

# Анализ свойств локальных моделей в задачах кластеризации временных рядов\*

А. В. Грабовой<sup>1</sup>, В. В. Стрижов<sup>2</sup>

**Аннотация:** Данная работа посвящена анализу периодических сигналов во временных рядах с целью распознавания физических действий человека с помощью акселерометра. Предлагается метод кластеризации точек временного ряда для поиска характерных сегментов временного ряда. Для построения признаковов описания используется метода главных компонент для локального снижения размерности фазового пространства. Для оценки близости двух сегментов вычисляется расстояние между базисными векторами, которые получены методом главных компонент. Используя матрицу попарных расстояний между точками временного ряда выполняется кластеризация данных точек. Для анализа качества представленного алгоритма проводятся эксперименты на синтетических данных и данных полученных мобильного акселерометра.

**Ключевые слова:** временные ряды; кластеризация; распознавание физической активности; метод главных компонент.

**DOI:** 00.00000/0000000000000000

---

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ и правительства РФ.

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт, grabovoy.av@phystech.edu

<sup>2</sup>Вычислительный центр им. А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, strijov@ccas.ru

# 1 Введение

Анализ физической активности человека производится при помощи мобильных телефонов, разумных часов. Эти устройства используют акселерометр, гироскоп и магнитометр. Цель данной работы заключается в разметке и распознавании человеческой активности во времени.

Временные ряды — это объекты сложной структуры. При классификации которых значимую роль играет метод построения признакового пространства. Для построения используются экспертно заданные базовые функций, гипотеза порождения данных. В [2] рассматривается комбинированное признаковое описание на основе данных методов. В [3] также рассматривается проблема построение признакового пространства и предлагается критерий избыточности выбранных признаков.

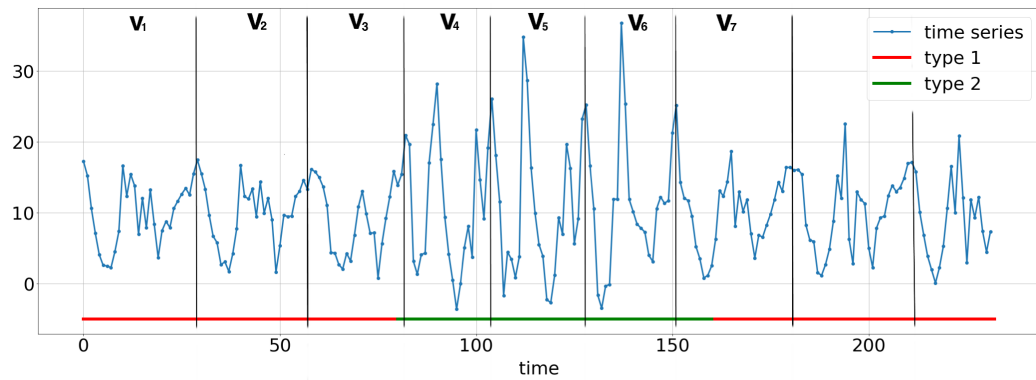


Рис. 1: Временной ряд, с разметкой на кластеры.

В данной работе объект исследования является точка оси времени. В работе решается задача кластеризации точек временного ряда. При *кластеризации* каждой точке временного ряда ставится в соответствие метка. Она соответствует сегменту временного ряда. *Сегмент* это часть временного ряда, которая соответствует одному характерному физическому действию, которое является периодическим, например: шаг, двумя ногами при ходьбе, или шаг, двумя ногами при беге. Пример сегментации показан на рис. 1. Также показан пример кластеризации временного ряда. Ряд, полученный при помощи акселерометра, разбит на два характерных физических действия.

Решение задачи кластеризации состоит из двух этапов. Во-первых для получения признакового описания временного ряда предлагается ал-

горитм локальной аппроксимации временного ряда при помощи метода главных компонент [6]. Под *локальной* аппроксимацией временного ряда подразумевается, что для признакового описания его точки используется не весь ряд, а только некоторая окрестность данной точки. Во-вторых вводится метрика в новом пространстве признакового описания. После получения расстояния между точками временного ряда используется метод кластеризации KMeans [5].

Для решения задачи кластеризации точек временного ряда вводятся предположения. Предполагается, что периоды различных сегментов различаются незначительно, причем известны минимальный и максимальный периоды сегмента и количество различных сегментов внутри временного ряда. Также предполагается, что тип активности во времени не меняется часто, а также что фазовые траектории разных сегментов являются различными.

