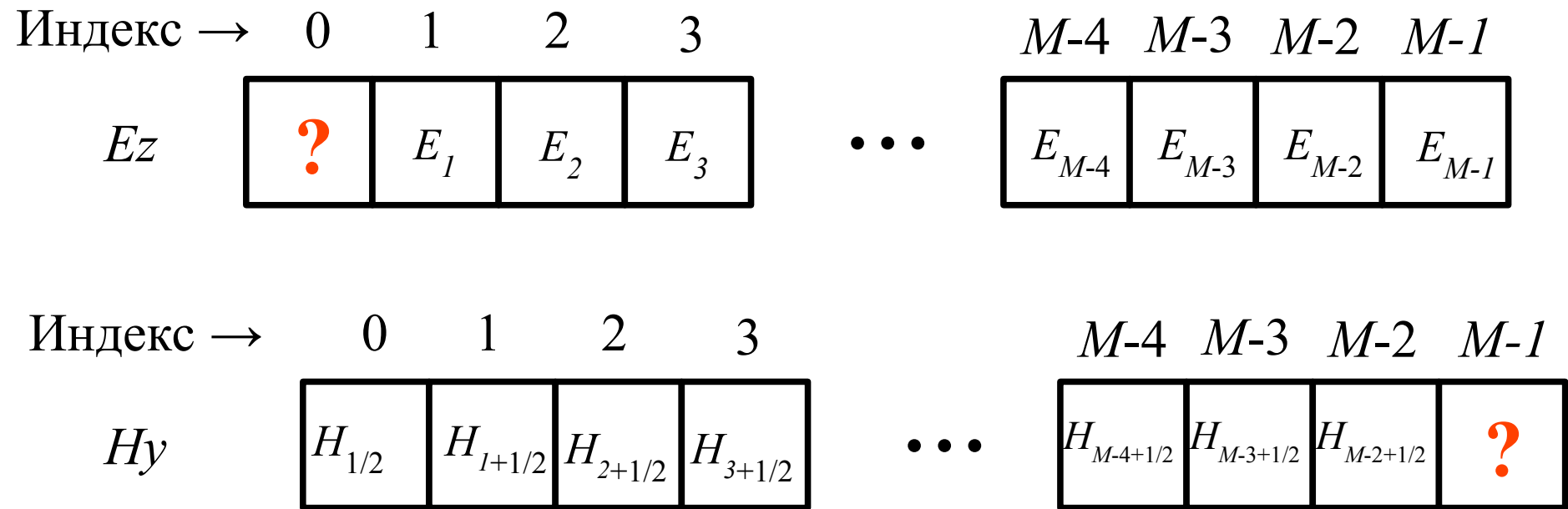
Расчет полей H_y и E_z в одномерном методе FDTD



Хранение компонент поля в реализации FDTD



Хранение компонент поля в реализации FDTD



Источник в разностной схеме

$$E_{\text{ист.}}(t) = E_{\text{ист.}}(q \Delta_t) = e^{-\left(\frac{q \Delta_t - 30 \Delta_t}{10 \Delta_t}\right)^2} = e^{-\left(\frac{q - 30}{10}\right)^2} = E_{\text{ист.}}[q]$$

Схема алгоритма FDTD

Начало

Задание начальных условий $E_z^0, H_y^{1/2}$

Цикл по времени $t = [1 \dots \text{maxTime} - 1]$:

 Цикл по пространству $m = [0 \dots \text{maxSize} - 2]$:

 Расчет $H_y^{q+1/2}$

 Цикл по пространству $m = [1 \dots \text{maxSize} - 1]$:

 Расчет E_z^{q+1}

 Ввод поля с помощью источников возбуждения

Вывод результатов

Конец

Реализация одномерного FDTD на Python

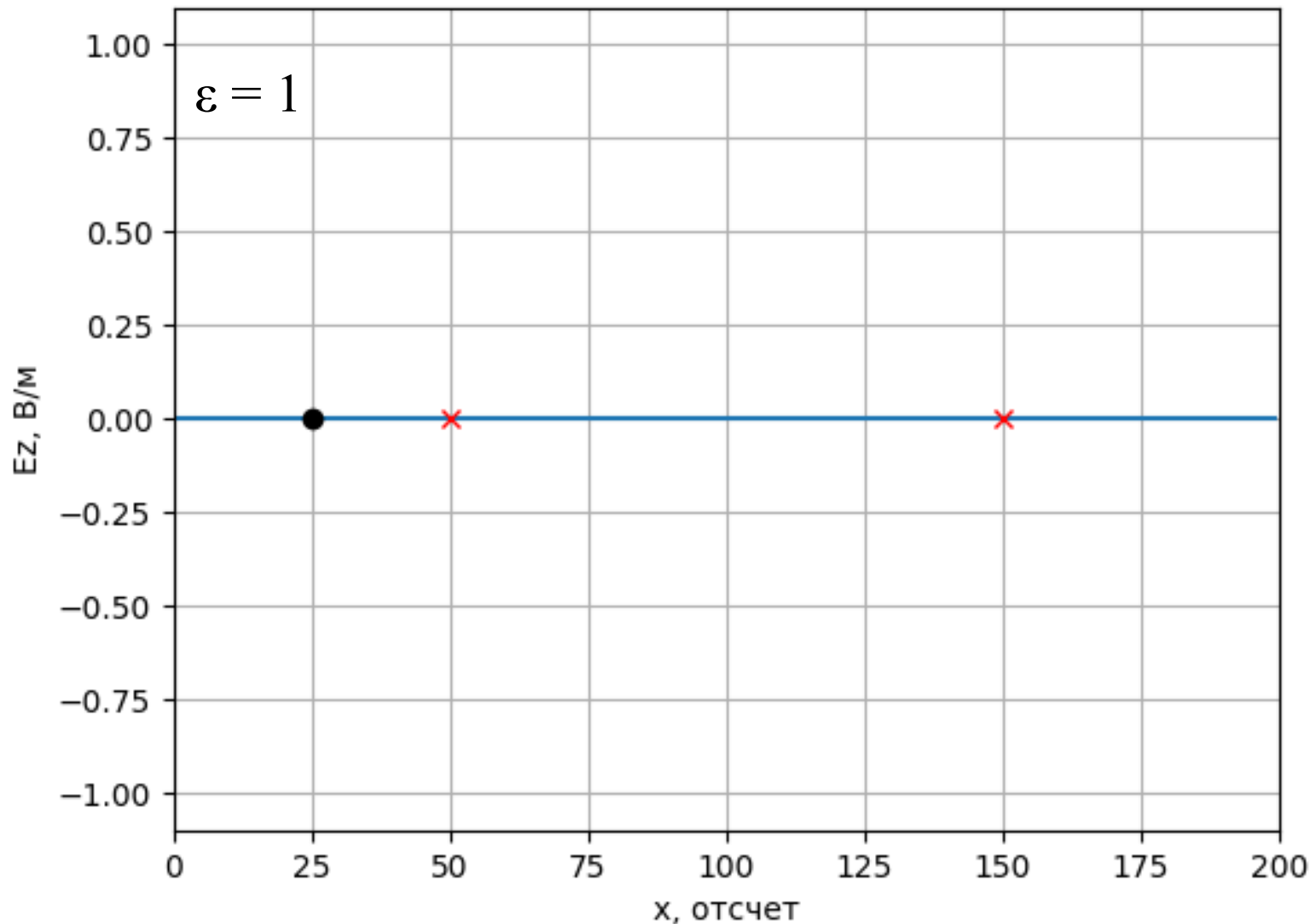
Распространение импульса в свободном пространстве.

Число Куранта равно 1.

fdtd_first_version_01.py
fdtd_first_version_02.py
fdtd_first_version_03.py
fdtd_first_version_04.py
fdtd_first_version_05.py
fdtd_first_version_06.py

Измерение скорости распространения волны 61

(fdtd_first_version_speed.py)



Отображение компонент поля E и H

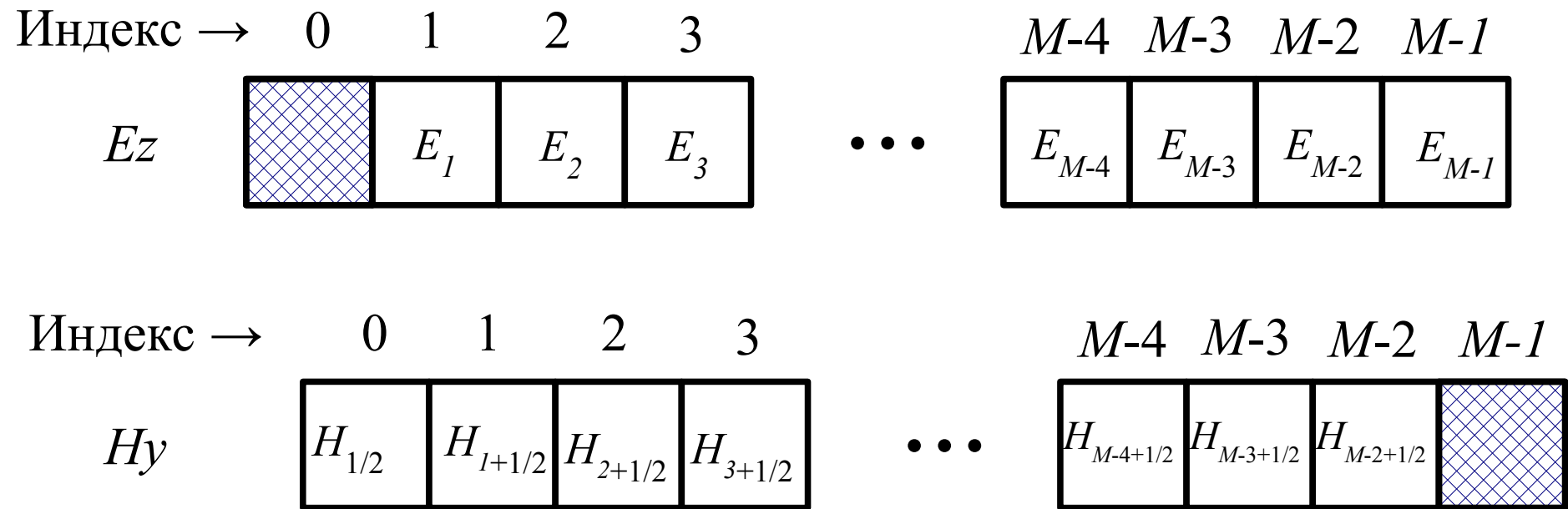
`fdtd_first_version_EH.py`

Достоверность расчета

- Скорость распространения волны в вакууме равна скорости света.
- Коэффициент отражения электрической компоненты поля от РЕС равен -1 .
- Коэффициент отражения электрической компоненты поля от РМС равен $+1$.
- Коэффициент отражения магнитной компоненты поля от РЕС равен $+1$.
- Коэффициент отражения магнитной компоненты поля от РМС равен -1 .

Простейшие поглощающие граничные условия

Хранение компонент поля в реализации FDTD



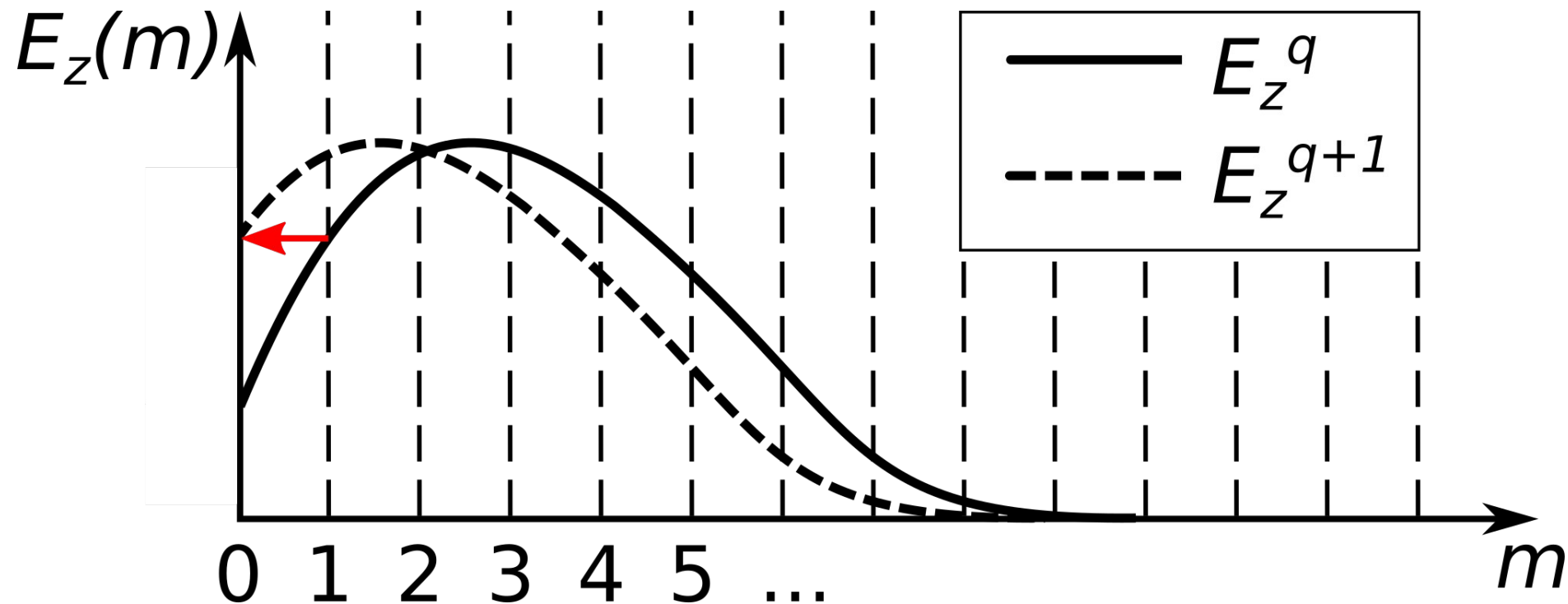
Простейшие поглощающие граничные условия

Работают только для $S_c = 1$

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1]$$

$$H_y^{q+1/2}[\text{end}] = H_y^{q-1/2}[\text{end} - 1]$$

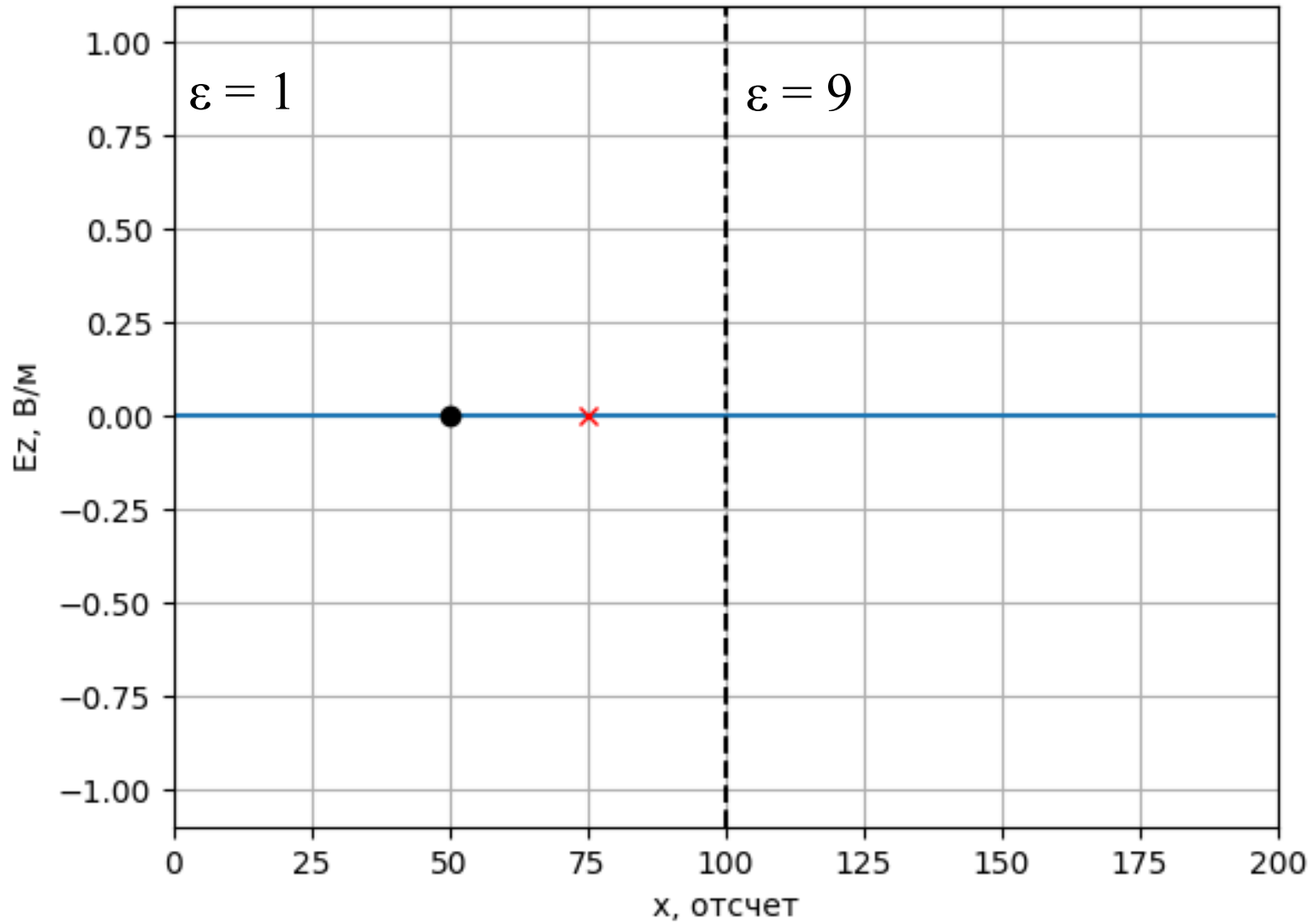
Простейшее поглощающие граничные условия



Демонстрация поглощающих условий

Моделирование распространения электромагнитной волны в неоднородных средах

Геометрия решаемой задачи (fdtd_heterogen_01.py)



Конечно-разностная схема

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \left(E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right) \frac{1}{\mu W_0} S_c$$

$$E_z^{q+1}[m]=$$

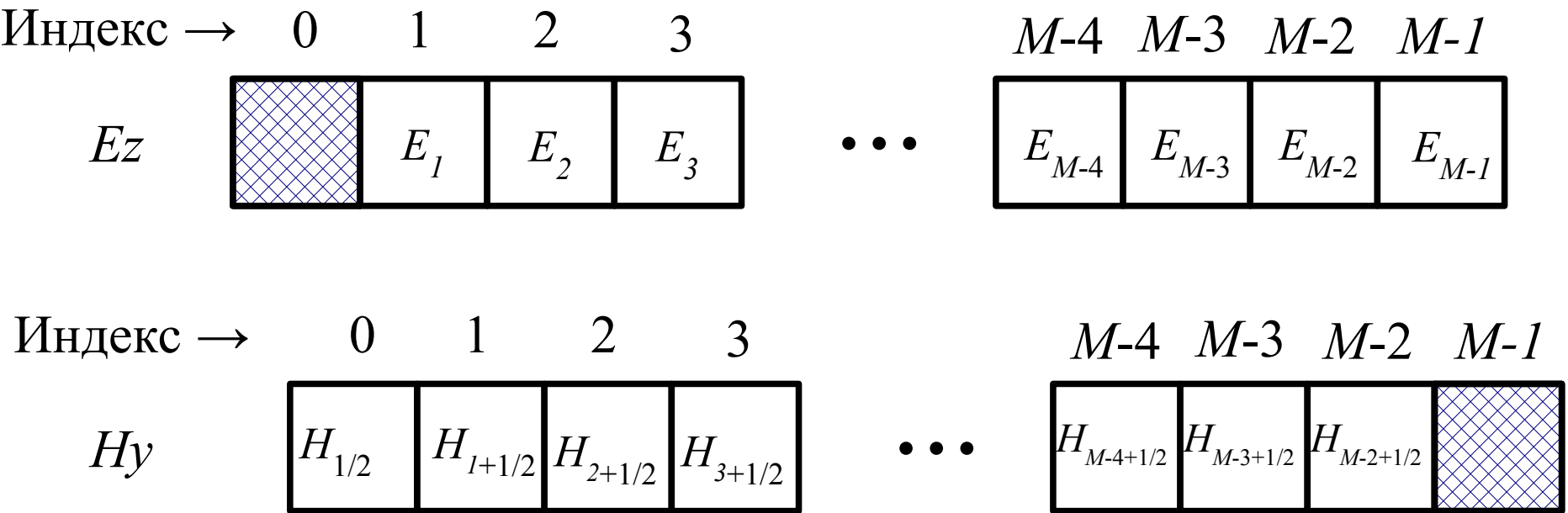
$$= E_z^q[m] + \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right) \frac{W_0}{\varepsilon} S_c$$

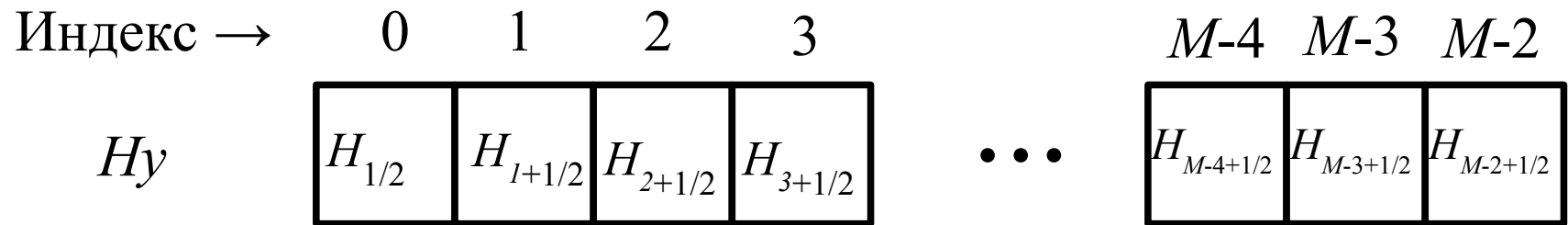
Учет параметров среды

Если $\varepsilon = f(m)$

$$Ez[m] = Ez[m] + (Hy[m] - Hy[m - 1]) * Sc * W0 / eps[m]$$

$$Hy[m] = Hy[m] + (Ez[m + 1] - Ez[m]) * Sc / (W0 * mu[m])$$





Демонстрация моделирования распространения электромагнитной волны в неоднородных средах

Коэффициенты отражения и прохождения

Для волны, падающей по нормали:

Коэффициент отражения:

$$\Gamma = \frac{\dot{E}_{отр}}{\dot{E}_{пад}} = \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}$$

Коэффициент прохождения:

$$T = \frac{\dot{E}_{пр}}{\dot{E}_{пад}} = \frac{2W_2}{W_2 + W_1}$$

$$W = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} = W_0 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Коэффициенты отражения и прохождения идеального диэлектрика

Для границы раздела двух диэлектриков

$$\mu_1 = \mu_2 = 1$$

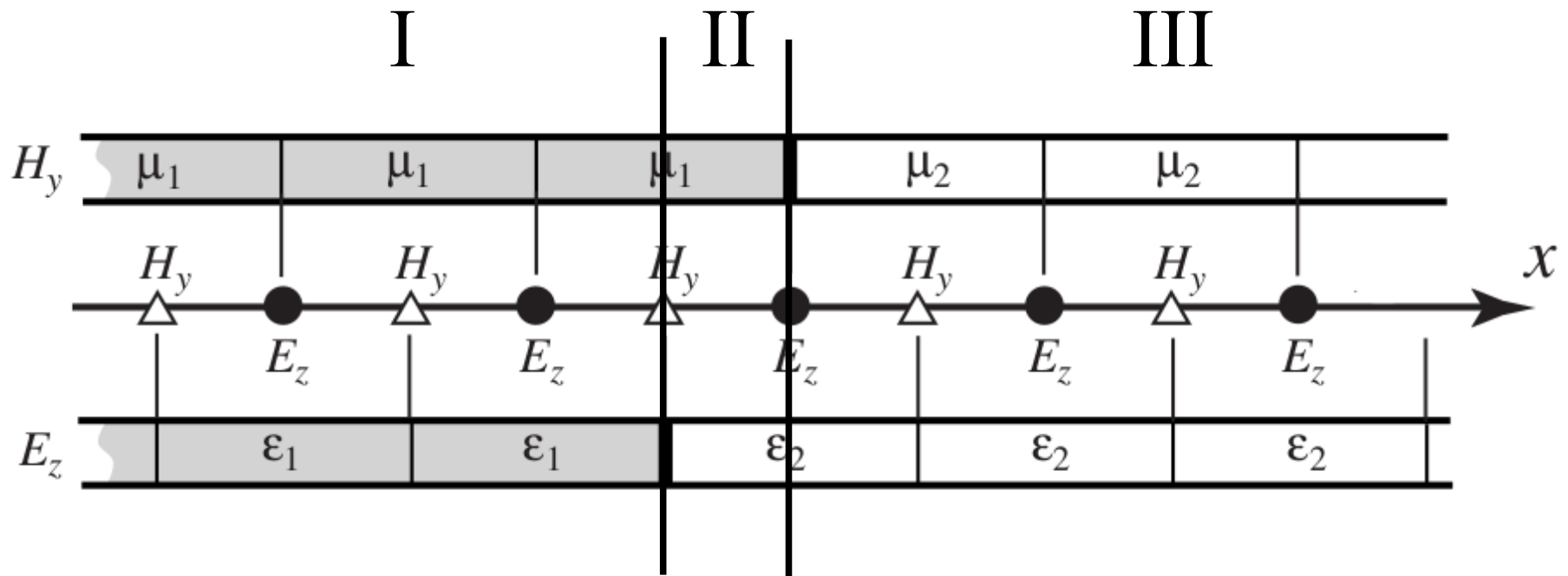
Коэффициент отражения:

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}}$$

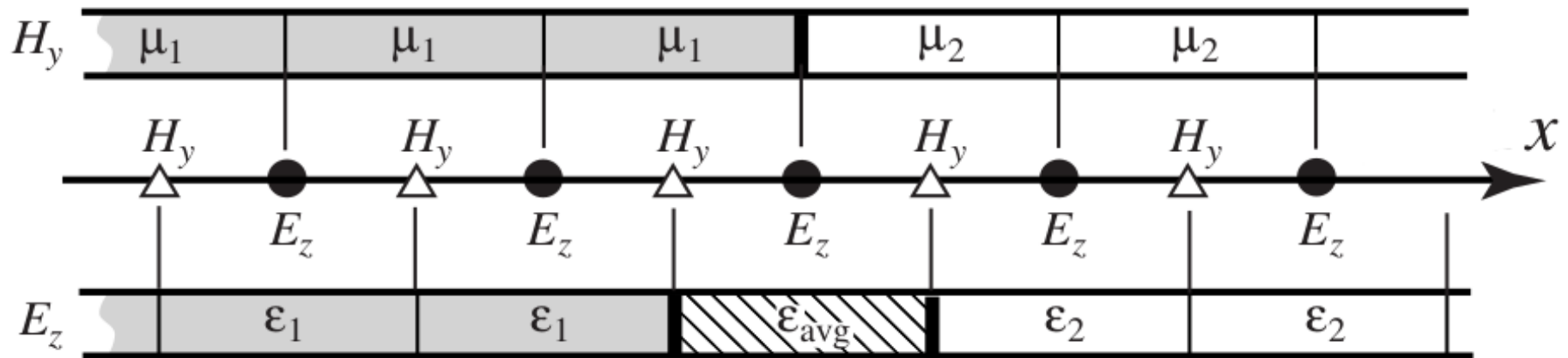
Коэффициент прохождения:

$$T = \frac{2\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}}$$

Погрешность из-за дискретной сетки



Погрешность из-за дискретной сетки



Метод Total-Field / Scattered-Field

Метод Total-Field / Scattered-Field

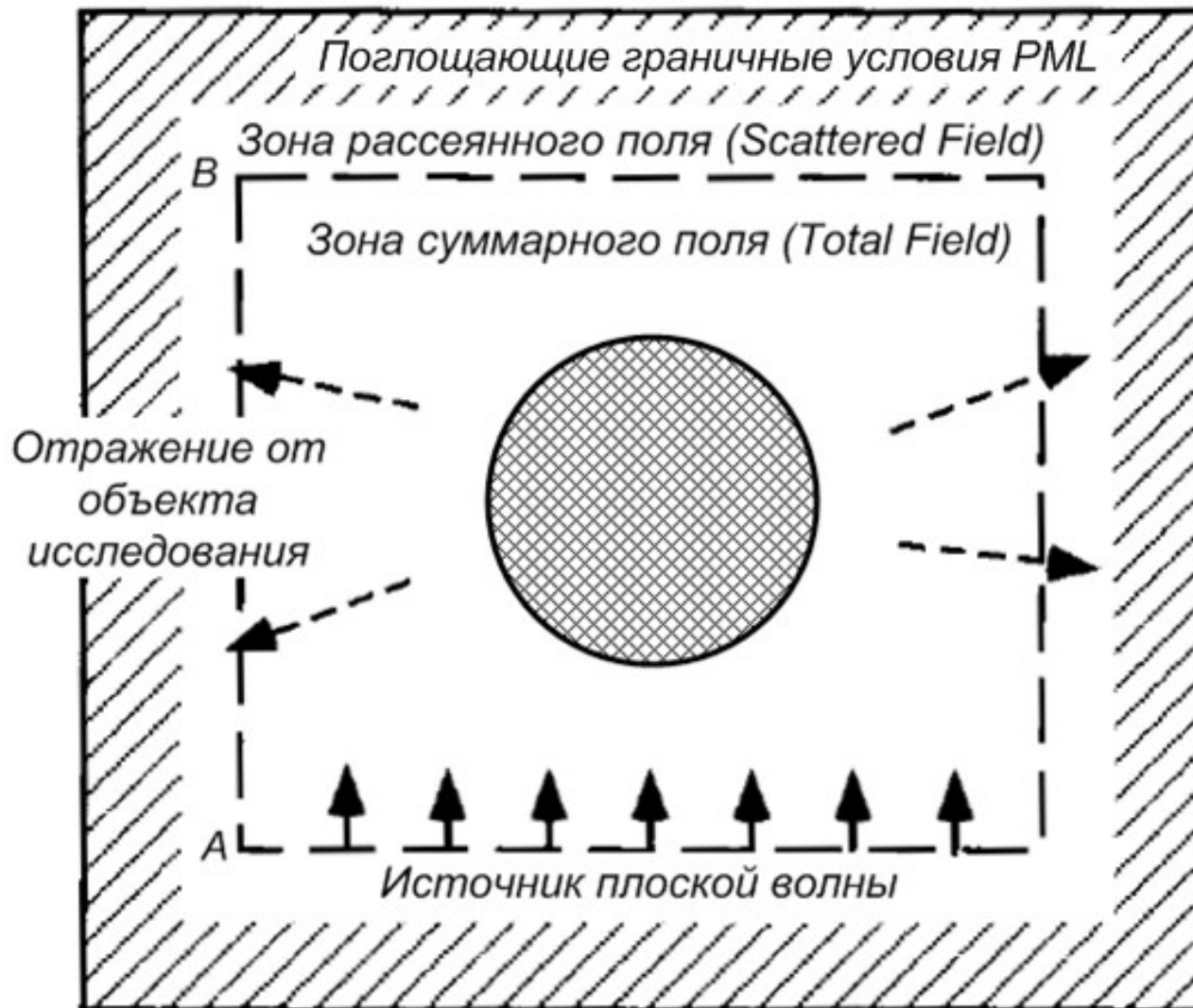
$$\mathbf{E}_{\text{полн}} = \mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{расс}}$$

$$\mathbf{H}_{\text{полн}} = \mathbf{H}_{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\text{расс}}$$

$\mathbf{E}_{\text{пад}}, \mathbf{H}_{\text{пад}}$ могут быть рассчитаны в любой момент времени в любой точке пространства.

