

# Анализ выбора априорного распределения для смеси экспертов \*

А. В. Грабовой<sup>1</sup>, В. В. Стрижов<sup>2</sup>

**Аннотация:** Данная работа посвящен анализу свойств смеси экспертов в зависимости от выбора априорного распределения. Анализируется случай, когда выбрано информативное и неинформативное априорное распределение весов параметров каждого эксперта. В качестве экспертов рассматриваются линейные модели, а в качестве гипермодели рассматривается нейросеть с функцией softmax на последнем слое. В качестве базовой задачи рассматривается задача поиска окружностей на изображении. Предполагается, что каждой окружности на изображении соответствует свой эксперт. В данной работе рассматривается случай, когда априорные распределения разных моделей являются независимы, а также случай, когда эти распределения являются зависимыми. В качестве данных рассматриваются синтетически сгенерированные окружности с разным уровнем шума. Сравнивается устойчивость к шуму мультимоделей с заданными априорными распределениями на вектора параметров локальных моделей и без задания априорного распределения.

**Ключевые слова:** смесь экспертов; байесовский выбор модели; априорное распределение.

DOI: 00.00000/0000000000000000

## 1 Введение

В данной работе рассматривается задача смеси экспертов. Смесь экспертов — это мультимодель, которая линейно взвешивает локальных моделей аппроксимирующих выборку. Значение весовых коэффициенты зависят от того объекта для которого производится предсказание.

---

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ и правительства РФ.

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт, grabovoy.av@phystech.edu

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт, strijov@ccas.ru

Примерами мультимodelей являются беггинг и градиентный бустинг [1], случайный лес [2]. Подход к мультимоделированию [3] предполагает, что вклад каждой модели в ответ зависит от рассматриваемого объекта. Смесь экспертов использует шлюзовую функцию, которая определяет значимость предсказания каждого эксперта — отдельной модели, входящей в смесь.

Для поиска оптимальных параметров мультимodelи и локальных modelей рассматривается вероятностная постановка задачи. В качестве функционала качества рассматривается логарифм правдоподобия модели. Для оптимизации данного функционала рассматривается ЕМ-алгоритм [9].

Мультимodelей имеют ряд недостатков, которые связаны с тем, что сходимость локальных modelей сильно зависит от начальной инициализации векторов параметров. Для улучшения сходимости предлагается использовать априорные знания. В данной работе задается априорное распределение на веса локальных modelей, также предлагается использовать зависимость априорных распределений, для улучшения качества мультимodelи.

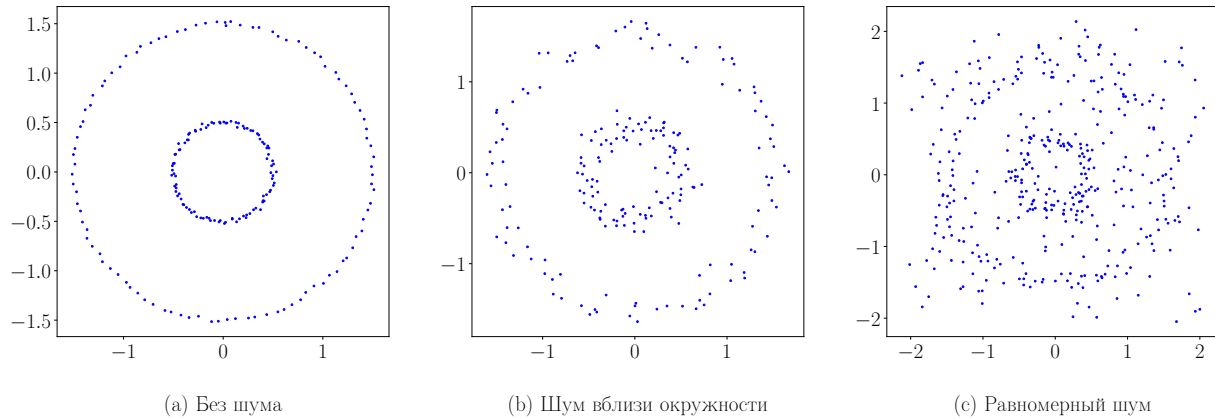


Рис. 1: Пример изображений с окружностями с разным уровнем шума: (а) окружности без шума; (b) окружности с зашумленным радиусом; (с) окружности с зашумленным радиусом, а также с равномерным шумом по всему изображению

Данная работа исследует зависимость качества модели в зависимости от выбора априорных распределений. Решается задача поиска окружностей на бинаризованном изображении. Предполагается, что радиусы окружностей различаются значимо, а также, что центры почти совпадают. Пример изображений показан на рис. 1. Предлагается рассмотреть как ведет себя модель с априорными знаниями и без них в случае изображений с разным уровнем шума. В данной работе в качестве отдельных экспертов рассматриваются линейные модели — каждая модель отвечает своей окружностью. В качестве шлюзовой функции рассматривается двухслойная нейронная сеть.

## 2 Работы по теме

Большое количество работ посвящены выбору плюсовой функции: softmax-регрессия, процесс Дирихле [5], нейронная сеть [4] с функцией softmax на последнем слое.

Ряд работ посвящены выбору моделей в качестве отдельных экспертов. В работах [6, 10] в качестве модели эксперта рассматривается линейная модель. Работы [7, 8] рассматривают модель SVM в качестве модели эксперта.

В работа [3] представлен обзор методов и моделей в задачах смеси экспертов. В данной работе представлен обзор выше перечисленных плюсовых функций. Также в данной работе проведен анализ разных моделей, которые могут выступать в качестве локальной модели.

## 3 Постановка задачи нахождения параметров окружностей

Задано бинарное изображение:

$$\mathbf{M} \in \{0, 1\}^{m_1 \times m_2}, \quad (3.1)$$

где 0 отвечает черной точке — изображению, 1 — белой точке фона.

По изображению  $\mathbf{M}$  строится выборка  $\mathbf{C}$ , элементами которой являются координаты  $x_i, y_i$  белых точек на картинке:

$$\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times 2}, \quad (3.2)$$

где  $N$  — число черных точек на изображении  $\mathbf{M}$ .

Обозначим  $x_0, y_0$  — центр окружности, которую требуется найти на бинарном изображении  $\mathbf{M}$ , а  $r$  ее радиус. Элементы выборки  $(x_i, y_i) \in \mathbf{C}$  являются геометрическим местом точек, которое задано уравнение окружности:

$$(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 = r^2. \quad (3.3)$$

Раскрыв скобки получим уравнение

$$(2x_0) \cdot x_i + (2y_0) \cdot y_i + (r^2 - x_0^2 - y_0^2) \cdot 1 = x_i^2 + y_i^2. \quad (3.4)$$

Получаем задачу линейной регрессии для нахождения параметров окружности:

$$\mathbf{X}\mathbf{w} \approx \mathbf{y}, \quad \mathbf{X} = \mathbf{C} \times \mathbf{1}, \quad \mathbf{y} = [x_1^2 + y_1^2, x_2^2 + y_2^2, \dots, x_N^2 + y_N^2]^\top, \quad (3.5)$$

где найденные оптимальные параметры линейной регрессии  $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3]^\top$  восстанавливают параметры окружности:

$$x_0 = \frac{w_1}{2}, \quad y_0 = \frac{w_2}{2}, \quad r = \sqrt{w_3 + x_0^2 + y_0^2}. \quad (3.6)$$

Решение уравнения (3.5) находит параметры единственной окружности на изображении. В случае, когда на изображении несколько окружностей, предлагается использовать мультимодель. В ее состав входят линейные модели. Каждая линейная модель описывает одну окружность на изображении. В качестве мультимодели рассматривается смесь экспертов. Данная постановка обобщается на поиск параметров эллипсов в апендиксе А.

