Анализ априорных распределений в задаче смеси экспертов

Грабовой Андрей Валериевич

Московский физико-технический институт

МФТИ, г. Долгопрудный

Цель: предложить алгоритм поиска окружностей на изображении при помощи локально аппроксимирующих локальных моделей.

Задачи

1. Предложить метод поиска окружности при помощи линейной модели.
2. Предложить метод для поиска нескольких окружностей, как смесь локальных аппроксимирующих моделей.
3. Предложить априорные распределения на параметры локальных моделей.

Исследуемая проблема

1. Построение локально аппроксимирующих моделей для аппроксимации всей выборки.

Метод решения

В качестве мультимодели предлагается использовать смесь экспертов. Для улучшения качества мультимодели предлагается ввести априорные распределения на локальные модели. Также вводится *регуляризация* априорных распределений для учета взаимосвязи между априорными распределениями разных локальных моделей.

1. *Yuksel Seniha Esen, Wilson Joseph N., Gader Paul D* Twenty Years of Mixture of Experts // IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. 2012. Issues. 23, No 8. pp. 1177–1193.
2. *A. P. Dempster, N. M. Laird and D. B. Rubin* Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), Vol. 39, No. 1 pp. 1-38, 1977.
3. *Bishop C.* Pattern Recognition and Machine Learning. — Berlin: Springer, 2006. 758 p.
4. *I. Matveev* Detection of iris in image by interrelated maxima of brightness gradient projections // Appl.Comput. Math. 9 (2), 252–257, 2010.
5. *K. Bowyer, K. Hollingsworth, P. Flynn* A Survey of Iris Biometrics Research: 2008–2010.

Постановка задачи нахождения параметров окружностей

Задано бинарное изображение:

$$\mathbf{M} \in \{0, 1\}^{m_1 \times m_2},$$

где 1 — черная точка, 0 — белая точка фона.
По изображению $\mathbf{M}$ строится выборка $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times 2},$$

где N — число черных точек на изображении $\mathbf{M}$.
Пусть x_0, y_0 — центр окружности, которую требуется найти, а r ее радиус.
Точки $(x_i, y_i) \in \mathbf{C}$ должны удовлетворять уравнению окружности:

$$(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 = r^2 \Rightarrow (2x_0) \cdot x_i + (2y_0) \cdot y_i + (r^2 - x_0^2 - y_0^2) \cdot 1 = x_i^2 + y_i^2.$$

Задачу линейной регрессии для нахождения окружности:

$$\mathbf{X}\mathbf{w} \approx \mathbf{y}, \quad \mathbf{X} = [\mathbf{C}, \mathbf{1}], \quad \mathbf{y} = [x_1^2 + y_1^2, x_2^2 + y_2^2, \cdots, x_N^2 + y_N^2]^{\mathsf{T}},$$

где найденые оптимальные параметры линейной регрессии $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3]^{\mathsf{T}}$ восстанавливают параметры окружности:

$$x_0 = \frac{w_1}{2}, \quad y_0 = \frac{w_2}{2}, \quad r = \sqrt{w_3 + x_0^2 + y_0^2}.$$

Смесь экспертов

Задана выборка:

$$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times n},$$

где N — число объектов в выборке, а n — размерность признакового пространства.

Definition

Смесь экспертов — мультимодель, определяющая правдоподобие веса π_k каждой локальной модели $\mathbf{f}_k$ на признаковом описании объекта $\mathbf{x}$.

$$\hat{\mathbf{f}} = \sum_{k=1}^{K} \pi_k \mathbf{f}_k, \qquad \pi_k(\mathbf{x}, \mathbf{V}) : \mathbb{R}^{n \times |\mathbf{V}|} \to [0, 1], \qquad \sum_{k=1}^{K} \pi_k(\mathbf{x}, \mathbf{V}) = 1$$

где $\hat{\mathbf{f}}$ — мультимодель, а $\mathbf{f}_k$ является некоторой моделью, π_k — шлюзовая функция, $\mathbf{w}_k$ — параметры k-й локальной модели, $\mathbf{V}$ — параметры шлюзовой функции.

В качестве локальных моделей $\mathbf{f}_k$ и шлюзовой функции $\boldsymbol{\pi}$ рассматриваются следующие функции:

$$\mathbf{f}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_k^{\mathsf{T}} \mathbf{x}, \quad \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}, \mathbf{V}) = \mathrm{softmax}\Big(\mathbf{V}_1^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{V}_2^{\mathsf{T}} \mathbf{x}\right)\Big),$$

где $\mathbf{V} = \big\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2\big\}$ — параметры шлюзовой функции.

