

© 2022 г. А.И. БАЗАРОВА (bazarova.ai@phystech.edu)  
(Московский физико-технический институт),  
А.В. ГРАБОВОЙ (grabovoy.av@phystech.edu)  
(Московский физико-технический институт),  
В.В. СТРИЖОВ, д-р физ.-мат. наук (strijov@phystech.edu)  
(Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН)

## Анализ свойств вероятностных моделей в задачах обучения с экспертом<sup>1</sup>

Данная работа посвящена построению интерпретируемых моделей машинного обучения. Решается задача аппроксимации набора фигур на контурном изображении. Вводятся предположения, что фигуры являются кривыми второго порядка. При аппроксимации фигур используются информация о типе, расположении и форме кривых, а также о множестве их возможных преобразований. Такая информация называется *экспертной*, а метод машинного обучения, основанный на экспертной информации, называется *обучение с экспертом*. Предполагается, что набор фигур аппроксимируется набором *локальных моделей*. Каждая локальная модель, основанная на экспертной информации, аппроксимирует одну фигуру на контурном изображении. Для построения моделей предлагается отображать кривые второго порядка в пространство признаков, в которой каждая локальная модель является линейной. Таким образом, кривые второго порядка аппроксимируются набором линейных моделей. В вычислительном эксперименте рассматривается задача аппроксимации радужной оболочки глаза на контурном изображении.

*Ключевые слова:* смесь экспертов; экспертное обучение; линейные модели; интерпретируемые модели.

### 1. Введение

Современные решения задачи классификации изображений на основе сетей глубокого обучения ResNet, VGG, Intercept [2] представляют собой плохо интерпретируемые модели [1]. В [3, 4] показано, что сети глубокого обучения являются не устойчивыми даже к небольшому шуму в данных [5].

В данной работе предлагается метод *обучение с экспертом*. Метод предполагает использование экспертной информации для повышения качества аппроксимации, а также для получения интерпретируемых моделей машинного обучения. Предметные знания экспертов о данных называются *экспертная информация*. Предполагается, что использование экспертной информации позволяет аппроксимировать выборку

---

<sup>1</sup>Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований в рамках научных проектов 20-37-90050, 19-07-01155 и проекта Национальной Технологической Инициативы 13/1251/2018.

простыми интерпретируемыми моделями, такими как линейные модели. Метод машинного обучения, учитывающий экспертные знания при построении моделей, называется *обучение с экспертом*. В данной работе решается задача аппроксимации кривых второго порядка на контурном изображении. В работе анализируются кривые второго порядка, так как они описываются линейными моделями. Параметры кривых второго порядка необходимо восстановить в задаче распознавания радужной оболочки глаза [6–8], в задаче описания трека частицы в адронном коллайдере [9]. Экспертная информация о кривой второго порядка отображает точки на плоскости в новое признаковое описание объекта. Каждая кривая аппроксимируется одной линейной моделью. Модель, аппроксимирующая кривую, называется *локальной моделью*. Для аппроксимации всего контурного изображения требуется аппроксимация нескольких кривых второго порядка с использованием локальных моделей. Вводятся следующие ограничения на изображения: а) изображение состоит только из кривых второго порядка; б) изображение аппроксимируется небольшим числом кривых второго порядка; в) известно число и тип кривых на изображении.