## 4 Постановка задачи построения смеси экспертов

Задана выборка из (3.5)

$$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times n}, \quad (4.1)$$

где  $N$  — число объектов в выборке, а  $n$  — размерность признакового пространства.

**Определение 4.1.** *Смесь экспертов — мультимодель, определяющая правдоподобие веса  $\pi_k$  каждой локальной модели  $\mathbf{f}_k$  на признаковом описании объекта  $\mathbf{x}$ .*

$$\hat{\mathbf{f}} = \sum_{k=1}^K \pi_k \mathbf{f}_k, \quad \pi_k(\mathbf{x}, \mathbf{V}) : \mathbb{R}^{n \times |\mathbf{V}|} \rightarrow [0, 1], \quad \sum_{k=1}^K \pi_k(\mathbf{x}, \mathbf{V}) = 1 \quad (4.2)$$

где  $\hat{\mathbf{f}}$  — мультимодель, а  $\mathbf{f}_k$  является некоторой моделью,  $\pi_k$  — параметрическая модель,  $\mathbf{w}_k$  — параметры  $k$ -й локальной модели,  $\mathbf{V}$  — параметры шлюзовой функции.

В данной работе в качестве локальных моделей  $\mathbf{f}_k$  и шлюзовой функции  $\pi$  рассматриваются следующие функции:

$$\mathbf{f}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_k^T \mathbf{x}, \quad \pi(\mathbf{x}, \mathbf{V}) = \text{softmax}(\mathbf{V}_1^T \sigma(\mathbf{V}_2^T \mathbf{x})), \quad (4.3)$$

где  $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2]$  — параметры шлюзовой функции.

В качестве функционала качества рассматривается правдоподобие модели:

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{W} | \mathbf{X}, \mathbf{V}) = \prod_{k=1}^K p^k(\mathbf{w}_k) \prod_{i=1}^N \left( \sum_{k=1}^K \pi_k p_k(y_i | \mathbf{w}_k, \mathbf{x}_i) \right), \quad (4.4)$$

где  $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_K]^T$

Получаем следующую задачу оптимизации:

$$\mathbf{W}, \mathbf{V} = \arg \max_{\mathbf{W}, \mathbf{V}} p(\mathbf{y}, \mathbf{W} | \mathbf{X}, \mathbf{V}) \quad (4.5)$$

## 5 ЕМ–алгоритм для решения задачи смеси экспертов

Рассмотрим следующую вероятностную постановку задачи:

$$1. \ p_k(y_i | \mathbf{w}_k, \mathbf{x}_i) = \mathcal{N}(y_i | \mathbf{w}_k^T \mathbf{x}_i, \beta^{-1})$$

$$2. p^k(\mathbf{w}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{w}_k | \mathbf{w}_k^0, \mathbf{A}_k)$$

$$3. p(\boldsymbol{\varepsilon}_{k,k'} | \boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\varepsilon}_{k,k'} | \mathbf{0}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}), \text{ где } \boldsymbol{\varepsilon}_{k,k'} = \mathbf{w}_k^0 - \mathbf{w}_{k'}^0, \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \text{diag}(\boldsymbol{\alpha}) \text{ — диагональная матрица, диагональ которой равняется } \boldsymbol{\alpha}.$$

Тогда правдоподобия модели (4.4) переписывается в следующем виде:

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{W} | \mathbf{X}, \mathbf{V}, \mathbf{A}, \mathbf{W}^0, \hat{\boldsymbol{\alpha}}, \beta) = \prod_{k,k'=1}^K \mathcal{N}(\boldsymbol{\varepsilon}_{k,k'} | \mathbf{0}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}) \cdot \prod_{k=1}^K \mathcal{N}(\mathbf{w}_k | \mathbf{w}_k^0, \mathbf{A}_k) \prod_{i=1}^N \left( \sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(y_i | \mathbf{w}_k^\top \mathbf{x}_i, \beta^{-1}) \right), \quad (5.1)$$

где  $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_K]$

Для решения задачи (4.5) в условиях правдоподобия (5.1) введем матрицу скрытых переменных  $\mathbf{Z}$ , где  $z_{ik} = 1$ , если  $i$ -й объект порожден моделью  $k$  и  $z_{ik} = 0$  иначе. Используя  $\mathbf{Z}$ , логарифм правдоподобия (5.1) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \log p(\mathbf{y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W} | \mathbf{X}, \mathbf{V}, \mathbf{A}, \mathbf{W}^0, \hat{\boldsymbol{\alpha}}, \beta) &= \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K z_{ik} \left[ \log \pi_k(\mathbf{x}_i, \mathbf{V}) - \frac{\beta}{2} (y_i - \mathbf{w}_k^\top \mathbf{x}_i)^2 + \frac{1}{2} \log \frac{\beta}{2\pi} \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^K \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_k^0)^\top \mathbf{A}_k^{-1} (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_k^0) + \frac{1}{2} \log \det \mathbf{A}_k^{-1} - \frac{n}{2} \log 2\pi \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^K \sum_{k'=1}^K \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{w}_k^0 - \mathbf{w}_{k'}^0)^\top \hat{\boldsymbol{\alpha}}^{-1} (\mathbf{w}_k^0 - \mathbf{w}_{k'}^0) + \frac{1}{2} \log \det \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \frac{n}{2} \log 2\pi \right]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

С учетом (5.2) задача оптимизации (4.5) принимает вид:

$$\mathbf{W}, \mathbf{Z}, \mathbf{V}, \mathbf{W}^0, \mathbf{A}, \beta = \arg \max_{\mathbf{W}, \mathbf{Z}, \mathbf{V}, \mathbf{W}^0, \mathbf{A}, \beta} \log p(\mathbf{y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W} | \mathbf{X}, \mathbf{V}, \mathbf{A}, \mathbf{W}^0, \hat{\boldsymbol{\alpha}}, \beta) \quad (5.3)$$

Для поиска локального минимума в задаче оптимизации (5.3) воспользуемся ЕМ-алгоритмом.

**Е-step.** Найдем  $q(\mathbf{Z}, \mathbf{W}) = q(\mathbf{Z}) q(\mathbf{W})$  наиболее близкое к  $p(\mathbf{Z}, \mathbf{W} | \mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{V}, \mathbf{A}, \mathbf{W}^0, \hat{\boldsymbol{\alpha}}, \beta)$ .

$$\begin{aligned} \log q(\mathbf{Z}) &= \mathbb{E}_{q(\mathbf{Z})} \log p(\mathbf{y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W} | \mathbf{X}, \mathbf{V}, \mathbf{A}, \mathbf{W}^0, \hat{\boldsymbol{\alpha}}, \beta) \propto \\ &\propto \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K z_{ik} \left[ \log \pi_k(\mathbf{x}_i, \mathbf{V}) - \frac{\beta}{2} (y_i^2 - \mathbf{x}_i^\top \mathbb{E} \mathbf{w}_k + \mathbf{x}_i^\top \mathbb{E} \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^\top \mathbf{x}_i) + \frac{1}{2} \log \frac{\beta}{2\pi} \right] \\ p(z_{ik} = 1) &= \frac{\exp(\log \pi_k(\mathbf{x}_i, \mathbf{V}) - \frac{\beta}{2} (\mathbf{x}_i^\top \mathbb{E} \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^\top \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^\top \mathbb{E} \mathbf{w}_k))}{\sum_{k'=1}^K \exp(\log \pi_{k'}(\mathbf{x}_i, \mathbf{V}) - \frac{\beta}{2} (\mathbf{x}_i^\top \mathbb{E} \mathbf{w}_{k'} \mathbf{w}_{k'}^\top \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^\top \mathbb{E} \mathbf{w}_{k'}))} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Получаем, что параметр  $q(z_{ik})$  является Бернулевской случайной величиной с параметров заданным в выражении (5.4).