Проверка и анализ метода проводится на синтетической и реальной выборках. Синтетическая выборка построена при помощи суммы нескольких первых членов ряда Фурье со случайными коэффициентами. Реальные данные получены при помощи мобильного акселерометра, который снимал показания во время некоторой физической активности человека.

## 2 Постановка

Задан временной ряд

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \quad (2.1)$$

где  $N$  число точек временного ряда.

Пусть временной ряд состоит из последовательности сегментов из множества сегментов  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{x} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M], \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{v}_i$  некоторый сегмент из множества возможных сегментов  $\mathbf{V}$ . Причем для всех  $i$  выполняется либо  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1}$  либо  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i+1}$ . Пусть множество  $\mathbf{V}$  удовлетворяет следующим свойствам:

$$|\mathbf{V}| = K, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad |\mathbf{v}| \leq T, \quad (2.3)$$

где  $|\mathbf{V}|$  мощность множества сегментов,  $|\mathbf{v}|$  длина сегмента, а  $K$  и  $T$  это количество различных сегментов во временном ряде и длина максимального сегмента соответственно.

Рассмотрим отображение:

$$a : x \rightarrow \{1, \dots, K\}, \quad (2.4)$$

где  $x \in \mathbf{x}$  некоторая точка временного ряда.

Требуется, чтобы отображение удовлетворяло следующим свойствам:

$$\begin{cases} a(x_1) = a(x_2), & \text{если найдется } \mathbf{v} \in \mathbf{V} : x_1, x_2 \in \mathbf{v} \\ a(x_1) \neq a(x_2), & \text{если не найдется } \mathbf{v} \in \mathbf{V} : x_1, x_2 \in \mathbf{v} \end{cases} \quad (2.5)$$

Пусть задана некоторая ассессорская разметка временного ряда:

$$\mathbf{y} \in \{1, \dots, K\}^N. \quad (2.6)$$

Тогда ошибка алгоритма  $a$  на временном ряде  $\mathbf{x}$  представляется в следующем виде:

$$S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [y_i \neq a(x_i)], \quad (2.7)$$

где  $x_i$  — точки временного ряда,  $y_i$  ассессорская разметка временного ряда.

### 3 Кластеризация точек

Построим фазовую траекторию временного ряда  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{H} = \{\mathbf{h}_t | \mathbf{h}_t = [x_{t-T}, x_{t-T+1}, \dots, x_t], T \leq t \leq N\}. \quad (3.1)$$

Фазовая траектория разбивается на фазовые подпространства из  $2T$  векторов:

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{s}_t | \mathbf{s}_t = [h_{t-T}, h_{t-T+1}, \dots, h_{t+T-1}], T \leq t \leq N - T\}, \quad (3.2)$$

полученное подпространство имеет всю локальную информацию об временном ряде, так как содержит всю информацию на периоде до момента времени  $t$  и информацию о периоде после момента времени  $t$ .

Каждое  $T$ -мерное подпространство  $\mathbf{s}_t$  проектируется на подпространство значительно меньшей размерности при помощи метода главных компонент  $\mathbf{z}_t = \mathbf{W}_t \mathbf{s}_t$ . Получим представление базисных векторов  $\mathbf{W}_t$ , а также собственные числа, которые соответствуют данным базисным векторам каждого подпространства  $\mathbf{s}_t$  в  $T$ -мерном пространстве:

$$\mathbf{W} = \{\mathbf{W}_t | \mathbf{W}_t = [\mathbf{w}_t^1, \mathbf{w}_t^2]\}, \quad \mathbf{\Lambda} = \{\boldsymbol{\lambda}_t | \boldsymbol{\lambda}_t = [\lambda_t^1, \lambda_t^2]\}, \quad (3.3)$$

где  $[\mathbf{w}_t^1, \mathbf{w}_t^2]$  и  $[\lambda_t^1, \lambda_t^2]$  это базисные векторы и соответствующие им собственные числа плоскости построенной при помощи метода главных компонент для подпространстве  $\mathbf{s}_t$ .

Рассмотрим функцию расстояние между элементами  $\mathbf{W}$ :

$$\rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) = \max \left( \max_{\mathbf{e}_2 \in \mathbf{W}_2} h_1(\mathbf{e}_2), \max_{\mathbf{e}_1 \in \mathbf{W}_1} h_2(\mathbf{e}_1) \right), \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{e}_i$  это базисный вектор пространства  $\mathbf{W}_i$ ,  $h_i(\mathbf{e})$  является расстоянием от вектора  $\mathbf{e}$  до пространства  $\mathbf{W}_i$ .

