

Анализ свойств локальных моделей в задачах кластеризации временных рядов*

А. В. Грабовой¹, В. В. Стрижов²

Аннотация: Данная работа посвящена анализу периодических сигналов во временных рядах с целью распознавания физических действий человека с помощью акселерометра. Предлагается метод кластеризации точек временного ряда для поиска характерных квазипериодических сегментов временного ряда. Временные ряды являются объектами сложной структуры, для которых не задано исходное признаковое описание. Для построения признакового описания используется метода главных компонент для локального снижения размерности фазового пространства. Для оценки близости двух сегментов вычисляется расстояние между базисными векторами, которые получены методом главных компонент. Используя матрицу попарных расстояний между точками временного ряда выполняется кластеризация данных точек. Также проводится эксперимент с поиском начала квазипериодических сегментов внутри каждого кластера. Для анализа качества представленного алгоритма проводятся эксперименты на синтетических данных и данных полученных при помощи мобильного акселерометра.

Ключевые слова: временные ряды; кластеризация; распознавание физической активности; метод главных компонент.

DOI: 00.00000/0000000000000000

1 Введение

Анализ физической активности человека производится при помощи мобильных телефонов, разумных часов [1, 2]. Эти устройства используют акселерометр, гироскоп и

*Работа выполнена при поддержке РФФИ и правительства РФ.

¹Московский физико-технический институт, grabovoy.av@phystech.edu

²Вычислительный центр им. А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, strijov@ccas.ru

магнитометр. Цель данной работы заключается в разметке и распознавании человеческой активности во времени [3, 4, 5], а также поиска начала каждого действия во временном ряде [6]. Примерами действий служат ходьба, бег приседание, прыжки и др.

Временные ряды — это объекты сложной структуры. При их классификации значимую роль играет построения признакового пространства. Существуют различные методы построения признакового пространства для временного ряда: метод экспертного задания порождающих функций [1] и метод построения признаков на основе гипотезы порождения данных [7]. В [8] рассматривается комбинированное признаковое описание на основе данных методов. В [9] рассматривается проблема построение признакового пространства и предлагается критерий избыточности выбранных признаков.

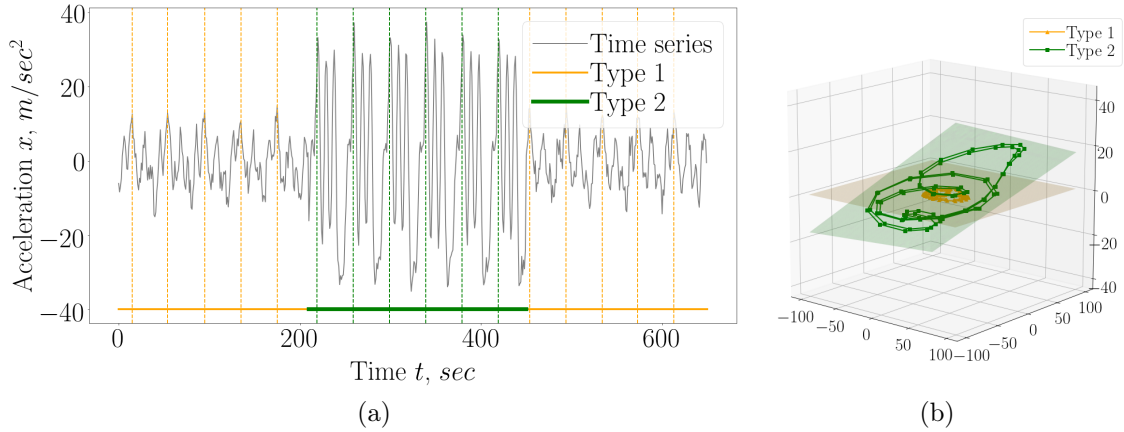


Рис. 1: Временной ряд, с разметкой на кластеры: а) временной ряд с ассесорской разметкой на кластеры и выделением начала квазипериодического сегмента; б) проекция фазовых подпространств на первые две главные компоненты

В данной работе объект исследования является точка оси времени. В работе решается задача кластеризации точек временного ряда. При *кластеризации* каждой точке временного ряда ставится в соответствие метка. Она соответствует сегменту временного ряда. *Сегмент* это часть временного ряда, которая соответствует одному характерному физическому действию, которое является квазипериодическим, например: шаг, двумя ногами при ходьбе, или шаг, двумя ногами при беге. Пример кластеризации и разбиения ряда на сегменты показан на рис. 1а. Ряд, полученный при помощи акселерометра, разбит на два характерных физических действия.

Решение задачи кластеризации состоит из двух этапов. Во-первых для получения признакового описания временного ряда предлагается алгоритм локальной аппроксимации временного ряда при помощи метода главных компонент [11]. Под *локальной* аппроксимацией временного ряда подразумевается, что для признакового описания его точки используется не весь ряд, а только некоторая окрестность данной точки. В качестве признакового описания рассматриваются главные компоненты фазового

пространства построенного по окрестности некоторой точки ряда. На рис. 1b показаны первые две главные компоненты фазовых пространств, которые соответствуют разным физическим действиям внутри одного временного ряда. Как видно плоскости, которые порождены данными главными компонентами не совпадают, что говорит о том, что это разные действия. Во-вторых вводится функция расстояния в новом пространстве признаков описания. Данная функция является расстоянием между двумя подпространствами внутри всего фазового пространства временного ряда. После получения расстояния между точками временного ряда, выполняется кластеризация данных точек при помощи метода иерархической кластеризации.

Задача сегментации внутри каждого кластера решается при помощи метода, который рассмотрен в [6]. Данная работа основана на исследовании фазового пространства, а именно поиска устойчивой гиперплоскости, которая делит фазовое пространство на две равные части. В качестве начала сегмента выбираются точки, которые находятся близко к данной гиперплоскости. В [6] предлагается выполнить проекцию фазового пространства на первые две главные компоненты, после чего провести устойчивую прямую, выделив начала каждого сегмента. Данный метод имеет недостаток в том, что позволяет находить начало только для временного ряда, который состоит из одного квазипериодического сигнала.

Для решения задачи кластеризации точек временного ряда вводятся предположения. Предполагается, что периоды различных сегментов различаются незначительно, причем известны минимальный и максимальный периоды сегмента и количество различных сегментов внутри временного ряда. Также предполагается, что тип активности во времени не меняется часто, а также что фазовые траектории разных сегментов являются различными.