$$\begin{aligned}
\log q(\mathbf{W}) &= \mathbb{E}_{q/\mathbf{W}} \log p(\mathbf{y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W} | \mathbf{X}, \mathbf{V}, \mathbf{A}, \mathbf{W}^0, \hat{\alpha}, \beta) \propto \\
&\propto \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K \mathbb{E} z_{ik} \left[ \log \pi_k(\mathbf{x}_i, \mathbf{V}) - \frac{\beta}{2} (y_i - \mathbf{w}_k^\top \mathbf{x}_i)^2 + \frac{1}{2} \log \frac{\beta}{2\pi} \right] + \\
&+ \sum_{k=1}^K \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_k^0)^\top \mathbf{A}_k^{-1} (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_k^0) + \frac{1}{2} \log \det \mathbf{A}_k^{-1} - \frac{n}{2} \log 2\pi \right] \\
&\propto \sum_{k=1}^K \left[ \mathbf{w}_k^\top \left( \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{w}_k^0 + \beta \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i y_i \mathbb{E} z_{ik} \right) - \frac{1}{2} \mathbf{w}_k^\top \left( \mathbf{A}_k^{-1} + \beta \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top \right) \mathbf{w}_k \right]
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Получаем, что распределение  $q(\mathbf{w}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{w}_k | \mathbf{m}_k, \mathbf{B}_k)$ , где параметры  $\mathbf{m}_k, \mathbf{B}_k$  определяются следующим образом:

$$\mathbf{m}_k = \mathbf{B}_k \left( \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{w}_k^0 + \beta \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i y_i \mathbb{E} z_{ik} \right) \quad \mathbf{B}_k = \left( \mathbf{A}_k^{-1} + \beta \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top \mathbb{E} z_{ik} \right)^{-1} \tag{5.6}$$

**M-step.** Найдем  $\mathbf{V}, \mathbf{W}^0, \mathbf{A}, \beta$  из максимизации  $\mathbb{E}_q \log p(\mathbf{y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W} | \mathbf{X}, \mathbf{V}, \mathbf{A}, \mathbf{W}^0, \hat{\alpha}, \beta)$ .

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathbf{V}, \mathbf{W}^0, \mathbf{A}, \beta) &= \mathbb{E}_q \log p(\mathbf{y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W} | \mathbf{X}, \mathbf{V}, \mathbf{A}, \mathbf{W}^0, \hat{\alpha}, \beta) = \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K \mathbb{E} z_{ik} \left[ \log \pi_k(\mathbf{x}_i, \mathbf{V}) - \frac{\beta}{2} \mathbb{E} (y_i - \mathbf{w}_k^\top \mathbf{x}_i)^2 + \frac{1}{2} \log \frac{\beta}{2\pi} \right] + \\
&+ \sum_{k=1}^K \left[ -\frac{1}{2} \mathbb{E} (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_k^0)^\top \mathbf{A}_k^{-1} (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_k^0) + \frac{1}{2} \log \det \mathbf{A}_k^{-1} - \frac{n}{2} \log 2\pi \right] + \\
&+ \sum_{k=1}^K \sum_{k'=1}^K \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{w}_k^0 - \mathbf{w}_{k'}^0)^\top \hat{\alpha}^{-1} (\mathbf{w}_k^0 - \mathbf{w}_{k'}^0) + \frac{1}{2} \log \det \hat{\alpha} - \frac{n}{2} \log 2\pi \right].
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Так-как  $\mathcal{F}(\mathbf{V}, \mathbf{W}^0, \mathbf{A}, \beta)$  является вогнутой, то для нахождения оптимальных параметров воспользуемся условием первого порядка.

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{V}, \mathbf{W}^0, \mathbf{A}, \beta)}{\partial \mathbf{V}} = 0 \tag{5.8}$$

Решение уравнения (5.8) найдем при помощи градиентного метода оптимизации, которое гарантирует сходимость к локальному экстремуму функции  $\mathcal{F}(\mathbf{V}, \mathbf{W}^0, \mathbf{A}, \beta)$ .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{V}, \mathbf{W}^0, \mathbf{A}, \beta)}{\partial \mathbf{A}_k^{-1}} &= \frac{1}{2} \mathbf{A}_k - \frac{1}{2} \mathbb{E} (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_k^0) (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_k^0)^\top = 0 \\
\mathbf{A}_k &= \mathbb{E} \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^\top - \mathbf{w}_k^0 \mathbb{E} \mathbf{w}_k^\top - \mathbb{E} \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^{0\top} + \mathbf{w}_k^0 \mathbf{w}_k^{0\top}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{V}, \mathbf{W}^0, \mathbf{A}, \beta)}{\partial \beta} &= \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{\beta} \mathbb{E} z_{ik} - \frac{1}{2} \mathbb{E} z_{ik} [y_i^2 - 2y_i \mathbf{x}_i^\top \mathbb{E} \mathbf{w}_k + \mathbf{x}_i^\top \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^\top \mathbf{x}_i] \right) = 0 \\ \frac{1}{\beta} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K [y_i^2 - 2y_i \mathbf{x}_i^\top \mathbb{E} \mathbf{w}_k + \mathbf{x}_i^\top \mathbb{E} \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^\top \mathbf{x}_i] \mathbb{E} z_{ik}\end{aligned}\quad (5.10)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{V}, \mathbf{W}^0, \mathbf{A}, \beta)}{\partial \mathbf{w}_k^0} &= \mathbf{A}_k^{-1} (\mathbb{E} \mathbf{w}_k - \mathbf{w}_k^0) + \hat{\alpha} \sum_{k'=1}^K [\mathbf{w}_{k'}^0 - \mathbf{w}_k^0] = 0 \\ \mathbf{w}_k^0 &= [\mathbf{A}_k^{-1} + (K-1) \hat{\alpha}]^{-1} \left( \mathbf{A}_k^{-1} \mathbb{E} \mathbf{w}_k + \hat{\alpha} \sum_{k'=1, k' \neq k}^K \mathbf{w}_{k'}^0 \right).\end{aligned}\quad (5.11)$$

Используя формулы (5.4-5.11) получаем итеративный процесс, который сходится к локальному решению (5.3).

Если в списке вероятностных предположений оставить только пункт (1.) получим решение задачи оптимизации, когда не задано никаких априорных распределений на модели. В случае, когда рассматриваются пункты (1., 2.) получим задачу с заданными априорными распределениями на локальные модели. В случае, когда рассматриваются все пункты (1., 2., 3.) назовем решение с регуляризацией априорных распределений, так как в данном случае мы учитываем зависимость между локальными моделями.

## 6 Вычислительный эксперимент

Проводится вычислительный эксперимент для анализа качества нахождения окружностей. В эксперименте рассматривается мультимодель без задания априорных распределений на параметры модели, которую обозначим  $\mathfrak{M}_1$ , мультимодель  $\mathfrak{M}_2$  с заданным априорным распределением (6.3) на параметры локальных моделей, также рассматривается мультимодель  $\mathfrak{M}_3$  с регуляризацией априорных распределений. Качество прогноза модели  $\mathfrak{M}_i$  окружностей определяется функцией:

$$\mathcal{S}_{\mathfrak{M}_i} = \sum_{k=1}^K (x_0^k - x_{pr}^k)^2 + (y_0^k - y_{pr}^k)^2 + (r^k - r_{pr}^k)^2, \quad (6.1)$$

где  $x_0^k, y_0^k, r^k$  — истинные значения центра и радиуса  $k$ -й окружности,  $x_{pr}^k, y_{pr}^k, r_{pr}^k$  — предсказанные значения центра и радиуса  $k$ -й окружности.