Функция расстояния (3.4) является метрикой, доказательство этого факта представлено в приложении А. В случае, когда подпространства  $\mathbf{W}_t$  имеет размерность два, тогда метрика  $\rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2)$  имеет следующую интерпретацию:

$$\rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) = \max_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \subset \mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2} V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad (3.5)$$

где  $\mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2$  это объединение базисных векторов первого и второго пространства,  $V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  — объем параллелепипеда построенного на векторах  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ , которые являются столбцами матрицы  $\mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2$ .

Рассмотрим расстояние между собственными числами  $\mathbf{\Lambda}$ :

$$\rho(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2) = \sqrt{(\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\lambda}_2)^\top (\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\lambda}_2)}. \quad (3.6)$$

Функция расстояния  $\rho(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2)$  является метрикой в пространстве  $\mathbf{\Lambda}$ .

Матрица попарных расстояний между базисными векторами для временного ряда  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{M}_c = [0, 1]^{N \times N}. \quad (3.7)$$

Матрица попарных расстояний между собственными значениями для временного ряда  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{M}_l = [0, 1]^{N \times N}. \quad (3.8)$$

Используя выражения (3.5-3.8) введем расстояние между двумя точками  $t_1, t_2$  временного ряда, а также введем матрицу попарных расстояний  $\mathbf{M}$ :

$$\rho(t_1, t_2) = \rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) + \rho(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_l + \mathbf{M}_c, \quad (3.9)$$

где  $\rho(t_1, t_2)$  является метрикой, так-как является суммой двух метрик. Матрица  $\mathbf{M}$  является матрицей попарных расстояний между двумя парами точек временного ряда  $\mathbf{x}$ .

Используя матрицу попарных расстояний  $\mathbf{M}$  выполним кластеризацию моментов времени временного ряда, получим следующее отображение:

$$a : x \rightarrow \{1, \dots, K\}, \quad (3.10)$$

где  $x$  некоторая точка временного ряда  $\mathbf{x}$ .

## 4 Эксперимент

Для анализа свойств предложенного алгоритма был проведен вычислительный эксперимент в котором кластеризация точек временного ряда проводилась используя матрицы попарных расстояний (3.9).

В качестве данных использовались две выборки временных рядов, которые описаны в таблице 1. Выборка Physical Motion это реальные временные ряды полученные при помощи мобильного акселерометра. Синтетические временные ряды были построены при помощи нескольких первых слагаемых ряда Фурье со случайными коэффициентами из стандартного нормального распределения. Генерация данных состояла из двух этапов. На первом этапе генерировались короткие сегменты  $\mathbf{v}$  для построения множества  $\mathbf{V}$ . Вторым этапом генерации выборки  $\mathbf{x}$  является следующим случайным процессом:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M], \quad \begin{cases} \mathbf{v}_1 \sim \mathcal{U}(\mathbf{V}), \\ \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1}, & \text{с вероятностью } \frac{3}{4}, \\ \mathbf{v}_i \sim \mathcal{U}(\mathbf{V}), & \text{с вероятностью } \frac{1}{4} \end{cases} \quad (4.1)$$

где  $\mathcal{U}(\mathbf{V})$  — равномерное распределение на объектах из  $\mathbf{V}$ .

Таблица 1: Описание выборок

Ряд, $x$	Длина ряда, $N$	Число сегментов, $K$	Длина сегмента, $T$
Physical Motion 1	900	2	30
Physical Motion 2	1000	2	30
Synthetic 1	2000	2	20
Synthetic 2	2000	3	20