$\mathbf{E}_{\text{расс}}, \mathbf{H}_{\text{расс}}$ изначально не известны.

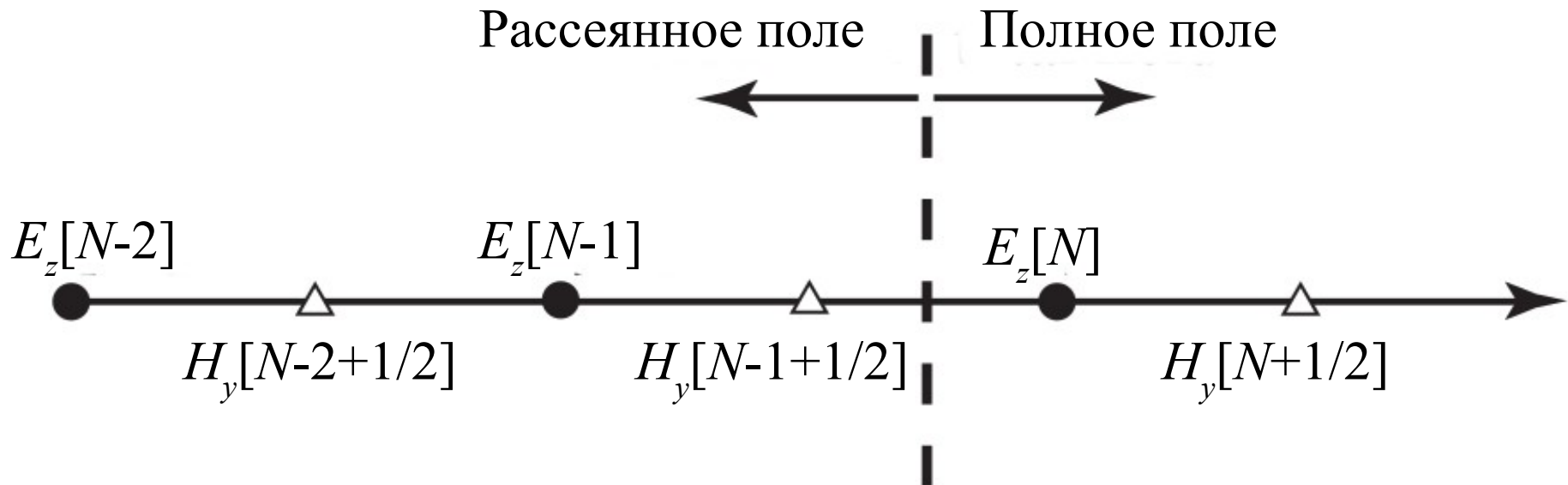
Метод Total-Field / Scattered-Field



Метод Total-Field / Scattered-Field

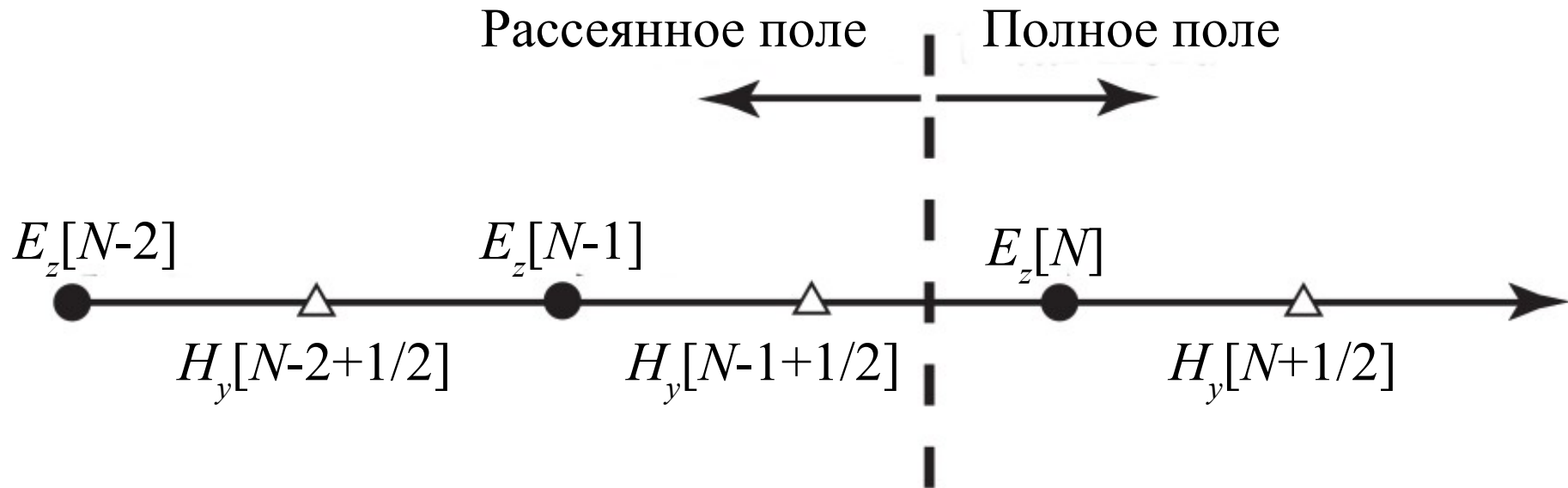
$$\mathbf{E}_{\text{полн}} = \mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{расс}}$$

$$\mathbf{H}_{\text{полн}} = \mathbf{H}_{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\text{расс}}$$



Метод Total-Field / Scattered-Field. ⁸⁴

Левая граница



$H_y[N-1 + 1/2] = H_y[N - 1/2]$ — последняя ячейка в области
рассеянного поля.

$E_z[N]$ — первая ячейка в области полного поля.

Метод Total-Field / Scattered-Field

Важно! Только рассеянное поле должно использоваться при обновлении ячеек в области рассеянного поля.

Только полное поле должно использоваться при обновлении ячеек в области полного поля

Поле на границе

Total-Field / Scattered-Field

Рассмотрим электрическую компоненту поля E_z

проблема

$$\overbrace{E_z^{q+1}[N]}^{\text{полн}} = \overbrace{E_z^q[N]}^{\text{полн}} + \frac{\Delta_t}{\epsilon \epsilon_0 \Delta_x} \left(\overbrace{H_y^{q+1/2}[N+1/2]}^{\text{полн}} - \overbrace{H_y^{q+1/2}[N-1/2]}^{\text{расс}} \right)$$

Поле на границе

Total-Field / Scattered-Field

Введем дополнительный магнитный источник в точке $(N - 1/2)\Delta x$

$$\begin{aligned}
 \overbrace{E_z^{q+1}[N]}^{\text{полн}} &= \overbrace{E_z^q[N]}^{\text{полн}} + \\
 &+ \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left(\overbrace{H_y^{q+1/2}[N+1/2]}^{\text{полн}} - \left\{ \overbrace{H_y^{q+1/2}[N-1/2]}^{\text{расс}} + \overbrace{H_y^{\text{inc}}[N-1/2, q+1/2]}^{\text{пад}} \right\} \right)
 \end{aligned}$$

Поле на границе

Total-Field / Scattered-Field

Введем дополнительный магнитный источник в точке $(N - 1/2)\Delta x$

$$\begin{aligned}
 \overbrace{E_z^{q+1}[N]}^{\text{полн}} &= \overbrace{E_z^q[N]}^{\text{полн}} + \\
 &+ \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left(\overbrace{H_y^{q+1/2}[N+1/2]}^{\text{полн}} - \left\{ \overbrace{H_y^{q+1/2}[N-1/2]}^{\text{расс}} + \overbrace{\left(-\frac{1}{W} E_z^{\text{inc}}[N-1/2, q+1/2] \right)}^{\text{над}} \right\} \right)
 \end{aligned}$$

Total-Field / Scattered-Field

$$E_z^{q+1}[N] \leftarrow E_z^q[N] + \frac{\Delta_t}{\epsilon \epsilon_0 \Delta_x} \left(H_y^{q+1/2}[N+1/2] - H_y^{q+1/2}[N-1/2] \right)$$

$$E_z^{q+1}[N] \leftarrow E_z^{q+1}[N] + \frac{\Delta_t}{\epsilon \epsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{W} E_z^{inc}[N-1/2, q+1/2]$$

Total-Field / Scattered-Field

$$E_z^{q+1}[N] = E_z^{q+1}[N] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{W} E_z^{inc}[N-1/2, q+1/2]$$

$$W = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}} = W_0 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad \left| \quad \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} = \frac{W_0 S_c}{\varepsilon}$$

$$E_z^{q+1}[N] = E_z^{q+1}[N] + \frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} E_z^{inc}[N-1/2, q+1/2]$$

Для свободного пространства и если $S_c = 1$:


$$E_z^{q+1}[N] = E_z^{q+1}[N] + E_z^{inc}[\underline{N-1/2}, \underline{q+1/2}]$$

Поле на границе

Total-Field / Scattered-Field

$$\overbrace{H_y^{q+1/2}[N-1/2]}^{расс} = \overbrace{H_y^{q-1/2}[N-1/2]}^{расс} + \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x} \left(\overbrace{E_z^q[N]}^{полн} - \overbrace{E_z^q[N-1]}^{расс} \right)$$

проблема



Поле на границе

Total-Field / Scattered-Field

$$\begin{aligned}
 \overbrace{H_y^{q+1/2}[N-1/2]}^{\text{расс}} &= \overbrace{H_y^{q-1/2}[N-1/2]}^{\text{расс}} + \\
 &+ \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} \left(\overbrace{\left(\overbrace{E_z^q[N]}^{\text{полн}} - \overbrace{E_z^{inc}[N, q]}^{\text{пад}} \right)}^{\text{расс}} - \overbrace{E_z^q[N-1]}^{\text{расс}} \right)
 \end{aligned}$$

Поле на границе

Total-Field / Scattered-Field

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] \leftarrow H_y^{q-1/2}[N-1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} \left(E_z^q[N] - E_z^q[N-1] \right)$$

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N-1/2] - \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} E_z^{inc}[N, q]$$

Поле на границе

Total-Field / Scattered-Field

Для свободного пространства и $S_c = 1$:

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] \leftarrow H_y^{q-1/2}[N-1/2] + \frac{1}{W_0} \left(E_z^q[N] - E_z^q[N-1] \right)$$

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N-1/2] - \frac{1}{W_0} E_z^{inc}[N, q]$$

Поле на границе Total-Field / Scattered-Field. ⁹⁵

Левая граница

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N-1/2] - \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} E_z^{inc}[N, q]$$

$$E_z^{q+1}[N] \leftarrow E_z^{q+1}[N] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{W} E_z^{inc}[N-1/2, q+1/2]$$

Поле на границе Total-Field / Scattered-Field. ⁹⁶

Левая граница

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N-1/2] - \frac{S_c}{W_0 \mu} E_z^{inc}[N, q]$$

$$E_z^{q+1}[N] \leftarrow E_z^{q+1}[N] + \frac{S_c}{\sqrt{\epsilon} \mu} E_z^{inc}[N-1/2, q+1/2]$$

Поле на границе Total-Field / Scattered-Field 97 для свободного пространства и $S_c=1$.

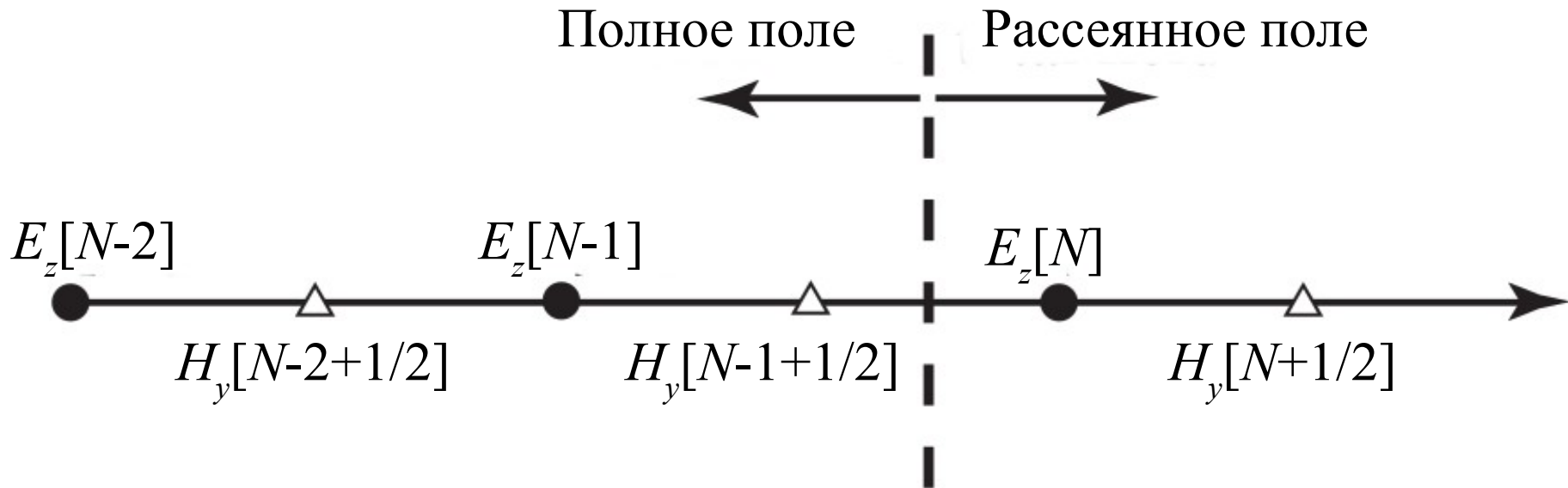
Левая граница

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N-1/2] - \frac{1}{W_0} E_z^{inc}[N, q]$$

$$E_z^{q+1}[N] \leftarrow E_z^{q+1}[N] + E_z^{inc}[N-1/2, q+1/2]$$

Метод Total-Field / Scattered-Field. ⁹⁸

Правая граница



$H_y[N-1 + 1/2] = H_y[N - 1/2]$ — последняя ячейка в области

полного поля.

$E_z[N]$ — первая ячейка в области рассеянного поля.

Поле на границе Total-Field / Scattered-Field. ⁹⁹

Правая граница

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N-1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} E_z^{inc}[N, q]$$

$$E_z^{q+1}[N] \leftarrow E_z^{q+1}[N] - \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \frac{1}{W} E_z^{inc}[N-1/2, q+1/2]$$

Поле на границе Total-Field / Scattered-Field. 100

Правая граница

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N-1/2] + \frac{S_c}{W_0 \mu} E_z^{inc}[N, q]$$

$$E_z^{q+1}[N] \leftarrow E_z^{q+1}[N] - \frac{S_c}{\sqrt{\epsilon} \mu} E_z^{inc}[N-1/2, q+1/2]$$

Поле на границе Total-Field / Scattered-Field 101 для свободного пространства и $S_c=1$.

Правая граница

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N-1/2] + \frac{1}{W_0} E_z^{inc}[N, q]$$

$$E_z^{q+1}[N] \leftarrow E_z^{q+1}[N] - E_z^{inc}[N-1/2, q+1/2]$$

Схема алгоритма FDTD с использованием метода Total Field / Scattered field

Начало

Задание начальных условий $E_z^0, H_y^{1/2}$

Цикл по времени $t = [0 \dots \text{maxTime} - 1]$:

 Цикл по пространству $m = [0 \dots \text{maxSize} - 2]$:

 Расчет $H_y^{q+1/2}$

Ввод поля $H^{\text{inc}}[N, t]$

 Цикл по пространству $m = [1 \dots \text{maxSize} - 1]$:

 Расчет E_z^{q+1}

Ввод поля $E^{\text{inc}}[N-1/2, t+1/2]$

Вывод результатов

Конец

Уравнение плоской волны для гауссова сигнала

Волновое уравнение

Волновое уравнение при отсутствии сторонних токов:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

Одномерное волновое уравнение

105

f — одномерная функция

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

Решение одномерного волнового уравнения

$f(\xi)$ — решение волнового уравнения, если:

- $f(\xi)$ дважды дифференцируема
- ξ можно заменить на $t \pm x / v$
(для одномерного случая)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0}}$$

$$f(\xi) = f(t \pm x / v) = f(x, t)$$

Гауссов импульс в дискретной форме

107

$$f(t) = f(q \Delta_t) = e^{-\left(\frac{(q - d_g) \Delta_t}{w_g \Delta_t}\right)^2} = e^{-\left(\frac{q - d_g}{w_g}\right)^2} = f[q]$$

Гауссов импульс в дискретной форме

108

Делаем замену t на $t - x / v$

$$t - \frac{x}{v} = q \Delta_t - \frac{m \Delta_x}{v} = q \Delta_t - \frac{m \Delta_x \sqrt{\epsilon \mu}}{c} =$$

$$= \left(q - \frac{m \Delta_x \sqrt{\epsilon \mu}}{c \Delta_t} \right) \Delta_t = \left(q - \frac{m \sqrt{\epsilon \mu}}{S_c} \right) \Delta_t$$

Для свободного пространства и $S_c = 1$:

$$t - \frac{x}{c} = (q - m) \Delta_t$$

Уравнение плоской волны в форме гауссова импульса в дискретном виде

$$E_z^{\text{inc}}[m, q] = e^{-\left(\frac{(q - m\sqrt{\epsilon\mu}/S_c)\Delta_t - d_g\Delta_t}{w_g\Delta_t}\right)^2} = e^{-\left(\frac{(q - m\sqrt{\epsilon\mu}/S_c) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$H_y^{\text{inc}}[m, q] = -\frac{1}{W} E_z^{\text{inc}}[m, q] = -\frac{1}{W} e^{-\left(\frac{(q - m\sqrt{\epsilon\mu}/S_c) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

Уравнение плоской волны в форме гауссова импульса в дискретном виде

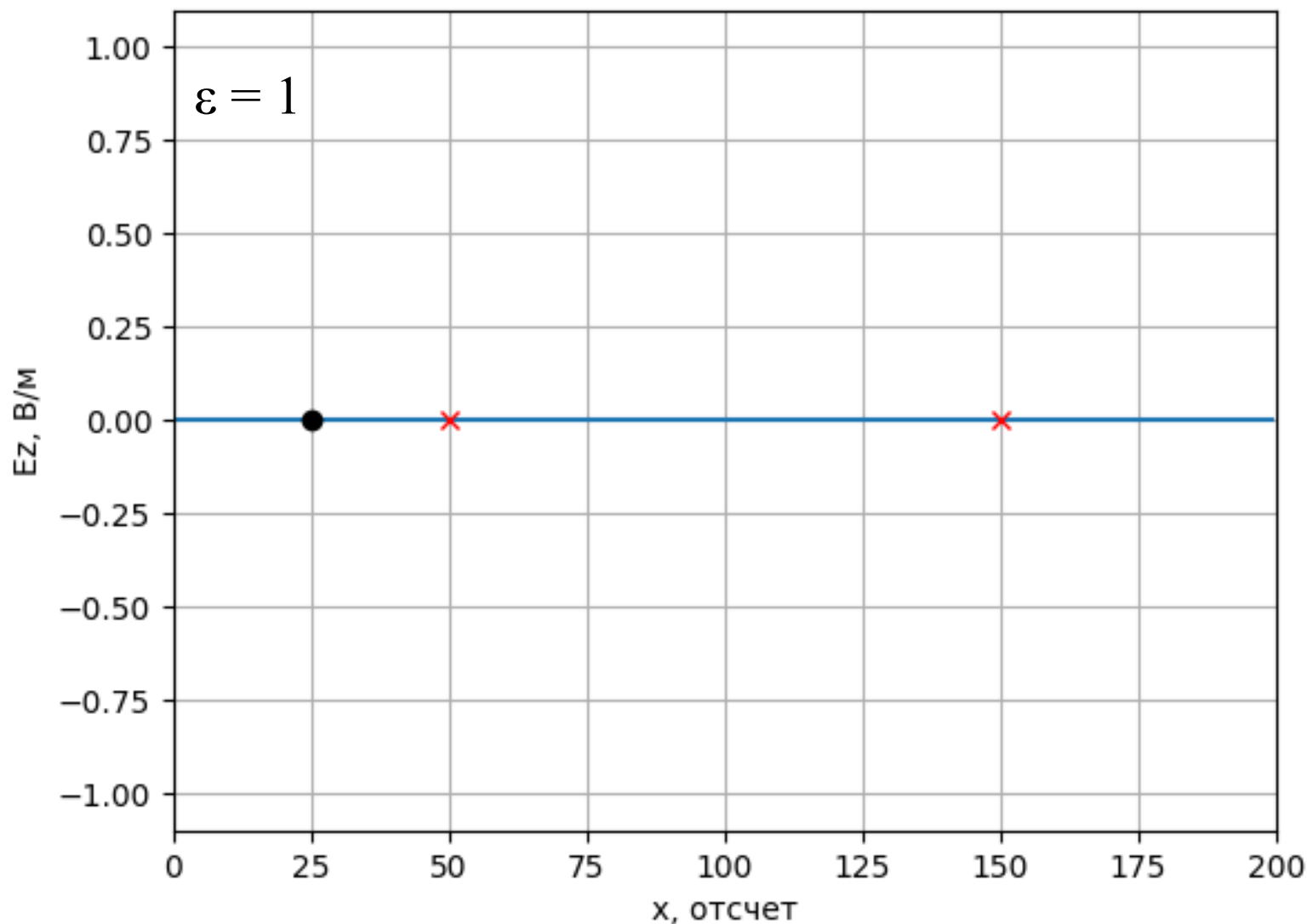
Для свободного пространства и $S_c = 1$:

$$E_z^{\text{inc}}[m, q] = e^{-\left(\frac{(q-m)\Delta_t - d_g \Delta_t}{w_g \Delta_t}\right)^2} = e^{-\left(\frac{(q-m) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$H_y^{\text{inc}}[m, q] = -\frac{1}{W_0} E_z^{\text{inc}}[m, q] = -\frac{1}{W_0} e^{-\left(\frac{(q-m) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

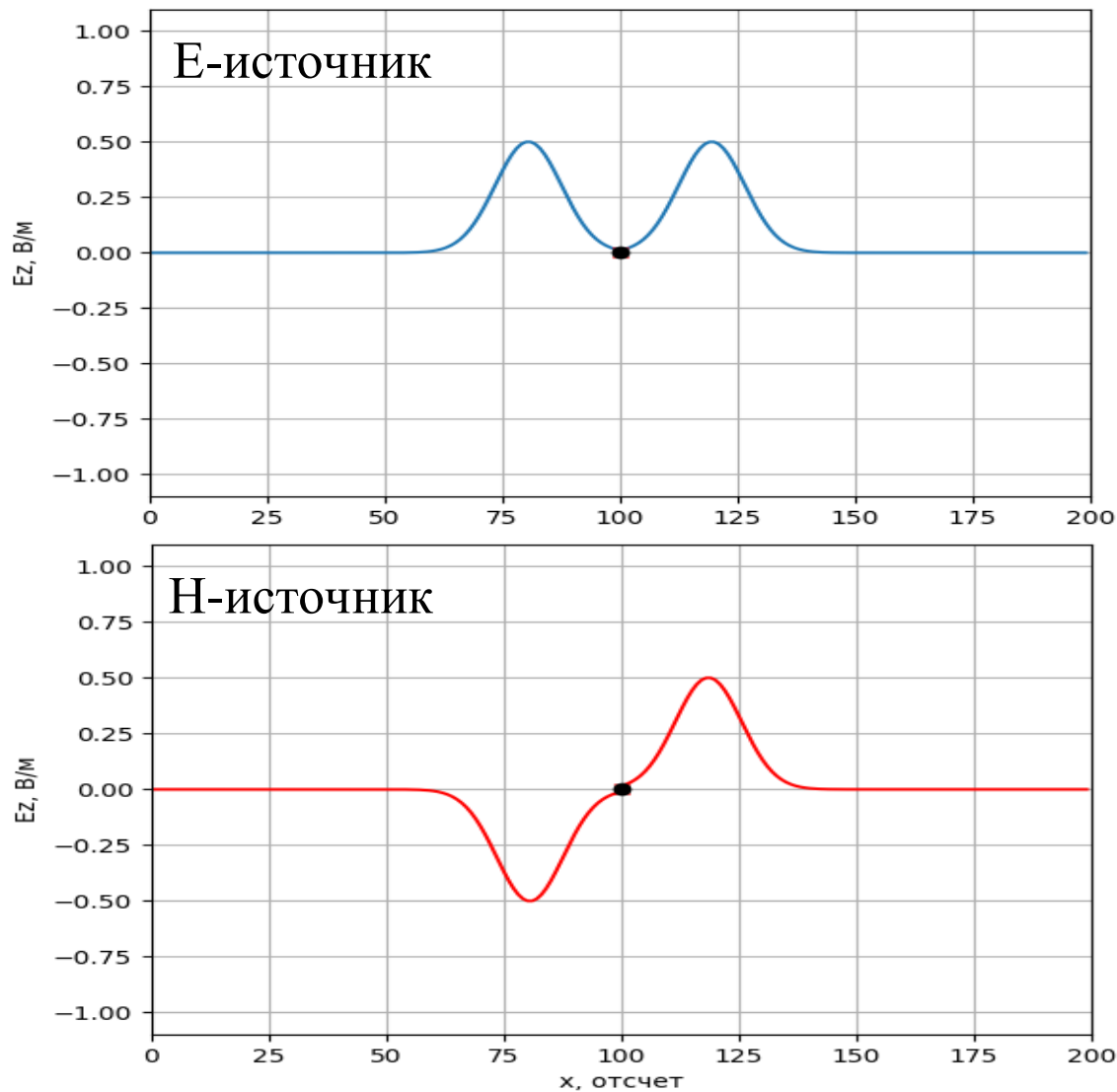
Демонстрации метода Total Field / Scattered Field