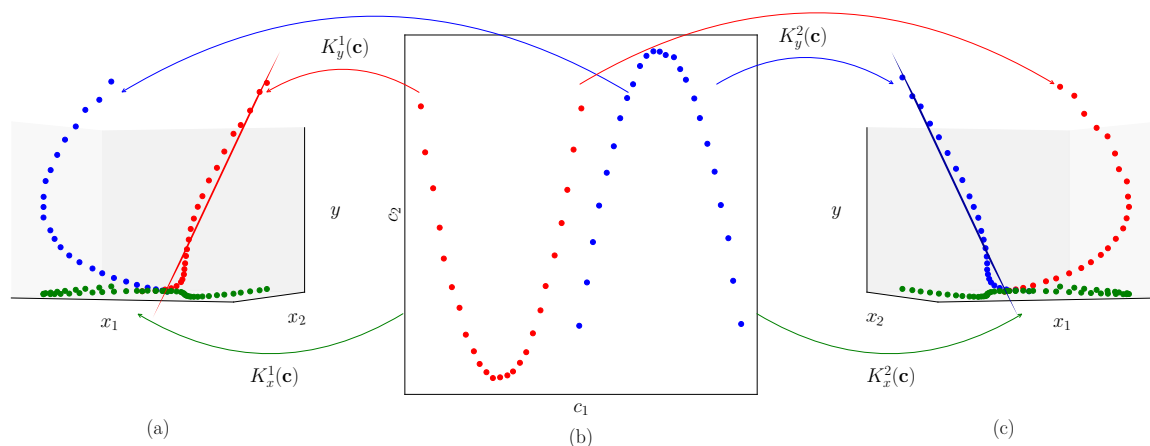


Рис. 1. Визуализация экспертной информации в случае с двумя экспертами: а) экспертная информация первого эксперта; б) исходные данные; в) экспертная информация второго эксперта

На рис. 1 показан пример кривых второго порядка, а также экспертная информация о кривых. Рассматривается пример двух кривых, которые задаются своим цветом. На центральном изображении показаны точки лежащие на кривых, а на рисунках справа и слева представлены экспертные признаковые описания рассмотренных кривых. В каждом из экспертных признаковых описаний получаем, что одна из кривых аппроксимируются линейной моделью, а вторая является шумом относительно построенной линейной модели. Отображение  $K_x^1(\mathbf{c})$ ,  $K_x^2(\mathbf{c})$ ,  $K_y^1(\mathbf{c})$ ,  $K_y^2(\mathbf{c})$  описываются на основе экспертной информации. На рис. 1 слева показана экспертная информация о первом эксперте. Используя эту информацию, первая кривая аппроксимируется линейной моделью, а вторая кривая представляет собой шум. На рис. 1 справа показана экспертная информация второго эксперта. Используя эту информацию, вторая кривая аппроксимируется линейной моделью, а первая кривая представляет собой шум.

При аппроксимации нескольких кривых на одном контурном изображении строится мультимодель. Примером мультимоделей является случайный лес [10], бустинг

деревьев [11], смесь экспертов [12]. В данной работе в качестве мультимодели рассматривается смесь экспертов. Смесь экспертов — это мультимодель, которая линейно взвешивает локальные модели, которые аппроксимируют часть выборки. Значения весовых коэффициентов зависят от объекта, для которого делается прогноз. Для решения задачи используется вариационный ЕМ-алгоритм [13–15, 24]. Смесь экспертов имеет множество применений в ряде приложений. В [16] решается задача классификации текстов. В [17–23] смесь экспертов используется для прогнозирования временных рядов, для распознавания речи, распознавания повседневной деятельности человека и прогнозирования стоимости ценных бумаг. В [14] рассматривалась смесь экспертов для решения задачи распознавания рукописных цифр на изображениях.

В качестве примера рассматривается задача аппроксимации изображения радужной оболочки глаза. На рис. 2 показан пример изображения, которое необходимо аппроксимировать. В данной работе рассматривается обработанное изображение в виде контурного изображения.