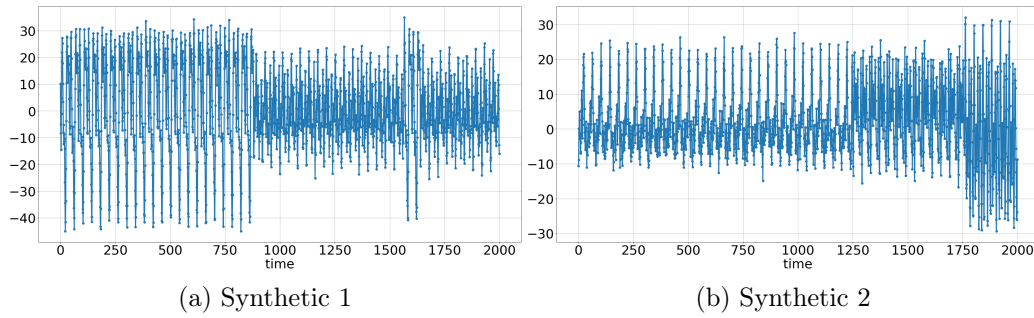


Рис. 2: Пример синтетически построенных временных рядов

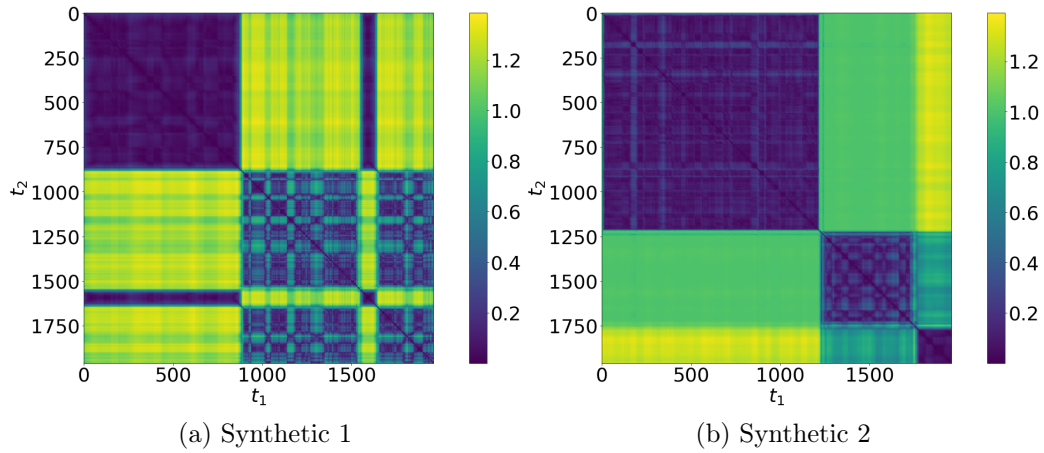


Рис. 3: Матрица попарных расстояний  $\mathbf{M}$  между точками временного ряда

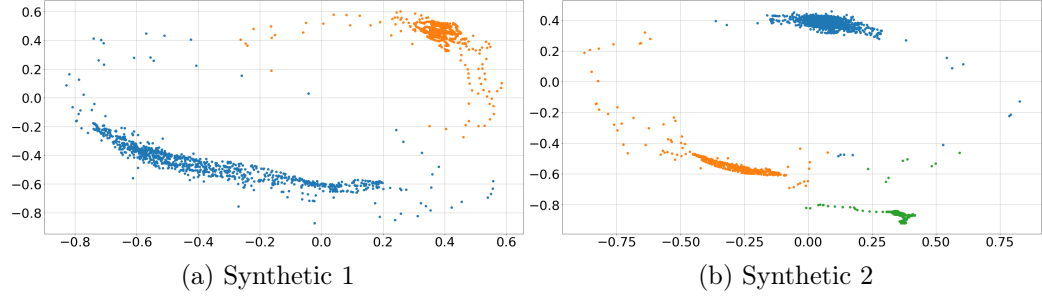


Рис. 4: Проекция точек временного ряда на плоскость при помощи матрицы попарных расстояний  $\mathbf{M}$

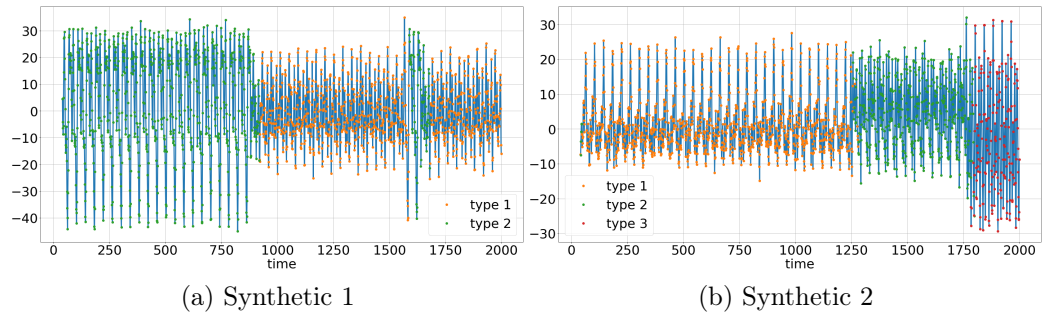


Рис. 5: Кластеризация точек временного ряда

**Синтетические данные.** На рис. 2 приведен пример синтетически построенных временных рядов. На рис. 2а показан пример ряда в котором количество различных сегментов  $K = 2$ , а длина каждого сегмента  $T = 20$ . На рис. 2б показан пример ряда в котором количество различных сегментов  $K = 3$ , а длина каждого сегмента  $T = 20$ .