Проверка и анализ метода кластеризации проводится на синтетической и реальной выборках. Синтетическая выборка построенная при помощи суммы нескольких первых членов ряда Фурье со случайными коэффициентами. Эксперимент по сегментации временного ряда проводился на простых синусоидальных сигналах с произвольной амплитудой и частотой. Реальные данные получены при помощи мобильного акселерометра, который снимал показания во время некоторой физической активности человека.

2 Постановка задачи кластеризации точек временного ряда

Задан временной ряд

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \quad (2.1)$$

где N число точек временного ряда.

Пусть временной ряд состоит из последовательности сегментов \mathbf{v}_i из множества сегментов \mathbf{V} :

$$\mathbf{x} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M], \quad (2.2)$$

где \mathbf{v}_i некоторый сегмент из множества возможных сегментов \mathbf{V} , которые встречаются в данном ряде. Причем для всех i выполняется либо $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1}$ либо $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i+1}$. Пусть множество \mathbf{V} удовлетворяет следующим свойствам:

$$|\mathbf{V}| = K, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad |\mathbf{v}| \leq T, \quad (2.3)$$

где $|\mathbf{V}|$ мощность множества сегментов, $|\mathbf{v}|$ длина сегмента, а K и T это количество различных сегментов во временном ряде и длина максимального сегмента соответственно.

Рассматривается отображение:

$$a : t \rightarrow \mathbb{Y} = \{1, \dots, K\}, \quad (2.4)$$

где $t \in \{1, \dots, N\}$ некоторый момент времени, на котором задан временной ряд.

Требуется, чтобы отображение a удовлетворяло следующим свойствам:

$$\begin{cases} a(t_1) = a(t_2), & \text{если найдется } \mathbf{v} \in \mathbf{V} : x_{t_1}, x_{t_2} \in \mathbf{v} \\ a(t_1) \neq a(t_2), & \text{если не найдется } \mathbf{v} \in \mathbf{V} : x_{t_1}, x_{t_2} \in \mathbf{v} \end{cases} \quad (2.5)$$

Пусть задана некоторая ассессорская разметка временного ряда:

$$\mathbf{y} \in \{1, \dots, K\}^N. \quad (2.6)$$

Тогда ошибка алгоритма a на временном ряде \mathbf{x} представляется в следующем виде:

$$S = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [y_t \neq a(t)], \quad (2.7)$$

где t — момент времени, y_t ассессорская разметка t -го момента времени для заданного временного ряда.

3 Кластеризация точек

Рассмотрим фазовую траекторию временного ряда \mathbf{x} :

$$\mathbf{H} = \{\mathbf{h}_t | \mathbf{h}_t = [x_{t-T}, x_{t-T+1}, \dots, x_t], \quad T \leq t \leq N\}. \quad (3.1)$$

Используя информацию об длине максимального сегмента T внутри временного ряда, фазовая траектория разбивается на фазовые подпространства из $2T$ векторов:

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{s}_t | \mathbf{s}_t = [h_{t-T}, h_{t-T+1}, \dots, h_{t+T-1}], \quad T \leq t \leq N - T\}, \quad (3.2)$$

полученное подпространство имеет всю локальную информацию об временном ряде, так как содержит всю информацию на периоде до момента времени t и информацию о периоде после момента времени t .

В качестве признакового описания точки временного ряда рассматриваются базисные представления \mathbf{W}_t для T -мерных подпространств \mathbf{s}_t . Подпространство \mathbf{s}_t проектируется на подпространство значительно меньшей размерности при помощи метода главных компонент $\mathbf{z}_t = \mathbf{W}_t \mathbf{s}_t$. Получаем:

$$\mathbf{W} = \{\mathbf{W}_t | \mathbf{W}_t = [\mathbf{w}_t^1, \mathbf{w}_t^2]\}, \quad \mathbf{\Lambda} = \{\boldsymbol{\lambda}_t | \boldsymbol{\lambda}_t = [\lambda_t^1, \lambda_t^2]\}, \quad (3.3)$$

где $[\mathbf{w}_t^1, \mathbf{w}_t^2]$ и $[\lambda_t^1, \lambda_t^2]$ это базисные векторы и соответствующие им собственные числа плоскости построенной при помощи метода главных компонент для подпространстве \mathbf{s}_t .

Рассмотрим функцию расстояние между элементами \mathbf{W} :

$$\rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) = \max \left(\max_{\mathbf{e}_2 \in \mathbf{W}_2} h_1(\mathbf{e}_2), \max_{\mathbf{e}_1 \in \mathbf{W}_1} h_2(\mathbf{e}_1) \right), \quad (3.4)$$

где \mathbf{e}_i это базисный вектор пространства \mathbf{W}_i , $h_i(\mathbf{e})$ является расстоянием от вектора \mathbf{e} до пространства \mathbf{W}_i .

Теорема 1. Пусть задано множество подпространств \mathbf{W} пространства \mathbb{R}^n , каждое подпространство которого задается базисом $\mathbf{W}_i \in \mathbf{W}$, тогда функция расстояния $\rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2)$ является метрикой заданой на множестве базисов \mathbf{W} :

$$\rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) = \max \left(\max_{\mathbf{e}_2 \in \mathbf{W}_2} h_1(\mathbf{e}_2), \max_{\mathbf{e}_1 \in \mathbf{W}_1} h_2(\mathbf{e}_1) \right), \quad (3.5)$$

где \mathbf{e}_i это базисный вектор из \mathbf{W}_i , $h_i(\mathbf{e})$ является расстоянием от вектора \mathbf{e} до пространства заданого базисом \mathbf{W}_i .

В силу теоремы 1 функция расстояния (3.4) является метрикой, доказательство данной теоремы представлено в приложении А. В случае, когда все подпространства \mathbf{W}_t имеют размерность два, тогда метрика $\rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2)$ имеет следующую интерпретацию:

$$\rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) = \max_{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \subset \mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2} V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad (3.6)$$

где $\mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2$ это объединение базисных векторов первого и второго пространства, $V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ — объем параллелепипеда построенного на векторах $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, которые являются столбцами матрицы $\mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2$.

Рассмотрим расстояние между собственными числами $\mathbf{\Lambda}$:

$$\rho(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2) = \sqrt{(\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\lambda}_2)^T (\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\lambda}_2)}. \quad (3.7)$$

Функция расстояния $\rho(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2)$ является метрикой в пространстве $\mathbf{\Lambda}$.