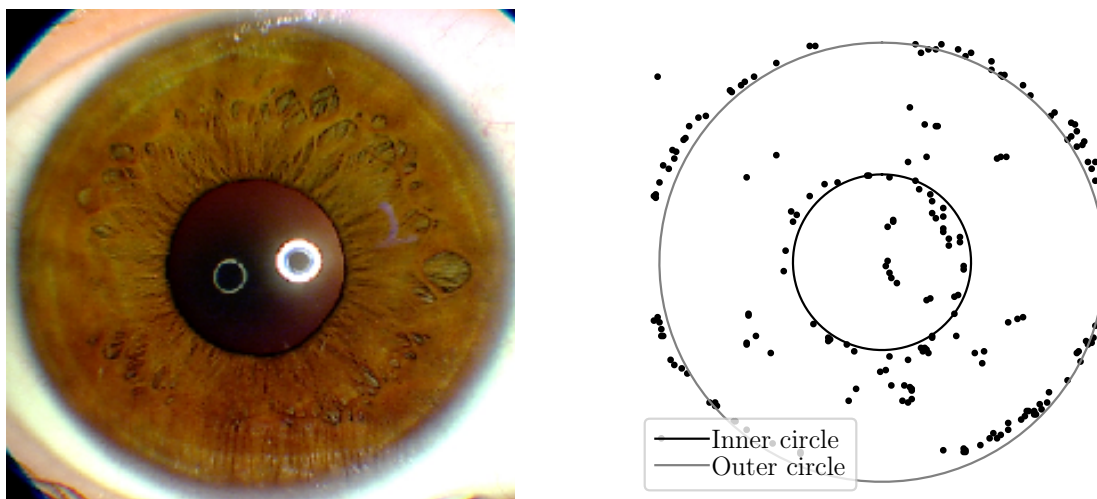


Рис. 2. Пример изображения радужной оболочки глаза и его контурное представление. Слева: изображение радужной оболочки глаза. Справа: контурное изображение радужной оболочки и аппроксимирующие заданное изображение окружности

Для задачи аппроксимации радужной оболочки используется экспертная информация: радужная оболочка глаза аппроксимируется двумя концентрическими окружностями. Экспертная информация используется для построения описания признаков точек плоскости, а также для построения регуляризатора в функции оптимизации. Часть функции ошибок для оптимизации, использующая экспертную информацию, называется регуляризатором. Таким образом, информация о том, что изображение являются окружностями задается видом признакового описания, а информация о том, что окружности концентрические задается с помощью специального регуляризатора.

Вычислительный эксперимент анализирует качество аппроксимации контурного изображения в зависимости от экспертной информации и уровня шума в синтетически сформированных данных. Проведен анализ качества аппроксимации радужной

оболочки в зависимости от объема экспертной информации, которая использовалась для построения модели. Каждое аппроксимированное изображение представляет собой отдельный набор точек, которые необходимо аппроксимировать.

## 2. Постановка задачи восстановления параметров кривых второго порядка на изображении

Задано бинарное изображение:

$$\mathbf{M} \in \{0, 1\}^{m_1 \times m_2},$$

где 1 соответствует черной точке изображения, а 0 соответствует белой точке фона. Используя изображение  $\mathbf{M}$  строится выборка  $\mathbf{C}$ , элементами которой являются координаты  $(x_i, y_i)$  черных точек:

$$\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times 2}.$$

Каждый эксперт предполагает, что изображение состоит из кривой второго порядка  $\Omega$ . Пусть для множества точек  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times 2}$ , образующих кривую  $\Omega$ , задана экспертная информация о фигуре  $E(\Omega)$ . Множество  $E(\Omega)$  состоит из ожидаемого экспертом образа  $\Omega$  и множества его допустимых преобразований. На основе экспертного описания введем отображения в задачу аппроксимации:

$$(1) \quad K_x(E(\Omega)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad K_y(E(\Omega)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

где  $K_x$  — отображение объектов в признаковое описание объектов,  $n$  — число признаков, а  $K_y$  — отображение в целевую переменную для аппроксимации. Применяя отображения  $K_x, K_y$  для выборки  $\mathbf{C}$  поэлементно получаем:

$$(2) \quad K_x(E(\Omega), \mathbf{c}) = \mathbf{x}, \quad K_y(E(\Omega), \mathbf{c}) = y,$$

где  $\mathbf{c} = (x_i, y_i)$  точка из множества точек  $\mathbf{C}$ .

Применяя отображения (2) к исходному множеству точек  $\mathbf{C}$ , получаем выборку

$$(3) \quad \mathcal{D} = \{(\mathbf{x}, y) \mid \forall \mathbf{c} \in \mathbf{C} \mathbf{x} = K_x(\mathbf{c}), y = K_y(\mathbf{c})\}.$$

Получаем, что исходная задача аппроксимации кривой  $\Omega$  сводится к аппроксимации выборки  $\mathcal{D}$ . В работе предполагается, что выборка  $\mathcal{D}$  аппроксимируется линейной моделью:

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \mathbf{x}^T \mathbf{w},$$

где  $\mathbf{w}$  — вектор параметров для аппроксимации.

Для нахождения оптимального вектора параметров  $\hat{\mathbf{w}}$  решается оптимизационная задача:

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n} \sum_{(\mathbf{x}, y) \in \mathcal{D}} \|g(\mathbf{x}, \mathbf{w}) - y\|_2^2.$$

Задача аппроксимации исходной кривой  $\Omega$  сводится к решению задачи линейной регрессии, т.е. к нахождению компонент вектора  $\hat{\mathbf{w}}$ .