На рис. 3 проиллюстрированы матрицы попарных расстояний  $\mathbf{M}$  между построенными при помощи формулы (3.9). Используя матрицу попарных расстояний и метод Multidimensional Scaling [4] визуализируем точки временного ряда на плоскости. На рис. 4 показана визуализация точек на плоскости и выполнена их кластеризация при помощи метода KMeans [5]. Иллюстрация кластеров точек временного ряда продемонстрирована на рис. 5.



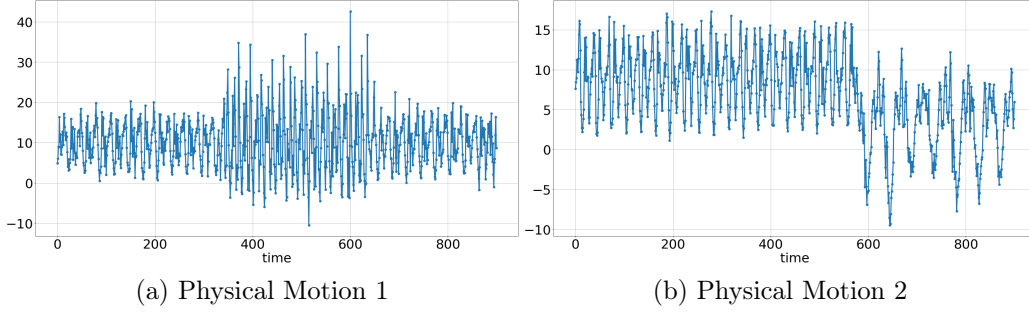


Рис. 6: Пример синтетически построенных временных рядов

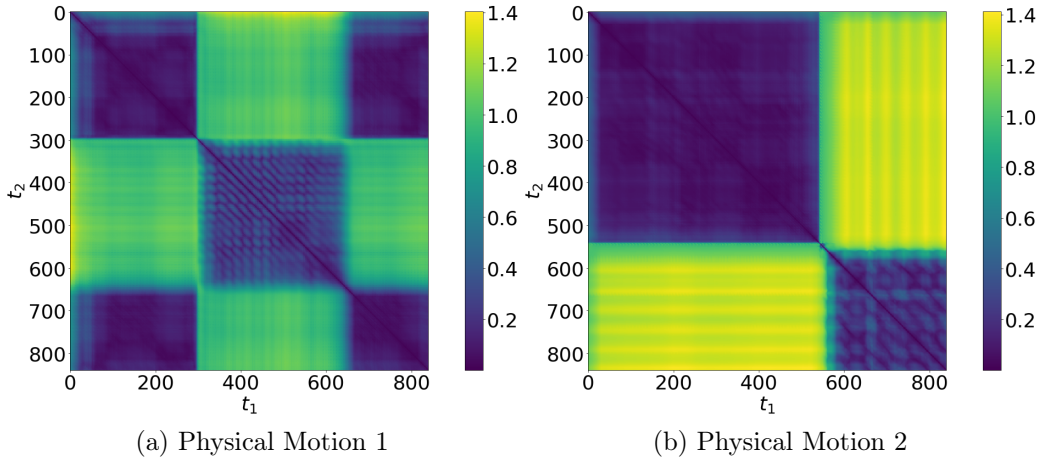


Рис. 7: Матрица попарных расстояний  $\mathbf{M}$  между точками временного ряда

**Реальные данные.** На рис. 6 приведен пример реальных временных рядов полученных при помощи взятия одной из координат мобильного акселерометра.

На рис. 7 проиллюстрированы матрицы попарных расстояний  $\mathbf{M}$  между построенными при помощи формулы (3.9). Используя матрицу попарных расстояний и метод Multidimensional Scaling [4] визуализируем точки временного ряда на плоскости. На рис. 8 показана визуализация точек на плоскости и выполнена их кластеризация при помощи метода KMeans [5]. Иллюстрация кластеров точек временного ряда продемонстрирована на рис. 9.