Параметры локальных моделей оптимизируются согласно принципу максимального правдоподобия модели:

$$p\bigl(\mathbf{y}, \mathbf{W}|\mathbf{X}, \mathbf{V}\bigr) = \prod_{k=1}^{K} p^{k}\left(\mathbf{w}_k\right) \prod_{i=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{K} \pi_k p_k\left(y_i|\mathbf{w}_k, \mathbf{x}_i\right)\right),$$

где $\mathbf{W} = \bigl[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_K\bigr]^{\mathsf{T}}$.
Задача оптимизации параметров локальных моделей и параметров смеси:

$$\hat{\mathbf{W}}, \hat{\mathbf{V}} = \arg\max_{\mathbf{W}, \mathbf{V}} p\bigl(\mathbf{y}, \mathbf{W}|\mathbf{X}, \mathbf{V}\bigr).$$

Рассматривается вероятностная постановка задачи:

1) правдоподобие выборки $p_k\left(y_i|\mathbf{w}_k, \mathbf{x}_i\right) = \mathcal{N}\left(y_i|\mathbf{w}_k^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_i, \beta^{-1}\right)$, где β уровень шума,
2) априорное распределение параметров $p^k\left(\mathbf{w}_k\right) = \mathcal{N}\left(\mathbf{w}_k|\mathbf{w}_k^0, \mathbf{A}_k\right)$, где $\mathbf{w}_k^0$ — вектор размера $n \times 1$, $\mathbf{A}_k$ — ковариационная матрица параметров,
3) регуляризация априорного распределения $p\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{k,k'}|\boldsymbol{\alpha}\right) = \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{k,k'}|\mathbf{0}, \boldsymbol{\Xi}\right)$, где $\boldsymbol{\Xi}$ — ковариационная матрица общего вида, $\boldsymbol{\varepsilon}_{k,k'} = \mathbf{w}_k^0 - \mathbf{w}_{k'}^0$.

Правдоподобие модели:

$$p\big(\mathbf{y}, \mathbf{W}|\mathbf{X}, \mathbf{V}, \mathbf{A}, \mathbf{W}^0, \boldsymbol{\Xi}, \beta\big) = \prod_{k,k'=1}^{K} \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{k,k'}|\mathbf{0}, \boldsymbol{\Xi}\right) \cdot$$
$$\cdot \prod_{k=1}^{K} \mathcal{N}\left(\mathbf{w}_k|\mathbf{w}_k^0, \mathbf{A}_k\right) \prod_{i=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{K} \pi_k \mathcal{N}\left(y_i|\mathbf{w}_k^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_i, \beta^{-1}\right)\right),$$

где $\mathbf{A} = \big\{\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_K\big\}$. Введем скрытые переменные $\mathbf{Z} = ||z_{ik}||$, где $z_{ik} = 1 \Leftrightarrow k_i = k$:

$$\log p\big(\mathbf{y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}|\mathbf{X}, \mathbf{V}, \mathbf{A}, \mathbf{W}^0, \boldsymbol{\Xi}, \beta\big) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} z_{ik}\left[\log \pi_k\left(\mathbf{x}_i, \mathbf{V}\right) - \frac{\beta}{2}\left(y_i - \mathbf{w}_k^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_i\right)^2 + \frac{1}{2}\log\frac{\beta}{2\pi}\right] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{K}\left[-\frac{1}{2}\left(\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_k^0\right)^{\mathsf{T}}\mathbf{A}_k^{-1}\left(\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_k^0\right) + \frac{1}{2}\log\det\mathbf{A}_k^{-1} - \frac{n}{2}\log 2\pi\right] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{K}\sum_{k'=1}^{K}\left[-\frac{1}{2}\left(\mathbf{w}_k^0 - \mathbf{w}_{k'}^0\right)^{\mathsf{T}}\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{-1}\left(\mathbf{w}_k^0 - \mathbf{w}_{k'}^0\right) + \frac{1}{2}\log\det\boldsymbol{\Xi} - \frac{n}{2}\log 2\pi\right].$$

Задача оптимизации принимает вид:

$$\mathbf{W}, \mathbf{Z}, \mathbf{V}, \mathbf{W}^0, \mathbf{A}, \beta = \arg\max_{\mathbf{W}, \mathbf{Z}, \mathbf{V}, \mathbf{W}^0, \mathbf{A}, \beta} \log p\bigl(\mathbf{y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W} | \mathbf{X}, \mathbf{V}, \mathbf{A}, \mathbf{W}^0, \boldsymbol{\Xi}, \beta\bigr).$$