Качество модели оценивается правдоподобием модели без учета априорного распределения:

$$\log p(\mathbf{y} | \mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{V}, \beta) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N \pi_k(\mathbf{x}_i, \mathbf{V}) \left[ -\frac{\beta}{2} (y_i - \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_i)^2 - \frac{1}{2} \log 2\pi + \frac{1}{2} \log \beta \right]. \quad (6.2)$$

Априорные распределения на параметры локальных моделей в эксперименте было задано следующим образом:

$$\mathcal{N}(\mathbf{w}_1|\mathbf{w}_1^0, \mathbf{I}), \quad \mathcal{N}(\mathbf{w}_2|\mathbf{w}_2^0, \mathbf{I}), \quad (6.3)$$

где  $\mathbf{w}_1^0 = [0, 0, 0.1]$ ,  $\mathbf{w}_2^0 = [0, 0, 2]$ , что указывает на концентричность окружностей и на различность радиусов.

**Синтетические данные с разным типом шума.** Для сравнения качества работы мультимodelей  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$  смеси экспертов с разными начальными предположениями был проведен вычислительный эксперимент на синтетических данных.

Вычислительный эксперимент проводится на синтетических выборках, которые получены при помощи генерации двух концентрических окружностей с разным уровнем шума. Выборка Synthetic 1 — выборка без шума, Synthetic 2 — выборка с шумом вблизи окружности, Synthetic 3 — выборка с шумом вблизи окружности, а также с равномерным шумом по всему изображению.

На рис. 2 показаны случайные результаты работы мультимodelей  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ . На всех изображениях обе модели обучались 50 итераций ЕМ-алгоритма. Мультимodelи  $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$  работают лучше мультимodelи  $\mathcal{M}_1$ , так как они восстанавливают окружности лучше. Качество прогноза посчитанное по формуле (6.1) представлены в табл. 1.

Таблица 1: Результаты работы мультимodelей на синтетических выборках

Выборка	$\mathcal{S}_{\mathcal{M}_1}$	$\mathcal{S}_{\mathcal{M}_2}$	$\mathcal{S}_{\mathcal{M}_3}$
Synthetic 1	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
Synthetic 2	0.6	$10^{-3}$	$10^{-3}$
Synthetic 3	0.6	$10^{-3}$	$10^{-3}$

**Процесс обучения на синтетических данных.** Проведен вычислительный эксперимент, для анализа свойств мультимodelей  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$  во время обучения. В качестве данных рассматривалась синтетическая выборка Synthetic 3.

На рис. 3 показана зависимость радиуса и центра окружности в зависимости от номера итерации. Мультимodelь  $\mathcal{M}_2$  с априорным распределением находит центры и радиусы окружностей в среднем лучше чем мультимodelь  $\mathcal{M}_1$  без задания априорного распределения. Мультимodelь  $\mathcal{M}_3$  с заданием регуляризатора является более устойчивой, чем мультимodelь  $\mathcal{M}_2$ , так как дисперсия восстановленных центров и радиуса окружностей меньше.

На рис. 4 показана зависимость правдоподобия мультимodelи (6.2) от номера итерации ЕМ-алгоритма. Правдоподобие модели на начальных этапах ЕМ-алгоритма растет быстрее в случае мультимodelей  $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$  чем в мультимodelи  $\mathcal{M}_1$ . После 20-й итерации все мультимodelи имеют одинаковое правдоподобие.



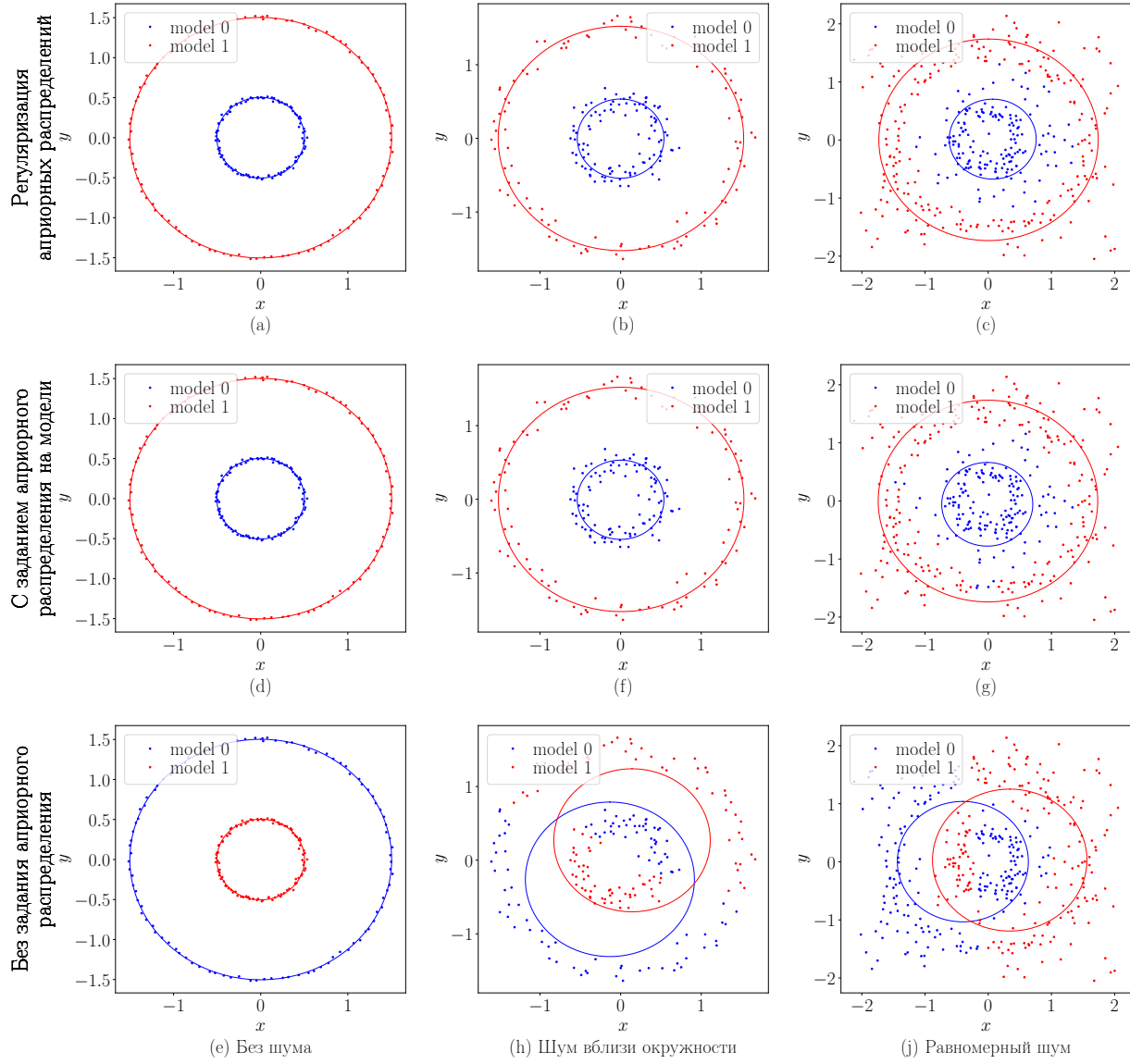


Рис. 2: Мультимодель в зависимости от разных априорных предположений и в зависимости от разного уровня шума: (a)–(c) модель с регуляризацией априорных распределений; (d)–(g) модель с заданными априорными распределениями на параметрах локальных моделей; (e)–(j) модель без заданных априорных предположений

На рис. 5–7 показан процесс обучения смеси экспертов для разных мультимоделей. На рис. 7 проиллюстрирована работа ЕМ–алгоритма для мультимодели  $\mathcal{M}_1$ , которая не находит окружности верно. Иллюстрация работы ЕМ–алгоритма для мультимоделей  $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$  показана на рис. 5–6. Мультимодели  $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$  находят обе окружности на изображении.