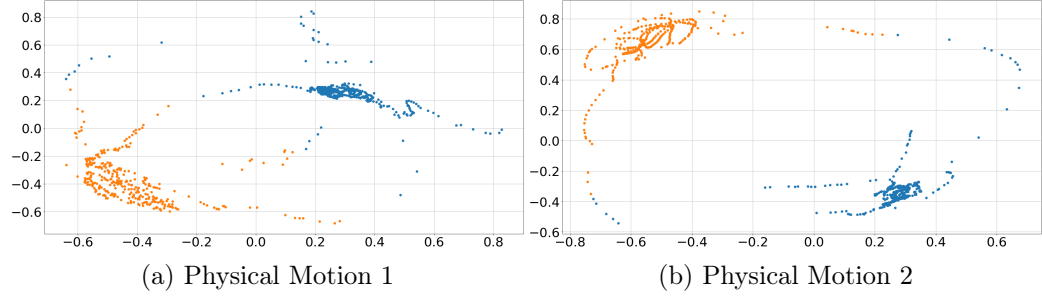


Рис. 8: Проекция точек временного на плоскость при помощи матрицы парных расстояний  $\mathbf{M}$

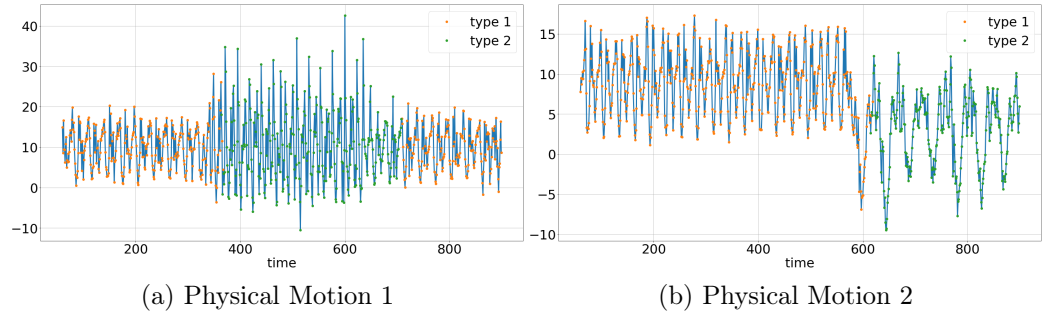


Рис. 9: Кластеризация точек временного ряда

## 5 Заключение

Таблица 2: Результаты работы алгоритма

Ряд	$N$	$K$	$T$	$S$
Physical Motion 1	900	2	30	0.06
Physical Motion 2	1000	2	30	0.03
Synthetic 1	2000	2	20	0.04
Synthetic 2	2000	3	20	0.03

В работе рассматривалась задача поиска характерных периодических структур внутри временного ряда. Рассматривался метод основанный на локальном снижении размерности фазового пространства. Был предло-

жен алгоритм поиска характерных сегментов, который основывается на методе главных компонент для локального снижения размерности, а также на использовании функции расстояния между локальными базисами в каждый момент времени, которые интерпретировались как признакового описание точки временного ряда.

В ходе эксперимента, на реальных показаниях акселерометра, а также на синтетических данных, было показано, что предложенный метод измерения расстояния между базисами хорошо разделяет точки которые принадлежат различным классам, что приводит к хорошей кластеризации объектов. Результаты работы, показаны в таблице 2.

Предложенный метод имеет ряд недостатков связанных с большим количеством ограничений на временной ряд. Данные ограничения будут ослаблены в последующих работах.

## А Теорема (Грабовой 2019)

**Лемма 1.** Пусть заданы два подпространства  $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^n$ , которые задаются базисами  $\mathbf{W}_1$  и  $\mathbf{W}_2$ , тогда справедливо следующее условие:

$$\max_{\mathbf{a} \in \mathbb{X}: |\mathbf{a}| \leq 1} h_2(\mathbf{a}) \quad (\text{A.1})$$

где  $h_i(\mathbf{a})$  является расстоянием от вектора  $\mathbf{a}$  до пространства заданного базисом  $\mathbf{W}_i$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{a} \in \mathbb{X}: |\mathbf{a}| \leq 1} h_2(\mathbf{a}) &= \max_{\mathbf{a} \in \mathbb{X}: |\mathbf{a}| \leq 1} \left| \mathbf{a} - \sum_i \langle \mathbf{e}_2^i, \mathbf{a} \rangle \mathbf{e}_2^i \right| = \\ &= \max_{\{\alpha_j\}_j: \sum \alpha_j^2 \leq 1} \left| \sum_j \alpha_j \mathbf{e}_1^j - \sum_i \langle \mathbf{e}_2^i, \sum_j \alpha_j \mathbf{e}_1^j \rangle \mathbf{e}_2^i \right| = \\ &= \max_{\{\alpha_j\}_j: \sum \alpha_j^2 \leq 1} \left| \sum_j \alpha_j \left( \mathbf{e}_3^j - \sum_i \langle \mathbf{e}_3^j, \mathbf{e}_2^i \rangle \mathbf{e}_2^i \right) \right|, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