Вариационный ЕМ–алгоритм $q(\mathbf{Z}, \mathbf{W}) = q(\mathbf{Z})\, q(\mathbf{W})$:

1. Е–шаг:

$$\log q(\mathbf{Z}^s) \propto \mathsf{E}_{q/\mathbf{Z}} \log p\bigl(\mathbf{y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W} | \mathbf{X}, \mathbf{V}^{s-1}, \mathbf{A}^{s-1}, \mathbf{W}^{0,s-1}, \boldsymbol{\Xi}, \beta^{s-1}\bigr)$$
$$\log q(\mathbf{W}^s) \propto \mathsf{E}_{q/\mathbf{W}} \log p\bigl(\mathbf{y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W} | \mathbf{X}, \mathbf{V}^{s-1}, \mathbf{A}^{s-1}, \mathbf{W}^{0,s-1}, \boldsymbol{\Xi}, \beta^{s-1}\bigr)$$

2. М–шаг:

$$\mathbf{W}^{0,s}, \mathbf{A}^s, \mathbf{V}^s, \beta^s = \arg\max_{\mathbf{W}^0, \mathbf{A}, \mathbf{V}, \beta} \mathsf{E}_{q^s} \log p\bigl(\mathbf{y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W} | \mathbf{X}, \mathbf{V}, \mathbf{A}, \mathbf{W}^0, \boldsymbol{\Xi}, \beta\bigr) \qquad (1)$$

Итерационные формулы EM–алгоритма:

1. E–шаг:

$$p\left(z_{ik}=1\right)=\frac{\exp\left(\log\pi_k\left(\mathbf{x}_i,\mathbf{V}\right)-\frac{\beta}{2}\left(\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\mathsf{E}\mathbf{w}_k\mathbf{w}_k^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\mathsf{E}\mathbf{w}_k\right)\right)}{\sum_{k'=1}^{K}\exp\left(\log\pi_{k'}\left(\mathbf{x}_i,\mathbf{V}\right)-\frac{\beta}{2}\left(\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\mathsf{E}\mathbf{w}_{k'}\mathbf{w}_{k'}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\mathsf{E}\mathbf{w}_{k'}\right)\right)},$$

$$q(\mathbf{w}_k)=\mathcal{N}(\mathbf{w}_k|\mathbf{m}_k,\mathbf{B}_k),$$

$$\mathbf{m}_k=\mathbf{B}_k\left(\mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{w}_k^0+\beta\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_iy_i\mathsf{E}z_{ik}\right),\quad \mathbf{B}_k=\left(\mathbf{A}_k^{-1}+\beta\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\mathsf{E}z_{ik}\right)^{-1}.$$

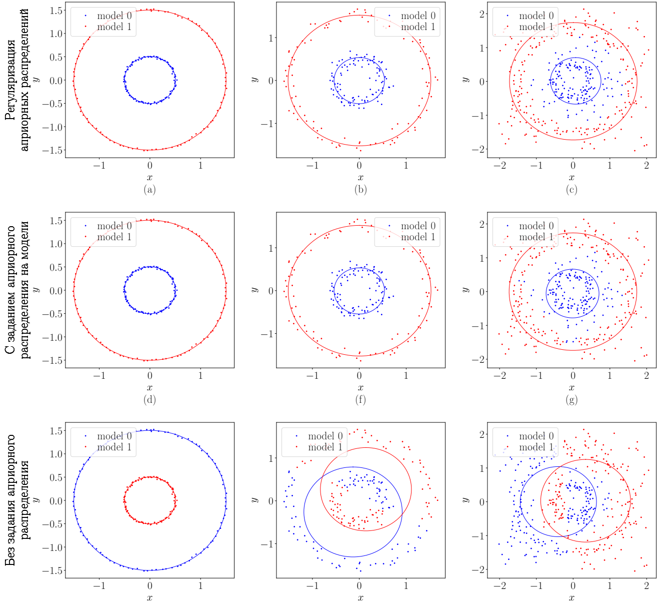
2. M–шаг:

$$\mathbf{A}_k=\mathsf{E}\mathbf{w}_k\mathbf{w}_k^{\mathsf{T}}-\mathbf{w}_k^0\mathsf{E}\mathbf{w}_k^{\mathsf{T}}-\mathsf{E}\mathbf{w}_k\mathbf{w}_k^{0\mathsf{T}}+\mathbf{w}_k^0\mathbf{w}_k^{0\mathsf{T}},$$