Матрица попарных расстояний между базисными векторами \mathbf{M}_c и матрица попарных расстояний между собственными значениями \mathbf{M}_l для временного ряда \mathbf{x} :

$$\mathbf{M}_c = [0, 1]^{N \times N}, \quad \mathbf{M}_l = [0, 1]^{N \times N}. \quad (3.8)$$

Используя выражения (3.6-3.8) введем расстояние между двумя точками t_1, t_2 временного ряда, а также введем матрицу попарных расстояний между точками данного ряда \mathbf{M} :

$$\rho(t_1, t_2) = \rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) + \rho(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_l + \mathbf{M}_c, \quad (3.9)$$

где $\rho(t_1, t_2)$ является метрикой, так-как является суммой двух метрик. Матрица \mathbf{M} является матрицей попарных расстояний между всеми парами точек временного ряда \mathbf{x} .

Используя матрицу попарных расстояний \mathbf{M} выполняется кластеризация моментов времени временного ряда:

$$a : t \rightarrow \{1, \dots, K\}, \quad (3.10)$$

где t некоторый момент времени временного ряда \mathbf{x} .

4 Эксперимент

4.1 Кластеризация точек временного ряда

Для анализа свойств предложенного алгоритма кластеризации был проведен вычислительный эксперимент в котором кластеризация точек временного ряда проводилась используя матрицы попарных расстояний (3.9).

В качестве данных использовались две выборки временных рядов, которые описаны в таблице 1. Выборка Physical Motion это реальные временные ряды полученные при помощи мобильного акселерометра. Синтетические временные ряды были построены при помощи нескольких первых слагаемых ряда Фурье со случайными коэффициентами из стандартного нормального распределения. Генерация данных состояла из двух этапов. На первом этапе генерировались короткие сегменты \mathbf{v} для построения множества \mathbf{V} . Вторым этапом генерации выборки \mathbf{x} является следующим случайным процессом:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M], \quad \begin{cases} \mathbf{v}_1 \sim \mathcal{U}(\mathbf{V}), \\ \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1}, & \text{с вероятностью } \frac{3}{4}, \\ \mathbf{v}_i \sim \mathcal{U}(\mathbf{V}), & \text{с вероятностью } \frac{1}{4} \end{cases} \quad (4.1)$$

где $\mathcal{U}(\mathbf{V})$ — равномерное распределение на объектах из \mathbf{V} .

Синтетические данные. На рис. 2 приведен пример синтетических временных рядов. На рис. 2а показан пример ряда в котором количество различных сегментов $K = 2$, а длина каждого сегмента $T = 20$. На рис. 2b показан пример ряда в котором количество различных сегментов $K = 3$, а длина каждого сегмента $T = 20$.

На рис. 3 проиллюстрированы матрицы попарных расстояний \mathbf{M} между построенными при помощи формулы (3.9). Используя матрицу попарных расстояний и метод

Таблица 1: Описание временных рядов в эксперименте кластеризации точек временного ряда

Ряд, x	Длина ряда, N	Число сегментов, K	Длина сегмента, T
Physical Motion 1	900	2	40
Physical Motion 2	900	2	40
Synthetic 1	2000	2	20
Synthetic 2	2000	3	20

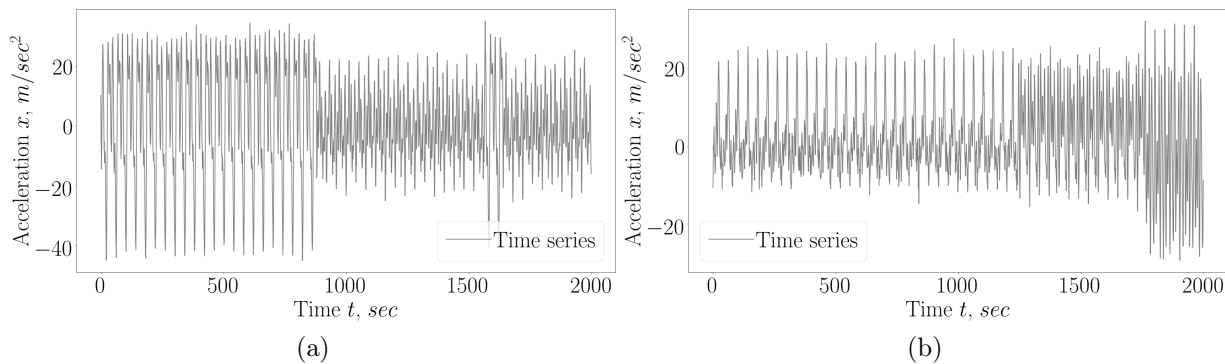


Рис. 2: Пример синтетически построенных временных рядов: а) для временного ряда Synthetic 1; б) для временного ряда Synthetic 2

Multidimensional Scaling [10] визуализируем точки временного ряда на плоскости. На рис. 4 показана визуализация точек на плоскости и выполнена их кластеризация при помощи метода иерархической кластеризации. Иллюстрация кластеров точек временного ряда продемонстрирована на рис. 5.

Реальные данные. На рис. 6 приведен пример реальных временных рядов полученных при помощи взятия одной из координат мобильного акселерометра.

На рис. 7 проиллюстрированы матрицы попарных расстояний M между построены при помощи формулы (3.9). Используя матрицу попарных расстояний и метод Multidimensional Scaling [10] визуализируем точки временного ряда на плоскости. На рис. 8 показана визуализация точек на плоскости и выполнена их кластеризация при помощи метода иерархической кластеризации. Иллюстрация кластеров точек временного ряда продемонстрирована на рис. 9.