где в выражении (A.2) максимум очевидно достигается на  $j$ -ом базисном векторе для которого выражение в скобках является максимальным.  $\square$

**Лемма 2.** Пусть заданы подпространства  $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^n$ , которые задаются базисами  $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3$  соответственно, тогда справедливо следующее условие:

$$\max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \\ |\mathbf{x}| \leq 1}} \min_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{Y} \\ |\mathbf{y}| \leq 1}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \\ |\mathbf{x}| \leq 1}} \min_{\substack{\mathbf{z} \in \mathbb{Z} \\ |\mathbf{z}| \leq 1}} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \max_{\substack{\mathbf{z} \in \mathbb{Z} \\ |\mathbf{z}| \leq 1}} \min_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{Y} \\ |\mathbf{y}| \leq 1}} \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|. \quad (\text{A.3})$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \\ |\mathbf{x}| \leq 1}} \min_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{Y} \\ |\mathbf{y}| \leq 1}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| &\leq \max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \\ |\mathbf{x}| \leq 1}} \min_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{Y} \\ |\mathbf{y}| \leq 1}} (\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|) = \\ &\max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \\ |\mathbf{x}| \leq 1}} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \min_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{Y} \\ |\mathbf{y}| \leq 1}} \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| = \max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \\ |\mathbf{x}| \leq 1}} \min_{\substack{\mathbf{z} \in \mathbb{Z} \\ |\mathbf{z}| \leq 1}} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \min_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{Y} \\ |\mathbf{y}| \leq 1}} \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| \leq \\ &\leq \max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \\ |\mathbf{x}| \leq 1}} \min_{\substack{\mathbf{z} \in \mathbb{Z} \\ |\mathbf{z}| \leq 1}} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \max_{\substack{\mathbf{z} \in \mathbb{Z} \\ |\mathbf{z}| \leq 1}} \min_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{Y} \\ |\mathbf{y}| \leq 1}} \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

□

**Теорема 3.** Пусть задано множество подпространств  $\mathbf{W}$  пространства  $\mathbb{R}^n$ , каждое подпространство которого задается базисом, тогда функция расстояния  $\rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2)$  является метрикой заданной на множестве  $\mathbf{W}$ :

$$\rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) = \max \left( \max_{\mathbf{e}_2 \in \mathbf{W}_2} h_1(\mathbf{e}_2), \max_{\mathbf{e}_1 \in \mathbf{W}_1} h_2(\mathbf{e}_1) \right), \quad (\text{A.5})$$

где  $\mathbf{e}_i$  это базисный вектор из  $\mathbf{W}_i$ ,  $h_i(\mathbf{e})$  является расстоянием от вектора  $\mathbf{e}$  до пространства заданного базисом  $\mathbf{W}_i$ .

*Доказательство.* Для доказательства данной теоремы, нужно показать, что функция  $\rho$  удовлетворяет трем свойствам метрики.

Функция  $\rho$  удовлетворяет первому свойству метрики:

$$\rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_2 \quad (\text{A.6})$$

Функция  $\rho$  удовлетворяет второму свойству метрики:

$$\rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) = \rho(\mathbf{W}_2, \mathbf{W}_1) \quad (\text{A.7})$$

Докажем, что функция  $\rho$  удовлетворяет неравенству треугольника:

$$\rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) \leq \rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_3) + \rho(\mathbf{W}_3, \mathbf{W}_2) \quad (\text{A.8})$$