В ходе данного эксперимента показано, что задание априорных распределений

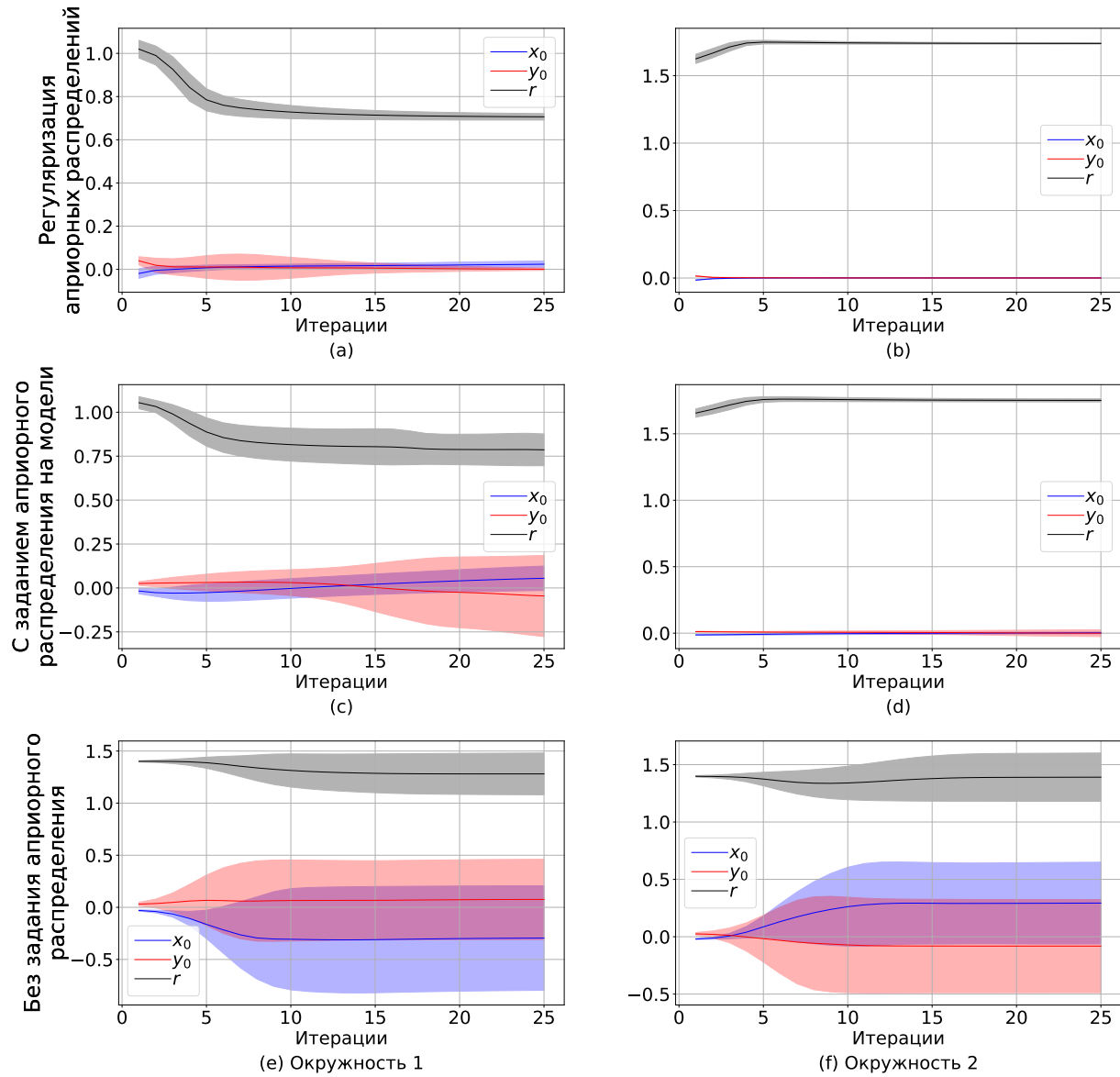


Рис. 3: График зависимости центра и радиуса окружностей от номера итерации: (a)–(b) модель с регуляризацией априорных распределений; (c)–(d) модель с заданными априорными распределениями на параметры моделей; (e)–(f) модель без задания априорных распределений

улучшает качество мультимодели, позволяя находить нужные окружности в среднем лучше, чем мультимодель без заданного априорного распределения на параметрах локальных моделей. Задание регуляризации априорных распределений позволяет улучшить устойчивость мультимодели, так как дисперсия центра и радиуса окружностей становится меньше. Также в эксперименте показано, что хоть и правдоподобие модели (4) для разных мультимodelей одинаковое, но качество предсказания окружностей

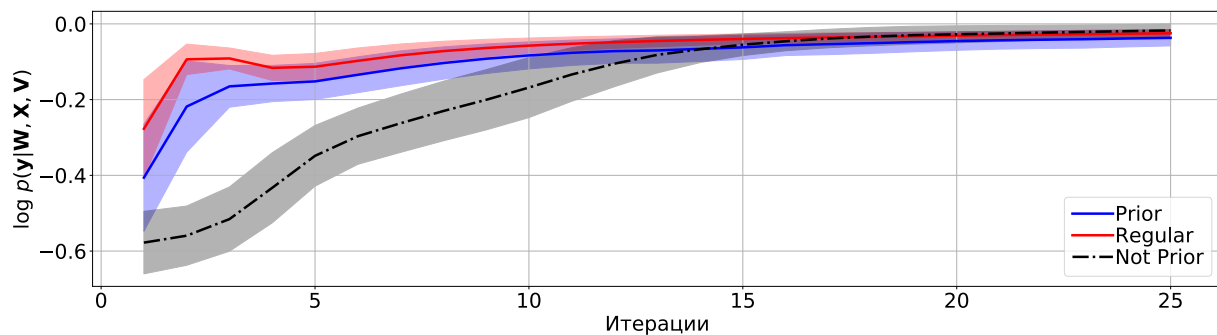


Рис. 4: График зависимости логарифма правдоподобия модели от номера итерации EM-алгоритма

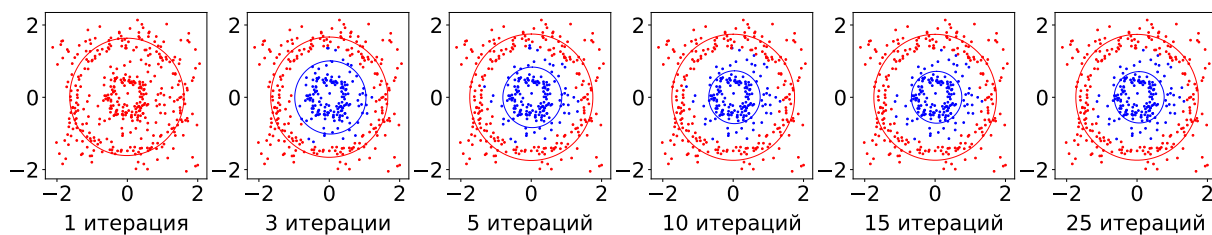


Рис. 5: Визуализация процесса обучения для мультимодели с заданной регуляризацией: от 1й итерации до 25й итерации