Демонстрация метода TFSF (fdtd_tfsf_gauss.py)



Источники при использовании метода полного поля / рассеянного поля. Левая граница

113



Поле на границе

Total-Field / Scattered-Field

Пусть для введенного источника $x = 0$ соответствует N -й ячейке

$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] = H_y^{q+1/2}[N-1/2] - \frac{1}{W_0} E_z^{inc}[0, q]$$

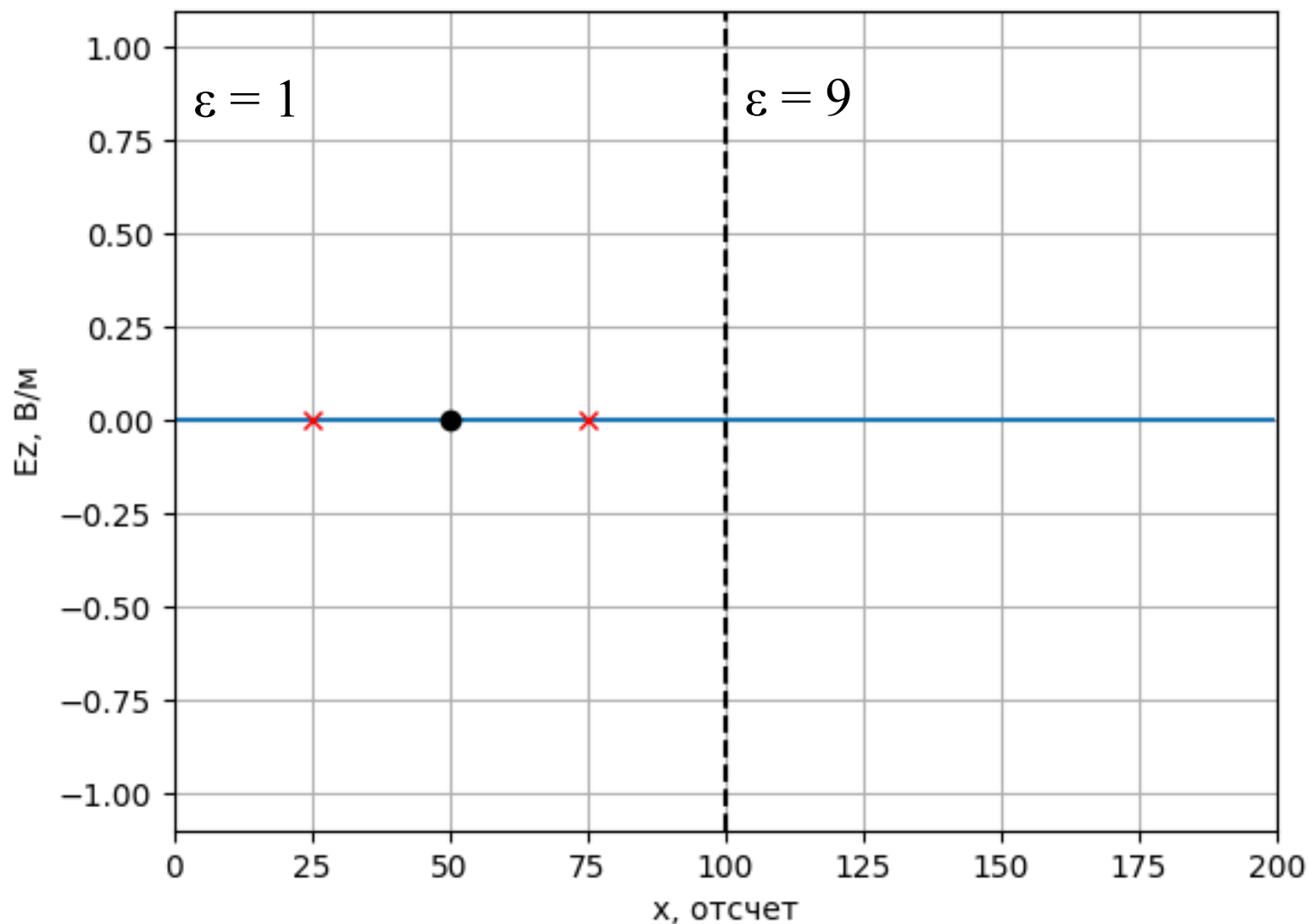
$$E_z^{q+1}[N] = E_z^{q+1}[N] + E_z^{inc}[-1/2, q+1/2]$$

Источники для метода Total-Field / Scattered-Field

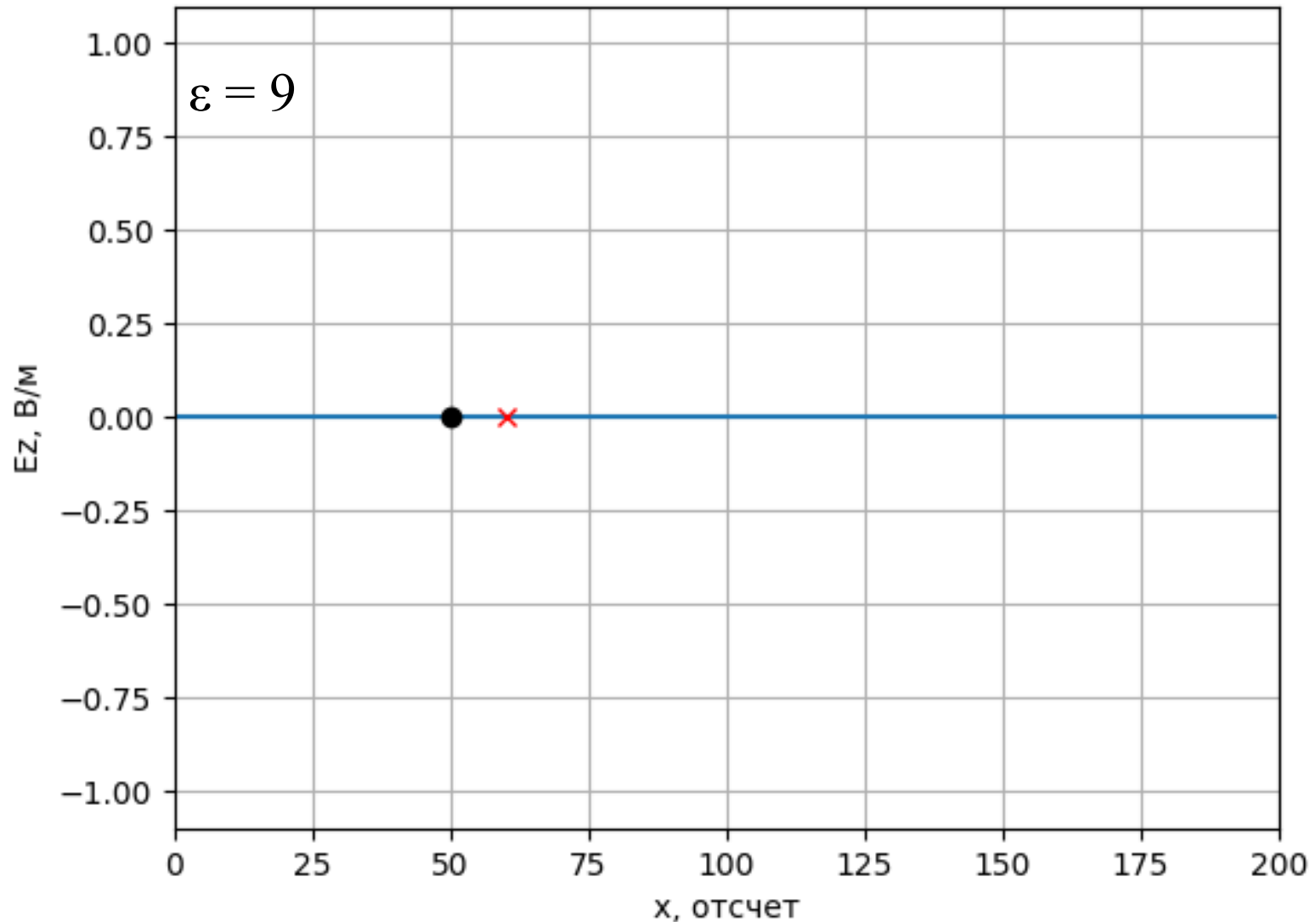
$$E_z^{\text{inc}}[-1/2, q+1/2] = e^{-\left(\frac{((q+0.5)-(-0.5))-d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$E_z^{\text{inc}}[0, q] = e^{-\left(\frac{q-d_g}{w_g}\right)^2}$$

Распространение электромагнитной волны в неоднородных средах с использованием метода TFSSF (fdtd_tfsf_heterogen.py)

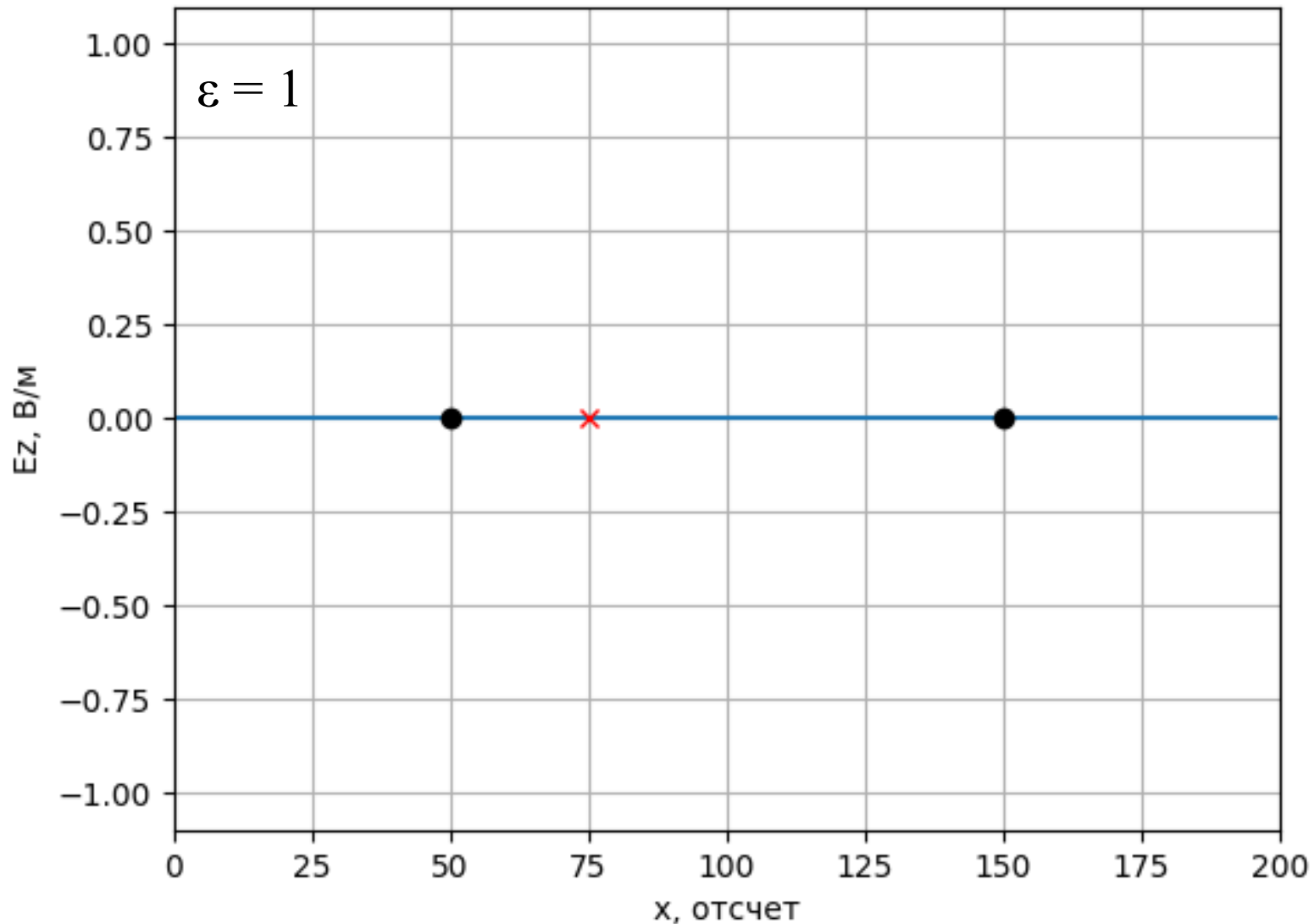


Метод Total Field / Scattered Field с источником, расположенным в диэлектрике (fdtd_tfsf_medium_gauss.py)



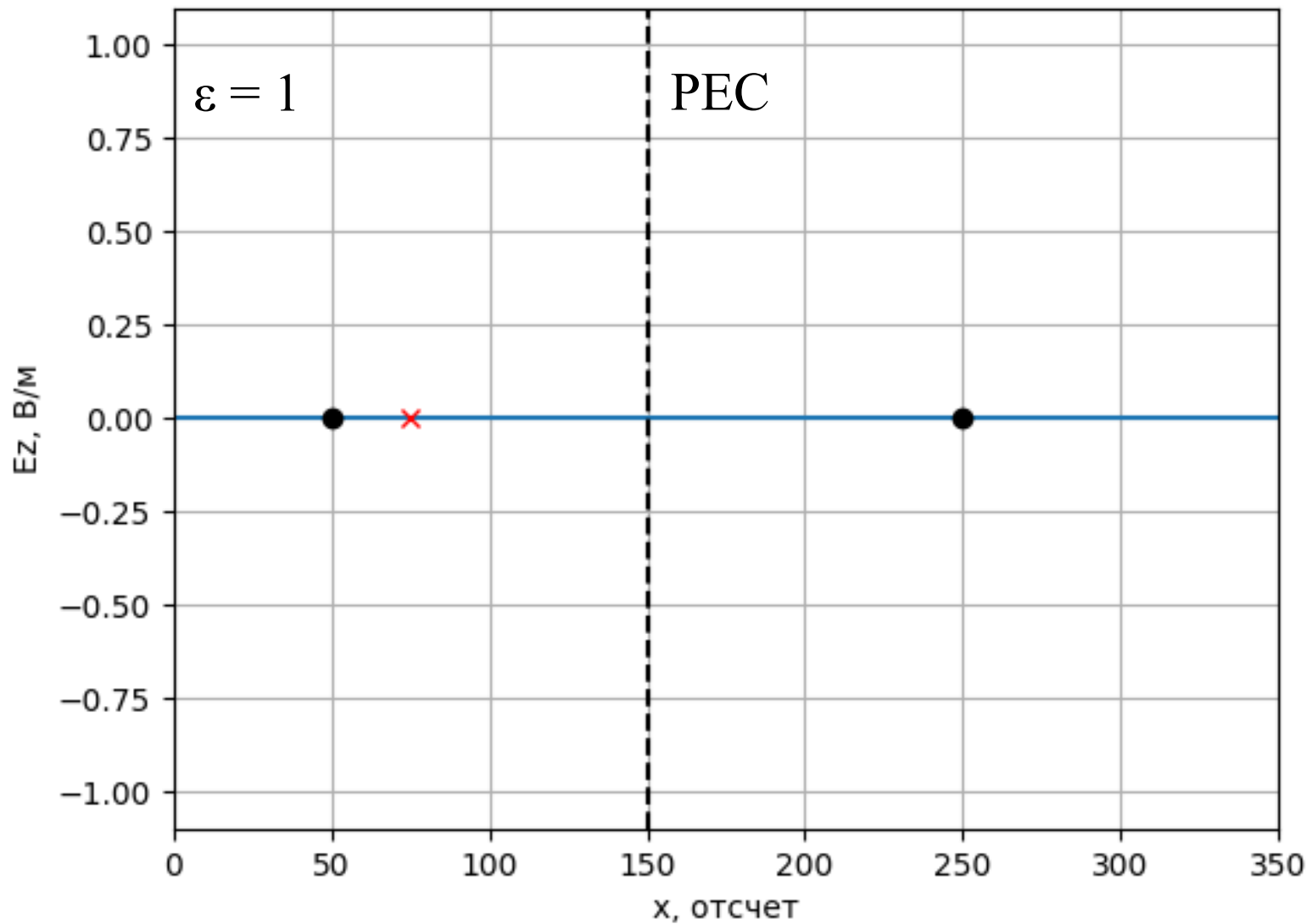
Метод Total Field / Scattered Field с использованием двух границ (fdtd_tfsf_left_right_gauss.py)

118



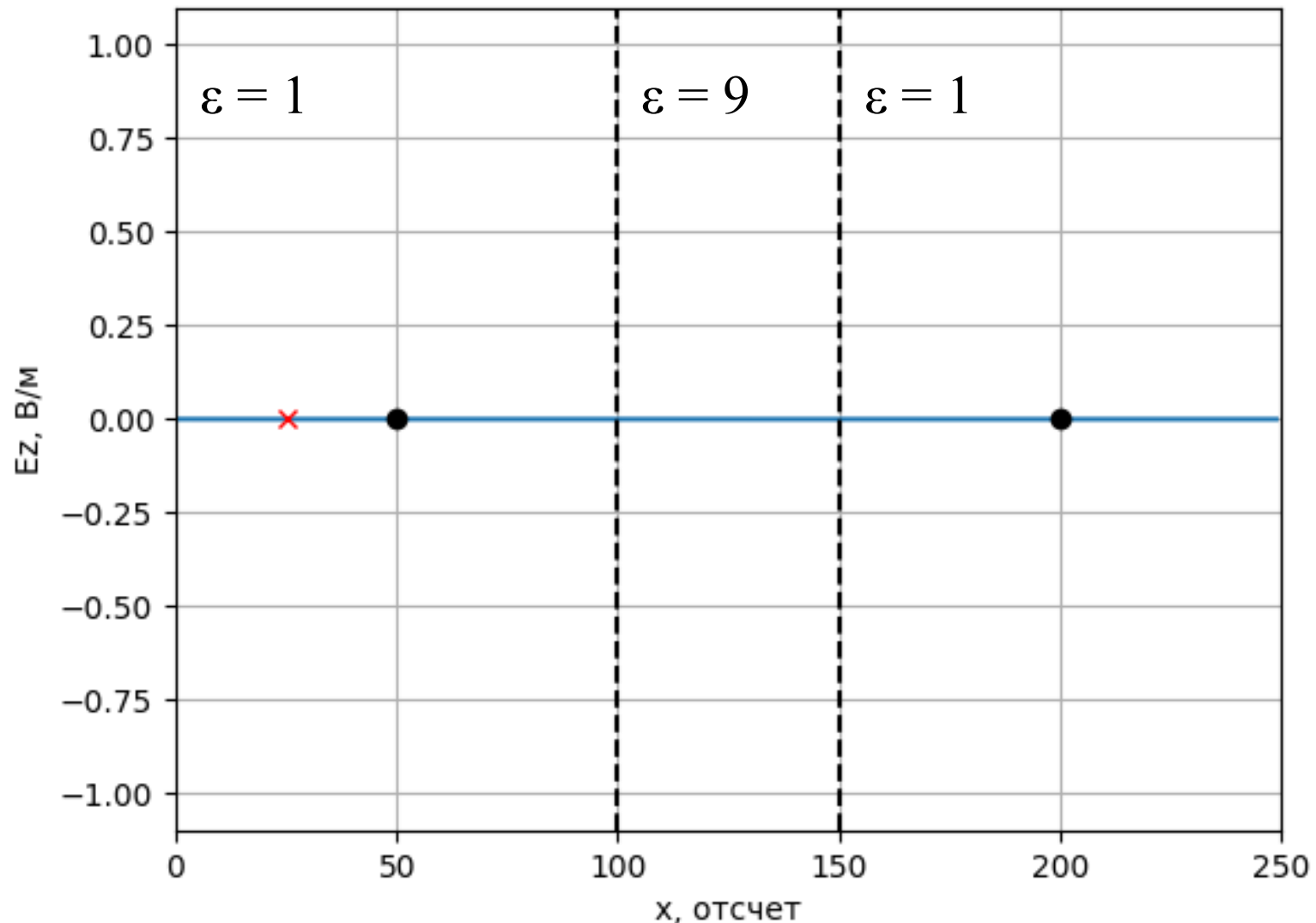
Метод Total Field / Scattered Field с использованием двух границ (fdtd_tfsf_left_right_gauss_pes.py)

119



Метод Total Field / Scattered Field с использованием двух границ (fdtd_tfsf_layer_gauss.py)

120



**Моделирование
распространения
электромагнитной волны в
среде с потерями**

Закон Ампера для среды с потерями

При $\mathbf{j}_{\text{ст}} = 0$

$$\mathbf{j} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H}$$

или

$$\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H}$$

Закон Ампера для среды с потерями

123

Для одномерного случая:

$$\sigma E_z + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

Закон Ампера для среды с потерями в дискретном виде

Запишем производные в дискретном виде
для точки $(m\Delta_x; (q + 1/2)\Delta_t)$:

$$\sigma E_z^{q+1/2}[m] + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^q[m]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x}$$

Закон Ампера для среды с потерями в дискретном виде

проблема

$$\sigma E_z^{q+1/2}[m] + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^q[m]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x}$$

$$E_z^{q+1/2}[m] \approx \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^q[m]}{2}$$

Закон Ампера для среды с потерями в дискретном виде

$$E_z^{q+1/2}[m] \approx \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^q[m]}{2}$$

тогда:

$$\begin{aligned} \sigma \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^q[m]}{2} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^q[m]}{\Delta_t} &= \\ = \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x} \end{aligned}$$

Расчет электрической компоненты поля для среды с потерями

$$E_z^{q+1}[m] = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_z^q[m] +$$

$$+ \frac{\frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0} \Delta_x}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$

Расчет электрической компоненты поля для среды с потерями

$$\begin{aligned}
 E_z^{q+1}[m] = & \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_z^q[m] + \\
 & + \frac{\frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0} \Delta_x}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)
 \end{aligned}$$

Расчет электрической компоненты поля для среды с потерями

Для случая $\sigma = 0$ См/м:

$$E_z^{q+1}[m] =$$

$$= E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$

Закон Фарадея для среды с потерями

$$-\dot{\mathbf{j}}_m - \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}$$

или

$$-\sigma_m \mathbf{H} - \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}$$

Закон Фарадея для среды с потерями

Для одномерного случая:

$$\sigma_m H_y + \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

Закон Фарадея для среды с потерями в дискретном виде

Запишем производные в дискретном виде
для точки $((m + 1/2)\Delta_x; q\Delta_t)$:

проблема



$$\sigma_m H_y^q[m+1/2] + \mu \mu_0 \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{E_z^q[m+1] - E_z^q[m]}{\Delta_x}$$

$$H_y^q[m+1/2] \approx \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] + H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{2}$$

Закон Фарадея для среды с потерями в дискретном виде

$$H_y^q[m+1/2] \approx \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] + H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{2}$$

$$\begin{aligned} & \sigma_m \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] + H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{2} + \\ & + \mu \mu_0 \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{\Delta_t} = \\ & = \frac{E_z^q[m+1] - E_z^q[m]}{\Delta_x} \end{aligned}$$

Расчет магнитной компоненты поля для среды с потерями

$$\begin{aligned}
 H_y^{q+1/2}[m+1/2] = & \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \\
 & + \frac{\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0} \Delta_x}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \left(E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right)
 \end{aligned}$$

Расчет магнитной компоненты поля для среды с потерями

$$\begin{aligned}
 H_y^{q+1/2}[m+1/2] = & \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \\
 & + \frac{\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0} \Delta_x}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \left(E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right)
 \end{aligned}$$

Расчет магнитной компоненты поля

Для случая $\sigma_m = 0$:

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} \left(E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right)$$

Моделирование среды с потерями. Комментарии к реализации

Реализуем случай
 $\sigma_m = 0, Sc = 1$

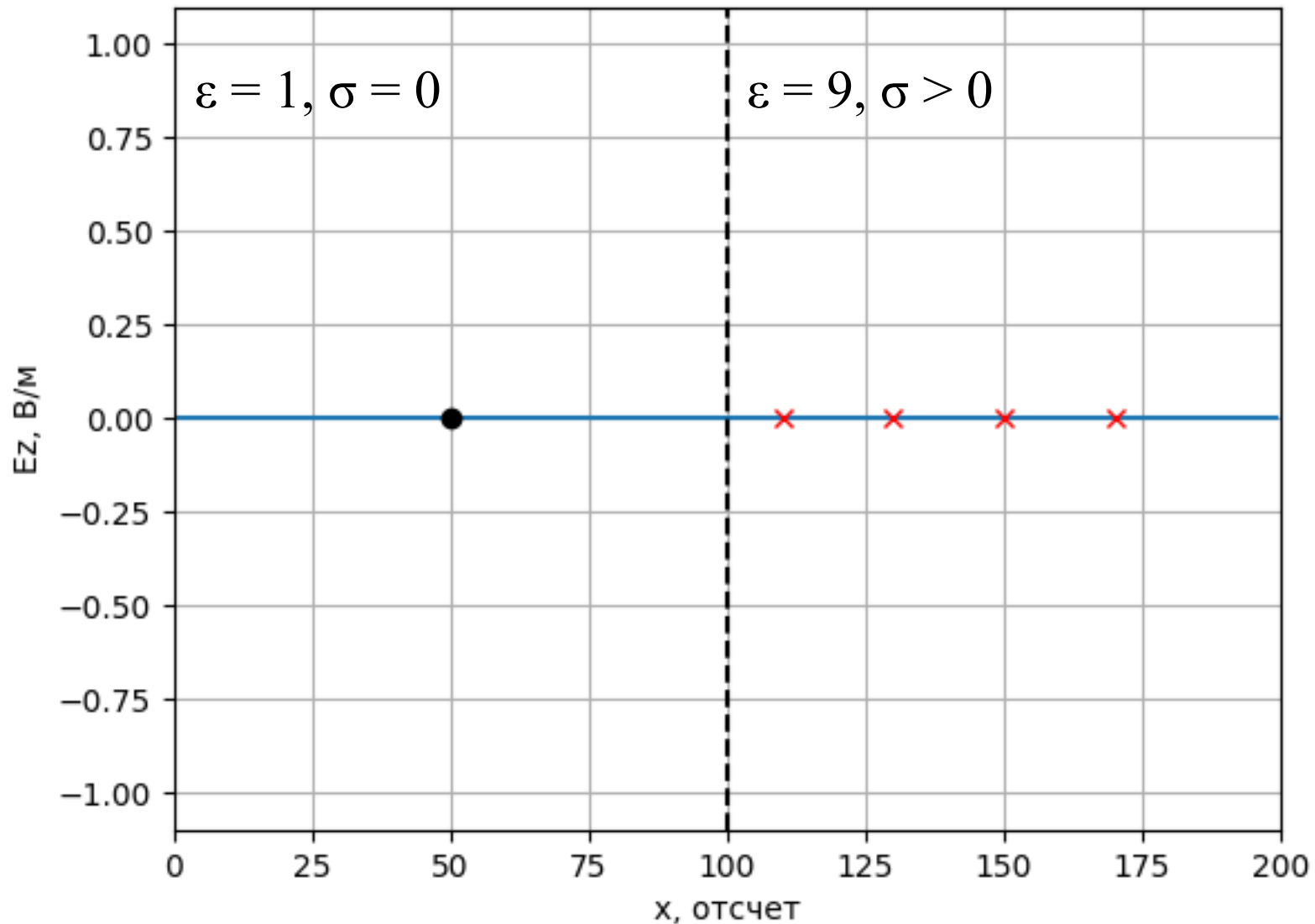
$$loss = \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}$$

$$ceze = \frac{1 - loss}{1 + loss}$$

$$cezh = \frac{W_0 / \varepsilon}{1 + loss}$$

Геометрия решаемой задачи (fdtd_loss.py)

