ЛОКАЛЬНАЯ КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ*

А. В. Грабовой[1], **В. В. Стрижов**[2]

Аннотация: Работа посвящена поиску периодических сигналов во временном ряду. Предлагается метод кластеризации точек временного ряда для поиска характерных периодических сигналов внутри временного ряда. Для построения признакового описания используется локальное снижения размерности фазового пространства при помощи метода главных компонент. Для оценки близости двух периодических сигналов рассматривается расстояние между базисными векторами, которые получены методом главных компонент. Используя матрицу попарных расстояний между точками временного ряда выполняется кластеризация точек временного ряда. Для анализа качества представленного алгоритма проводятся эксперименты на синтетических данных.

Ключевые слова: временные ряды; кластеризация временных рядов

DOI: 00.00000/00000000000000

1 Введение

Решается задача поиска локальных периодических сигналов акселерометра.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ и правительства РФ.

[1]Московский физико-технический институт, grabovoy.av@phystech.edu

[2]Вычислительный центр им. А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, strijov@ccas.ru

Временные ряды это объекты сложной структуры, при классификации которых большую роль играет построение признакового пространства. Для этой цели возможно использование экспертного задания базовых функций и метода построения признаков на основе гипотезы порождения данных. В работе [1] рассматривается комбинированное признаковое описание на основе этих двух методов. В статье [2] рассматривается построение признаков и предлагается критерий избыточности выбранных признаков.

Данная работа посвящена поиску классификации сигналов внутри временного ряда. Предлагается локально использовать метод главных компонент для выделения базисных векторов, которые аппроксимируют данный участок временного ряда и рассматривается как признаковое описание этого участка. Используя признаковое описание временного ряда производиться их кластеризация.

Для решения данной задачи вводится ряд предположений о временном ряде. Предполагается, что периоды всех различных сигналов различаются не значительно, причем известен максимальный период сигналов и количество различных сигналов внутри временного ряда. Также предполгается, что класс сигнала во времени меняется не очень часто, а также что фазовые траектори сигналов из разных классов являются различными.

Проверка и анализ метода проводится на синтетической выборке.

2 Постановка

Задан временной ряд:

$$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}\times 1}. \tag{2.1}$$

Пусть временной ряд состоит из последовательности сигналов из множества $\mathcal{V}$:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_M], \tag{2.2}$$

где $\mathbf{v}_i$ некоторый сигнал из множества возможных сигналов $\mathcal{V}$. Причем $\forall i$ выполняется или $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1}$ или $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i+1}$. Пусть множество $\mathcal{V}$ удовлетворяет следующим свойствам:

$$|\mathcal{V}| = K, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \ \ |\mathbf{v}| \leq T, \tag{2.3}$$

где $|\mathcal{V}|$ мощность множества сигналов, а $|\mathbf{v}|$ длина сигнала.

Рассмотрим отображение:

$$a : x \to \{1, \cdots, K\}, \tag{2.4}$$

где $x \in \mathbf{X}$ некоторая точка временного ряда.

Требуется, чтобы отображение удовлетворяло следующим свойствам:

$$\begin{cases} a(x_1) = a(x_2), & \text{если } \exists \mathbf{v} \in \mathcal{V} : x_1, x_2 \in v \\ a(x_1) \neq a(x_2), & \text{если } \nexists \mathbf{v} \in \mathcal{V} : x_1, x_2 \in v \end{cases}$$

3 Кластеризация точек

Рассмотрим фазовую траекторию ряда $\mathbf{X}$:

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{h}_t | \mathbf{h}_t = [x_{t-T}, x_{t-T+1}, \cdots, x_t],\ \mathrm{T} \leq t \leq \mathrm{N}\}. \tag{3.1}$$

Фазовая траектория разбивается на фазовые подпространства из $2T$ векторов:

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{s}_t | \mathbf{s}_t = [h_{t-2T}, h_{t-2T+1}, \cdots, h_t],\ 2\mathrm{T} \leq t \leq \mathrm{N}\}. \tag{3.1}$$

Каждое T-мерное подпространство s_t спроектируем на плоскость при помощи метода главных компонент. Получим представление базисных векторов плоскости, а также собственые числа, которые соответствуют данным базисным векторам каждого подпространства s_t в T-мерном пространстве:

$$\mathcal{W} = \{\mathbf{W}_t | \mathbf{W}_t = [\mathbf{w}_t^1, \mathbf{w}_t^2]\}, \quad \mathcal{L} = \{\boldsymbol{\lambda}_t | \boldsymbol{\lambda}_t = [\lambda_t^1, \lambda_t^2]\}, \tag{3.3}$$

где $[\mathbf{w}_t^1, \mathbf{w}_t^2]$ и $[\lambda_t^1, \lambda_t^2]$ это базисные векторы и соответствующие им собственные числа плоскости построенной при помощи метода главных компонент для подпространстве s_t.