В случае, когда на изображении  $K$  кривых второго порядка  $\Omega_1, \dots, \Omega_K$ , где для каждой задана экспертная информация  $E_k = E(\Omega_k)$ ,  $k \in \{1, \dots, K\}$ . Получаем задачу построения мультимодели, которая называется смесью  $K$  экспертов.

*Определение 1. Назовем мультимодель  $f$  смесью  $K$  экспертов*

$$f = \sum_{k=1}^K \pi_k(\mathbf{x}, \mathbf{V}) g_k(\mathbf{w}_k), \quad \pi_k(\mathbf{x}, \mathbf{V}) : \mathbb{R}^{n \times |\mathbf{V}|} \rightarrow [0, 1], \quad \sum_{k=1}^K \pi_k(\mathbf{x}, \mathbf{V}) = 1,$$

где  $g_k$  — локальная модель, называемая экспертом. Вектор  $\mathbf{x}$  — признаковое описание объекта,  $\pi_k$  — шлюзовая функция, вектор  $\mathbf{w}_k$  — параметры локальной модели,  $\mathbf{V}$  являются параметрами шлюзовой функции.

Для каждой кривой второго порядка  $\Omega_k$  заданы отображения (1). Введем обозначения:  $K_x^k(\mathbf{c}) = K_x(\Omega_k, \mathbf{c})$  и  $K_y^k(\mathbf{c}) = K_y(\Omega_k, \mathbf{c})$ . Используя локальные линейные модели  $g_k$  строится мультимодель  $f$ , описывающая кривые  $\Omega_1, \dots, \Omega_K$  на изображении  $\mathbf{M}$ :

$$(4) \quad f = \sum_{\mathbf{c} \in \mathbf{C}} \sum_{k=1}^K \pi_k(\mathbf{c}, \mathbf{V}) g_k(K_x^k(\mathbf{c}), \mathbf{w}_k),$$

где  $\pi_k$  — шлюзовая функция. В работе рассматривается случай, когда  $\mathbf{x} = K_x^1(\mathbf{c}) = \dots = K_x^K(\mathbf{c})$ . В этом случае выражение (4) переписывается в виде:

$$f = \sum_{\mathbf{c} \in \mathbf{C}} \sum_{k=1}^K \pi_k(\mathbf{x}, \mathbf{V}) g_k(\mathbf{x}, \mathbf{w}_k),$$

где шлюзовая функция  $\pi_k$  имеет вид:

$$\pi_k(\mathbf{x}, \mathbf{V}) : \mathbb{R}^{n \times |\mathbf{V}|} \rightarrow [0, 1], \quad \sum_{k=1}^K \pi_k(\mathbf{x}, \mathbf{V}) = 1,$$

где  $\mathbf{V}$  — параметры функции шлюза, а  $g_k$  — локальная модель.

В работе рассматривается следующий вид шлюзовой функции:

$$\pi(\mathbf{x}, \mathbf{V}) = \text{softmax}(\mathbf{V}_1^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{V}_2^T \mathbf{x})),$$

где  $\mathbf{V} = \{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2\}$  — параметры шлюзовой функции,  $\mathbf{V}_1 \in \mathbb{R}^{p \times k}$ ,  $\mathbf{V}_2 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ .

Для нахождения оптимальных параметров мультимодели решается оптимизационная задача:

$$(5) \quad \mathcal{L} = \sum_{(\mathbf{x}, y) \in \mathcal{D}} \sum_{k=1}^K \pi_k(\mathbf{x}, \mathbf{V}) (y - \mathbf{w}_k^T \mathbf{x})^2 + R(\mathbf{V}, \mathbf{W}, E(\Omega)) \rightarrow \min_{\mathbf{V}, \mathbf{W}},$$

где  $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k]$  — параметры локальных моделей,  $R(\mathbf{V}, \mathbf{W}, E(\Omega))$  — параметры регуляризации, основанные на экспертной информации.