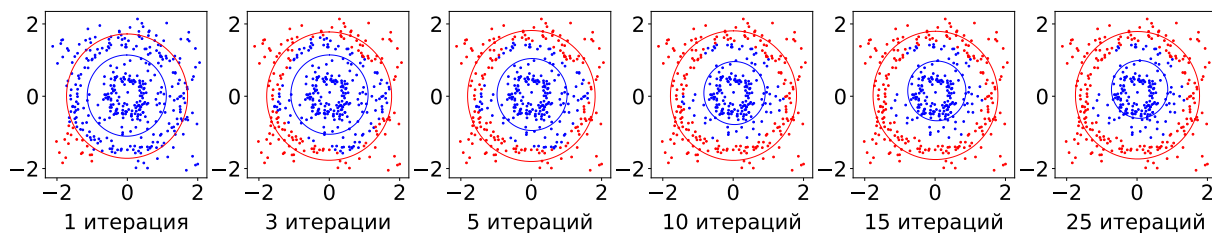


Рис. 6: Визуализация процесса обучения для мультимодели с заданным априорным распределением на параметрах локальных моделей: от 1й итерации до 25й итерации

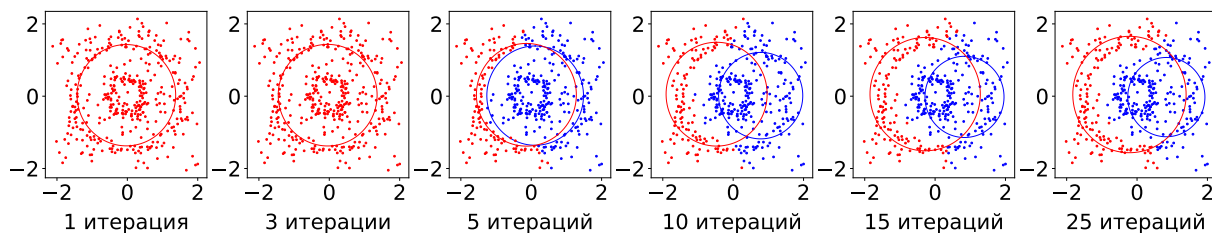


Рис. 7: Визуализация процесса обучения для мультимодели баз заданных априорных распределений: от 1й итерации до 25й итерации

разных мультимodelей является разным. В случае задания априорного распределения качество нахождения окружностей является лучше.

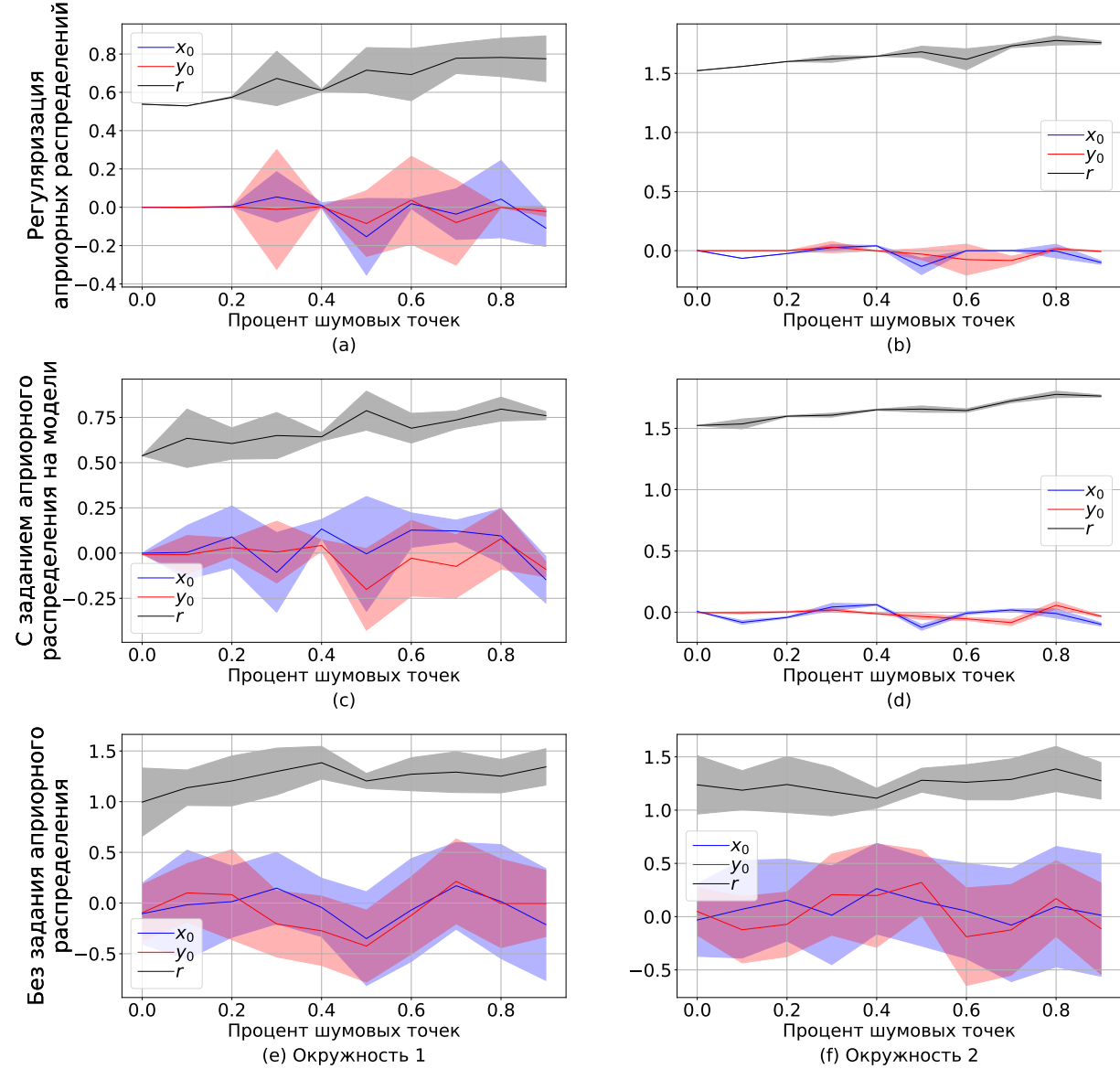


Рис. 8: График зависимости центра и радиуса окружностей от номера итерации: (а)–(b) модель с регуляризацией априорных распределений; (с)–(d) модель с заданными априорными распределениями на параметры моделей; (е)–(f) модель без задания априорных распределений

**Анализ мультимodelей в зависимости от уровня шума.** Проведен вычислительный эксперимент, для анализа свойств мультимodelей  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$  от уровня зашумленности. В качестве данных рассматривалась синтетическая выборка Synthetic 1

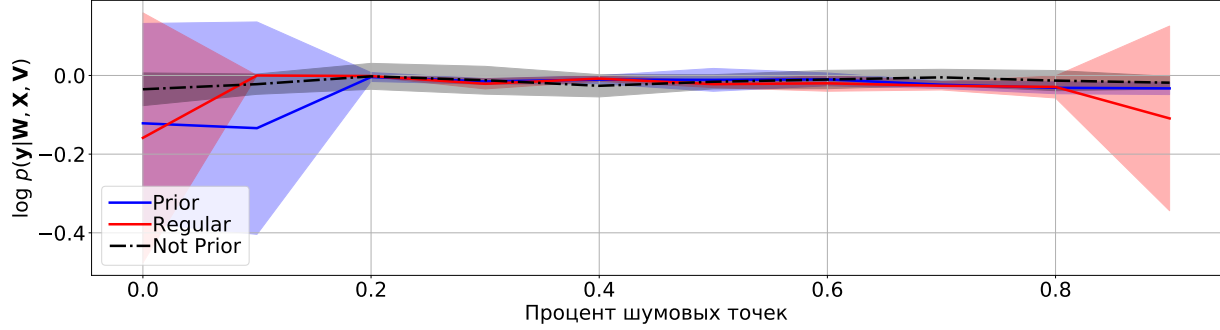


Рис. 9: График зависимости логарифма правдоподобия от уровня шума

с добавлением к ней разного уровня шума. Минимальный уровень шума равен 0, когда нету шумовых точек, а максимальный уровень шума равен 1, когда число шумовых точек равно числу точек обеих окружностей.