Рассмотрим расстояние между элементами $\mathcal{W}$:

$$\rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) = \max_{\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} \subset \mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2} V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \tag{3.4}$$

где $V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ — объем паралелепипеда построенного на векторах $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

$\rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2)$ является псевдометрикой в пространстве $\mathcal{W}$. Также $\rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2)$ является метрикой, если дополнительно указать, что базисы соответсвующие параллельным плоскостям не различимы.

Рассмотрим расстояние между элементами $\mathcal{L}$:

$$\rho\left(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2\right) = \sqrt{\left(\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\lambda}_2\right)^{\mathsf{T}} \left(\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\lambda}_2\right)}. \tag{3.5}$$

$\rho\left(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2\right)$ является метрикой в пространстве $\mathcal{L}$.

Матрица попарных расстояний между базисными векторами для временного ряда $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{M}_c = [0,1]^{N \times N}. \tag{3.6}$$

Матрица попарных расстояний между собственными значениями для временного ряда $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{M}_l = [0,1]^{N \times N}. \tag{3.7}$$

Используя выражения (3.4-7) определим растояниие между двумя точками t_1, t_2 временного ряда:

$$\rho\left(t_1, t_2\right) = \rho\left(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2\right) + \rho\left(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2\right), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_l + \mathbf{M}_c, \tag{3.8}$$

где $\rho\left(t_1, t_2\right)$ является метрикой, как сумма двух метрик. Матрица $\mathbf{M}$ является матрицей попарных расстояний между двумя точками временного ряда.

Используя матрицу попарных расстояний $\mathbf{M}$ выполним кластеризацию моментов времени временного ряда, получим следующее отображение:

$$a : x \to \{1, \cdots, K\}, \tag{3.9}$$

где x некоторая точка временного ряда $\mathbf{X}$.

4 Эксперимент

Для анализа свойств предложенного алгоритма был проведен вычислительный эксперимент в котором кластеризация точек временного ряда проводилась используя матрицы попарных расстояний $(3.6 - 8)$.

В качестве данных использовались две выборки временных рядов. Выборка "найти хорошую реальную выборку"это реальные временные ряды.

Синтетические временные ряды были построены при помощи обрезанного ряда Фурье с произвольными коэффициентами. Генерация данных состояла из двух этапов. На первом этапе генерировались короткие

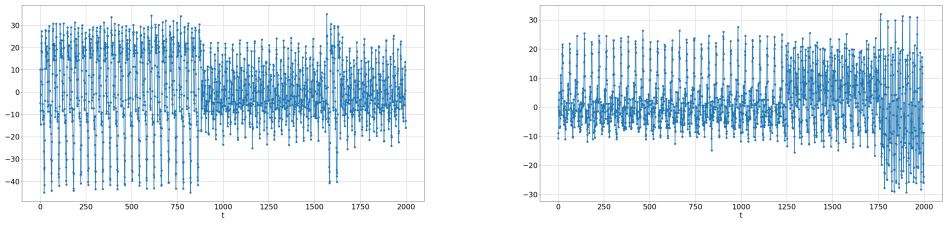
сигналы $\mathbf{v}$ для построения множества $\mathcal{V}$. Вторым этапом генерации выборки $\mathbf{X}$ является следующим случайным процессом:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_M], \quad \begin{cases} \mathbf{v}_1 \sim \mathcal{U}(\mathcal{V}), \\ \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1}, & \text{с вероятностью } \frac{3}{4}, \\ \mathbf{v}_i \sim \mathcal{U}(\mathcal{V}), & \text{с вероятностью } \frac{1}{4} \end{cases} \tag{4.1}$$

где $\mathcal{U}(\mathcal{V})$ — равномерное распределение на объектах из $\mathcal{V}$.

Таблица 1: Описание выборок

Выборка	N	K	T
Real			
Synthetic 1	2000	2	20
Synthetic 2	2000	3	20

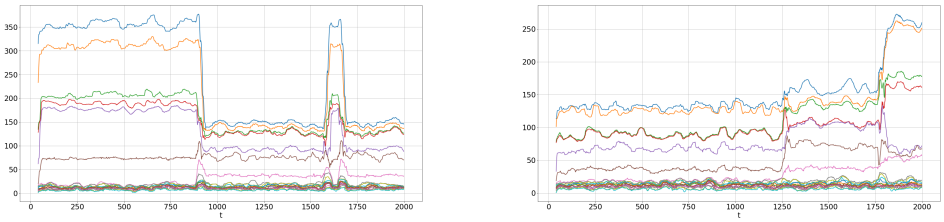


(a) Synthetic 1 (b) Synthetic 2

Рис. 1: Пример синтетически построенных временных рядов

Синтетические данные. На рис. 1 приведен пример синтетически построенных временных рядов. На рис. 1a показан пример ряда в котором количество сигналов $K = 2$, а длина каждого сигнала $T = 20$. На рис. 1b показан пример ряда в котором количество сигналов $K = 3$, а длина каждого сигнала $T = 20$.