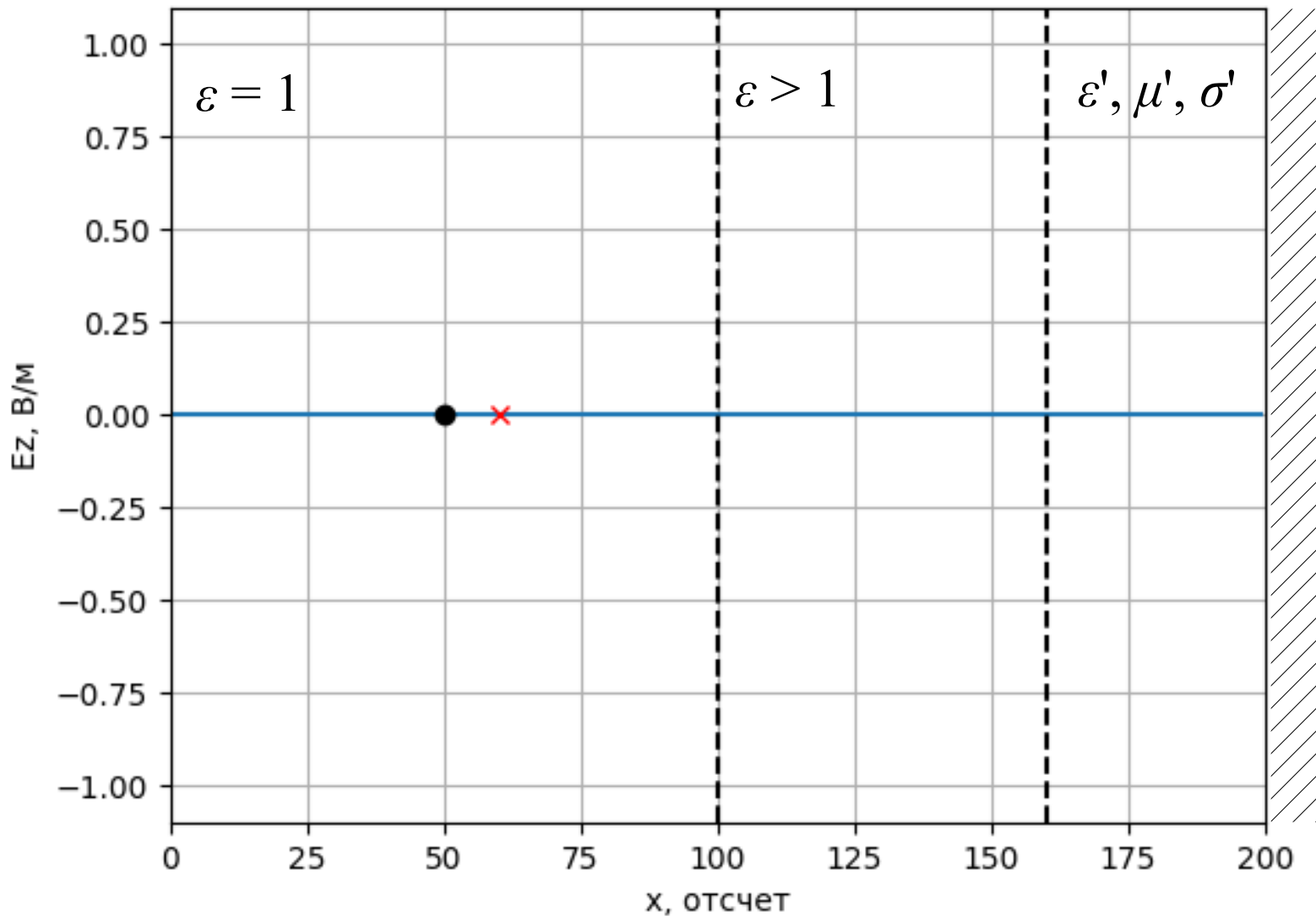
140



Поглощающие граничные условия

**Поглощающие граничные
условия с использованием
полностью согласованного слоя**

Геометрия решаемой задачи



Коэффициент отражения

Для волны, падающей по нормали:

$$\Gamma = \frac{\dot{E}_{отр}}{\dot{E}_{пад}} = \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}$$

Волновое сопротивление в среде с потерями¹⁴⁵

$$W = \sqrt{\frac{\mu \mu_0 \left(1 - i \frac{\sigma_m}{\omega \mu \mu_0} \right)}{\varepsilon \varepsilon_0 \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \right)}} = W_0 \sqrt{\frac{\mu \left(1 - i \frac{\sigma_m}{\omega \mu \mu_0} \right)}{\varepsilon \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \right)}}$$

Волновое сопротивление в среде с потерями¹⁴⁶

$$W = \sqrt{\frac{\mu \mu_0 \left(1 - i \frac{\sigma_m}{\omega \mu \mu_0} \right)}{\varepsilon \varepsilon_0 \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \right)}} = W_0 \sqrt{\frac{\mu \left(1 - i \frac{\sigma_m}{\omega \mu \mu_0} \right)}{\varepsilon \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \right)}}$$

Если $\frac{\sigma_m}{\omega \mu \mu_0} = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0}$, то $W = W_0 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

Реализация поглощающих граничных условий

$$loss_m = \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}$$

$$loss_e = \frac{\sigma \Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$

Если

$$\frac{\sigma_m}{\omega\mu\mu_0} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}, \text{ то}$$

$$\frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0} = \frac{\sigma \Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$

или

$$loss_m = loss_e$$

Реализация поглощающих граничных условий

$$loss_e = loss_m = loss = \frac{\sigma_m \Delta_t}{2 \mu \mu_0} = \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0} = 0.02$$

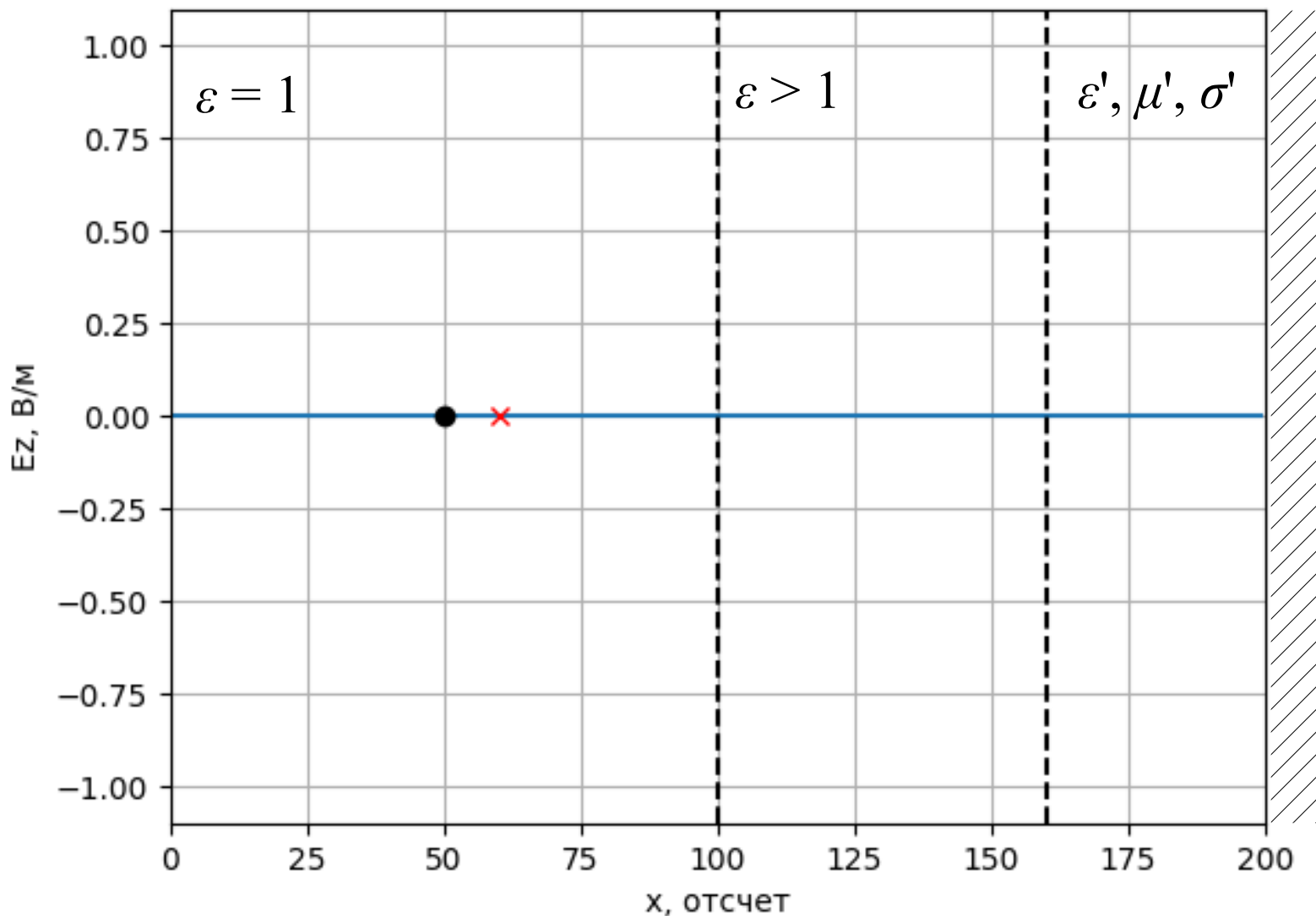
$$ceze = \frac{1 - loss}{1 + loss}$$

$$cezh = \frac{W_0 / \varepsilon}{1 + loss}$$

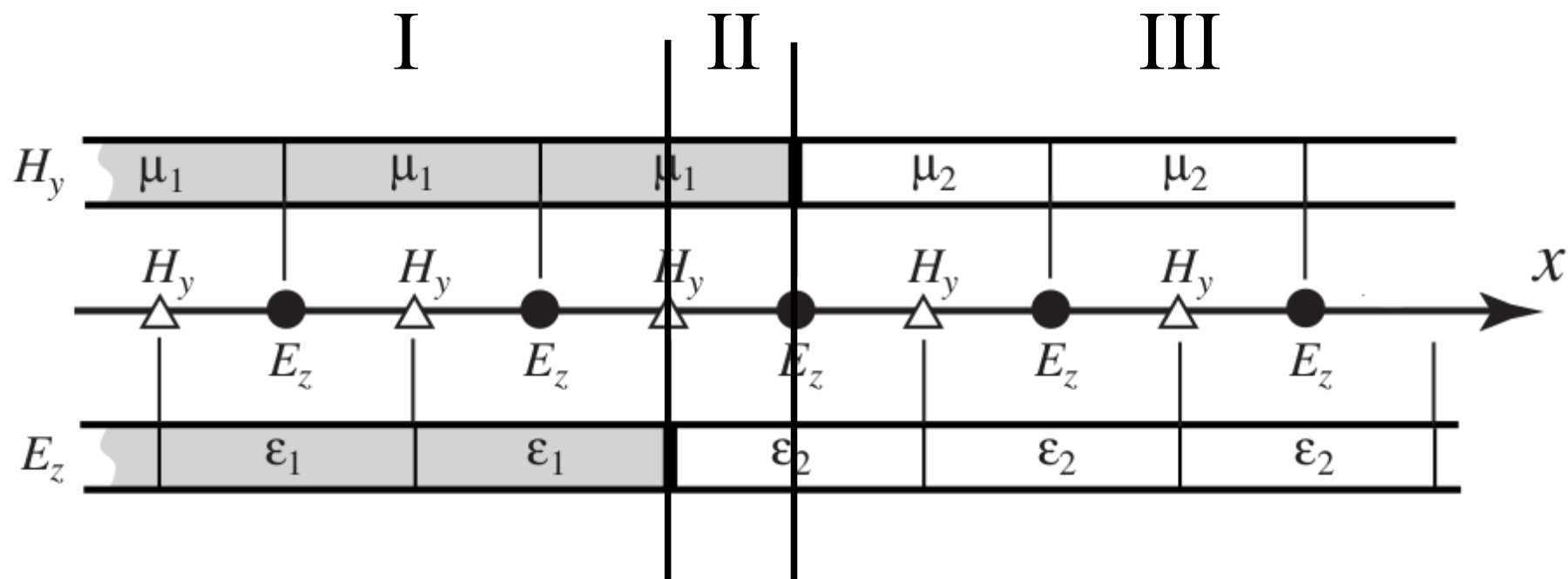
$$chye = \frac{1 / W_0}{1 + loss}$$

$$chyh = \frac{1 - loss}{1 + loss}$$

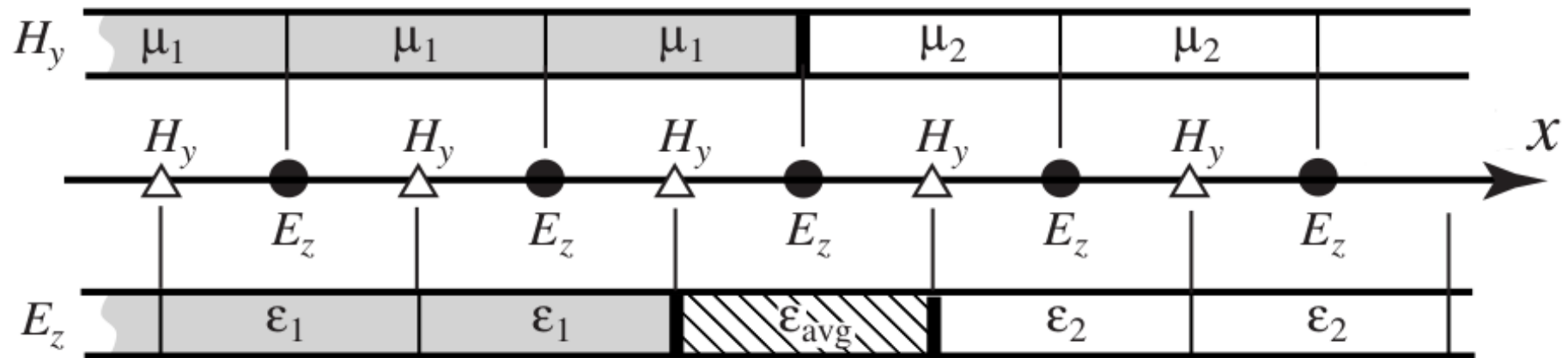
Демонстрация граничных условий с использованием полностью согласованного слоя (fdtd_loss_boundary.py)



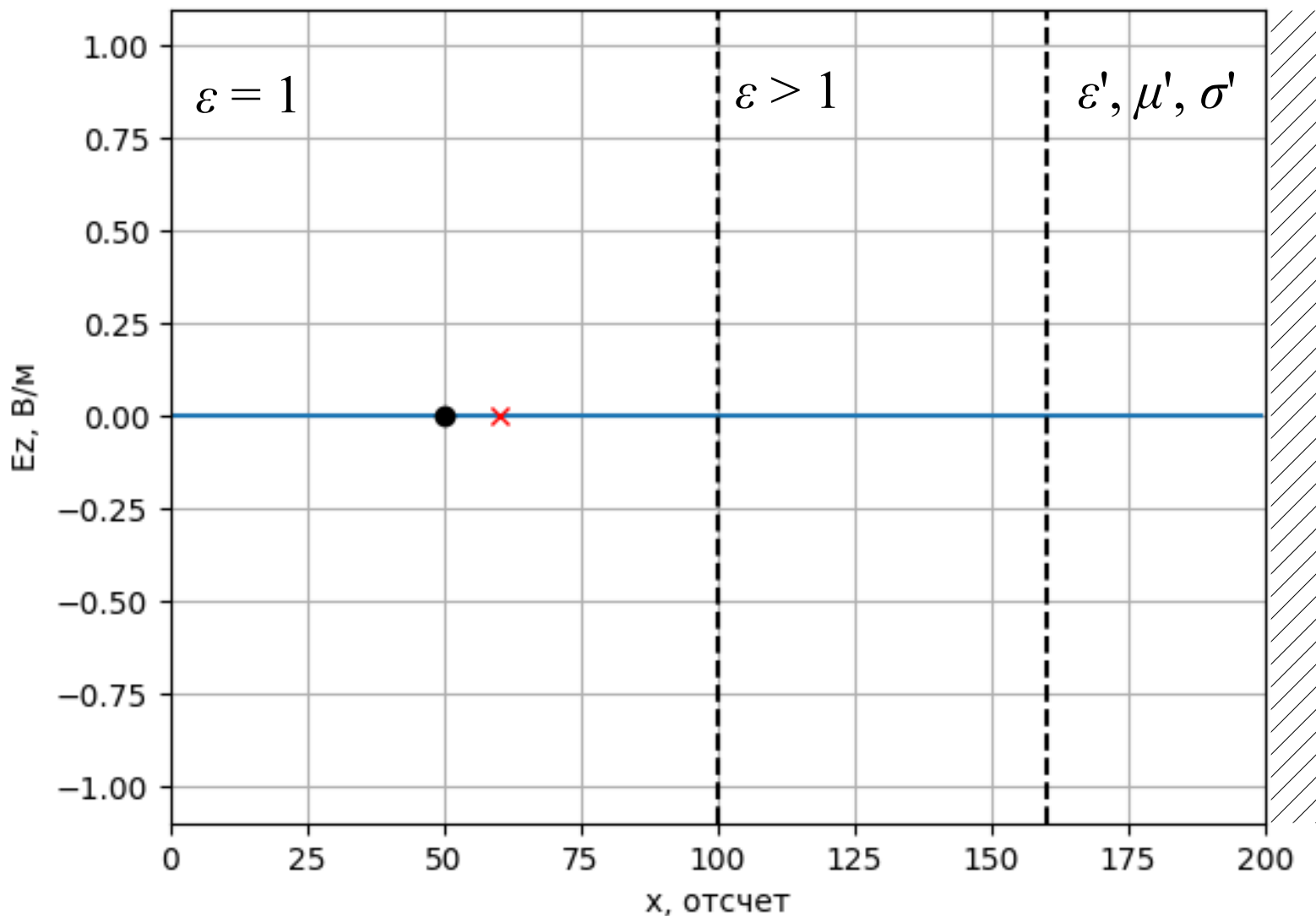
Погрешность из-за дискретной сетки



Погрешность из-за дискретной сетки



Демонстрация граничных условий с использованием полностью согласованного слоя (fdtd_loss_boundary_2.py)



Поглощающие граничные условия (Absorbing boundary condition - ABC)

Типы поглощающих граничных условий

154

Поглощающие граничные условия можно разделить на две группы:

- Условия, аннигилирующие вытекающие волны.
- Условия, аппроксимирующие уравнение волны, распространяющейся только в одном направлении.

Линейные операторы

Оператор A называется линейным, если выполняются следующие условия:

- $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2$
- $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}$

Свойства линейных операторов

Для двух линейных операторов A и B выполняются условия:

$$(A + B)(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x})$$

$$(AB)(\mathbf{x}) = A(B(\mathbf{x}))$$

Волновое уравнение в одномерном случае

$$\nabla^2 E_z - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

Волновое уравнение в одномерном случае

Перепишем волновое уравнение в операторном виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_z = 0$$

Волновое уравнение в одномерном случае

Полученный оператор может быть разложен на произведение двух операторов:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_z = 0$$

Уравнения адвекции

Любая функция E_z , которая удовлетворяет хотя бы одному из следующих уравнений, является решением волнового уравнения:

$$\text{I.} \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

$$\text{II.} \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

Уравнения адвекции

$$E_z(t + x/v) = E_z(t + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} x)$$

- волна, распространяющаяся влево, удовлетворяет первому уравнению адвекции, но не второму.

Покажем это.

Уравнения адвекции

Сделаем замену

$$\xi = t + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} x$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

Уравнения адвекции

$$\xi = t + \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} x$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = 1$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}$$

Уравнения адвекции

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial \xi}$$

Уравнения адвекции

Полученные выражения подставляем в первое уравнение адвекции

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} - \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} = 0$$

$$0 = 0$$

Уравнение удовлетворяется

Уравнения адвекции

Полученные выражения подставляем во второе уравнение адвекции

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

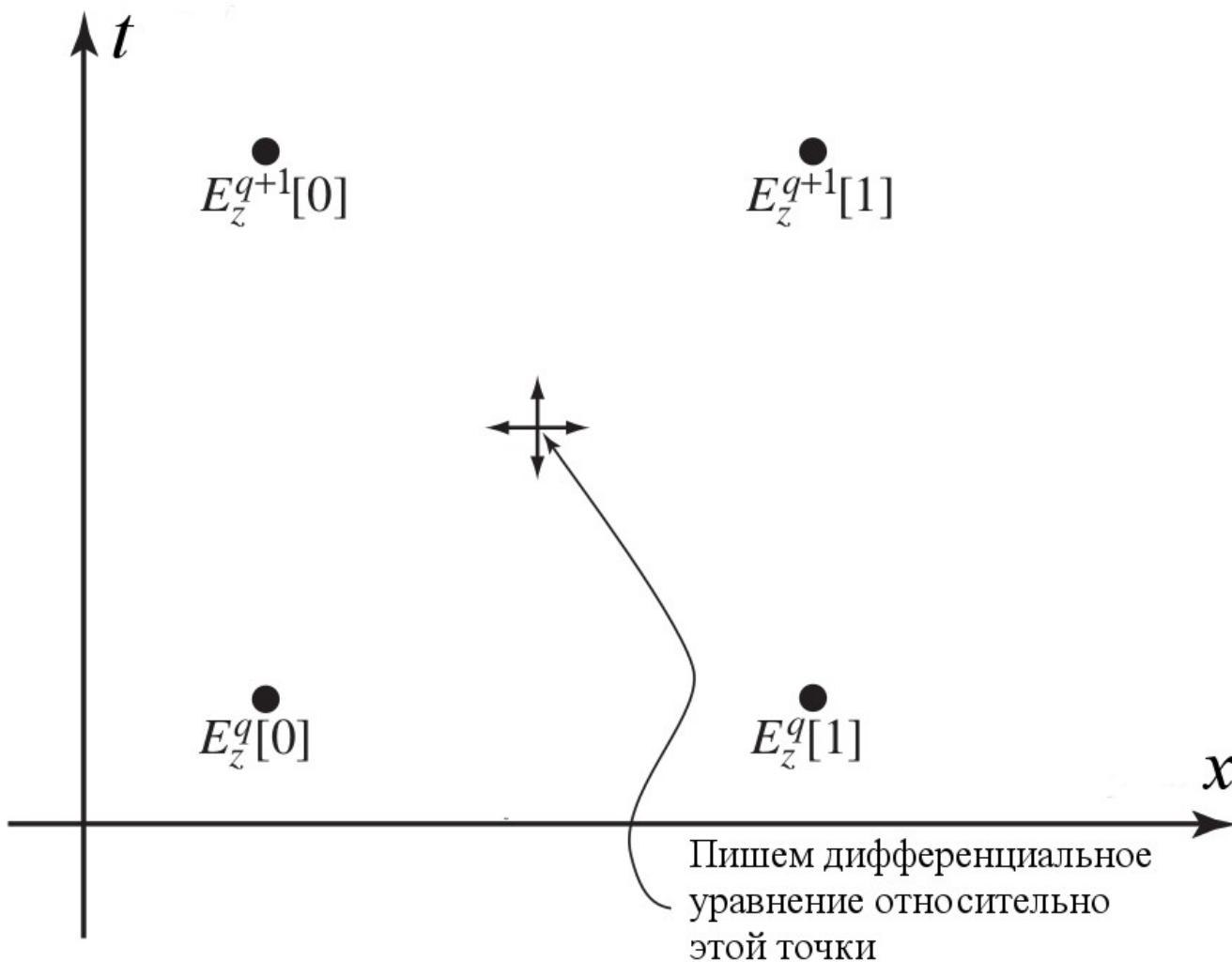
$$\frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} + \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} = 0$$

$$2 \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \neq 0$$

Уравнение не удовлетворяется

Поглощающие граничные условия

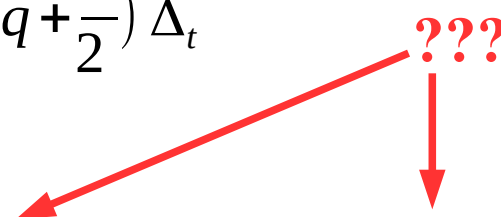
167



Поглощающие граничные условия

168

Запишем производные в уравнении адвекции
через конечно-разностную схему

$$\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} \bigg|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2}) \Delta_t} =$$

$$= \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{E_z^{q+1}[1/2] - E_z^q[1/2]}{\Delta_t}$$

Поглощающие граничные условия

169

$$E_z^{q+1}[1/2] \approx \frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1]}{2}$$

$$E_z^q[1/2] \approx \frac{E_z^q[0] + E_z^q[1]}{2}$$

Поглощающие граничные условия

170

$$\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} \bigg|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} \approx$$
$$\approx \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1]}{2} - \frac{E_z^q[0] + E_z^q[1]}{2}}{\Delta_t}$$

Поглощающие граничные условия

171

Аналогично поступаем со вторым слагаемым в первом уравнении адвекции

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{\partial E_z}{\partial x} \right|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} = \\
 & = \frac{E_z^{q+1/2}[1] - E_z^{q+1/2}[0]}{\Delta_x} \approx \\
 & \approx \frac{\frac{E_z^{q+1}[1] + E_z^q[1]}{2} - \frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^q[0]}{2}}{\Delta_x}
 \end{aligned}$$

Поглощающие граничные условия

172

Подставляем полученные выражения в первое уравнение адвекции

$$\frac{\frac{E_z^{q+1}[1] + E_z^q[1]}{2} - \frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^q[0]}{2}}{\Delta_x} -$$

$$- \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1]}{2} - \frac{E_z^q[0] + E_z^q[1]}{2}}{\Delta_t} = 0$$

Поглощающие граничные условия

173

Из полученного уравнения выражаем $E_x^{q+1}[0]$ и учитываем, что:

$$\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} = \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{c}, \quad S_c = \frac{c \Delta_t}{\Delta_x}$$

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1] + \frac{\frac{S_c}{\sqrt{\epsilon \mu}} - 1}{\frac{S_c}{\sqrt{\epsilon \mu}} + 1} \left(E_z^{q+1}[1] - E_z^q[0] \right)$$

Поглощающие граничные условия

174

Аналогично можно вывести условие для правой границы

$$E_z^{q+1}[M] = E_z^q[M-1] + \frac{\frac{S_c}{\sqrt{\epsilon\mu}} - 1}{\frac{S_c}{\sqrt{\epsilon\mu}} + 1} \left(E_z^{q+1}[M-1] - E_z^q[M] \right)$$

Поглощающие граничные условия

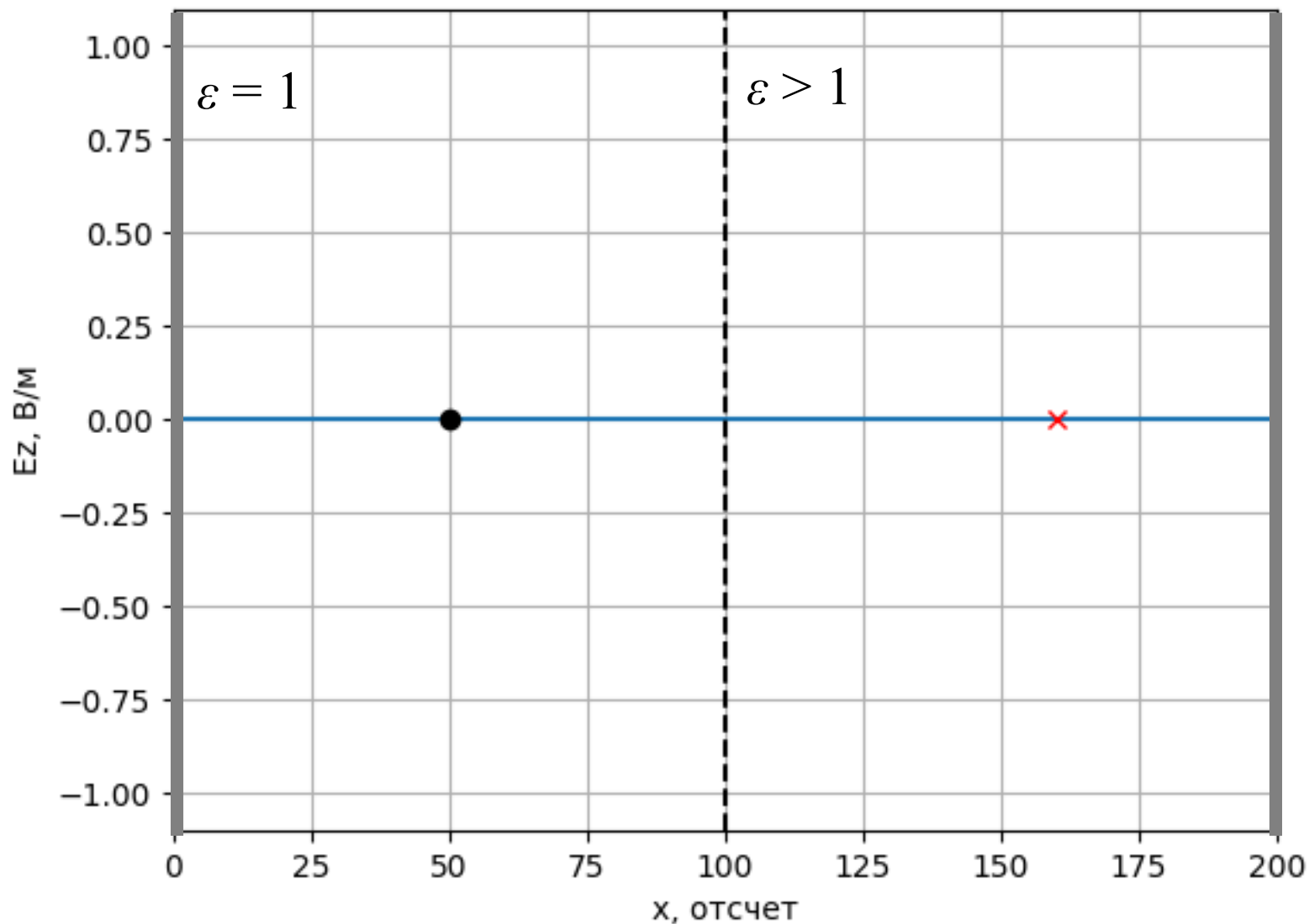
175

Для свободного пространства и $S_c = 1$ выражения сводятся к виду:

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1]$$

$$E_z^{q+1}[M] = E_z^q[M-1]$$

Демонстрация поглощающих граничных условий (АВС) первой степени (fdtd_abc_first.py) 176



**Формулировка граничных
условий АВС первой степени с
использованием дискретных
операторов**

Операторы для граничных условий АВС

178

Введем несколько новых операторов:

I — оператор идентичности.

$$I E_z^q[m] = E_z^q[m]$$

s_x^w — оператор пространственного сдвига (сдвиг вправо).

$$s_x^w E_z^q[m] = E_z^q[m + w]$$

s_t^w — оператор обратного временного сдвига.

$$s_t^w E_z^q[m] = E_z^{q+w}[m]$$

Свойства линейных операторов

Введенные операторы коммутативны
(можно менять порядок их применения)

$$S_x^w S_t^w = S_t^w S_x^w$$

$$I S_x^w = S_x^w$$

$$I S_t^w = S_t^w$$

$$I I = I$$

Уравнения адвекции

$$\text{I.} \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

$$\text{II.} \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} + \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

Использование дискретных операторов для граничных условий АВС первого порядка 181

$$\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} \bigg|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2}) \Delta_t} \approx$$

$$\approx \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\frac{E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1]}{2} - \frac{E_z^q[0] + E_z^q[1]}{2}}{\Delta_t}$$

Использование дискретных операторов для граничных условий АВС первого порядка

182

Пространственное усреднение с помощью введенных операторов записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^{q+1}[m+1]}{2} = \\ & = \frac{I E_z^{q+1}[m] + s_x^1 E_z^{q+1}[m]}{2} = \\ & = \left(\frac{I + s_x^1}{2} \right) E_z^{q+1}[m] \end{aligned}$$

Использование дискретных операторов для граничных условий АВС первого порядка 183

Временное усреднение с помощью введенных операторов записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^q[m]}{2} = \\ & \frac{I E_z^{q+1}[m] + s_t^{-1} E_z^{q+1}[m]}{2} = \\ & = \left(\frac{I + s_t^{-1}}{2} \right) E_z^{q+1}[m] \end{aligned}$$

Поглощающие граничные условия с использованием дискретных операторов

В операторном виде указанные действия выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_z}{\partial t} \Big|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} &\approx \frac{\left(\frac{I+s_x^1}{2}\right) E_z^{q+1}[0] - \left(\frac{I+s_x^1}{2}\right) s_t^{-1} E_z^{q+1}[0]}{\Delta_t} = \\
 &= \left(\frac{I+s_x^1}{2}\right) \left(\frac{I-s_t^{-1}}{\Delta_t}\right) E_z^{q+1}[0] = \\
 &= \frac{1}{2\Delta_t} (I - s_t^{-1} + s_x^1 - s_x^1 \cdot s_t^{-1}) E_z^{q+1}[0] = \\
 &= \frac{1}{2\Delta_t} (E_z^{q+1}[0] - E_z^q[0] + E_z^{q+1}[1] - E_z^q[1])
 \end{aligned}$$

Поглощающие граничные условия с использованием операторной записи

Аналогично можем поступить с расчетом производной по пространству:

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{\partial E_z}{\partial x} \right|_{\Delta_x/2, (q+\frac{1}{2})\Delta_t} \approx \\
 & \approx \left(\frac{s_x^1 - I}{\Delta_x} \right) \left(\frac{I + s_t^{-1}}{2} \right) E_z^{q+1}[0] = \\
 & = \frac{1}{2\Delta_x} (-I + s_x^1 - s_t^{-1} + s_t^{-1} \cdot s_x^1) E_z^{q+1}[0] = \\
 & = \frac{1}{2\Delta_x} (-E_z^{q+1}[0] + E_z^{q+1}[1] - E_z^q[0] + E_z^q[1])
 \end{aligned}$$

Поглощающие граничные условия с использованием операторной записи

Запишем конечно-разностное выражение для уравнения адвекции:

$$\left\{ \left(\frac{s_x^1 - I}{\Delta_x} \right) \left(\frac{I + s_t^{-1}}{2} \right) - \sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0} \left(\frac{I + s_x^1}{2} \right) \left(\frac{I - s_t^{-1}}{\Delta_t} \right) \right\} E_z^{q+1}[0] = 0$$

Решение этого уравнения для $E_z^{q+1}[0]$ даст выражение

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1] + \frac{\frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} - 1}{\frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} + 1} \left(E_z^{q+1}[1] - E_z^q[0] \right)$$

**Поглощающие граничные условия
(Absorbing boundary condition — ABC)
второй степени**

Волновое уравнение в одномерном случае

Мы получим более точное решение уравнения адвекции и уменьшим отражение, если применим оператор адвекции дважды:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_z = 0$$

Волновое уравнение в одномерном случае

Конечно-разностная схема для оператора адвекции второй степени в операторном виде:

$$\left[\left\{ \left(\frac{s_x^1 - I}{\Delta_x} \right) \left(\frac{I + s_t^{-1}}{2} \right) - \sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0} \left(\frac{I + s_x^1}{2} \right) \left(\frac{I - s_t^{-1}}{\Delta_t} \right) \right\} \times \right. \\ \left. \left\{ \left(\frac{s_x^1 - I}{\Delta_x} \right) \left(\frac{I + s_t^{-1}}{2} \right) - \sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0} \left(\frac{I + s_x^1}{2} \right) \left(\frac{I - s_t^{-1}}{\Delta_t} \right) \right\} \right] E_z^{q+1}[0] = 0$$

Поглощающее граничное условие второй степени

Если раскрыть скобки и решить это уравнение относительно $E_z^{q+1}[0]$, то мы получим

$$\begin{aligned}
 E_z^{q+1}[0] = & \underbrace{\frac{-1}{1/S'_c + 2 + S'_c}}_{k_1} \left\{ \underbrace{\left(\frac{1}{S'_c} - 2 + S'_c \right)}_{k_2} \left(E_z^{q+1}[2] + \underline{E_z^{q-1}[0]} \right) + \right. \\
 & + 2 \underbrace{\left(S'_c - \frac{1}{S'_c} \right)}_{k_3} \left(\underline{E_z^q[0]} + \underline{E_z^q[2]} - E_z^{q+1}[1] - \underline{E_z^{q-1}[1]} \right) - \\
 & \left. - 4 \underbrace{\left(\frac{1}{S'_c} + S'_c \right)}_{k_4} \underline{E_z^q[1]} \right\} - \underline{E_z^{q-1}[2]}
 \end{aligned}$$

Поглощающее граничное условие второй степени

В предыдущем выражении:

$$S'_c = \frac{\Delta_t}{\sqrt{\mu \mu_0} \epsilon \epsilon_0 \Delta_x} = \frac{S_c}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

Поглощающее граничное условие второй степени

Для свободного пространства и $S_c = 1$
граничное условие преобразуется к виду:

$$E_z^{q+1}[0] = 2E_z^q[1] - E_z^{q-1}[2]$$

Поглощающее граничное условие второй степени

Граничные условия справа выглядят аналогично, только они отражены «зеркально». Преобразуются пространственные координаты:

$$0 \rightarrow M$$

$$1 \rightarrow M - 1$$

$$2 \rightarrow M - 2$$

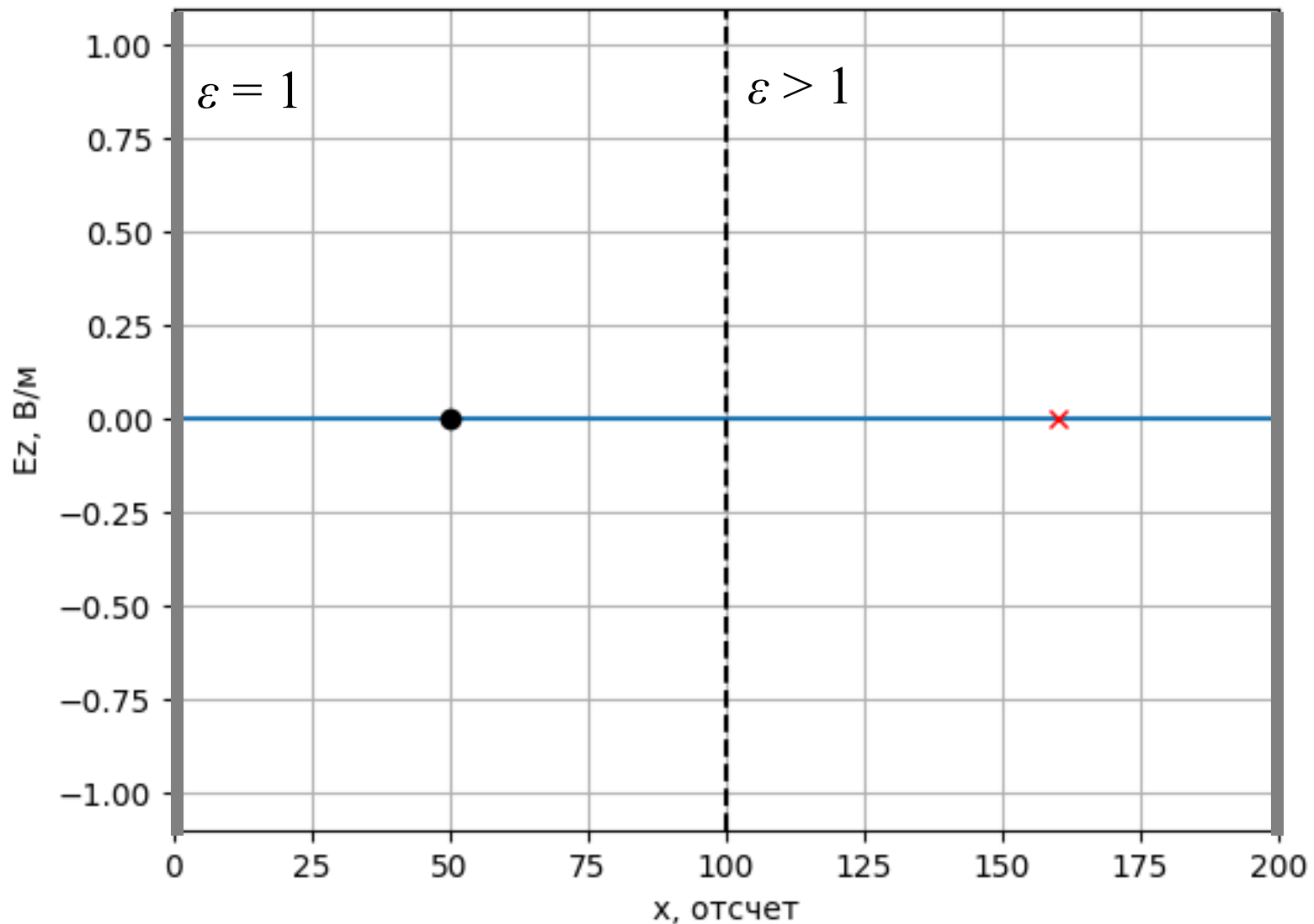
В индексации Python:

$$0 \rightarrow -1$$

$$1 \rightarrow -2$$

$$2 \rightarrow -3$$

Демонстрация поглощающих граничных условий (АВС) второй степени (fdtd_abc_second.py) 194

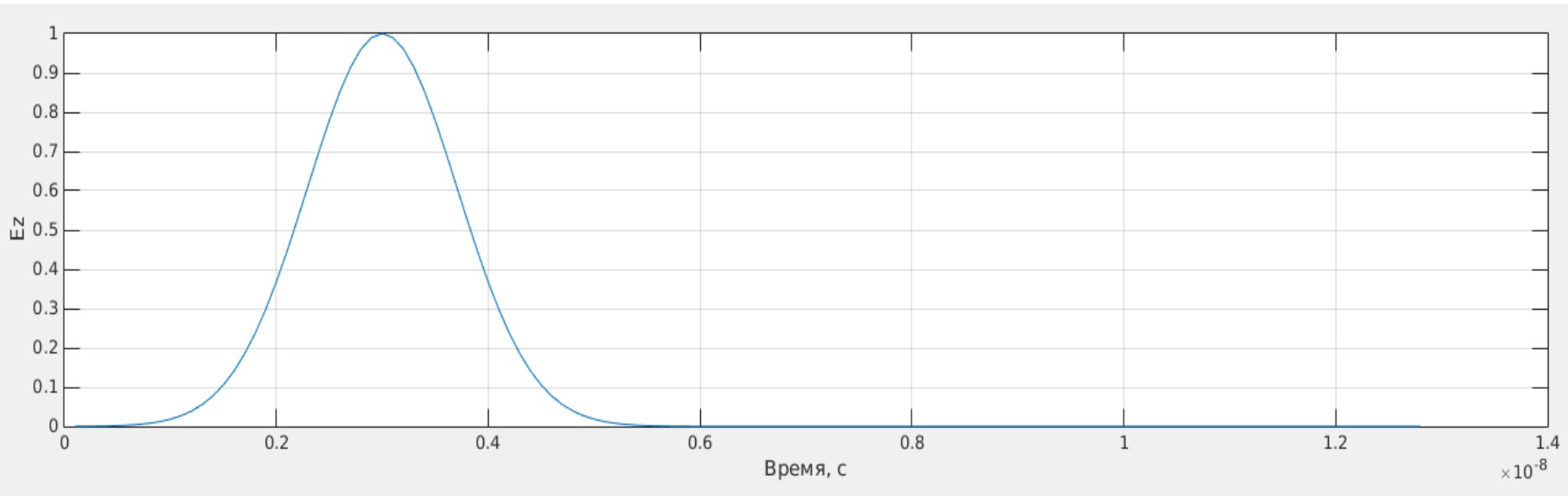


Источники возбуждения

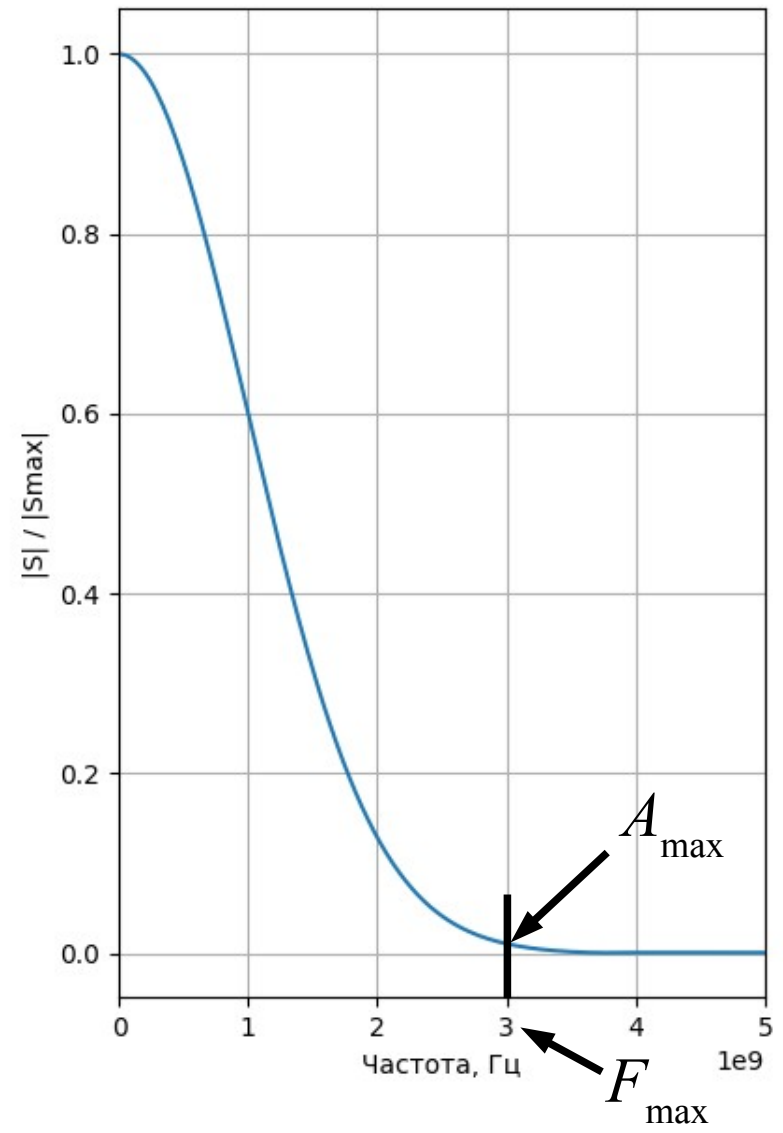
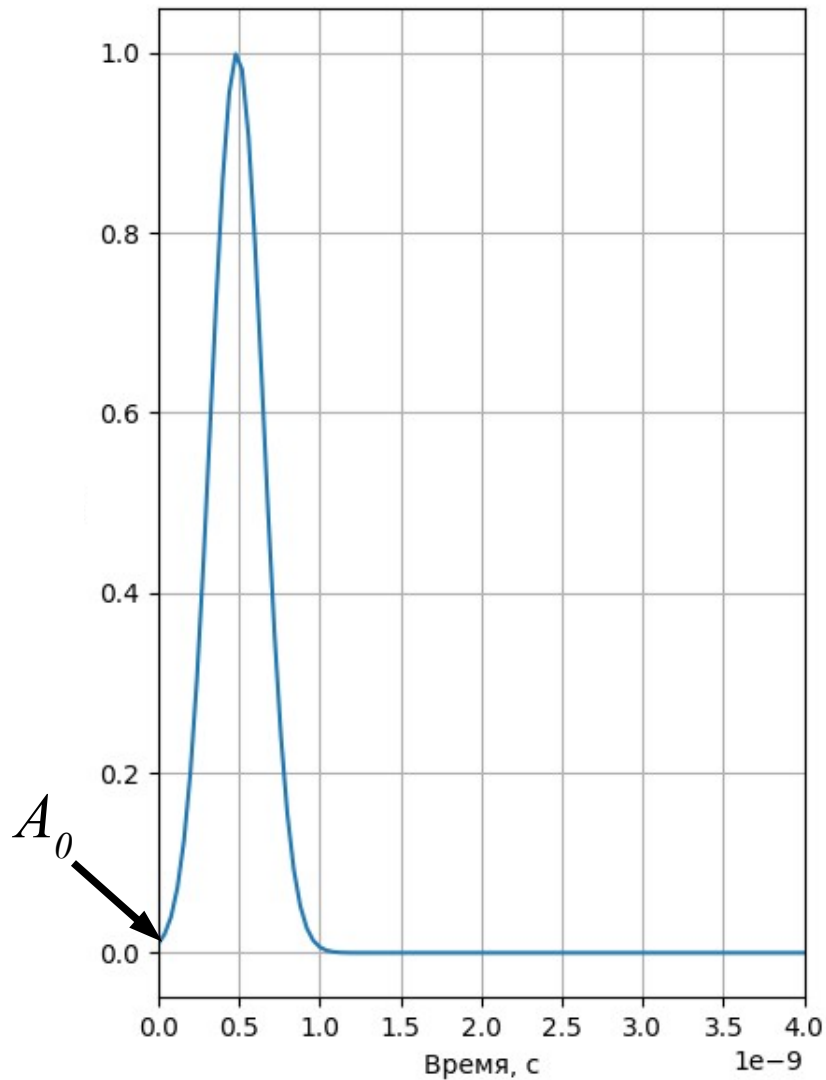
Гауссов импульс

Гауссов импульс

$$f_g(t) = A_m e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$



Спектр гауссова импульса



Спектр гауссова импульса

Если заданы требования к сигналу:

- $A_0 > 1$ — уровень ослабления сигнала в момент времени $t = 0$.
- F_{\max} — «максимальная» частота в спектре сигнала.
- $A_{\max} > 1$ — уровень ослабления спектра сигнала на частоте F_{\max} .

$$f_g(t) = A_m e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$w_g = \frac{\sqrt{\ln(A_{\max})}}{\pi F_{\max}}$$

$$d_g = w_g \sqrt{\ln(A_0)}$$

Демонстрация спектра гауссова импульса

Недостатки гауссова импульса

- В спектре присутствует постоянная составляющая.
- Максимальное значение спектра всегда на частоте 0 ГГц.
- Сигнал с постоянной составляющей нельзя излучить.

Уравнение плоской волны для гауссова импульса в дискретном виде

Уравнение плоской волны для гауссова импульса в дискретном виде

$$f[m, q] = e^{-\left(\frac{(q - m \sqrt{\epsilon} \bar{\mu} / S_c) - N_{dg}}{N_{wg}}\right)^2}$$

$$N_{wg} = w_g / \Delta_t$$

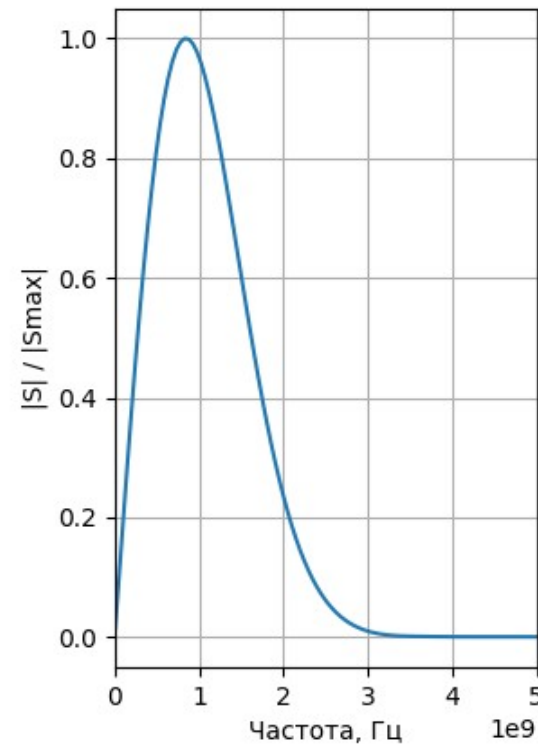
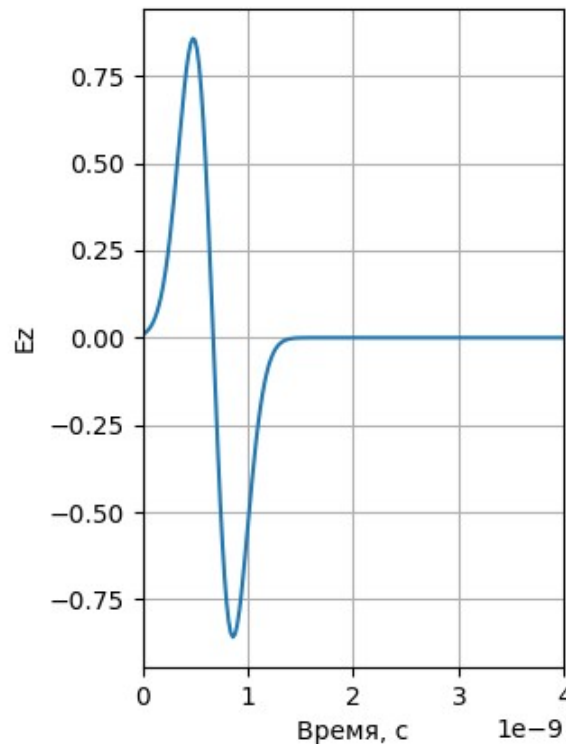
$$N_{dg} = d_g / \Delta_t$$

Дифференцированный гауссов импульс

Дифференцированный гауссов импульс

205

$$f_g(t) = -2 A_m \left(\frac{t - d_g}{w_g} \right) e^{-\left(\frac{t - d_g}{w_g} \right)^2}$$



Спектр дифференцированного гауссова импульса

Если заданы требования к сигналу:

- F_{\max} — «максимальная» частота в спектре сигнала.
- $A_{\max} > 1$ — уровень ослабления спектра сигнала на частоте F_{\max} и ослабление в момент времени $t = 0$.

$$f_g(t) = -2 A_m \left(\frac{t - d_g}{w_g} \right) e^{-\left(\frac{t - d_g}{w_g} \right)^2}$$

$$w_g = \frac{\sqrt{\ln(5.5 A_{\max})}}{\pi F_{\max}}$$

$$d_g = w_g \sqrt{\ln(2.5 A_{\max} \sqrt{\ln(2.5 A_{\max})})}$$

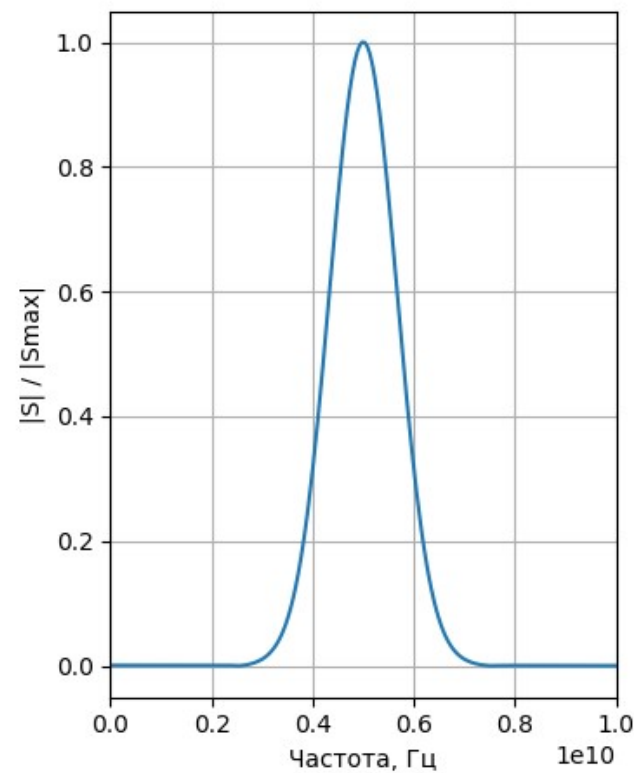
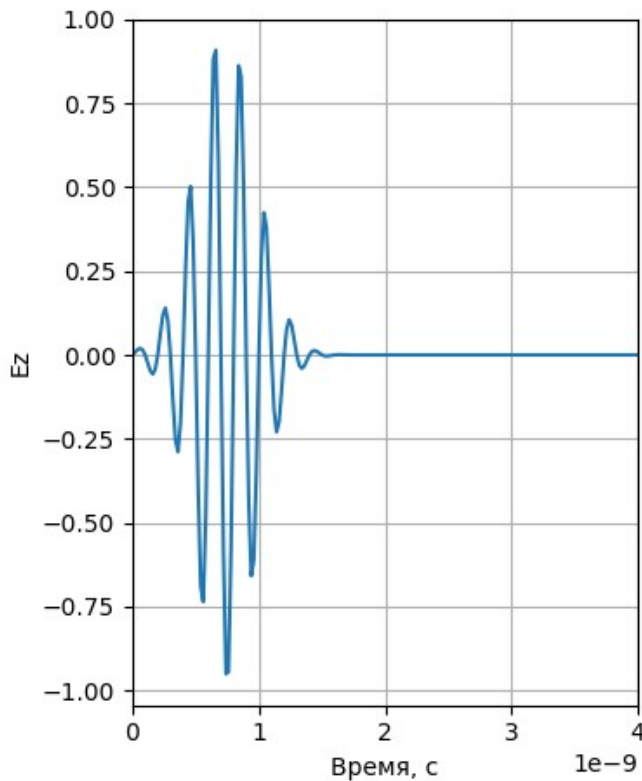
Демонстрация спектра дифференцированного гауссова импульса