Для доказательства неравенства треугольника докажем неравенства:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{e}_1 \in \mathbf{W}_1} h_2(\mathbf{e}_1) &\leq \max_{\mathbf{e}_1 \in \mathbf{W}_1} h_3(\mathbf{e}_1) + \max_{\mathbf{e}_3 \in \mathbf{W}_3} h_2(\mathbf{e}_3) \\ \max_{\mathbf{e}_2 \in \mathbf{W}_2} h_1(\mathbf{e}_2) &\leq \max_{\mathbf{e}_2 \in \mathbf{W}_2} h_3(\mathbf{e}_2) + \max_{\mathbf{e}_3 \in \mathbf{W}_3} h_1(\mathbf{e}_3) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Используя Лемму 1 доказательство неравенства (A.9) сводится к доказательству неравенства:

$$\max_{\substack{\mathbf{a} \in \mathbf{W}_1 \\ |\mathbf{a}| \leq 1}} h_2(\mathbf{a}) \leq \max_{\substack{\mathbf{a} \in \mathbf{W}_1 \\ |\mathbf{a}| \leq 1}} h_3(\mathbf{a}) + \max_{\substack{\mathbf{c} \in \mathbf{W}_3 \\ |\mathbf{c}| \leq 1}} h_2(\mathbf{c}), \quad (\text{A.10})$$

где  $\mathbf{a}, \mathbf{c}$  произвольные элементы из соответствующих подпространств.

Подставив в выражение (A.10) выражение для  $h_i(\mathbf{a})$ , получаем следующее неравенство:

$$\max_{\substack{\mathbf{a} \in \mathbf{W}_1 \\ |\mathbf{a}| \leq 1}} \min_{\substack{\mathbf{b} \in \mathbf{W}_2 \\ |\mathbf{b}| \leq 1}} \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \leq \max_{\substack{\mathbf{a} \in \mathbf{W}_1 \\ |\mathbf{a}| \leq 1}} \min_{\substack{\mathbf{c} \in \mathbf{W}_3 \\ |\mathbf{c}| \leq 1}} \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\| + \max_{\substack{\mathbf{c} \in \mathbf{W}_3 \\ |\mathbf{c}| \leq 1}} \min_{\substack{\mathbf{b} \in \mathbf{W}_2 \\ |\mathbf{b}| \leq 1}} \|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|. \quad (\text{A.11})$$

Неравенство (A.11) следует из Леммы 2. Из выполнения неравенства (A.11) следует выполнение неравенств (A.9). Докажем неравенство треугольника (A.8) используя неравенства (A.9). Для удобства введем следующие обозначения:

$$\max_{\mathbf{e}_i \in \mathbf{W}_i} h_{\mathbf{W}_j}(\mathbf{e}_i) = h_i^j. \quad (\text{A.12})$$

Из истинности неравенства (A.11) в обозначениях (A.12) следует истинность следующих неравенств:

$$\begin{aligned} h_1^2 &\leq h_1^3 + h_3^2 \leq \max(h_1^3, h_3^1) + \max(h_3^2, h_2^3) \\ h_2^1 &\leq h_2^3 + h_3^1 \leq \max(h_2^3, h_3^2) + \max(h_3^1, h_1^3) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Из уравнения (A.13) следует выполнение неравенства:

$$\max(h_1^2, h_2^1) \leq \max(h_1^3, h_3^1) + \max(h_3^2, h_2^3) \quad (\text{A.14})$$

Доказательство неравенства (A.14) указывает на выполнение неравенства треугольника для функции  $\rho$ , что завершает доказательство того, что  $\rho$  является метрикой.  $\square$

## Список литературы

- [1] *Y. G. Cinar and H. Mirisae* Period-aware content attention RNNs for time series forecasting with missing values // *Neurocomputing*, 2018. Vol. 312. P. 177–186.
- [2] *И. П. Ивкин, М. П. Кузнецов* Алгоритм классификации временных рядов акселерометра по комбинированному признаковому описанию. // *Машинное обучение и анализ данных*, 2015.
- [3] *V. V. Strijov, A. M. Katrutsa* Stresstes procedures for features selection algorithms. // *Schemometrics and Intelligent Laboratory System*, 2015.
- [4] *I. Borg, P. J. F. Groenen* Modern Multidimensional Scaling. — New York: Springer, 2005. 540 p.
- [5] *T. Kanungo, D. M. Mount et al* An Efficient k-Means Clustering Algorithm: Analysis and Implementation. 2000.
- [6] *Д. Л. Данилова, А. А. Жигловский* Главные компоненты временных рядов: метод "Гусеница". — Санкт-Петербургский университет, 1997.
- [7] *A. D. Ignatov, V. V. Strijov* Human activity recognition using quasiperiodic time series collected from a single tri-axial accelerometer. // *Multimedial Tools and Applications*, 2015.
- [8] *A. Olivares, J. Ramirez, J. M. Gorris, G. Olivares, M. Damas* Detection of (in)activity periods in human body motion using inertial sensors: A comparative study. // *Sensors*, 12(5):5791–5814, 2012.