На рис. 2 показан график зависимости значения сингулярных чисел локальной аппроксимации с течением времени. Значение сингулярных

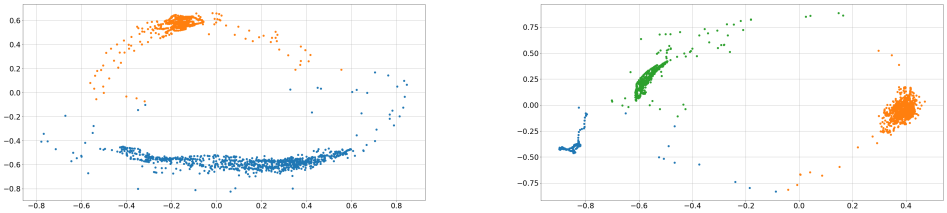


(a) Synthetic 1 (b) Synthetic 2

Рис. 2: График зависимости значения сингулярных чисел метода главных компонент

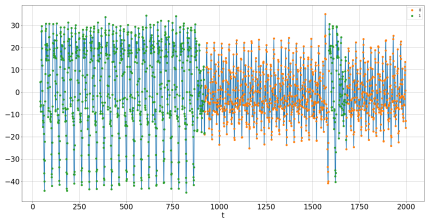
(a) Synthetic 1 (b) Synthetic 2

Рис. 3: Матрица попарных расстояний $\mathbf{M}$ между точками временного ряда

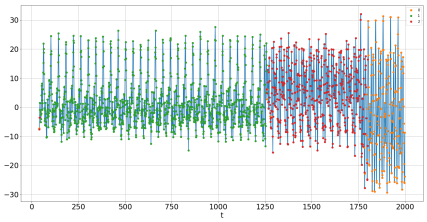


(a) Synthetic 1 (b) Synthetic 2

Рис. 4: Проекция точек временного на плоскость при помощи матрицы попарных расстояний $\mathbf{M}$



(a) Synthetic 1



(b) Synthetic 2

Рис. 5: Кластеризация точек временного ряда

чисел, которые соответствуют первым двум главным компонентам значительно меняются с течением времени t.

На рис. 3 проиллюстрированы матрицы попарных расстояний $\mathbf{M}$ между построены при помощи формулы (3.8). Используя матрицу попарных растояний и метод Multidimensional Scaling [3] визуальзуализируем точки временного ряда на плоскости. На рис. 4 показана визуализация точек на плоскости и выполнена их кластеризация при помощи метода KMeans [4]. Иллюстрация кластеров точек временного ряда продемонстрирована на рис. 5.

5 Заключение

В работе рассматривалась задача поиска характерных периодических структур внутри временного ряда. Рассматривался метод основаный на локальном снижение размерности фазового пространства. Был предложен алгоритм поиска характерных сигналов, который основывается на методе главных компонент для локального снижения размерности, а также на использовании некоторой функции расстояния между локальными базисами в каждый момент времени, которые интерпретировались как признакового описание точки временного ряда.

В ходе эксперимента было показано, что предложенный метод измерение расстояния между базисами хорошо разделяет точки которые принадлежат различным классам, что приводит к хорошей кластеризации объектов.

Предложеный метод имеет ряд недостаткров связаных с большим

количеством ограничей на временной ряд. Данные ограничения будут ослаблены в последнующих работах.

Список литературы

[1] *И. П. Ивкин, М. П. Кузнецов* Алгоритм классификации временных рядов акселерометра по комбинированному признаковому описанию. // Машинное обучение и анализ данных, 2015.

[2] *V. V. Strijov, A. M. Katrutsa* Stresstes procedures for features selection algorithms. // Schemometrics and Intelligent Laboratory System, 2015.

[3] *I. Borg, P. J. F. Groenen* Modern Multidimensional Scaling. — New York: Springer, 2005. 540 p.

[4] *T. Kanungo, D. M. Mount et al* An Efficient k-Means Clustering Algorithm: Analysis and Implementation. 2000.

[5] *Д. Л. Данилова, А. А. Жигловский* Главные компоненты временных рядов: метод "Гусеница". — Санкт-Петербурскиий университет, 1997.