4.2 Сегментация временных рядов

Сегментация временных рядов проводится на синтетических и реальных данных. Для данного эксперимента в качестве синтетического ряда рассматривается ряд построенный из двух синусов с произвольной частотой и амплитудой. Описание временных

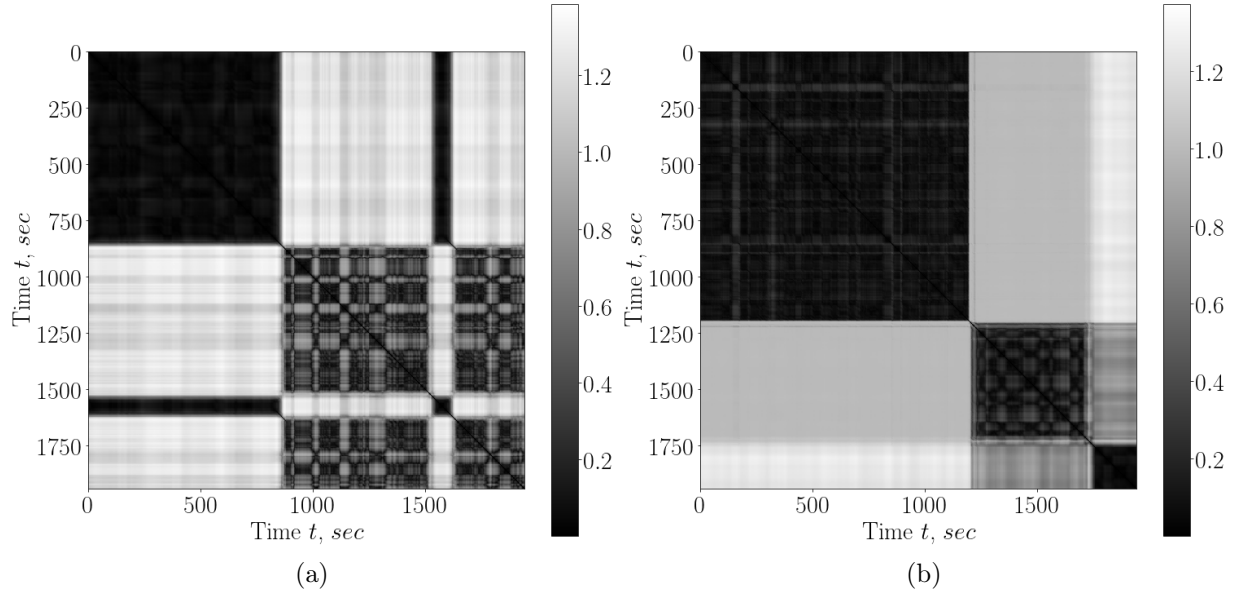


Рис. 3: Матрица попарных расстояний \mathbf{M} между точками временного ряда: а) для временного ряда Synthetic 1; б) для временного ряда Synthetic 2

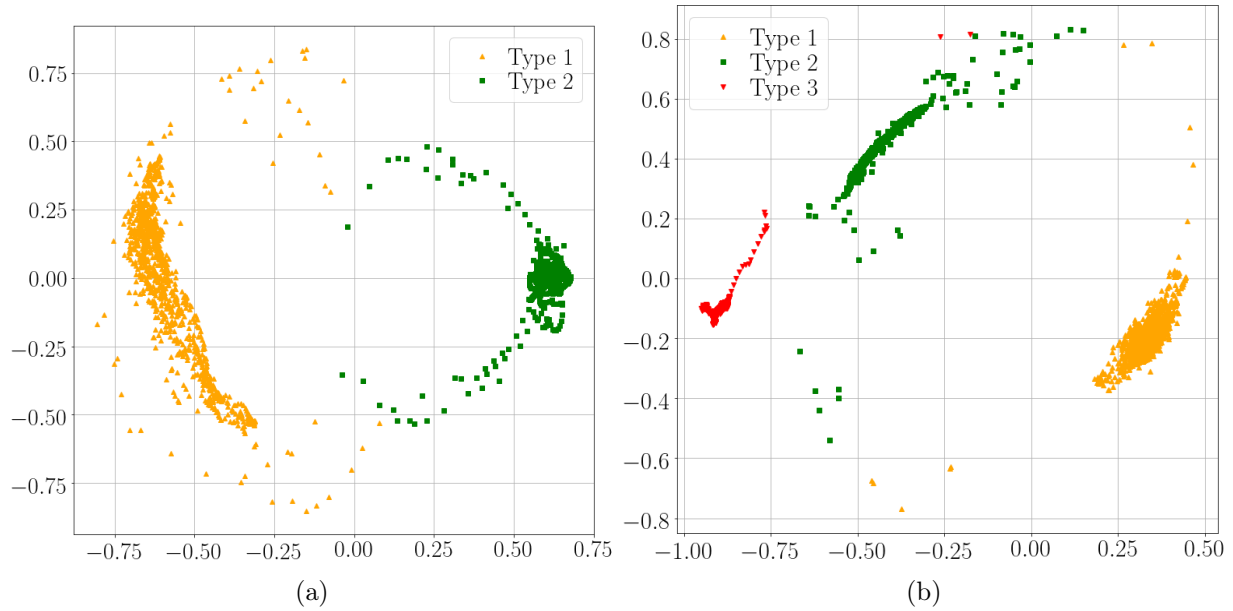


Рис. 4: Проекция точек временного ряда на плоскость при помощи матрицы попарных расстояний \mathbf{M} : а) для временного ряда Synthetic 1; б) для временного ряда Synthetic 2

рядов, которые используются в данном эксперименте представлены в таблице 2.

Сегментация проводится при помощи метода, который представлен в работе [6].

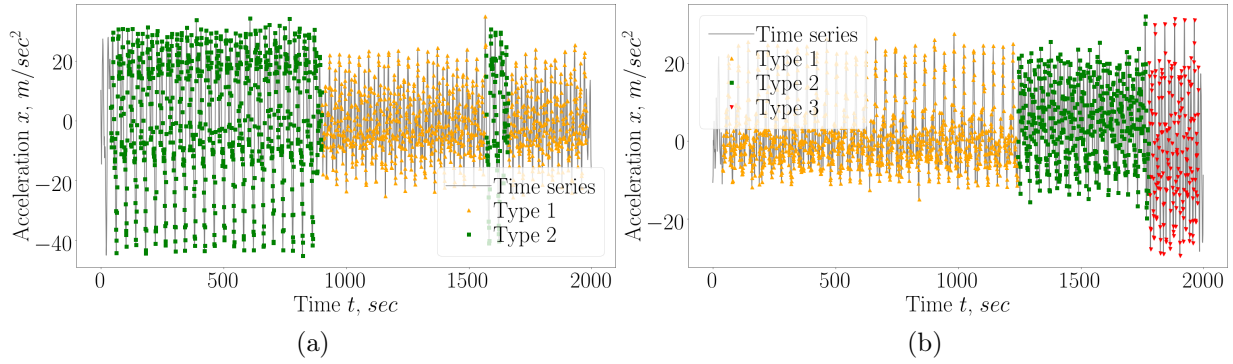


Рис. 5: Кластеризация точек временного ряда: а) для временного ряда Synthetic 1; б) для временного ряда Synthetic 2