### 3. Построение признакового описания фигур

**Единое пространство для кривых второго порядка.** Произвольная кривая второго порядка, главная ось которой не параллельна оси ординат, задается уравнением:

$$x^2 = B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F',$$

где на коэффициенты  $B', C'$  накладываются ограничения, зависящие от типа кривой. Выражение (2) для кривой второго порядка принимает вид:

$$K_x(\mathbf{c}_i) = [x_i y_i, y_i^2, x_i, y_i, 1], \quad K_y(\mathbf{c}_i) = x_i^2,$$

откуда получаем задачу линейной регрессии для восстановления параметров  $B', C', D', E', F'$  по заданной выборке.

**Окружность.** В качестве частного случая кривой второго порядка рассматривается окружность. Пусть  $(x_0, y_0)$  — центр окружности, которую требуется восстановить на бинарном изображении  $\mathbf{M}$ , а  $r$  — ее радиус. Элементы выборки  $(x_i, y_i) \in \mathbf{C}$  представляют собой геометрическое место точек, которое аппроксимируется уравнением окружности:

$$(2x_0) \cdot x_i + (2y_0) \cdot y_i + (r^2 - x_0^2 - y_0^2) \cdot 1 = x_i^2 + y_i^2.$$

Тогда выражение (2) принимают следующий вид:

$$K_x(\mathbf{c}_i) = [x_i, y_i, 1] = \mathbf{x}, \quad K_y(\mathbf{c}_i) = x_i^2 + y_i^2 = y.$$

Получаем задачу линейной регрессии (3). Компоненты вектора  $\mathbf{w} = [w_0, w_1, w_2]^T$ , восстанавливают параметры окружности:

$$x_0 = \frac{w_0}{2}, \quad y_0 = \frac{w_1}{2}, \quad r = \sqrt{w_2 + x_0^2 + y_0^2}.$$

### 4. Композиция фигур

Для построения композиции фигур используется уравнение (5), которое принимает вид:

$$\mathcal{L} = \sum_{\mathbf{c} \in \mathbf{C}} \sum_{k=1}^K \pi_k(\mathbf{c}, \mathbf{V}) (K_y^k(\mathbf{c}) - \mathbf{w}_k^T K_x^k(\mathbf{c}))^2 + R(\mathbf{V}, \mathbf{W}, E(\Omega)) \rightarrow \min_{\mathbf{V}, \mathbf{W}},$$

где  $K_x^k, K_y^k$  экспертное представление  $k$ -го эксперта. Предполагая, что все кривые на изображении описываются одним описанием признаковым описанием  $\mathbf{x} = K_x^1(\mathbf{c}) = \dots = K_x^K(\mathbf{c})$ ,  $y = K_y^1(\mathbf{c}) = \dots = K_y^K(\mathbf{c})$ , получаем оптимизационную задачу:

$$(6) \quad \mathcal{L} = \sum_{(\mathbf{x}, y) \in \mathcal{D}} \sum_{k=1}^K \pi_k(\mathbf{x}, \mathbf{V}) (y - \mathbf{w}_k^T \mathbf{x})^2 + R(\mathbf{V}, \mathbf{W}, E(\Omega)) \rightarrow \min_{\mathbf{V}, \mathbf{W}},$$

где регуляризатор  $R$  учитывает дополнительные ограничения параметров локальных моделей. Для решения задачи оптимизации (6) используется ЕМ-алгоритм описанный в работе [24].

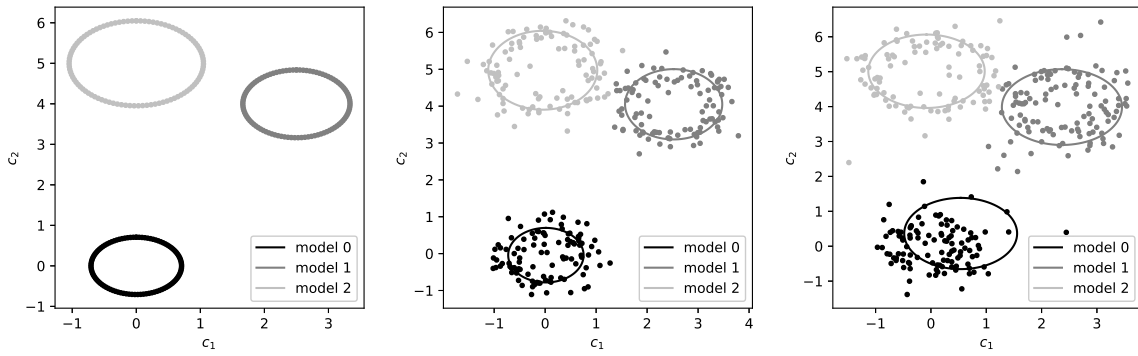


Рис. 2. Мультимодель в зависимости от уровня шума в выборке. Слева направо: окружности без шума; шум в радиусе круга; шум в радиусе круга, шум по всему изображению