`spectrum_gauss_diff.py`

Модулированный гауссов импульс

Модулированный гауссов импульс

$$f_g(t) = A_m \sin(2\pi f_0 t) e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$



Спектр модулированного гауссова импульса

Если заданы требования к сигналу:

- f_0 — центральная частота в спектре сигнала.
- $A_{\max} > 1$ — уровень ослабления спектра сигнала на частоте F_{\max} .
- A_0 — ослабление огибающей сигнала в момент времени $t = 0$
- ΔF — ширина спектра по уровню ослабления A_{\max} .

$$f_g(t) = A_m \sin(2\pi f_0 t) e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$w_g = \sqrt{\ln(A_{\max})} / (\pi \Delta F)$$

$$d_g = w_g \sqrt{\ln(A_0)}$$

Демонстрация спектра модулированного гауссова импульса

`spectrum_gauss_mod.py`

**Уравнение плоской волны для
модулированного гауссова
импульса в дискретном виде**

Уравнение плоской волны для модулированного гауссова импульса в дискретном виде

213

$f(\xi)$ — решение волнового уравнения, если:

- $f(\xi)$ дважды дифференцируема
- ξ можно заменить на $t \pm x / v$
(для одномерного случая)

Уравнение плоской волны для модулированного гауссова импульса в дискретном виде

214

В выражении для модулированного
гауссова импульса
заменим t на $t \pm x / v$

$$f_g(t) = \sin(2\pi f_0 t) e^{-\left(\frac{t - d_g}{w_g}\right)^2}$$



$$f_g(t, x) = \sin\left(2\pi f_0\left(t \pm \frac{x\sqrt{\epsilon\mu}}{c}\right)\right) e^{-\left(\frac{t \pm \frac{x\sqrt{\epsilon\mu}}{c} - d_g}{w_g}\right)^2}$$

Уравнение плоской волны для модулированного гауссова импульса в дискретном виде

215

$$\lambda_0 = N_{\lambda_0} \Delta x, \quad w_g = N_{wg} \Delta_t, \quad d_g = N_{dg} \Delta_t,$$

$$\frac{x}{c} = \frac{m \Delta_x}{c} = \frac{m \Delta_t}{S_c},$$

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{N_{\lambda_0} \Delta x} = \frac{S_c}{N_{\lambda_0} \Delta_t}$$

Уравнение плоской волны для модулированного гауссова импульса в дискретном виде

216

$$f_g[m, q] = \sin \left(\frac{2\pi S_c}{N_{\lambda_0} \Delta_t} \left(q \Delta_t \pm \frac{m \Delta_t \sqrt{\epsilon \mu}}{S_c} \right) \right) e^{- \left(\frac{q \Delta_t \pm \frac{m \Delta_t \sqrt{\epsilon \mu}}{S_c} - N_{dg} \Delta_t}{N_{wg} \Delta_t} \right)^2}$$



$$f_g[m, q] = \sin \left(\frac{2\pi}{N_{\lambda_0}} (q S_c \pm m \sqrt{\epsilon \mu}) \right) e^{- \left(\frac{q \pm \frac{m \sqrt{\epsilon \mu}}{S_c} - N_{dg}}{N_{wg}} \right)^2}$$

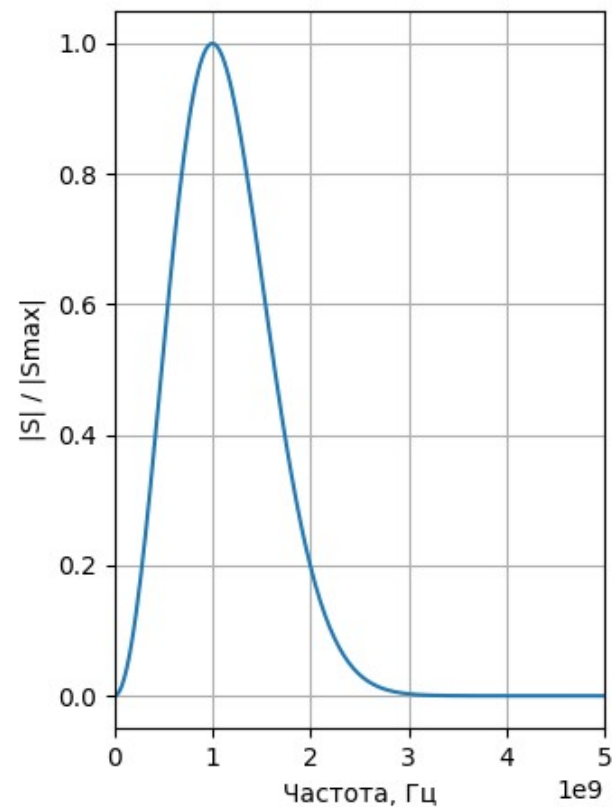
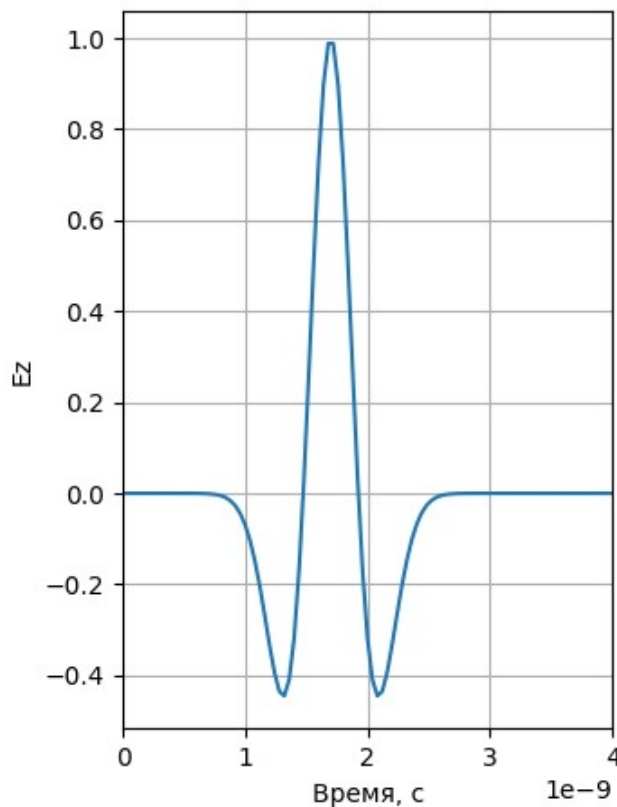
**Демонстрация модулированного
гауссова импульса при
использовании метода
Total Field / Scattered Field**

`fdtd_tfsf_medium_gauss_mod.py`

Вейвлет Рикера

Вейвлет Рикера

$$f_r(t) = \left(1 - 2\{\pi f_p[t - d_r]\}^2\right) e^{-\{\pi f_p[t - d_r]\}^2}$$



Вейвлет Рикера

Если заданы требования к сигналу:

- f_p — «пиковая» частота в спектре сигнала.

$$f_r(t) = \left(1 - 2\{\pi f_p[t - d_r]\}^2\right) e^{-\{\pi f_p[t - d_r]\}^2}$$

$$d_r = M_d \frac{1}{f_p}$$

M_d — коэффициент задержки

Спектр вейвлета Рикера

$$F_r(\omega) = -\frac{2}{f_p \sqrt{\pi}} \left(\frac{\omega}{2\pi f_p} \right)^2 \exp \left(-jd_r \omega - \left(\frac{\omega}{2\pi f_p} \right)^2 \right)$$

Вейвлет Рикера в терминах длин волн

$$\lambda_p = N_p \Delta_x, \quad f_p = \frac{c}{\lambda_p} = \frac{c}{N_p \Delta_x}$$

Вейвлет Рикера в терминах длин волн

$$\lambda_p = N_p \Delta_x, \quad f_p = \frac{c}{\lambda_p} = \frac{c}{N_p \Delta_x}$$

$$S_c = \frac{c \Delta_t}{\Delta_x} \Rightarrow \Delta_x = \frac{c \Delta_t}{S_c}$$

$$f_p = \frac{S_c}{N_p \Delta_t}$$

Вейвлет Рикера в терминах длин волн

$$f_p = \frac{S_c}{N_p \Delta_t}$$

Тогда задержка может быть представлена как:

$$d_r = M_d \frac{1}{f_p} = M_d \frac{N_p \Delta_t}{S_c}$$

Вейвлет Рикера в дискретном виде

$$f_r[q] = \left(1 - 2\pi^2 \left[\frac{S_c q}{N_p} - M_d \right]^2 \right) \exp \left(-\pi^2 \left[\frac{S_c q}{N_p} - M_d \right]^2 \right)$$

Демонстрация спектра вейвлета Рикера

`spectrum_ricker.py`

Уравнение плоской волны для вейвлета Рикера в дискретном виде

Уравнение плоской волны для вейвлета Рикера в дискретном виде

В выражении для вейвлета Рикера
заменим t на $t \pm x / c$

$$f_r\left(t \pm \frac{x}{c}\right) = f_r(x, t) = \left(1 - 2\pi^2 f_p^2 \left(t \pm \frac{x}{c} - d_r\right)^2\right) e^{-\pi^2 f_p^2 \left(t \pm \frac{x}{c} - d_r\right)^2}$$

Уравнение плоской волны для вейвлета Рикера в дискретном виде

Запишем предыдущее выражение через число Куранта и длину волны, учитывая, что

$$\frac{x}{c} = \frac{m \Delta_x}{c} = \frac{m \Delta_t}{S_c}, \quad f_p = \frac{S_c}{N_p \Delta_t}, \quad d_r = M_d \frac{1}{f_p} = M_d \frac{N_p \Delta_t}{S_c}$$

$$f_r[m, q] = \left(1 - 2\pi^2 \left[\frac{S_c q \pm m}{N_p} - M_d \right]^2 \right) e^{-\pi^2 \left[\frac{S_c q \pm m}{N_p} - M_d \right]^2}$$

Демонстрация вейвлета Рикера при использовании метода Total Field / Scattered Field

Уравнение плоской волны для гармонического сигнала в дискретном виде

Гармонический сигнал

$$f_h(t) = A \cos(\omega t + \phi_0)$$

или в дискретном виде

$$f_h(q \Delta_t) = A \cos(\omega q \Delta_t + \phi_0)$$

Гармонический сигнал в терминах²³³ ДЛИН ВОЛН

Если задана длина волны в виде: $\lambda = N_\lambda \cdot \Delta_x$, то

$$f = \frac{c}{\lambda}, \quad \omega t = \frac{2\pi c}{\lambda} t$$

$$f_h(q \Delta_t) = A \cos \left(\frac{2\pi c}{N_\lambda \Delta_x} q \Delta_t + \phi_0 \right)$$

$$f_h[q] = A \cos \left(\frac{2\pi S_c}{N_\lambda} q + \phi_0 \right)$$

Уравнение плоской волны в дискретном виде

$$T = \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{c} = \frac{N_{\lambda} \Delta_x}{c}$$

Количество временных шагов на период:

$$\frac{T}{\Delta_t} = \frac{N_{\lambda} \Delta_x}{c \Delta_t} = \frac{N_{\lambda}}{S_c}$$

Уравнение плоской волны в дискретном виде

$$f_h(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \phi_0) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{k}{\omega} x\right) + \phi_0\right)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega \sqrt{\mu \epsilon}}{c}$$

$$x = m \Delta_x$$

Уравнение плоской волны в дискретном виде

тогда:

$$\omega \left(t - \frac{k}{\omega} x \right) = \frac{2 \pi c}{N_{\lambda} \Delta_x} \left(q \Delta_t - \frac{\sqrt{\mu \varepsilon}}{c} m \Delta_x \right)$$

Уравнение плоской волны в дискретном виде

тогда:

$$\omega \left(t - \frac{k}{\omega} x \right) = \frac{2 \pi c}{N_{\lambda} \Delta_x} \left(q \Delta_t - \frac{\sqrt{\mu \varepsilon}}{c} m \Delta_x \right)$$

Вынесем за скобки Δ_x / c

$$\omega \left(t - \frac{k}{\omega} x \right) = \frac{2 \pi}{N_{\lambda}} \left(q \frac{\Delta_t c}{\Delta_x} - \sqrt{\mu \varepsilon} m \right) = \frac{2 \pi}{N_{\lambda}} \left(S_c q - \sqrt{\mu \varepsilon} m \right)$$

Уравнение плоской волны в дискретном виде

В дискретном виде:

$$f_h[m, q] = A \cos \left(\frac{2\pi}{N_\lambda} (S_c q - \sqrt{\mu \varepsilon} m) + \phi_0 \right)$$

Обычно используют:

$$f_h[m, q] = A \sin \left(\frac{2\pi}{N_\lambda} (S_c q - \sqrt{\mu \varepsilon} m) + \phi_0 \right)$$

**Демонстрация гармонического
сигнала при использовании
метода
Total Field / Scattered Field**

`fdtd_tfsf_sin.py`

`fdtd_tfsf_medium_sin.py`

Демонстрация стоячей волны

`fdtd_tfsf_sin.py`
`fdtd_swr.py`

Программирование источников с использованием объектно-ориентированного подхода

`fdtd_sources_oop.py`
`fdtd_sources_oop_tfsf.py`

Численная дисперсия

Численная дисперсия

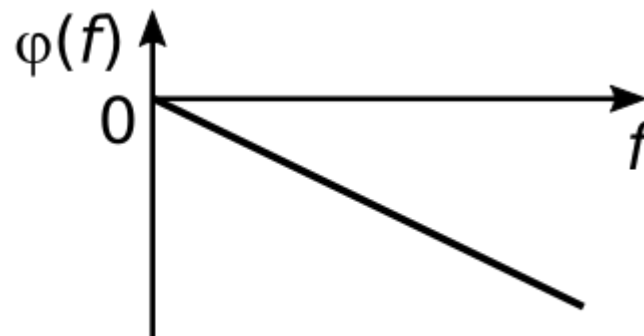
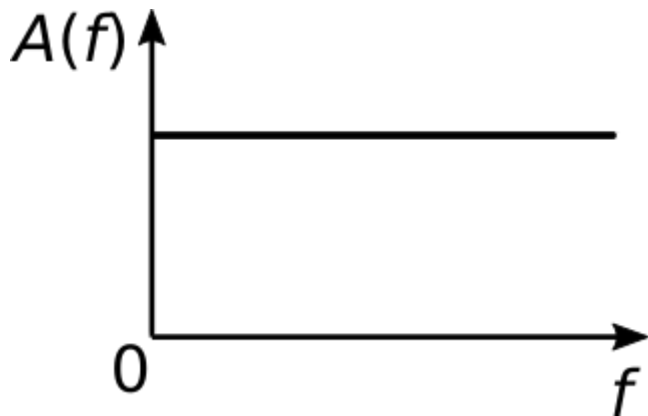
Дисперсия — зависимость фазовой скорости волны от частоты.

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega \lambda}{2\pi}$$

Область пространства как фильтр



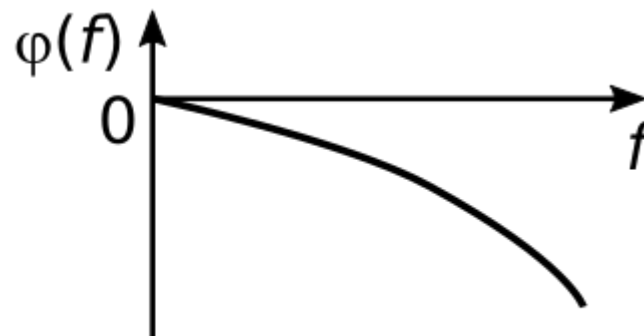
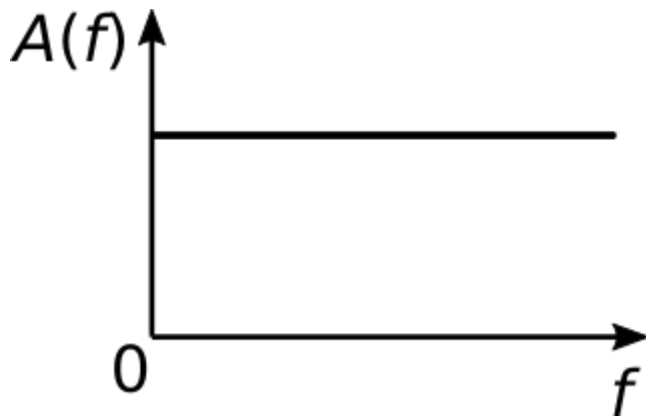
Параметры фильтра без дисперсии



Область пространства как фильтр



Параметры фильтра с дисперсией



Волновое уравнение в одномерном случае

246

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

Ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!} =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!}, x_0 < \xi < x$$

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора
вблизи точки x_0 со смещением δ справа и слева

$$x = x_0 + \delta \qquad x - x_0 = \delta$$

$$f(x_0 + \delta) = f(x_0) + \delta f'(x_0) + \frac{1}{2!} \delta^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!} \delta^3 f'''(x_0) + \dots$$

$$x = x_0 - \delta \qquad x - x_0 = -\delta$$

$$f(x_0 - \delta) = f(x_0) - \delta f'(x_0) + \frac{1}{2!} \delta^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!} \delta^3 f'''(x_0) + \dots$$

Расчет второй производной в дискретном виде

249

Сложим выражения для $f(x + \delta)$ и $f(x - \delta)$

$$f(x_0 + \delta) + f(x_0 - \delta) = 2f(x_0) + \frac{2}{2!} \delta^2 f''(x_0) + O(\delta^4)$$

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + \delta) + f(x_0 - \delta) - 2f(x_0)}{\delta^2} + O(\delta^2)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \right|_{m,q} = \frac{E_z^q[m+1] + E_z^q[m-1] - 2 E_z^q[m]}{(\Delta_x)^2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \right|_{m,q} = \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^{q-1}[m] - 2 E_z^q[m]}{(\Delta_t)^2}$$

Подставляем выражения для вторых производных
в волновое уравнение

$$\frac{E_z^q[m+1] + E_z^q[m-1] - 2 E_z^q[m]}{(\Delta_x)^2} - \frac{1}{v^2} \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^{q-1}[m] - 2 E_z^q[m]}{(\Delta_t)^2} = 0$$

Выражаем $E_z^{q+1}[m]$

$$E_z^{q+1}[m] = \frac{v^2 (\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2} \left(E_z^q[m+1] + E_z^q[m-1] - 2 E_z^q[m] \right) - E_z^{q-1}[m] + 2 E_z^q[m]$$

Пусть E_z^q — плоская волна с гармоническим колебанием

$$E_z^q[m] = e^{j(\omega q \Delta_t - \tilde{k} m \Delta_x)}$$

$\tilde{k} = k' + j k''$ — комплексное волновое число
в дискретном пространстве

Подставляем $E_z^q[m]$ в выражение с предыдущего слайда

$$E_z^{q+1}[m] = \frac{v^2 (\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2} \left(E_z^q[m+1] + E_z^q[m-1] - 2 E_z^q[m] \right) - E_z^{q-1}[m] + 2 E_z^q[m]$$



$$\begin{aligned} e^{j(\omega(q+1)\Delta_t - \tilde{k} m \Delta_x)} &= \frac{v^2 (\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2} \left[e^{j(\omega q \Delta_t - \tilde{k}(m+1)\Delta_x)} + \right. \\ &\quad \left. + e^{j(\omega q \Delta_t - \tilde{k}(m-1)\Delta_x)} - 2 e^{j(\omega q \Delta_t - \tilde{k} m \Delta_x)} \right] - \\ &\quad - e^{j(\omega(q-1)\Delta_t - \tilde{k} m \Delta_x)} + 2 e^{j(\omega q \Delta_t - \tilde{k} m \Delta_x)} \end{aligned}$$

Делим обе части выражения на $e^{j(\omega q \Delta_t - \dot{\tilde{k}} m \Delta_x)}$

$$e^{j\omega \Delta_t} = \frac{v^2 (\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2} \left(e^{-j\dot{\tilde{k}} \Delta_x} + e^{j\dot{\tilde{k}} \Delta_x} - 2 \right) - e^{-j\omega \Delta_t} + 2$$

Перепишем предыдущее выражение в следующем виде:

$$\frac{e^{j\omega\Delta_t} + e^{-j\omega\Delta_t}}{2} = \frac{v^2(\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2} \left(\frac{e^{-j\tilde{k}\Delta_x} + e^{j\tilde{k}\Delta_x}}{2} - 1 \right) + 1$$

Перепишем предыдущее выражение в следующем виде:

$$\frac{e^{j\omega\Delta_t} + e^{-j\omega\Delta_t}}{2} = \frac{v^2 (\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2} \left(\frac{e^{-j\tilde{k}\Delta_x} + e^{j\tilde{k}\Delta_x}}{2} - 1 \right) + 1$$

Применим формулу Эйлера:

$$\cos u = \frac{e^{ju} + e^{-ju}}{2}$$

$$\cos(\omega \Delta_t) = \frac{v^2 (\Delta_t)^2}{(\Delta_x)^2} \left(\cos(\tilde{k} \Delta_x) - 1 \right) + 1$$

Комплексное волновое число в дискретном пространстве

$$\tilde{k} = \frac{1}{\Delta_x} \arccos \left(\left(\frac{\Delta_x}{v \Delta_t} \right)^2 \left(\cos(\omega \Delta_t) - 1 \right) + 1 \right)$$

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} \text{ — фазовая скорость}$$

Частный случай:

$$\Delta_x \rightarrow 0, \Delta_t \rightarrow 0$$

Используем разложение функции $\cos(u)$ в ряд Маклорена:

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n u^{(2n)}}{(2n)!}$$

Для малого u будем считать, что

$$\cos u \approx 1 - \frac{u^2}{2!}$$

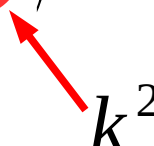
Частный случай:

$$\Delta_x \rightarrow 0, \Delta_t \rightarrow 0$$

$$\tilde{k} = \frac{1}{\Delta_x} \arccos \left(\left(\frac{\Delta_x}{v \Delta_t} \right)^2 (\cos(\omega \Delta_t) - 1) + 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta_x} \arccos \left(\left(\frac{\Delta_x}{v \Delta_t} \right)^2 \left(1 - \frac{(\omega \Delta_t)^2}{2} - 1 \right) + 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta_x} \arccos \left(1 - \frac{(\Delta_x)^2}{2} \frac{\omega^2}{v^2} \right) = \frac{1}{\Delta_x} \arccos \left(1 - \frac{1}{2} (k \Delta_x)^2 \right)$$


 k^2

Частный случай:

$$\Delta_x \rightarrow 0, \Delta_t \rightarrow 0$$

Для малого Δ_x :

$$1 - \frac{(k \Delta_x)^2}{2} \approx \cos(k \Delta_x)$$

$$\tilde{k} = \frac{1}{\Delta_x} \arccos(\cos(k \Delta_x)) = k$$

Нет численной дисперсии

Частный случай: «Магический» шаг по времени

Если

$$\Delta_t = \frac{\Delta_x}{v}$$

или

$$v \frac{\Delta_t}{\Delta_x} = 1$$

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \frac{1}{\Delta_x} \arccos \left(\left(\frac{\Delta_x}{v \Delta_t} \right)^2 (\cos(\omega \Delta_t) - 1) + 1 \right) = \\ &= \frac{1}{\Delta_x} \arccos (\cos(\omega \Delta_t) - 1 + 1) = \frac{\omega \Delta_t}{\Delta_x} = \frac{\omega}{v} = k \end{aligned}$$

Нет численной дисперсии

Численная дисперсия

$$\tilde{c} = c \frac{\pi \sqrt{\epsilon \mu}}{N_{\lambda} \arcsin \left(\frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{S_c} \sin \left(\frac{\pi S_c}{N_{\lambda}} \right) \right)}$$

\tilde{c} — скорость распространения волны в дискретном пространстве

N_{λ} — Количество ячеек сетки на длину волны

Численная дисперсия

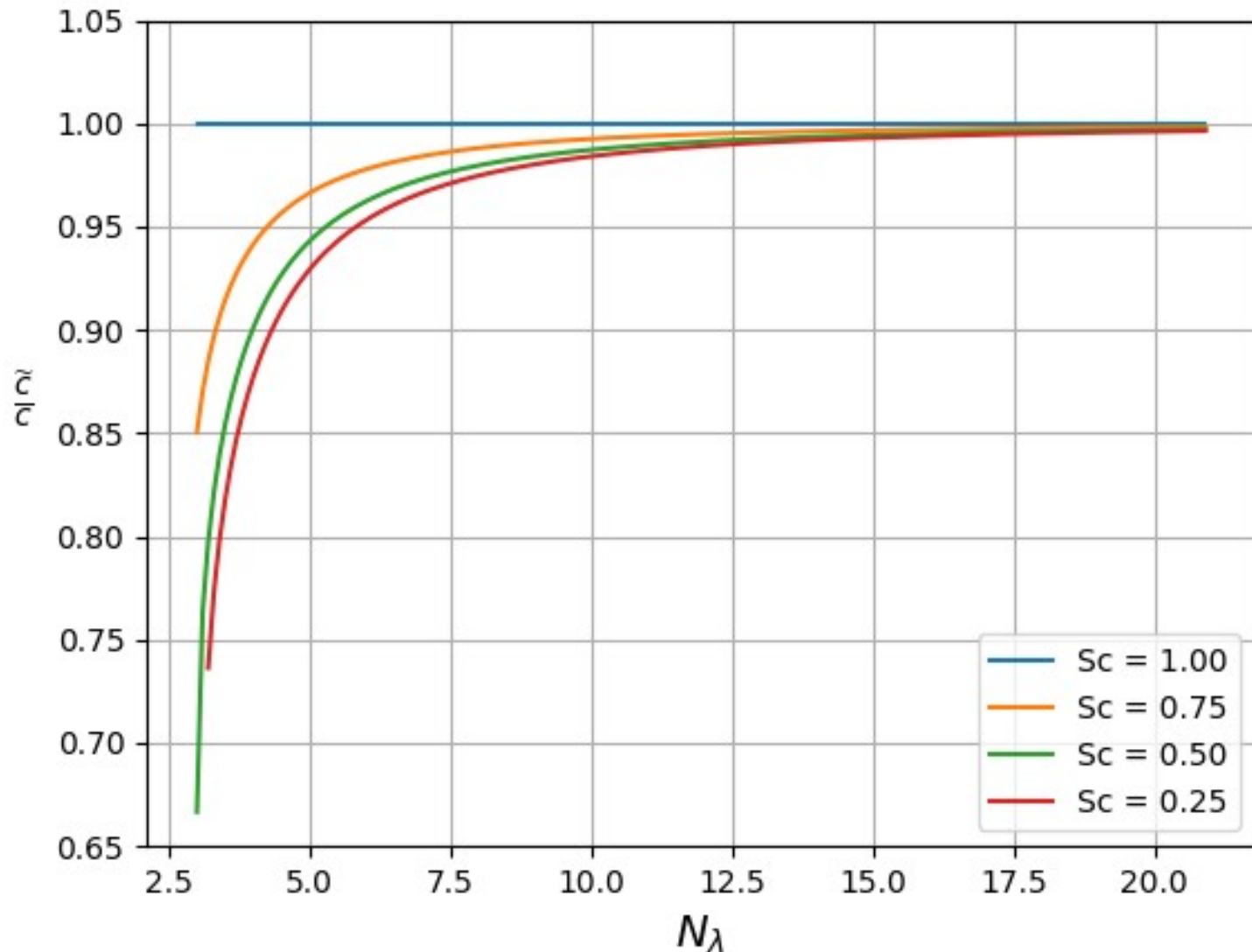
Если $Sc = 1$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$

$$\tilde{c} = c \frac{\pi}{N_{\lambda} \arcsin \left(\sin \left(\frac{\pi}{N_{\lambda}} \right) \right)} = \frac{c \pi N_{\lambda}}{N_{\lambda} \pi} = c$$