$$\frac{1}{\beta}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\left[y_i^2-2y_i\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\mathsf{E}\mathbf{w}_k+\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\mathsf{E}\mathbf{w}_k\mathbf{w}_k^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_i\right]\mathsf{E}z_{ik},$$

$$\mathbf{w}_k^0=\left[\mathbf{A}_k^{-1}+(K-1)\,\boldsymbol{\Xi}\right]^{-1}\left(\mathbf{A}_k^{-1}\mathsf{E}\mathbf{w}_k+\boldsymbol{\Xi}\sum_{k'=1,\ k'\neq k}^{K}\mathbf{w}_{k'}^0\right),$$

$$\mathbf{V}=\arg\max_{\mathbf{V}}\mathsf{E}_{q^s}\log p\big(\mathbf{y},\mathbf{Z},\mathbf{W}|\mathbf{X},\mathbf{V},\mathbf{A},\mathbf{W}^0,\beta\big).$$

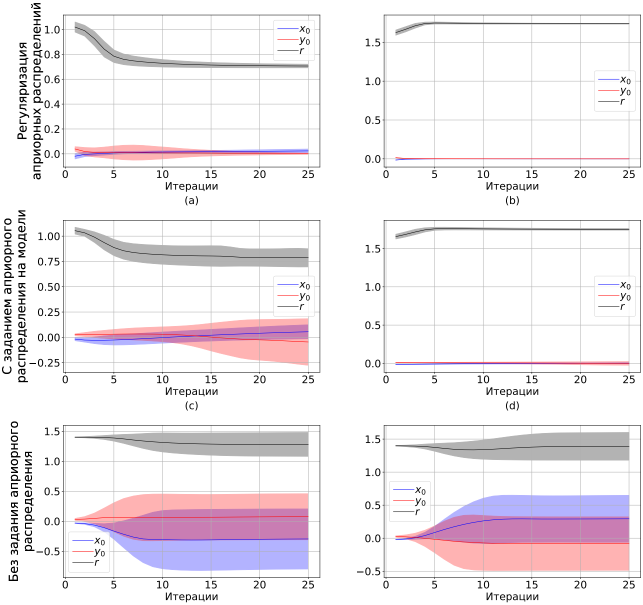


(a) (b) (c)

(d) (f) (g)

(e) Без шума (h) Шум вблизи окружности (j) Равномерный шум

Процесс обучения на синтетических данных



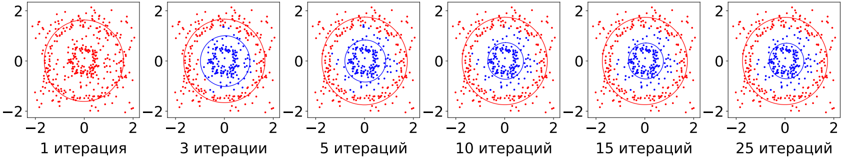
(a) (b)

(c) (d)