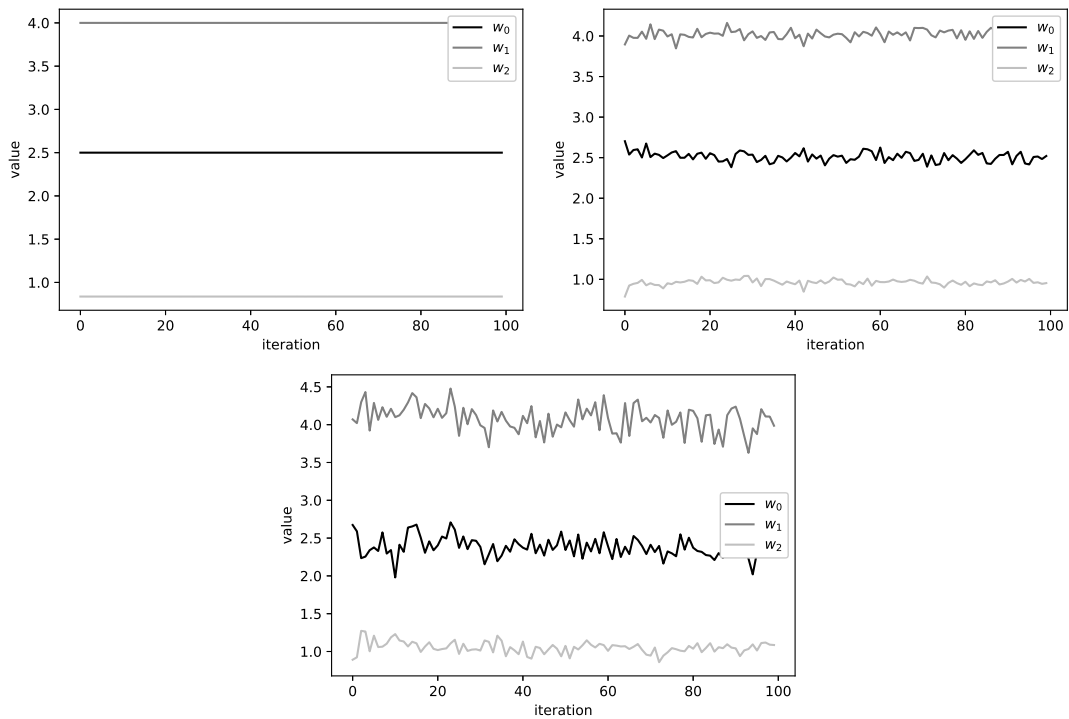


Рис. 3. Зависимость параметров  $r$ ,  $x_0$  и  $y_0$  от номера итерации в зависимости от уровня шума в выборке. Слева направо: окружности без шума; шум в радиусе круга; шум в радиусе круга, шум по всему изображению

## 5. Вычислительный эксперимент

Проведен вычислительный эксперимент по анализу качества аппроксимации кривых второго порядка на изображении. Эксперимент разделен на несколько частей. Первая часть описывает эксперимент с несколькими окружностями на изображении. Во второй части анализируется сходимость метода в зависимости от уровня шума в данных и от заданной экспертной информации. В третьей части проводится эксперимент по аппроксимации радужной оболочки глаза.

### 5.1. Эксперимент по восстановлению параметров окружности

В этой части эксперимента анализируется аппроксимация нескольких кривых второго порядка предложенной мультимodelью. Аппроксимируется сгенерированная синтетическая выборка. Выборка состоит из трех произвольных непересекающихся окружностей. К окружностям добавлен шум. Шум добавлялся к каждой точке окружности по отдельности, а также в выборку добавлялись случайные точки, не относящиеся к окружностям.

На рис. 3 показан результат построения ансамбля локальных аппроксимирующих моделей. Каждая локальная модель аппроксимирует одну окружность. Видно, что при добавлении шума качество аппроксимации падает. На рис. 4 показан график зависимости радиуса окружностей  $r$  и их центров  $(x_0, y_0)$  от номера итерации.