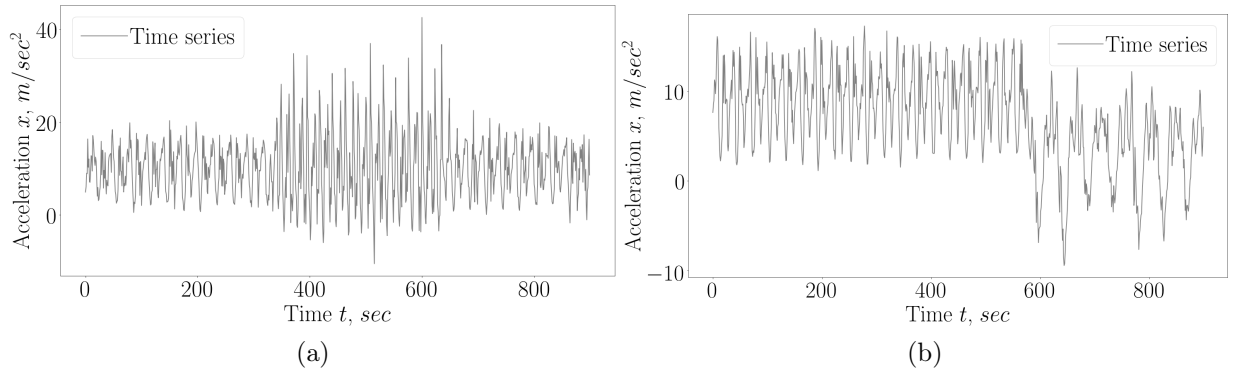


Рис. 6: Пример синтетически построенных временных рядов: а) для временного ряда Physical Motion 1; б) для временного ряда Physical Motion 2

Данный метод применяется для каждого действия внутри временного ряда по отдельности.

Таблица 2: Описание временных рядов в эксперименте сегментации временных рядов

Ряд, x	Длина ряда, N	Число сегментов, K	Длина сегмента, T
Simple 1	1000	2	100
Physical Motion 2	900	2	40

Синтетические данные. На рис. 10 показан результат работы сегментации для временного ряда Simple 1. Данный алгоритм хорошо выделил начала сегментов. Также на рис. 10 показаны проекции фазовых пространств для обоих кластеров на их первые две главные компоненты.

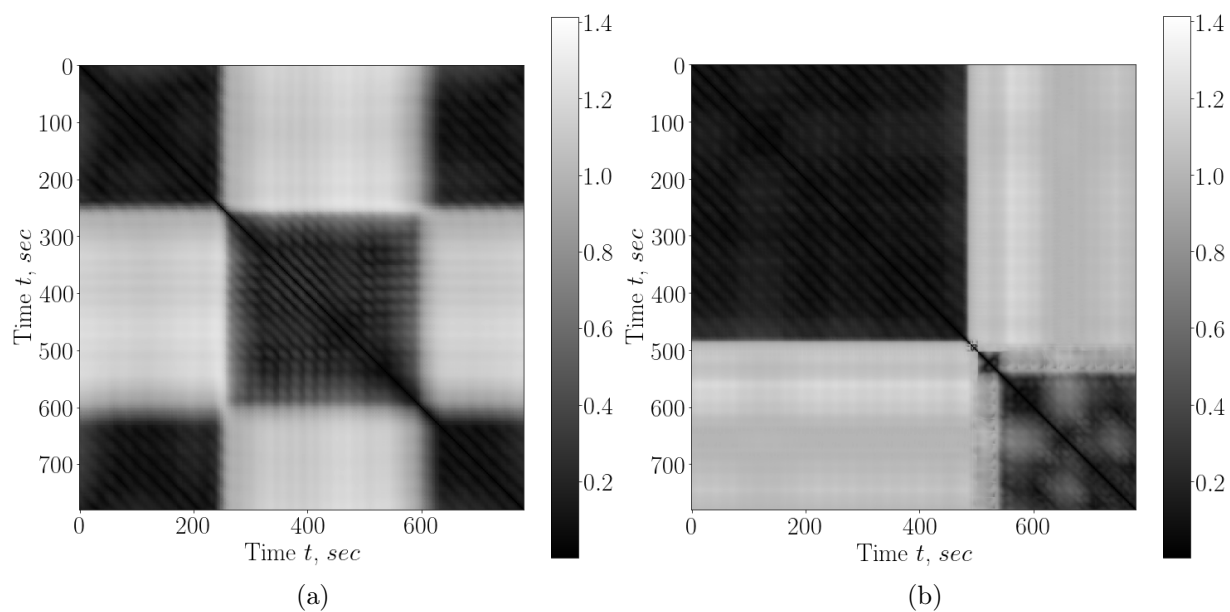


Рис. 7: Матрица попарных расстояний \mathbf{M} между точками временного ряда: а) для временного ряда Physical Motion 1; б) для временного ряда Physical Motion 2