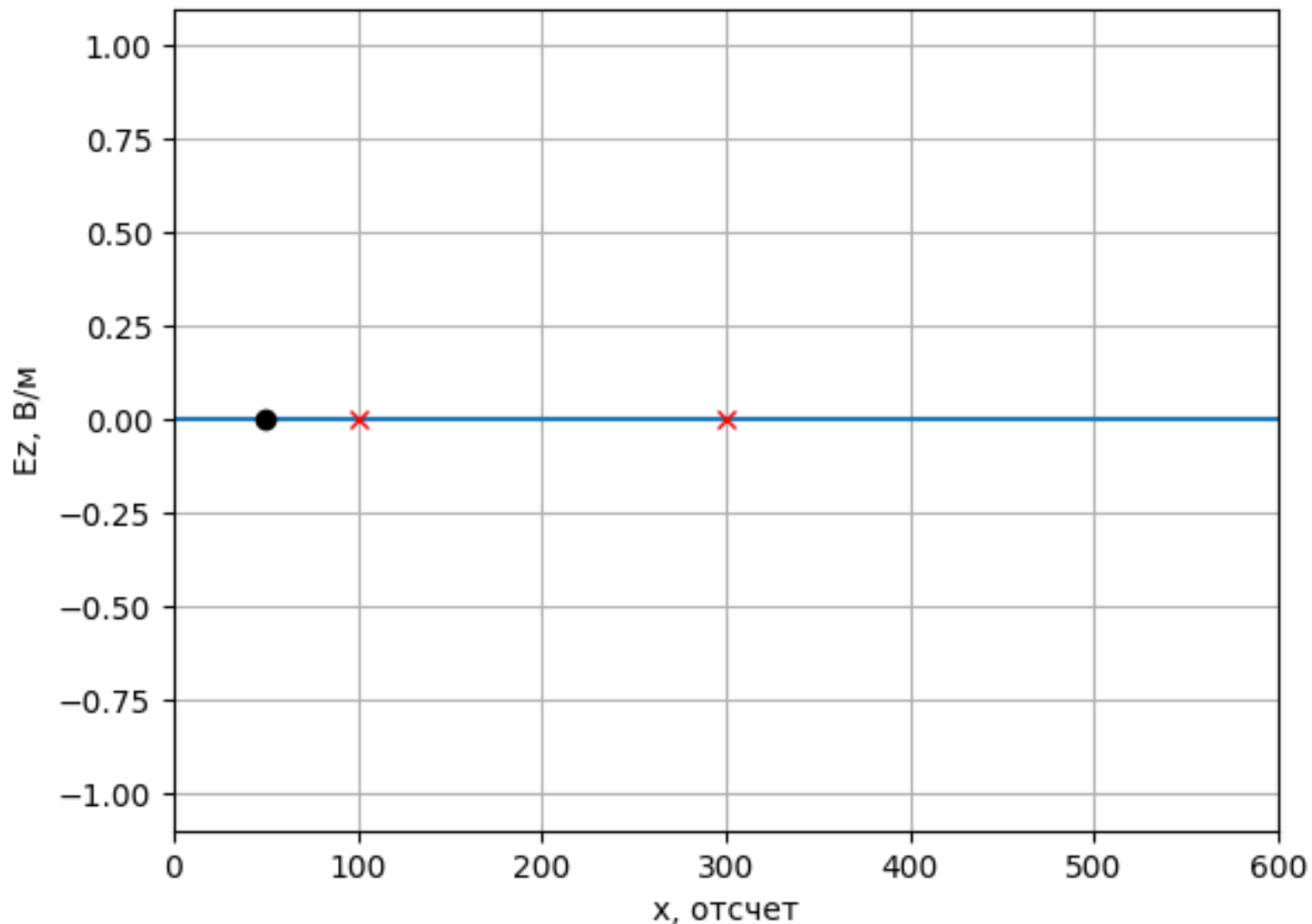
Нет численной дисперсии

Анализ численной дисперсии (dispersion.py)

265



Анализ численной дисперсии (fdtd_dispersion_vacuum.py)



Расчет фазовой скорости по фазовому спектру сигнала (fdtd_dispersion.py)

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega \lambda}{2\pi} = \frac{\omega d}{\Delta_{\phi}} = \frac{\omega N_d \Delta_x}{\Delta_{\phi}}$$

d — расстояние между датчиками, м

N_d — расстояние между датчиками, отсчет

Δ_{ϕ} — разность фаз на круговой частоте ω , рад

$$\omega = 2\pi f = 2\pi n \Delta f = \frac{2\pi n}{N_s \Delta_t}$$

n — номер отсчета в спектре сигнала

N_s — количество отсчетов в зарегистрированном сигнале

Расчет фазовой скорости по фазовому спектру сигнала (fdtd_dispersion.py)

268

$$v_{\phi} = \frac{2\pi n N_d \Delta_x}{N_s \Delta_t \Delta_{\varphi}} = \frac{2\pi n N_d c}{N_s \Delta_{\varphi} S_c}$$

Коэффициенты отражения и прохождения

Для границы раздела двух диэлектриков
 $\mu = 1$

Коэффициент прохождения:

$$T = \frac{2\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}}$$

Коэффициент отражения:

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}}$$

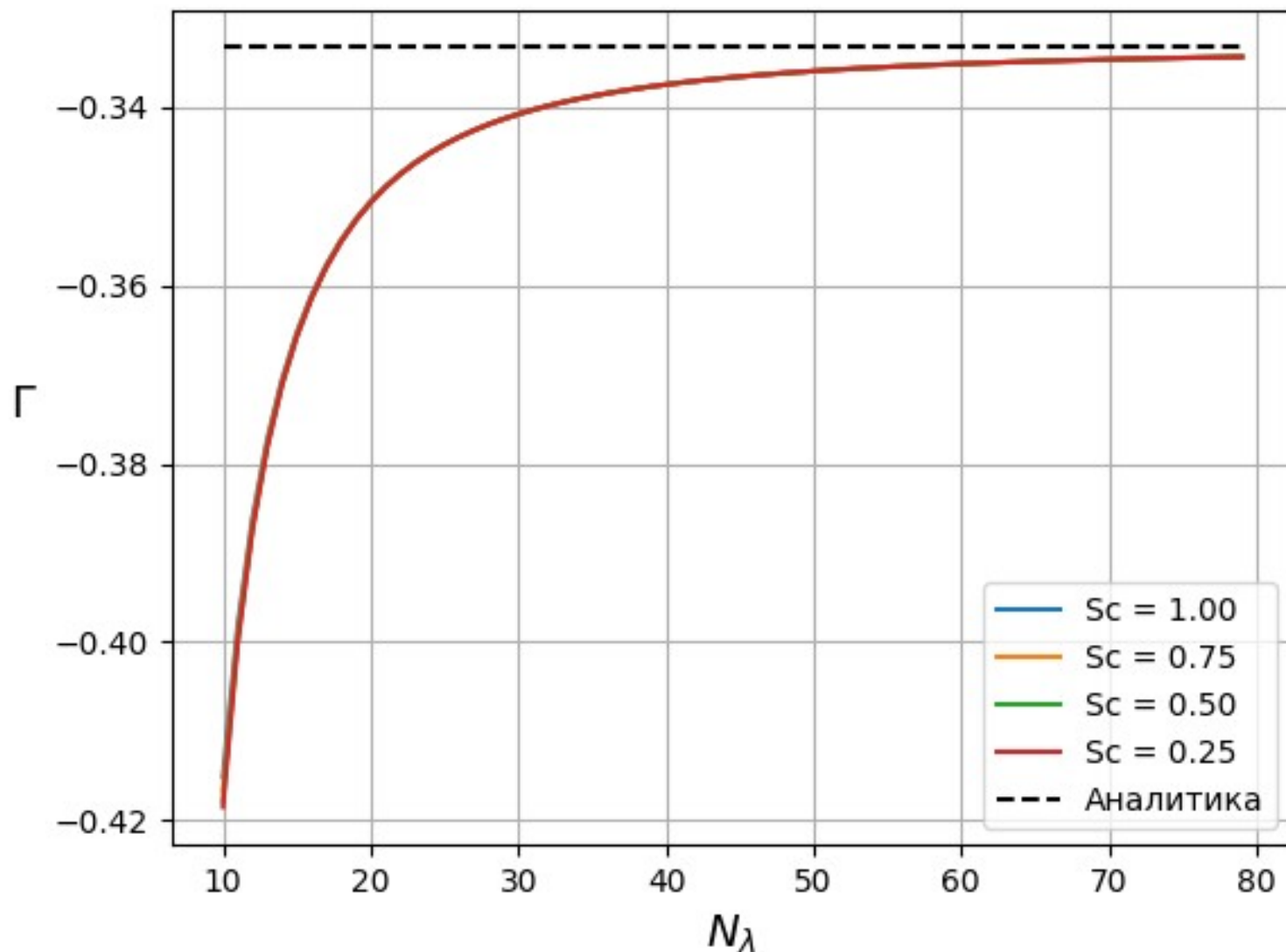
Коэффициенты прохождения и отражения в дискретном пространстве

$$\tilde{T} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}{\sqrt{\epsilon_1} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) + \sqrt{\epsilon_2} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)} \quad \bigg| \quad \tilde{\Gamma} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) - \sqrt{\epsilon_2} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}{\sqrt{\epsilon_1} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_2 \Delta_x}{2}\right) + \sqrt{\epsilon_2} \cos\left(\frac{\tilde{\beta}_1 \Delta_x}{2}\right)}$$

где

$$\frac{\tilde{\beta}_i \Delta_x}{2} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{\epsilon_i \mu_i}}{S_c} \sin\left(\frac{\pi S_c}{N_\lambda}\right)\right)$$

Коэффициент прохождения в дискретном пространстве (reflection_error.py)



Использование неравномерной сетки разбиения по пространству

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x[m+1/2]} \left(E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right)$$

$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$= E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x[m]} \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$

Использование неравномерной сетки разбиения по пространству

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2]=$$

$$= H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \left(E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right) \frac{1}{\mu W_0} \underline{S_c[m+1/2]}$$

$$E_z^{q+1}[m]=$$

$$= E_z^q[m] + \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right) \frac{W_0}{\varepsilon} \underline{S_c[m]}$$

Использование неравномерной сетки разбиения по пространству

$$v \frac{\Delta_t}{\Delta_x} \leq 1$$

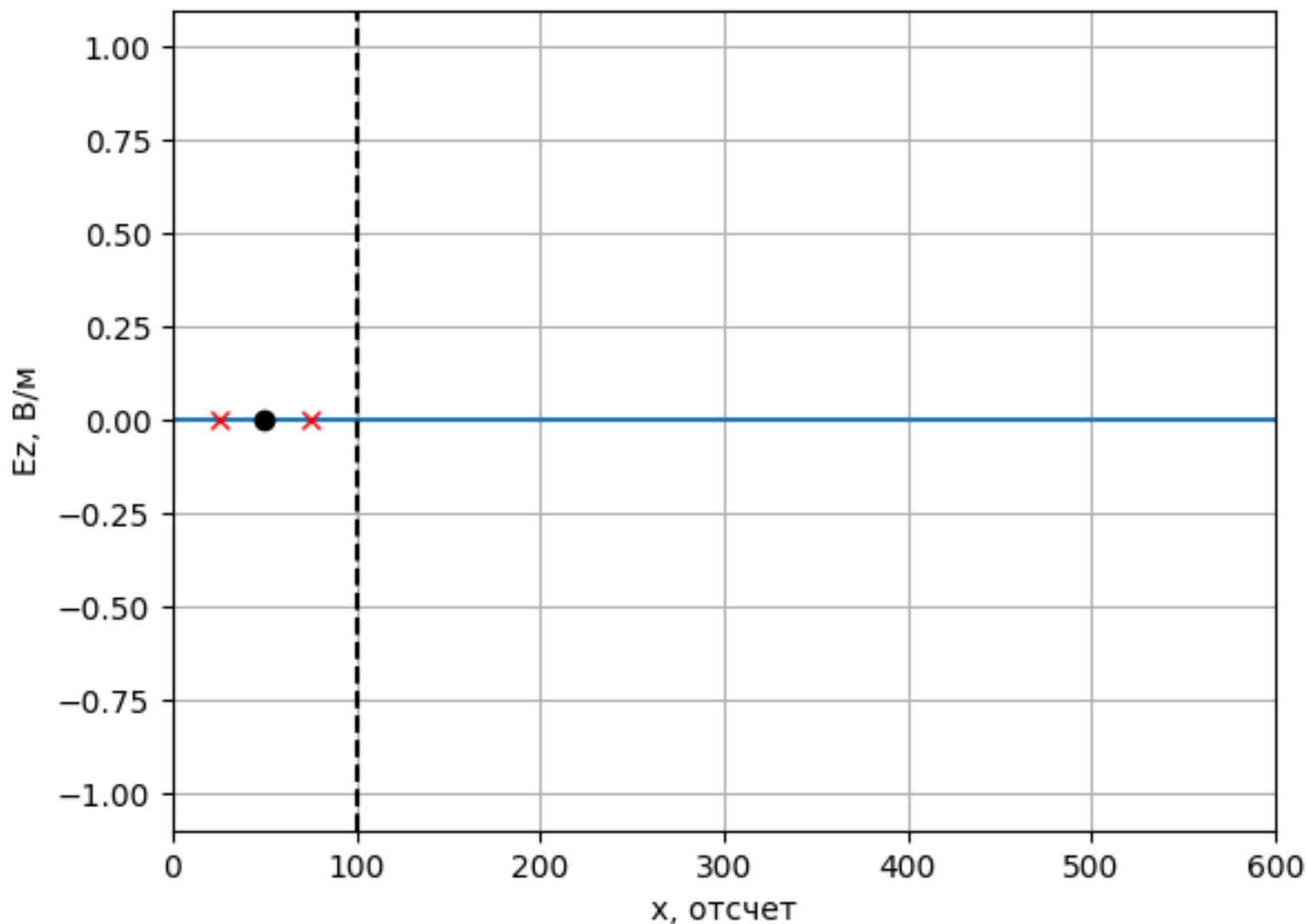
$$\frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \frac{\Delta_t}{\Delta_x} \leq 1$$

$$\frac{S'_c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \leq 1$$

$$S'_c \leq \sqrt{\epsilon \mu}$$

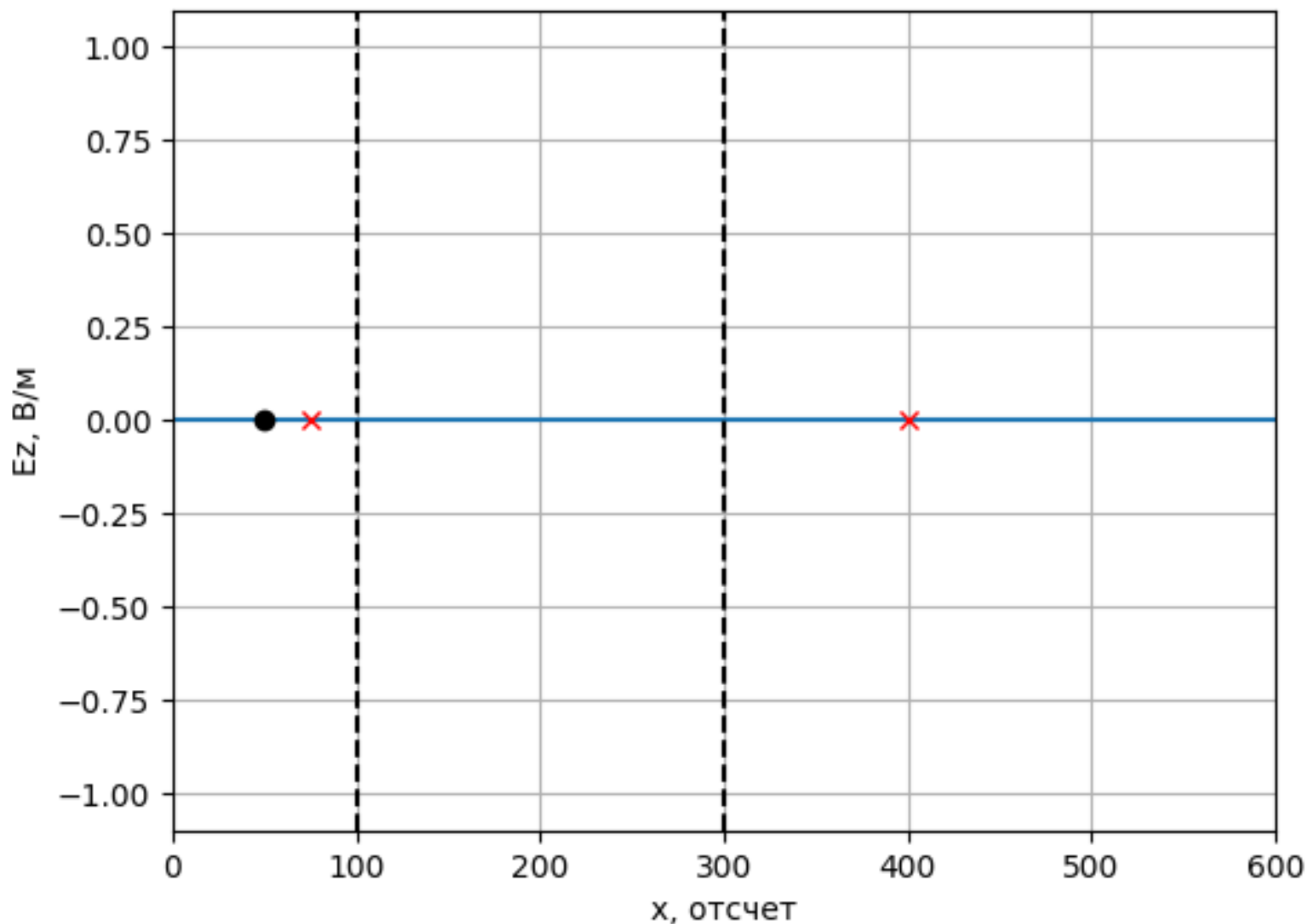
Пример использования неравномерной сетки пространственного разбиения (fdtd_heterogen_sc.py)

275

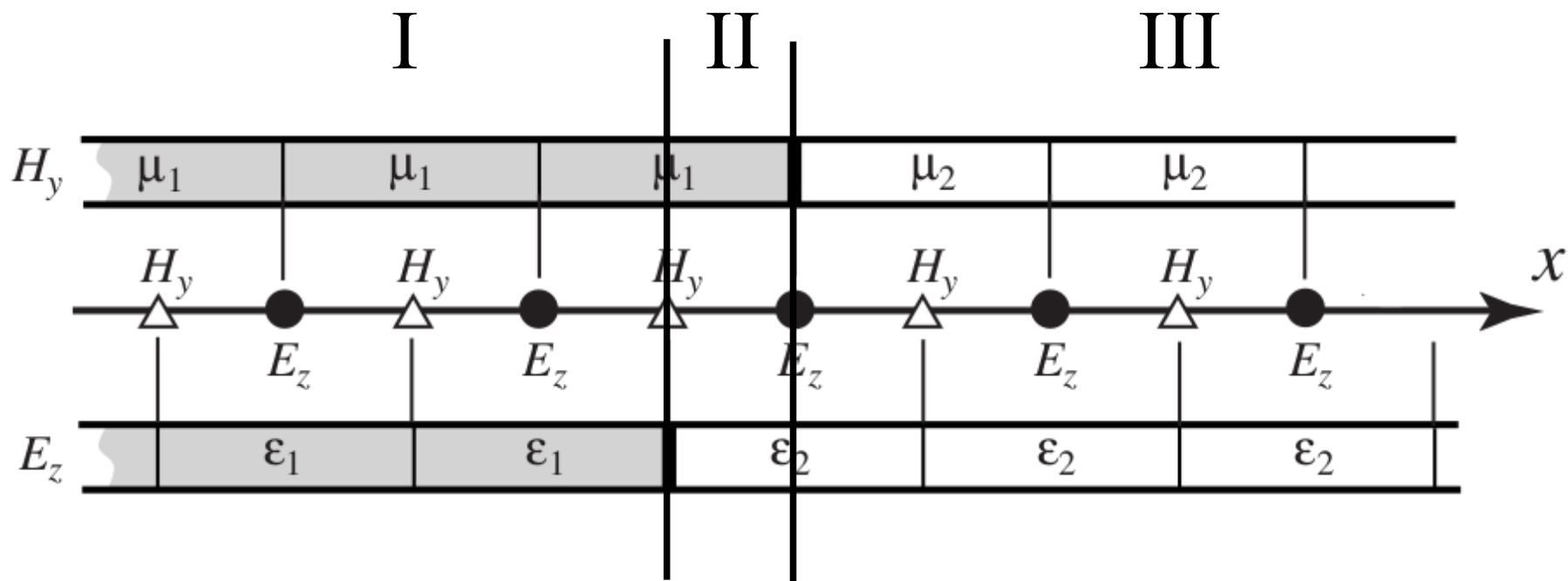


Пример использования неравномерной сетки пространственного разбиения (fdtd_heterogen_sc_layer.py)

276



Проблемы из-за смещенной сетки



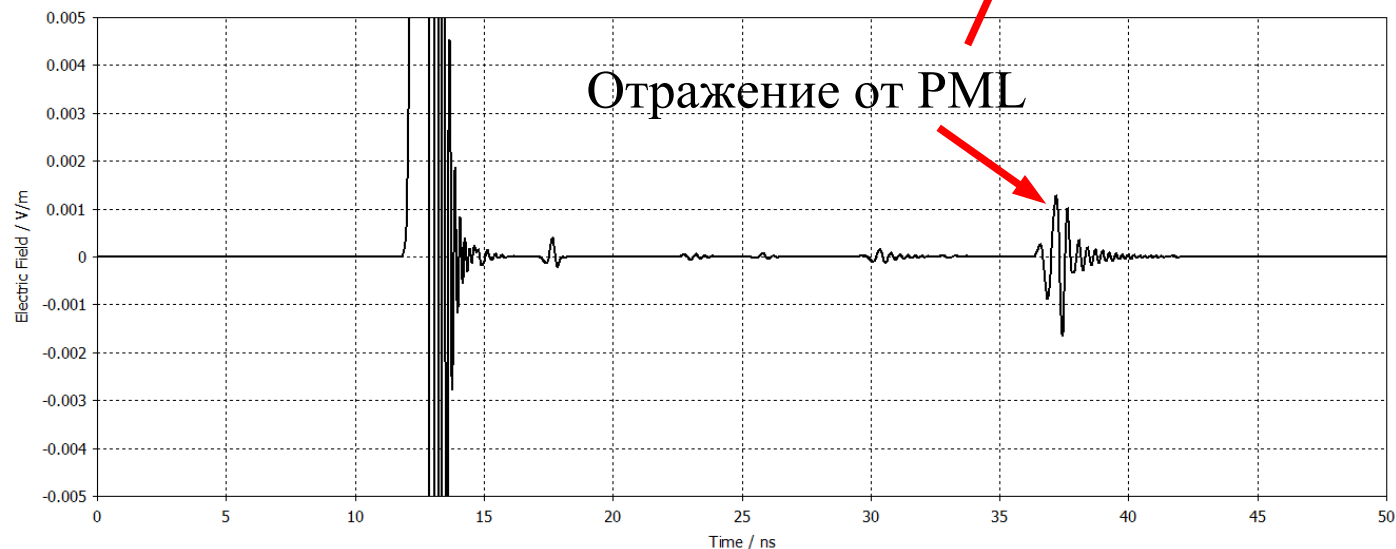
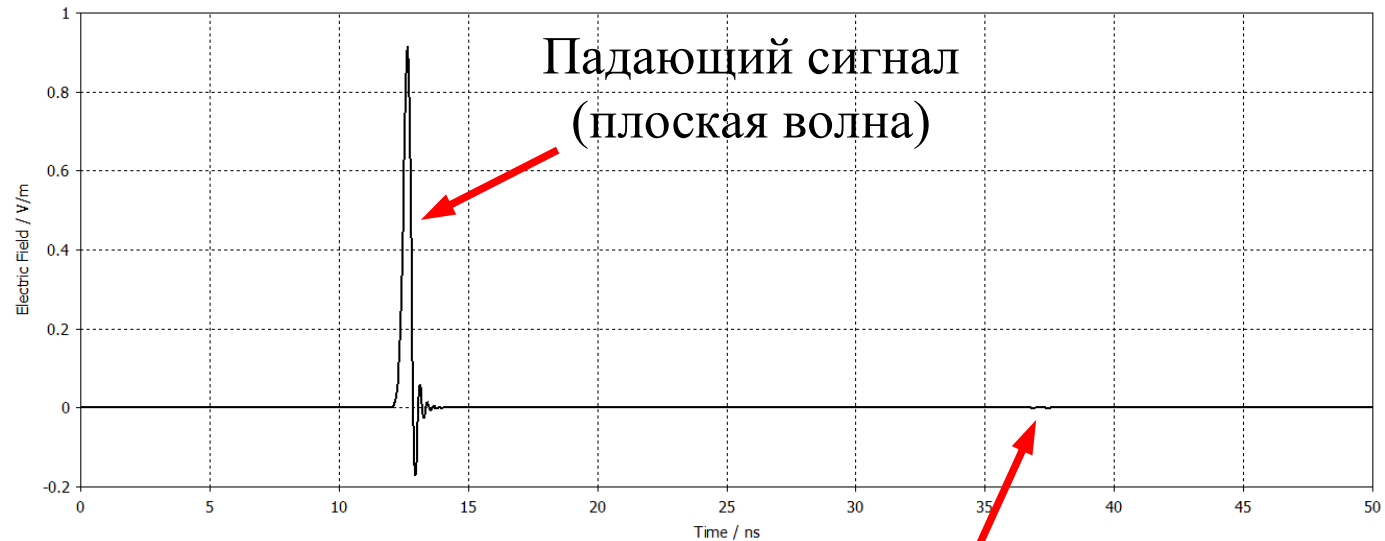
Погрешности метода FDTD

Источники погрешностей метода FDTD

- Численная дисперсия.
- Отражение от границ области моделирования.
- Ступенчатая аппроксимация границ объектов.
- Численный шум.
- Постоянная составляющая тока может создавать остаточные электрические заряды (емкость ячеек сетки).

Отражение от границ области моделирования

280

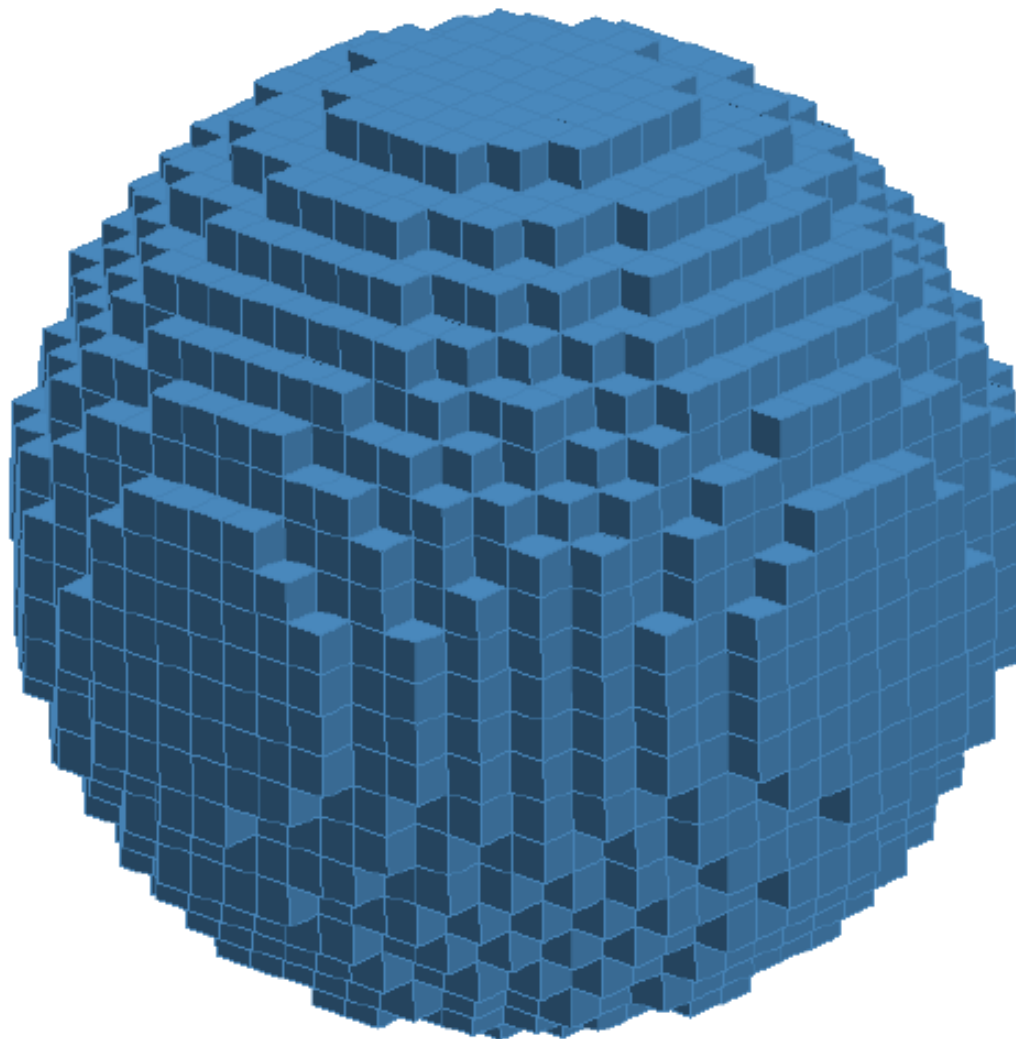


Источники погрешностей метода FDTD

- Численная дисперсия.
- Отражение от границ области моделирования.
- Ступенчатая аппроксимация границ объектов.
- Численный шум.
- Постоянная составляющая тока может создавать остаточные электрические заряды (емкость ячеек сетки).