### 5.2. Анализ качества аппроксимации для выборки с разным уровнем шума

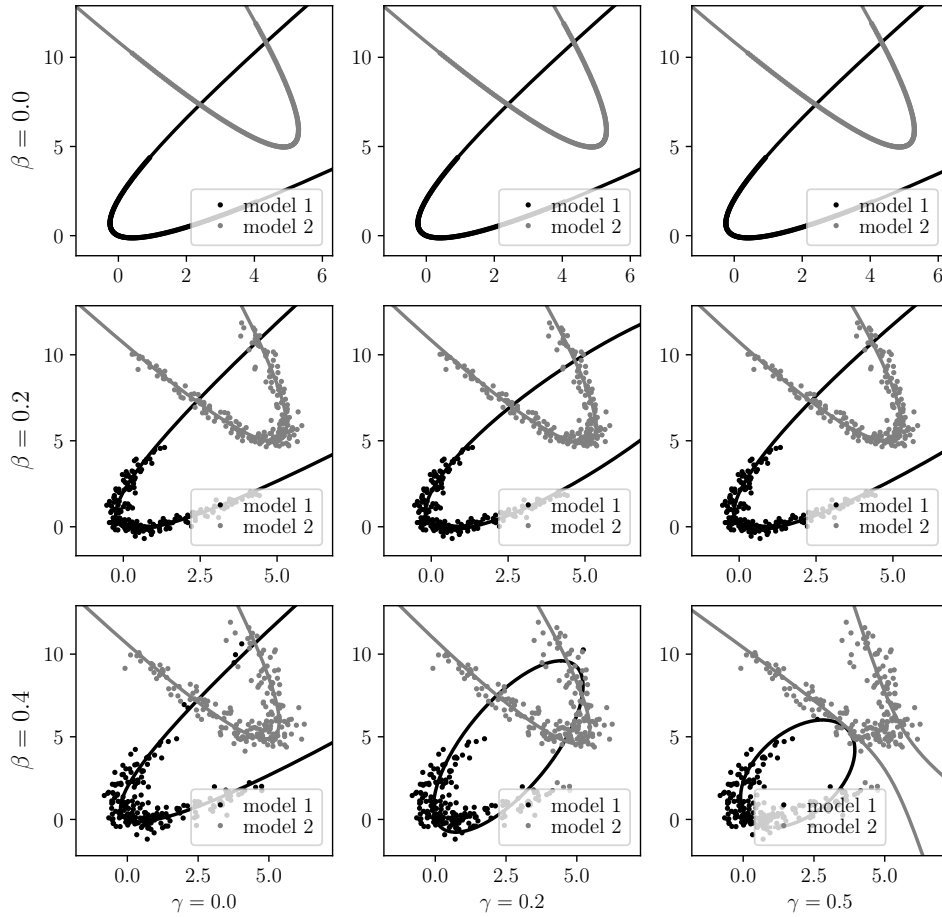


Рис. 4. Результат аппроксимации данных с разным уровнем шума  $\beta$  и по дисперсии априорного распределения  $\gamma$

В этой части эксперимента анализируется качество аппроксимации  $S$  в зависимости от уровня шума  $\beta$  в данных и от параметра априорных распределений  $\gamma$ . Выборка сгенерирована следующим образом: сначала случайным образом выбираются



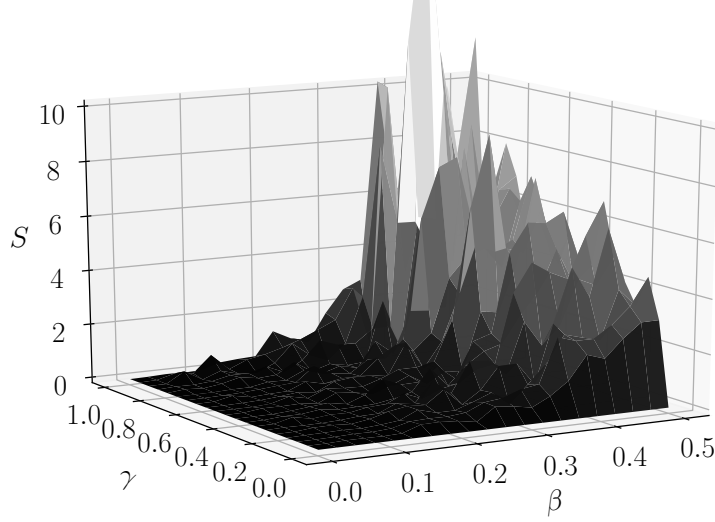


Рис. 5. Зависимость моделей от уровня шума  $\beta$  в данных, а также от дисперсии априорного распределения  $\gamma$