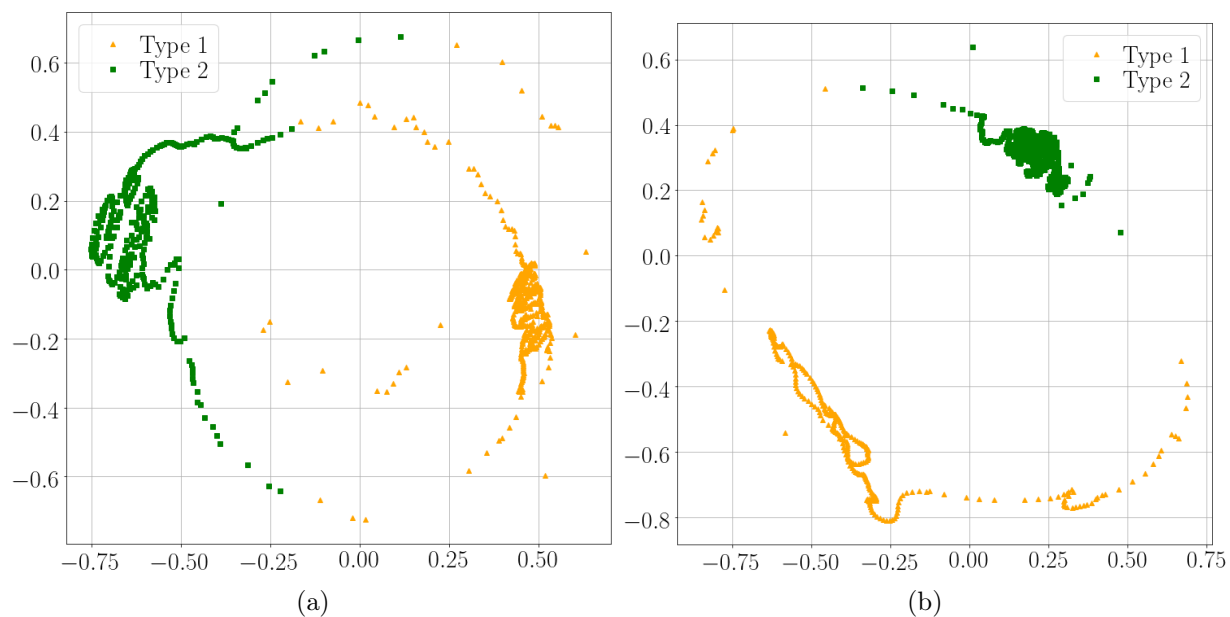


Рис. 8: Проекция точек временного на плоскость при помощи матрицы попарных расстояний \mathbf{M} : а) для временного ряда Physical Motion 1; б) для временного ряда Physical Motion 2

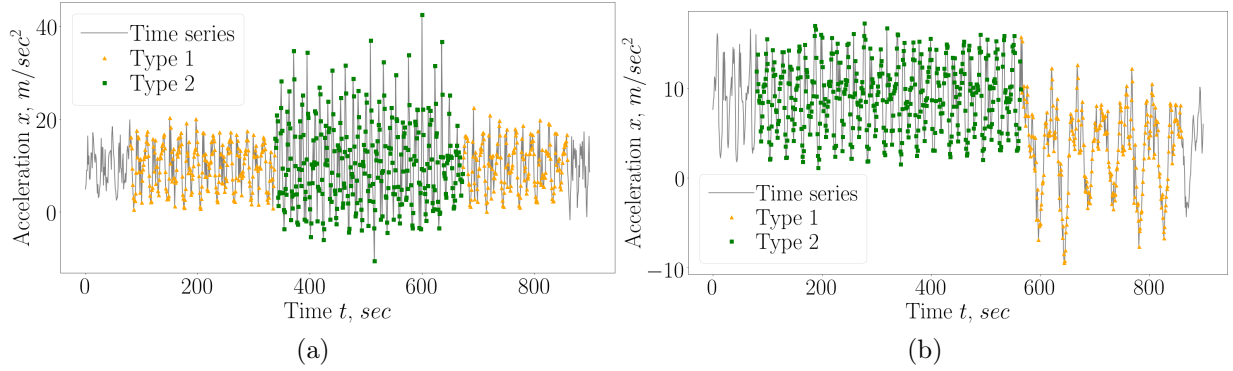


Рис. 9: Кластеризация точек временного ряда: а) для временного ряда Physical Motion 1; б) для временного ряда Physical Motion 2

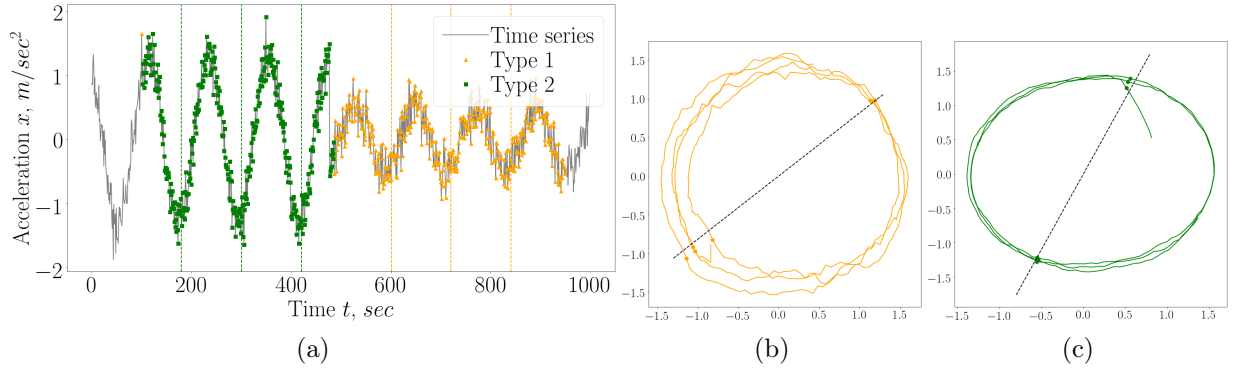


Рис. 10: Сегментация точек временного ряда Simple 1: а) сегментация временного ряда; б) проекция фазового пространства на первые две главные компоненты для первого кластера; с) проекция фазового пространства на первые две главные компоненты для второго кластера

Реальные данные. На рис. 11 показан результат работы сегментации для временного ряда Physical Motion 2. Данный алгоритм хорошо выделил начала сегментов для Type 1 и плохо для Type 2. Также на рис. 11 показаны проекции фазовых пространств для обоих кластеров на их первые две главные компоненты. Видно, что в случае проекции фазового пространства для части ряда, который относится к Type 2 получаем, что фазовая траектория имеет самопересечение внутри одного сегмента, что влечет нахождения ложного начала сегмента.