На рис. 8 показан график зависимости центра  $(x_0, y_0)$  и радиуса  $r$  окружностей от уровня шума. Видно, что радиус окружностей растет при увеличении уровня шума. Центры окружностей модели  $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$  в среднем находят верно, но модель с регуляризацией  $\mathcal{M}_3$  имеет меньшую дисперсию. Модель  $\mathcal{M}_1$  имеет худший результат, так как имеет большую дисперсию по всем элементам:  $x_0, y_0, r$ .

На рис. 9 показан график зависимости логарифма правдоподобия модели (6.2). Видно, что все модели имеют одинаковое правдоподобие модели, но как показано на рис. 8 качество предсказания окружностей у разных моделей различается.

В данной части эксперимента показано, что наиболее устойчивой является модель  $\mathcal{M}_3$  с регуляризацией априорных распределений.

**Реальные данные.** Проведен эксперимент на реальной выборке. В качестве данных рассматривались глаза, а точнее их предобработанное бинарное изображение с выделенными границами радужки и роговицы. Проводится анализ качества предсказания моделей  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ .

На рис. 10 показан результат работы разных мультимodelей. Мультимodelь  $\mathcal{M}_1$  не верно находит меньшую окружность. Мультимodelи  $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$  одинаково хорошо находят обе окружности.

На рис. 11-13 показан процесс оптимизации мультимodelей. Показано изменение предсказания окружностей мультимodelями в процессе обучения. На рис. 11 показан процесс оптимизации параметров для мультимodelи  $\mathcal{M}_1$  без априорных знаний. На рис. 12 показан процесс оптимизации параметров для мультимodelи  $\mathcal{M}_2$ , в которой задано априорное распределение на параметры локальных моделей. На рис. 13 показан процесс оптимизации параметров для мультимodelи  $\mathcal{M}_3$  с регуляризацией априорных распределений на параметрах локальных моделей.

В данной части эксперимента показано, что на реальных данных мультимodelи  $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$  с заданными априорными распределениями и регуляризацией являются

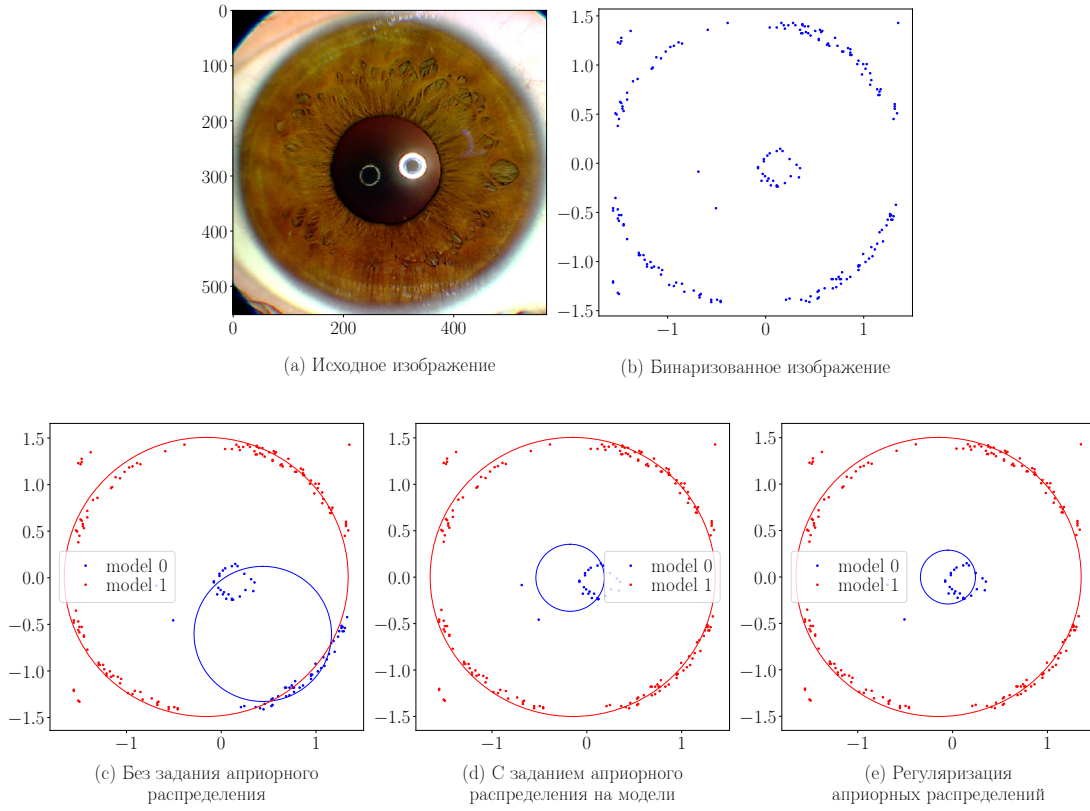


Рис. 10: Мультимодель в зависимости от разных априорных предположений на реальном изображении: (а) исходное изображение; (b) бинаризованное изображение; (с) мультимодель без априорных предположений; (d) мультимодель с априорными распределениями на параметрах локальных моделей; (е) мультимодель с регуляризацией априорных распределений параметров локальных моделей

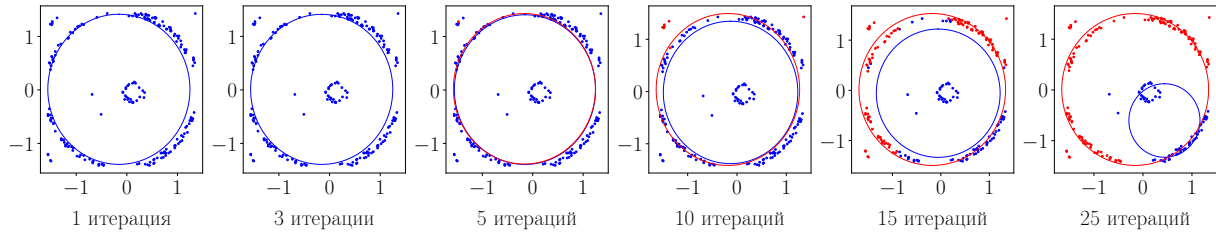


Рис. 11: Визуализация процесса обучения для мультимодели без априорных предположений: от 1й итерации до 15й итерации

более точными в определении окружностей чем мультимодель  $\mathfrak{M}_2$  без априорных распределений.