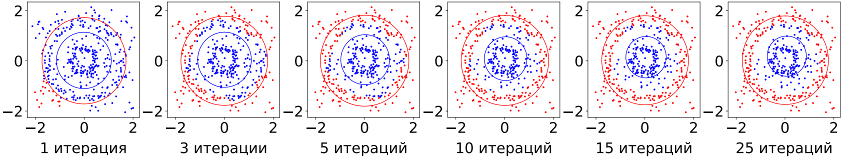
(e) Окружность 1 (f) Окружность 2

Процесс обучения на синтетических данных

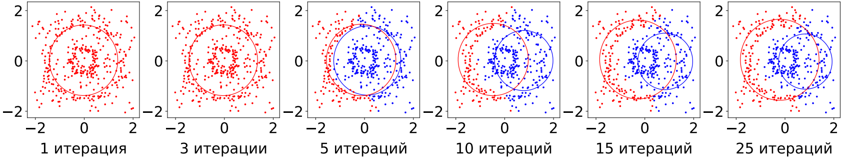
Регуляризация априорных распределений



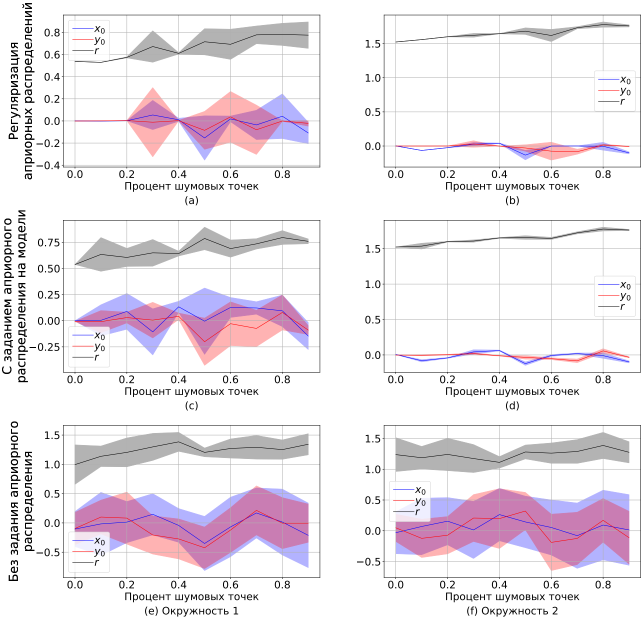
С заданием априорного распределения на модели



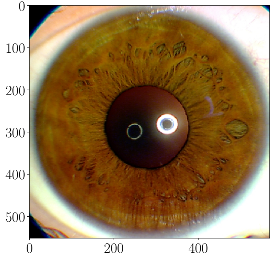
Без задания априорного распределения



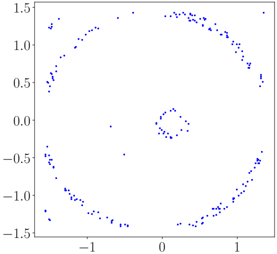
Анализ мультимоделей в зависимости от уровня шума



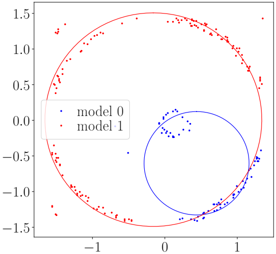
Реальные данные



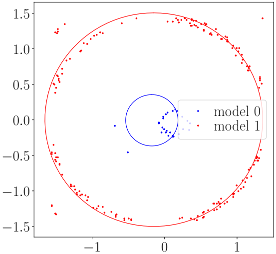
(a) Исходное изображение



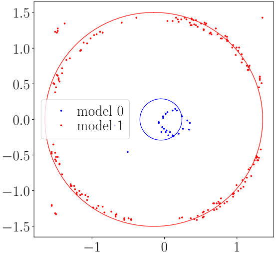
(b) Бинаризованное изображение



(c) Без задания априорного распределения

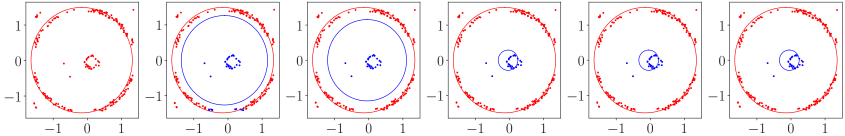


(d) С заданием априорного распределения на модели



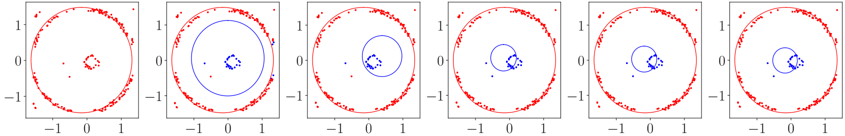
(e) Регуляризация априорных распределений

Регуляризация априорных распределений



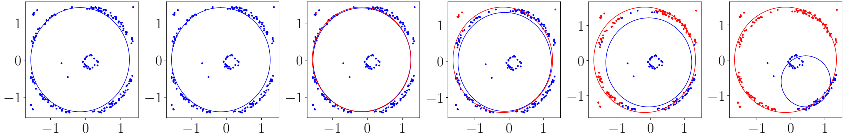
1 итерация | 3 итерации | 5 итераций | 10 итераций | 15 итераций | 25 итераций

С заданием априорного распределения на модели



1 итерация | 3 итерации | 5 итераций | 10 итераций | 15 итераций | 25 итераций

Без задания априорного распределения



1 итерация | 3 итерации | 5 итераций | 10 итераций | 15 итераций | 25 итераций

Вывод

Сделано:

1. Предложен метод поиска окружностей на бинарном изображении с разными априорными предположениями.
2. Введено понятие регуляризации априорных распределений для улучшения качества мультимодели.
3. В эксперименте показано, что задания регуляризации позволяет улучшить качество и устойчивость модели.

Планируется:

1. Улучшить мультимодель при помощи задания априорного распределения на шлюзовую функцию.
2. Рассмотреть в качестве моделей не только модели, которые описывают данные, а также модель, которая отвечает за шум в данных.
3. Расширить класс локальных моделей с окружности до произвольной кривой второго порядка.