5 Заключение

В работе рассматривалась задача поиска характерных периодических структур внутри временного ряда. Рассматривался метод основанный на локальном снижении размерности фазового пространства. Был предложен алгоритм поиска характерных сег-

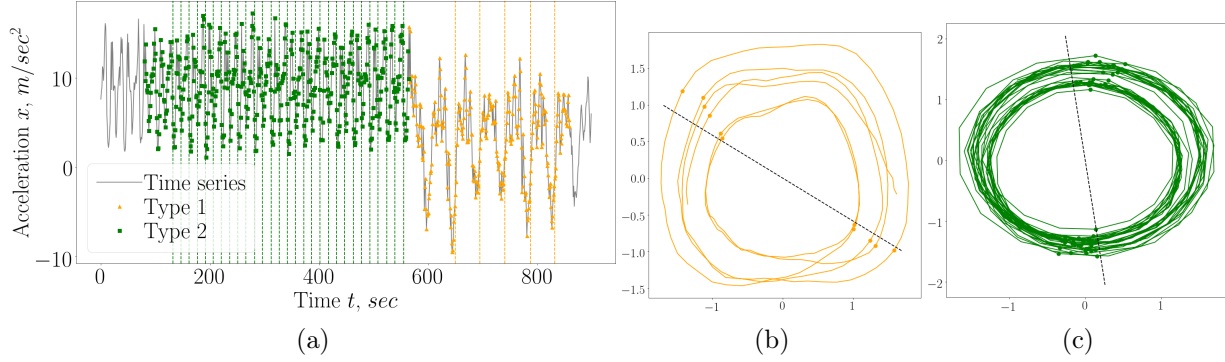


Рис. 11: Сегментация точек временного ряда Physical Motion 2: а) сегментация временного ряда; б) проекция фазового пространства на первые две главные компоненты для первого кластера; с) проекция фазового пространства на первые две главные компоненты для второго кластера

Таблица 3: Результаты работы алгоритма

Ряд, x	Длина ряда, N	# сегментов, K	Длина сегмента, T	Ошибка, S
Phys. Motion 1	900	2	40	0.06
Phys. Motion 2	900	2	40	0.03
Synthetic 1	2000	2	20	0.04
Synthetic 2	2000	3	20	0.03

ментов, который основывается на методе главных компонент для локального снижения размерности, а также на использовании функции расстояния между локальными базисами в каждый момент времени, которые интерпретировались как признакового описание точки временного ряда.

В ходе эксперимента, на реальных показаниях акселерометра, а также на синтетических данных, было показано, что предложенный метод измерения расстояния между базисами хорошо разделяет точки, которые принадлежат различным действиям, что приводит к хорошей кластеризации объектов. Результаты работы, показаны в таблице 3.

Также в эксперименте была проведена полная сегментация временных рядов при помощи метода [6] для каждого кластера по отдельности.

Предложенный метод имеет ряд недостатков, связанных с большим количеством ограничений на временной ряд. Данные ограничения будут ослаблены в последующих работах.

А Теорема (Грабовой 2019)

Теорема 1. Пусть задано множество подпространств \mathbb{W} пространства \mathbb{R}^n , каждое подпространство которого задается базисом $\mathbf{W}_i \in \mathbf{W}$, тогда функция расстояния $\rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2)$ является метрикой заданной на множестве базисов \mathbf{W} :

$$\rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) = \max \left(\max_{\mathbf{e}_2 \in \mathbf{W}_2} h_1(\mathbf{e}_2), \max_{\mathbf{e}_1 \in \mathbf{W}_1} h_2(\mathbf{e}_1) \right), \quad (\text{A.1})$$

где \mathbf{e}_i это базисный вектор из \mathbf{W}_i , $h_i(\mathbf{e})$ является расстоянием от вектора \mathbf{e} до пространства заданного базисом \mathbf{W}_i .

Доказательство. Для доказательства данной теоремы, нужно показать, что функция ρ удовлетворяет трем свойствам метрики.

Функция ρ удовлетворяет первому свойству метрики:

$$\rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_2 \quad (\text{A.2})$$

Функция ρ удовлетворяет второму свойству метрики:

$$\rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) = \rho(\mathbf{W}_2, \mathbf{W}_1) \quad (\text{A.3})$$

Докажем, что функция ρ удовлетворяет неравенству треугольника:

$$\rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) \leq \rho(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_3) + \rho(\mathbf{W}_3, \mathbf{W}_2) \quad (\text{A.4})$$

Для доказательства неравенства треугольника докажем неравенства:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{e}_1 \in \mathbf{W}_1} h_2(\mathbf{e}_1) &\leq \max_{\mathbf{e}_1 \in \mathbf{W}_1} h_3(\mathbf{e}_1) + \max_{\mathbf{e}_3 \in \mathbf{W}_3} h_2(\mathbf{e}_3) \\ \max_{\mathbf{e}_2 \in \mathbf{W}_2} h_1(\mathbf{e}_2) &\leq \max_{\mathbf{e}_2 \in \mathbf{W}_2} h_3(\mathbf{e}_2) + \max_{\mathbf{e}_3 \in \mathbf{W}_3} h_1(\mathbf{e}_3) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Используя Лемму 2 доказательство неравенства (A.5) сводится к доказательству неравенства:

$$\max_{\substack{\mathbf{a} \in \mathbf{W}_1 \\ |\mathbf{a}| \leq 1}} h_2(\mathbf{a}) \leq \max_{\substack{\mathbf{a} \in \mathbf{W}_1 \\ |\mathbf{a}| \leq 1}} h_3(\mathbf{a}) + \max_{\substack{\mathbf{c} \in \mathbf{W}_3 \\ |\mathbf{c}| \leq 1}} h_2(\mathbf{c}), \quad (\text{A.6})$$

где \mathbf{a}, \mathbf{c} произвольные элементы из соответствующих подпространств.

Подставив в выражение (A.6) выражение для $h_i(\mathbf{a})$, получаем следующее неравенство:

$$\max_{\substack{\mathbf{a} \in \mathbf{W}_1 \\ |\mathbf{a}| \leq 1}} \min_{\substack{\mathbf{b} \in \mathbf{W}_2 \\ |\mathbf{b}| \leq 1}} \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \leq \max_{\substack{\mathbf{a} \in \mathbf{W}_1 \\ |\mathbf{a}| \leq 1}} \min_{\substack{\mathbf{c} \in \mathbf{W}_3 \\ |\mathbf{c}| \leq 1}} \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\| + \max_{\substack{\mathbf{c} \in \mathbf{W}_3 \\ |\mathbf{c}| \leq 1}} \min_{\substack{\mathbf{b} \in \mathbf{W}_2 \\ |\mathbf{b}| \leq 1}} \|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|. \quad (\text{A.7})$$

Неравенство (A.7) следует из Леммы 3. Из выполнения неравенства (A.7) следует выполнение неравенств (A.5). Докажем неравенство треугольника (A.4) используя неравенства (A.5). Для удобства введем следующие обозначения:

$$\max_{\mathbf{e}_i \in \mathbf{W}_i} h_{\mathbf{W}_j}(\mathbf{e}_i) = h_i^j. \quad (\text{A.8})$$