Ступенчатая аппроксимация границ объектов

282



Источники погрешностей метода FDTD

- Численная дисперсия.
- Отражение от границ области моделирования.
- Ступенчатая аппроксимация границ объектов.
- Численный шум.
- Постоянная составляющая тока может создавать остаточные электрические заряды (емкость ячеек сетки).

Модификации метода FDTD

- Метод FDTD в криволинейных системах координат.
- Уменьшение отражений от границ области моделирования.
- Использование неравномерных сеток разбиения.
- Использование ячеек неправильной формы.
- Учет временной дисперсии среды.
- Учет зависимости параметров среды от частоты.
- Метод FDTD с произвольным шагом по времени.

Двумерный метод конечных разностей во временной области

Закон Фарадея

$$-\sigma_m \mathbf{H} - \mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \mathbf{x}_0 \frac{\partial E_z}{\partial y} - \mathbf{y}_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

Закон Ампера

$$\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \mathbf{x}_0 \frac{\partial H_z}{\partial y} - \mathbf{y}_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

Законы Фарадея и Ампера в скалярном виде

$$-\sigma_m H_x - \mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$\sigma_m H_y + \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$-\sigma_m H_z - \mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

$$\sigma E_x + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$\sigma E_y + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$\sigma E_z + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

Законы Фарадея и Ампера в скалярном виде

$$-\sigma_m H_x - \mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$\sigma_m H_y + \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$-\sigma_m H_z - \mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

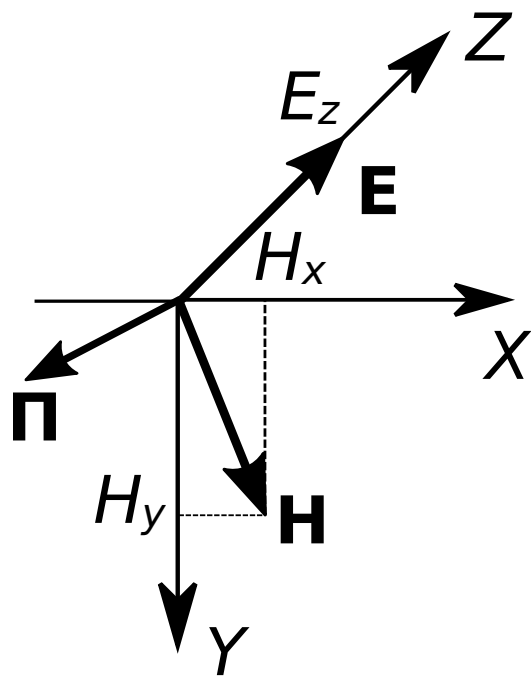
$$\sigma E_x + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$\sigma E_y + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

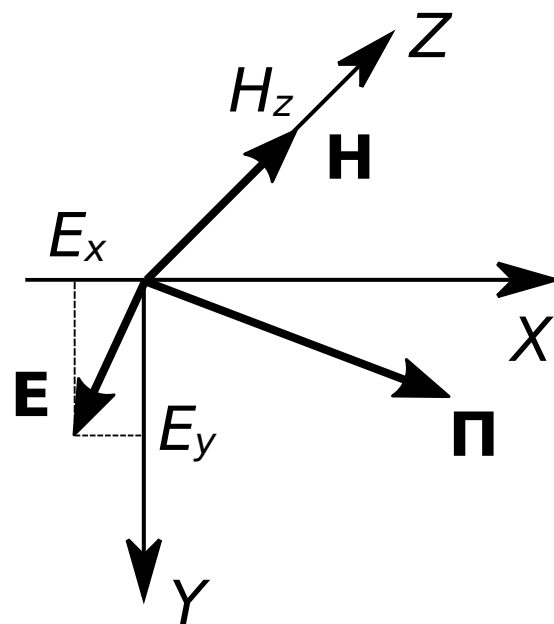
$$\sigma E_z + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

Виды поляризации для двумерного случая

TM^z



TE^z

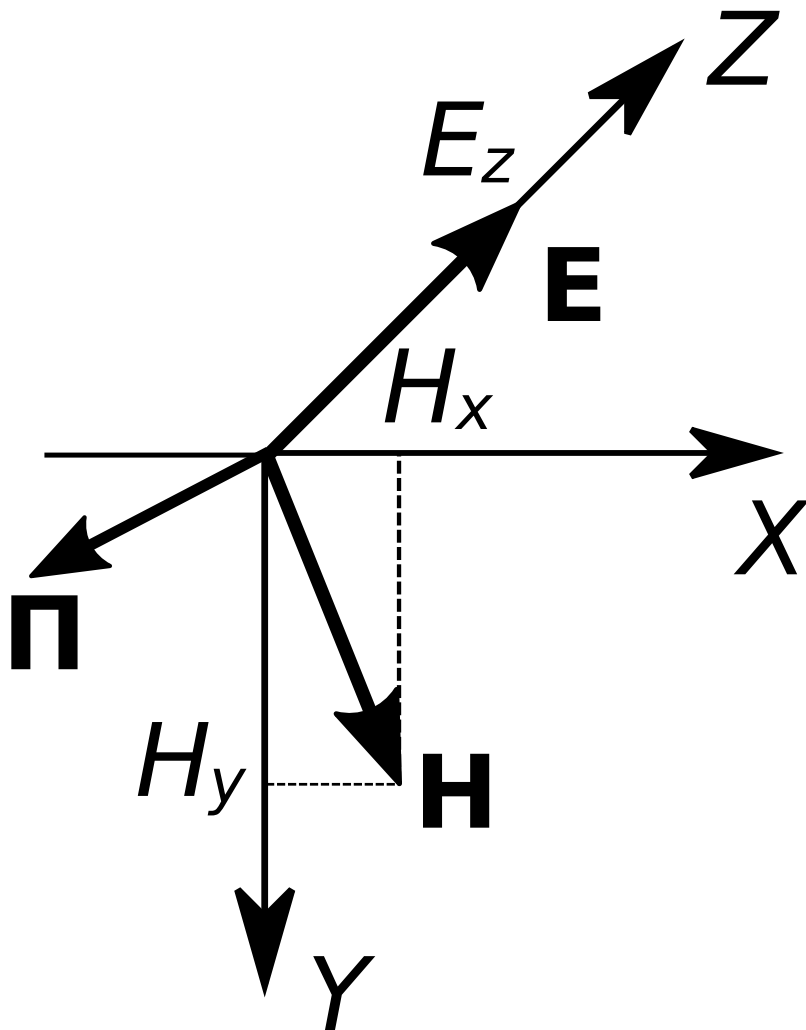


Виды мод электромагнитной волны

- ТМ - Transverse magnetic — Поперечно-магнитная волна. Нет магнитной составляющей в указанном направлении (Е-волна).
- ТЕ - Transverse electric — Поперечно-электрическая волна. нет электрической составляющей в указанном направлении (Н-волна).
- ТЕМ - Transverse electromagnetic — Поперечно-электромагнитная волна. нет электрической и магнитной составляющих в указанном направлении.
- Гибридные — есть и электрическая, и магнитная составляющие в указанном направлении.

**Двумерный метод конечных
разностей во временной области
для поляризации TM^z**

Поляризация ТМ^z



Существуют следующие компоненты ЭМ поля:

- E_z
- H_x
- H_y

Метод FDTD для поляризации ТМ^z. Законы Фарадея и Ампера в скалярном виде

294

$$-\sigma_m H_x - \mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$\sigma_m H_y + \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\sigma E_z + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

Дискретизация величин E и H

$$H_x(x, y, t) = H_x(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = H_x^q[m, n]$$

$$H_y(x, y, t) = H_y(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = H_y^q[m, n]$$

$$E_z(x, y, t) = E_z(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = E_z^q[m, n]$$

m — индекс по пространству вдоль оси X.

n — индекс по пространству вдоль оси Y.

q — индекс по времени.

Δ_x, Δ_y — размер сетки по осям X и Y соответственно.

Конечно-разностная аппроксимация для закона Фарадея

Запишем конечно-разностную аппроксимацию для точки
 $(m\Delta_x, (n + 1/2)\Delta_y, q\Delta_t)$

$$\begin{aligned}
 & -\sigma_m \frac{H_x^{q+1/2}[m, n+1/2] + H_x^{q-1/2}[m, n+1/2]}{2} - \\
 & -\mu\mu_0 \frac{H_x^{q+1/2}[m, n+1/2] + H_x^{q-1/2}[m, n+1/2]}{\Delta_t} = \\
 & = \frac{E_z^q[m, n+1] - E_z^q[m, n]}{\Delta_y}
 \end{aligned}$$

Конечно-разностная аппроксимация для закона Фарадея

Из полученного уравнения выражаем $H_x^{q+1/2}[m, n+1/2]$:

$$H_x^{q+1/2}[m, n+1/2] = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} H_x^{q-1/2}[m, n+1/2] -$$

$$- \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \Delta_y} \left(E_z^q[m, n+1] - E_z^q[m, n] \right)$$

Конечно-разностная аппроксимация для закона Фарадея

Подобным образом выражаем $H_y^{q+1/2}[m+1/2, n]$:

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2, n] = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} H_y^{q-1/2}[m+1/2, n] +$$

$$+ \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \Delta_x} \left(E_z^q[m+1, n] - E_z^q[m, n] \right)$$

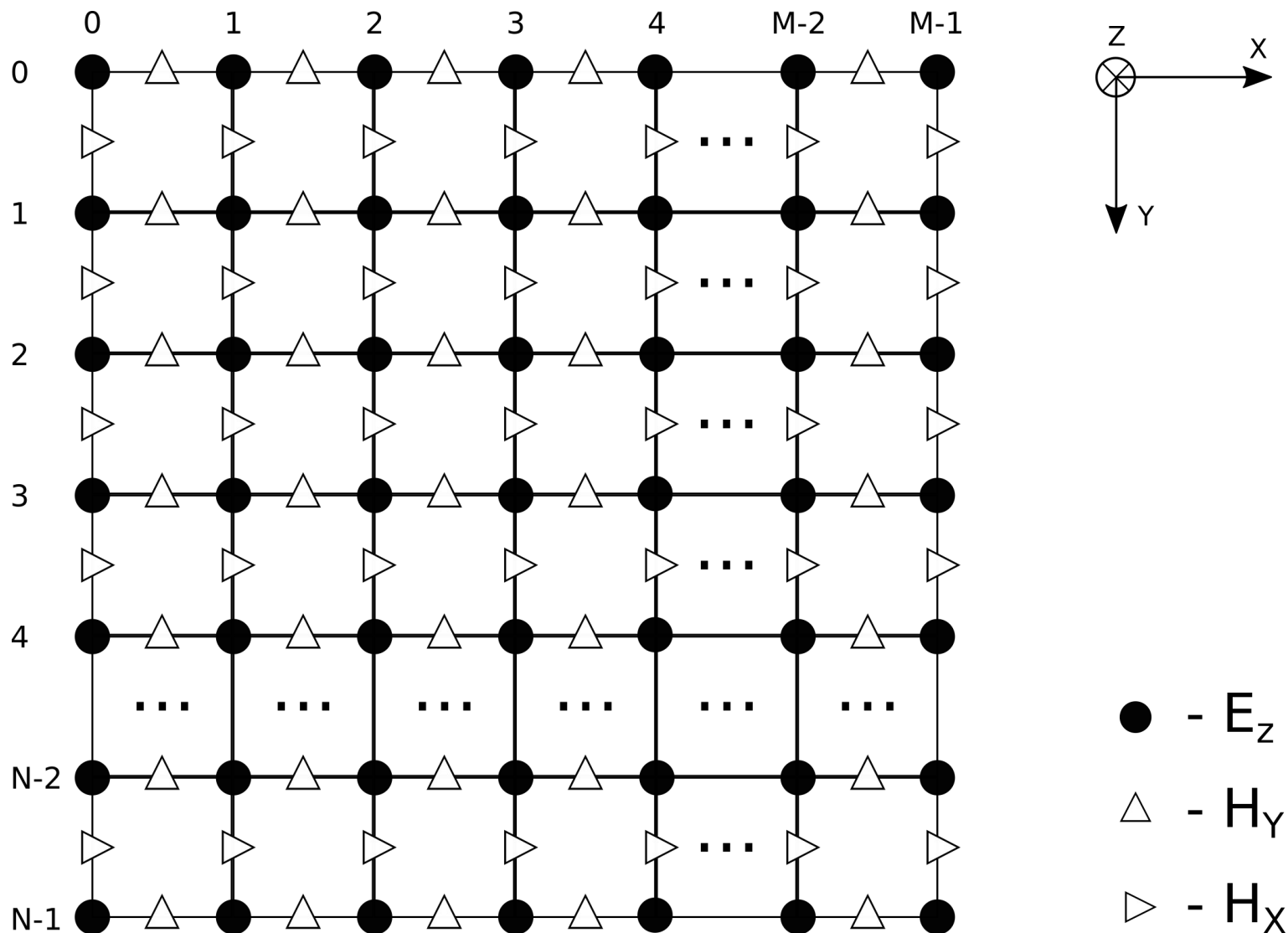
Конечно-разностная аппроксимация для закона Ампера

Подобным образом выражаем $E_z^{q+1}[m, n]$ из закона Ампера:

$$\begin{aligned}
 E_z^{q+1}[m, n] = & \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_z^q[m, n] + \\
 & + \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \left(\frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \{ H_y^{q+1/2}[m+1/2, n] - H_y^{q+1/2}[m-1/2, n] \} - \right. \\
 & \left. - \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_y} \{ H_x^{q+1/2}[m, n+1/2] - H_x^{q+1/2}[m, n-1/2] \} \right)
 \end{aligned}$$

Пространственная сетка для двумерного метода FDTD. Поляризация TM^z

300



Особенности реализации двумерного метода FDTD

- Размер массива для компоненты E_z — $M \times N$
- Размер массива для компоненты H_x — $M \times (N - 1)$
- Размер массива для компоненты H_y — $(M - 1) \times N$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{hxh}(m, n+1/2) = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \bigg|_{m\delta, (n+1/2)\delta}$$

$$C_{hxe}(m, n+1/2) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \delta} \bigg|_{m\delta, (n+1/2)\delta}$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{hyh}(m+1/2, n) = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \bigg|_{(m+1/2)\delta, n\delta}$$

$$C_{hye}(m+1/2, n) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \delta} \bigg|_{(m+1/2)\delta, n\delta}$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{eze}(m, n) = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \bigg|_{m\delta, n\delta}$$

$$C_{ezh}(m, n) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \delta} \bigg|_{m\delta, n\delta}$$

Программная реализация конечно-разностной схемы

$$Hx[m, n] = Chxh[m, n] * Hx[m, n] - \\ Chxe[m, n] * (Ez[m, n + 1] - Ez[m, n])$$

$$Hy[m, n] = Chyh[m, n] * Hy[m, n] + \\ Chye[m, n] * (Ez[m + 1, n] - Ez[m, n])$$

$$Ez[m, n] = Ceze[m, n] * Ez[m, n] + \\ Cezh[m, n] * (Hy[m, n] - Hy[m - 1, n]) - \\ (Hx[m, n] - Hx[m, n - 1])$$

Стабильность двумерного метода FDTD

Критерий устойчивости Куранта-Фридриха-Леви

$$v_{max} \Delta_t \leq \frac{1}{\sqrt{\Delta_x^{-2} + \Delta_y^{-2} + \Delta_z^{-2}}}$$

$$v_{max} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{min} \mu_{min}}}$$

Если $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \Delta$

$$v_{max} \Delta_t \leq \frac{\Delta}{\sqrt{N}}$$

N — размерность пространства (1, 2, 3)

Стабильность двумерного метода FDTD

Критерий стабильности для одномерного пространства:

$$S_c = \frac{v \Delta_t}{\Delta_x} \leq 1$$

Стабильность двумерного метода FDTD

Критерий стабильности для одномерного пространства:

$$S_c = \frac{v \Delta_t}{\Delta_x} \leq 1$$

Критерий стабильности для N-мерного пространства:

$$S_c = v \Delta_t \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{1}{\Delta_n^2}} \leq 1$$

Стабильность двумерного метода FDTD

Критерий стабильности для одномерного пространства:

$$S_c = \frac{v \Delta_t}{\Delta_x} \leq 1$$

Критерий стабильности для N-мерного пространства:

$$S_c = v \Delta_t \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{1}{\Delta_n^2}} \leq 1$$

Критерий стабильности для двумерного пространства:

$$S_c = v \Delta_t \sqrt{\frac{1}{\Delta_x^2} + \frac{1}{\Delta_y^2}} \leq 1$$

Стабильность двумерного метода FDTD

Если $\Delta_x = \Delta_y = \Delta$, то

$$S_c = v \Delta_t \sqrt{\frac{1}{\Delta^2} + \frac{1}{\Delta^2}} \leq 1 \quad \rightarrow \quad S_c = \frac{v \Delta_t \sqrt{2}}{\Delta} \leq 1$$

Критерий стабильности для N-мерного пространства:

$$S_c = \frac{v \Delta_t \sqrt{N}}{\Delta} \leq 1$$

или

$$S_c = \frac{v \Delta_t}{\Delta} \leq \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Стабильность двумерного метода FDTD

Введем коэффициент — аналог одномерного числа Куранта для двумерного случая

$$C_{dtds} = \frac{v \Delta_t}{\Delta} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Критерий устойчивости для двумерного FDTD:

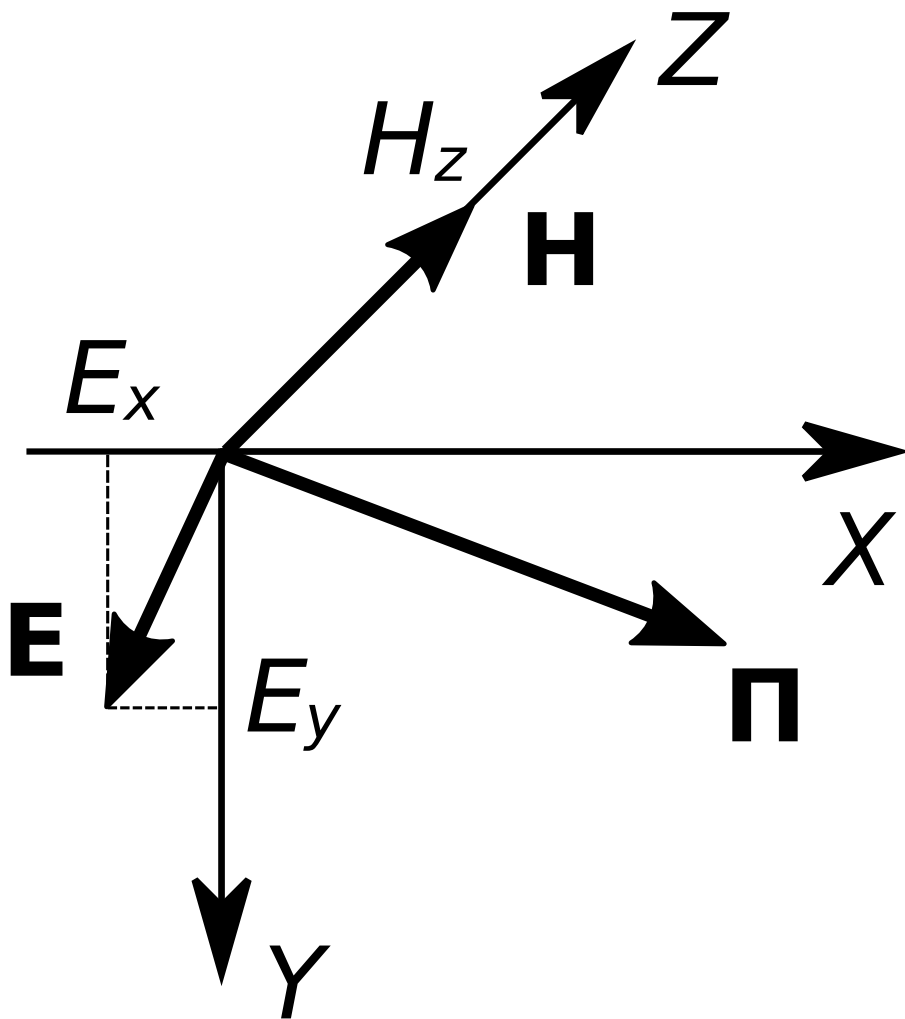
$$\Delta_t \leq \frac{\Delta}{c \sqrt{2}}$$

**Демонстрация двумерного метода
FDTD для поляризации TM^z .
Источник цилиндрической волны.**

**Демонстрация двумерного метода
FDTD для поляризации TM^z .
Источник плоской волны.**

**Двумерный метод конечных
разностей во временной области
для поляризации TE^z**

Поляризация TE^z



Существуют следующие компоненты ЭМ поля:

- E_x
- E_y
- H_z

Законы Фарадея и Ампера в скалярном виде

$$\sigma E_x + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$\sigma E_y + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = - \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$-\sigma_m H_z - \mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

Дискретизация величин E и H

$$E_x(x, y, t) = E_x(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = E_x^q[m, n]$$

$$E_y(x, y, t) = E_y(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = E_y^q[m, n]$$

$$H_z(x, y, t) = H_z(m \Delta_x, n \Delta_y, q \Delta_t) = H_z^q[m, n]$$

m — индекс по пространству вдоль оси X.

n — индекс по пространству вдоль оси Y.

q — индекс по времени.

Δ_x, Δ_y — размер сетки по осям X и Y соответственно.

Конечно-разностная схема

$$\begin{aligned}
 H_z^{q+1/2}[m+1/2, n+1/2] = & \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} H_z^{q-1/2}[m+1/2, n+1/2] - \\
 & - \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \left(\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \Delta_x} \{ E_y^q[m+1, n+1/2] - E_y^q[m, n+1/2] \} - \right. \\
 & \left. - \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \Delta_y} \{ E_x^q[m+1/2, n+1] - E_x^q[m+1/2, n] \} \right)
 \end{aligned}$$

Конечно-разностная схема

$$E_x^{q+1}[m+1/2, n] = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_x^q[m+1/2, n] +$$

$$+ \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_y} \left(H_z^{q+1/2}[m+1/2, n+1/2] - H_z^{q+1/2}[m+1/2, n-1/2] \right)$$

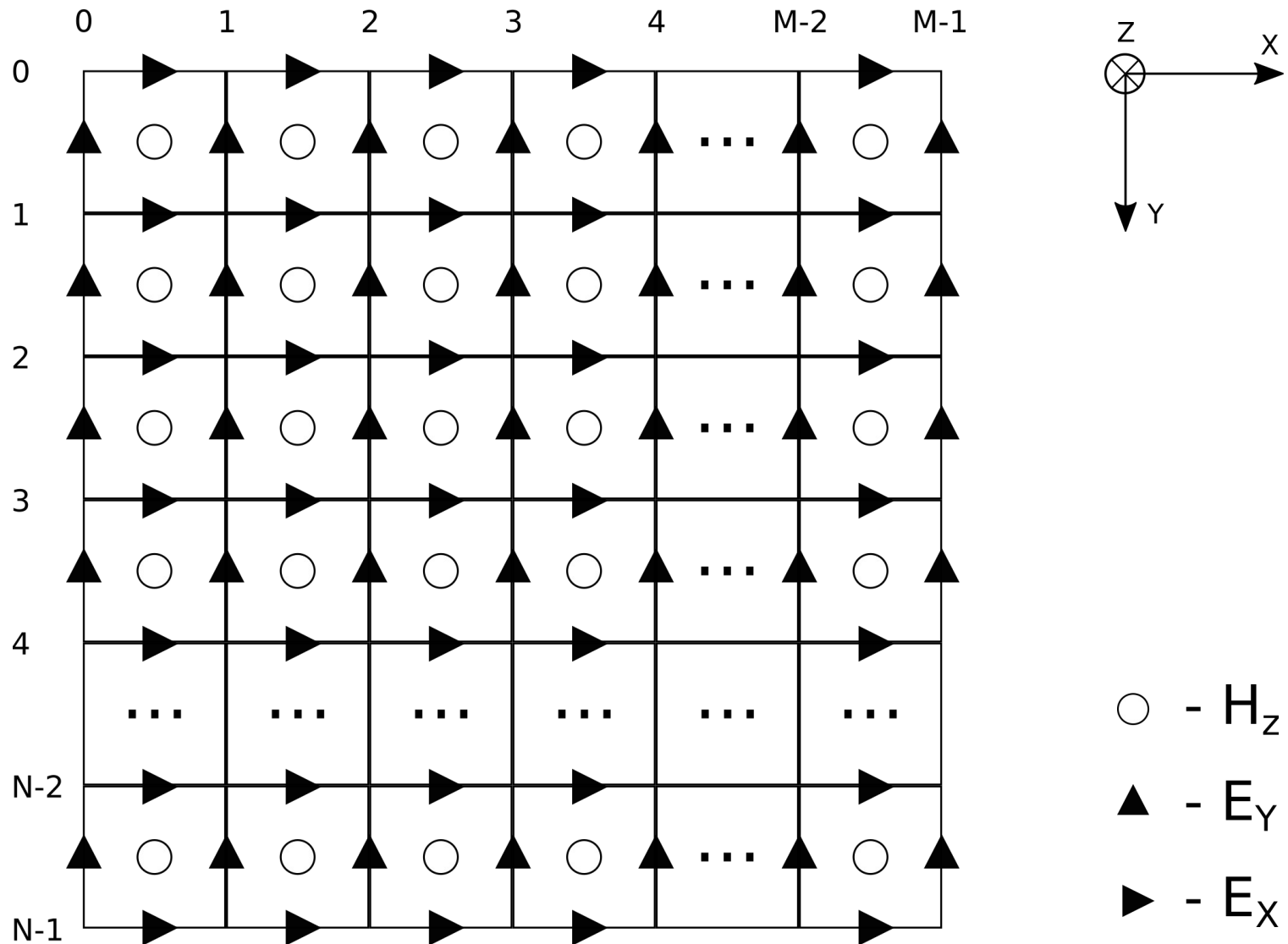
Конечно-разностная схема

$$E_y^{q+1}[m, n+1/2] = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_y^q[m, n+1/2] -$$

$$- \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left(H_z^{q+1/2}[m+1/2, n+1/2] - H_z^{q+1/2}[m-1/2, n+1/2] \right)$$

Пространственная сетка для двумерного метода FDTD. Поляризация TE^z

322



Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{hzh}(m+1/2, n+1/2) = \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \bigg|_{(m+1/2)\delta, (n+1/2)\delta}$$

$$C_{hze}(m+1/2, n+1/2) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0 \delta} \bigg|_{(m+1/2)\delta, (n+1/2)\delta}$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{exe}(m+1/2, n) = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \bigg|_{(m+1/2)\delta, n\delta}$$

$$C_{exh}(m+1/2, n) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \delta} \bigg|_{(m+1/2)\delta, n\delta}$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{eye}(m, n+1/2) = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \bigg|_{m\delta, (n+1/2)\delta}$$

$$C_{eyh}(m, n+1/2) = \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \delta} \bigg|_{m\delta, (n+1/2)\delta}$$

Программная реализация конечно-разностной схемы

$$\begin{aligned} H_z[m, n] = & Chzh[m, n] * H_z[m, n] + \\ & Chze[m, n] * ((Ex[m, n + 1] - Ex[m, n] - \\ & (Ey[m + 1, n] - Ey[m, n]))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ex[m, n] = & Cexe[m, n] * Ex[m, n] + \\ & Cexh[m, n] * (H_z[m, n] - H_z[m, n - 1]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ey[m, n] = & Ceye[m, n] * Ey[m, n] - \\ & Ceyh[m, n] * (H_z[m, n] - H_z[m - 1, n]) \end{aligned}$$

**Демонстрация двумерного метода
FDTD для поляризации TE^z .
Источник цилиндрической волны.**

Объединенная пространственная сетка для двумерного метода FDTD для двух поляризаций

330