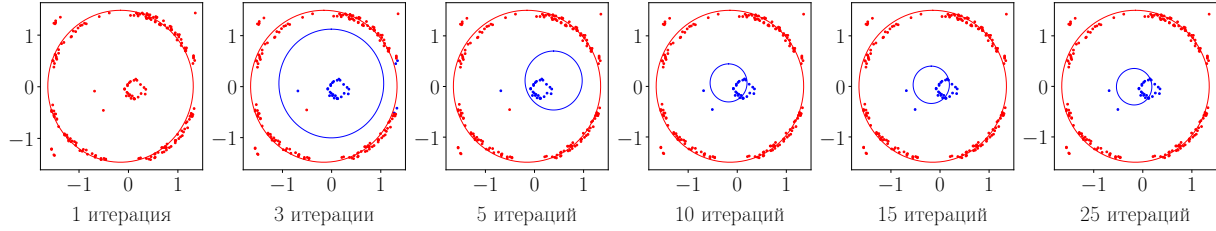


Рис. 12: Визуализация процесса обучения для мультимодели с априорным распределением на параметрах локальных моделей: от 1й итерации до 15й итерации

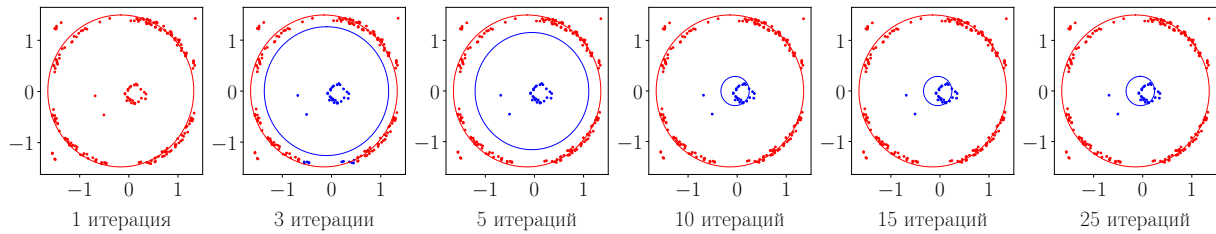


Рис. 13: Визуализация процесса обучения для мультимодели с заданной регуляризацией: от 1й итерации до 15й итерации

## 7 Заключение

В данной работе проведено сравнение мультимodelей в случае, когда было задано априорное распределение параметров каждой модели внутри мультимodelи и в случае, когда априорного распределения не было. В качестве данных использовались изображения концентрических окружностей с разным уровнем шума. Для поиска окружностей использовались линейные модели. В качестве шлюзовой функции использовалась двухслойная нейросеть.

Как показано в эксперименте в случае, когда введены априорные знания на линейные модели, мультимodel является более точной, так как вернее находит окружности на изображениях.

Также был проведен эксперимент по заданию регуляризации на априорные распределения параметров локальных моделей. В эксперименте показано, что в случае, когда регуляризация задана мультимodel находит окружности более устойчиво.

В ходе эксперимента было показано, что модель, которая рассматривалась в работе является чувствительной к выбросам. Для решения данной проблемы предлагается рассматривать не только локальные модели, которые описывают окружности, но также и модели, которые описывают шум.

В дальнейшем планируется улучшить мультимodel при помощи задания априорного распределения на шлюзовую функцию. Планируется рассмотреть в качестве моделей не только модели, которые описывают данные, а также модель, которая отвечает за шум в данных. Предполагается, что вероятность шума мала, поэтому важно задать априорного распределение, которое учитывало бы этот факт.

## Список литературы

- [1] *Chen Tianqi, Guestrin Carlos* XGBoost: A Scalable Tree Boosting System // KDD '16 Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. 2016.
- [2] *Chen Xi, Ishwaran Hemant* Random Forests for Genomic Data Analysis // Genomics. 2012. Issues. 99, No 6. pp. 323–329.
- [3] *Yuksel Seniha Esen, Wilson Joseph N., Gader Paul D* Twenty Years of Mixture of Experts // IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. 2012. Issues. 23, No 8. pp. 1177–1193.
- [4] *Noam Shazeer, Azalia Mirhoseini, Krzysztof Maziarz* Outrageously large neural networks: the sparsely-gated mixture-of-experts layer // ICLR, 2017.
- [5] *Rasmussen Carl Edward, Ghahramani Zoubin* Infinite Mixtures of Gaussian Process Experts // Advances in Neural Information Processing Systems 14. 2002. pp. 881–888.
- [6] *M. I. Jordan* Hierarchical mixtures of experts and the EM algorithm // Neural Comput., vol. 6, no. 2, pp. 181–214, 1994.
- [7] *C. A. M. Lima, A. L. V. Coelho, F. J. Von Zuben* Hybridizing mixtures of experts with support vector machines: Investigation into nonlinear dynamic systems identification // Inf. Sci., vol. 177, no. 10, pp. 2049–2074, 2007.
- [8] *L. Cao* Support vector machines experts for time series forecasting // Neurocomputing, vol. 51, pp. 321–339, Apr. 2003.
- [9] *A. P. Dempster, N. M. Laird and D. B. Rubin* Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), Vol. 39, No. 1 pp. 1–38, 1977.
- [10] *M. I. Jordan, R. A. Jacobs* Hierarchies of adaptive experts // in Advances in Neural Information Processing Systems. Cambridge, MA: MIT Press, 1991, pp. 985–992.

## А Постановка задачи нахождения параметров эллипса

Задано бинарное изображение:

$$\mathbf{M} \in \{0, 1\}^{m_1 \times m_2}, \quad (\text{A.1})$$

где 0 отвечает черной точке — изображения, 1 — белой точке фона.



По изображению  $\mathbf{M}$  строится выборка  $\mathbf{C}$ , элементами которой являются координаты  $x_i, y_i$  белых точек на картинке:

$$\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times 2}, \quad (\text{A.2})$$

где  $N$  — число черных точек на изображении  $\mathbf{M}$ .

Обозначим  $x_0, y_0$  — центр эллипса, который требуется найти на бинарном изображении  $\mathbf{M}$ , а  $a, b$  его коэффициенты вдоль координат. Элементы выборки  $(x_i, y_i) \in \mathbf{C}$  являются геометрическим местом точек, которое заданно уравнением эллипса:

$$(x_i - x_0)^2 + \frac{a^2}{b^2} (y_i - y_0)^2 = a^2. \quad (\text{A.3})$$

Раскрыв скобки получим уравнение

$$(2x_0) \cdot x_i + \left( \frac{2y_0 a^2}{b^2} \right) \cdot y_i + \left( -\frac{a^2}{b^2} \right) y_i^2 + \left( a^2 - x_0^2 - \frac{a^2}{b^2} y_0^2 \right) \cdot 1 = x_i^2. \quad (\text{A.4})$$

Получаем задачу линейной регрессии для нахождения параметров окружности:

$$\mathbf{X}\mathbf{w} \approx \mathbf{y}, \quad \mathbf{X} = \text{concat} \left[ \mathbf{C}, [y_1^2, y_2^2, \dots, y_N^2]^\top, \mathbf{1} \right], \quad \mathbf{y} = [x_1^2, x_2^2, \dots, x_N^2]^\top, \quad (\text{A.5})$$

где найденные оптимальные параметры линейной регрессии  $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3, w_4]^\top$  восстанавливают параметры окружности:

$$x_0 = \frac{w_1}{2}, \quad y_0 = -\frac{w_2}{2w_3}, \quad a^2 = w_4 - \frac{w_1}{2} - \frac{w_2^2}{4w_3}, \quad b^2 = -\frac{1}{w_3} \left( w_4 - \frac{w_1}{2} - \frac{w_2^2}{4w_3} \right). \quad (\text{A.6})$$

Решение уравнения (A.5) находит параметры единственного эллипса на изображении.