Из истинности неравенства (A.7) в обозначениях (A.8) следует истинность следующих неравенств:

$$\begin{aligned} h_1^2 &\leq h_1^3 + h_3^2 \leq \max(h_1^3, h_3^1) + \max(h_3^2, h_2^3) \\ h_2^1 &\leq h_2^3 + h_3^1 \leq \max(h_2^3, h_3^2) + \max(h_3^1, h_1^3) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Из уравнения (A.9) следует выполнение неравенства:

$$\max(h_1^2, h_2^1) \leq \max(h_1^3, h_3^1) + \max(h_3^2, h_2^3) \quad (\text{A.10})$$

Доказательство неравенства (A.10) указывает на выполнение неравенства треугольника для функции ρ , что завершает доказательство того, что ρ является метрикой. \square

Лемма 2. Пусть заданы два подпространства $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^n$, которые задаются базами \mathbf{W}_1 и \mathbf{W}_2 , тогда справедливо следующее условие:

$$\max_{\mathbf{a} \in \mathbb{X}: |\mathbf{a}| \leq 1} h_2(\mathbf{a}) \quad (\text{A.11})$$

где $h_i(\mathbf{a})$ является расстоянием от вектора \mathbf{a} до пространства заданного базисом \mathbf{W}_i .

Доказательство.

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{a} \in \mathbb{X}: |\mathbf{a}| \leq 1} h_2(\mathbf{a}) &= \max_{\mathbf{a} \in \mathbb{X}: |\mathbf{a}| \leq 1} \left| \mathbf{a} - \sum_i \langle \mathbf{e}_2^i, \mathbf{a} \rangle \mathbf{e}_2^i \right| = \\ &= \max_{\{\alpha_j\}_j: \sum \alpha_j^2 \leq 1} \left| \sum_j \alpha_j \mathbf{e}_1^j - \sum_i \langle \mathbf{e}_2^i, \sum_j \alpha_j \mathbf{e}_1^j \rangle \mathbf{e}_2^i \right| = \\ &= \max_{\{\alpha_j\}_j: \sum \alpha_j^2 \leq 1} \left| \sum_j \alpha_j \left(\mathbf{e}_3^j - \sum_i \langle \mathbf{e}_3^j, \mathbf{e}_2^i \rangle \mathbf{e}_2^i \right) \right|, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

где в выражении (A.12) максимум очевидно достигается на j -ом базисном векторе для которого выражение в скобках является максимальным. \square

Лемма 3. Пусть заданы подпространства $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^n$, которые задаются базами $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3$ соответственно, тогда справедливо следующее условие:

$$\max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \\ |\mathbf{x}| \leq 1}} \min_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{Y} \\ |\mathbf{y}| \leq 1}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \\ |\mathbf{x}| \leq 1}} \min_{\substack{\mathbf{z} \in \mathbb{Z} \\ |\mathbf{z}| \leq 1}} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \max_{\substack{\mathbf{z} \in \mathbb{Z} \\ |\mathbf{z}| \leq 1}} \min_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{Y} \\ |\mathbf{y}| \leq 1}} \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|. \quad (\text{A.13})$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \\ |\mathbf{x}| \leq 1}} \min_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{Y} \\ |\mathbf{y}| \leq 1}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| &\leq \max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \\ |\mathbf{x}| \leq 1}} \min_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{Y} \\ |\mathbf{y}| \leq 1}} (\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|) = \\ \max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \\ |\mathbf{x}| \leq 1}} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \min_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{Y} \\ |\mathbf{y}| \leq 1}} \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| &= \max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \\ |\mathbf{x}| \leq 1}} \min_{\substack{\mathbf{z} \in \mathbb{Z} \\ |\mathbf{z}| \leq 1}} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \min_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{Y} \\ |\mathbf{y}| \leq 1}} \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| \leq \\ &\leq \max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \\ |\mathbf{x}| \leq 1}} \min_{\substack{\mathbf{z} \in \mathbb{Z} \\ |\mathbf{z}| \leq 1}} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \max_{\substack{\mathbf{z} \in \mathbb{Z} \\ |\mathbf{z}| \leq 1}} \min_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{Y} \\ |\mathbf{y}| \leq 1}} \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

□

Список литературы

- [1] *J. R. Kwapisz, G. M. Weiss, S. A. Moore* Activity Recognition using Cell Phone Accelerometers // Proceedings of the Fourth International Workshop on Knowledge Discovery from Sensor Data, 2010. Vol. 12. P. 74–82.
- [2] *W. Wang, H. Liu, L. Yu, F. Sun* Activity Recognition using Cell Phone Accelerometers // Joint Conference on Neural Networks, 2014. P. 1185–1190.
- [3] *A. D. Ignatov, V. V. Strijov* Human activity recognition using quasiperiodic time series collected from a single tri-axial accelerometer. // Multimedial Tools and Applications, 2015.
- [4] *A. Olivares, J. Ramirez, J. M. Gorris, G. Olivares, M. Damas* Detection of (in)activity periods in human body motion using inertial sensors: A comparative study. // Sensors, 12(5):5791–5814, 2012.
- [5] *Y. G. Cinar and H. Mirisae* Period-aware content attention RNNs for time series forecasting with missing values // Neurocomputing, 2018. Vol. 312. P. 177–186.
- [6] *A. P. Motrenko, V. V. Strijov* Extracting fundamental periods to segment biomedical signals // Journal of Biomedical and Health Informatics, 2015, 20(6). P. 1466 - 1476.
- [7] *Y. P. Lukashin* Adaptive methods for short-term forecasting // Finansy and Statistik, 2003.
- [8] *И. П. Ивкин, М. П. Кузнецов* Алгоритм классификации временных рядов акселерометра по комбинированному признаковому описанию. // Машинное обучение и анализ данных, 2015.
- [9] *V. V. Strijov, A. M. Katrutsa* Stresstes procedures for features selection algorithms. // Schemometrics and Intelligent Laboratory System, 2015.
- [10] *I. Borg, P. J. F. Groenen* Modern Multidimensional Scaling. — New York: Springer, 2005. 540 p.
- [11] *Д. Л. Данилова, А. А. Жигловский* Главные компоненты временных рядов: метод "Гусеница". — Санкт-Петербургский университет, 1997.