два вектора параметров  $\mathbf{w}_1^{\text{true}}$  и  $\mathbf{w}_2^{\text{true}}$  — коэффициенты двух парабол. Векторы  $\mathbf{w}_1^{\text{true}}$  и  $\mathbf{w}_2^{\text{true}}$  используются для генерации точек  $x_i$  и  $y_i$  с добавлением нормального шума  $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \beta)$ . При обучении мультимодели учитывается априорное распределение параметров  $\mathbf{w}_1 \sim \mathcal{N}(\mathbf{w}_1^{\text{true}}, \gamma \mathbf{I})$ ,  $\mathbf{w}_2 \sim \mathcal{N}(\mathbf{w}_2^{\text{true}}, \gamma \mathbf{I})$ .

Рассматривается критерий качества:

$$S = \|\mathbf{w}_1^{\text{pred}} - \mathbf{w}_1^{\text{true}}\|_2^2 + \|\mathbf{w}_2^{\text{pred}} - \mathbf{w}_2^{\text{true}}\|_2^2,$$

где  $\mathbf{w}_1^{\text{pred}}$  аппроксимация вектора параметров первой локальной модели, а  $\mathbf{w}_2^{\text{pred}}$  аппроксимация вектора параметров второй локальной модели.

На рис. 6 показана зависимость критерия качества  $S$  от уровня шума  $\beta$  и параметра априорного распределения  $\gamma$ . Из графика видно, что при малом уровне шума  $\beta$  качество аппроксимации не зависит от параметра  $\gamma$ , а при увеличении шума  $\beta$  качество аппроксимации  $S$  уменьшается.

На рис. 5 показан пример работы алгоритма с разными параметрами  $\beta$  и  $\gamma$ . Видно, что в отсутствие шума  $\beta$  обе локальные модели аппроксимируют выборку корректно. С ростом уровня шума качество аппроксимации падает: при  $\beta = 0,2$  с ростом  $\gamma$  первая локальная модель из параболы преобразовывается в эллипс; для  $\beta = 0,4$  с ростом  $\gamma$  первая локальная модель из параболы преобразовывается в эллипс, а вторая модель из параболы в гиперболу.

### 5.3. Аппроксимация радужки глаза

Анализ качества аппроксимации проводится для задачи аппроксимации радужной оболочки глаза на изображении. Радужная оболочка глаза состоит из двух концентрических окружностей, поэтому рассматривается мультимодель, состоящая из двух экспертов: каждый эксперт аппроксимирует одну из окружностей. В вычислительном эксперименте сравнивается качество аппроксимации окружностей в случае

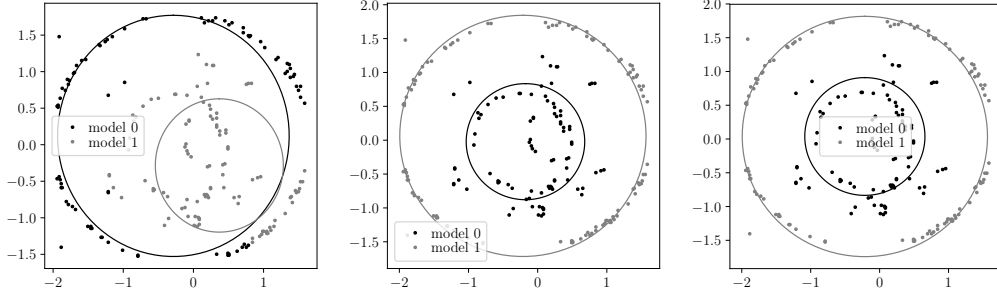


Рис. 6. Визуализация аппроксимации радужной оболочки. Слева на право: если указан регуляризатор  $R_0$ ; если указан регуляризатор  $R_1$ ; если указан регуляризатор  $R_2$

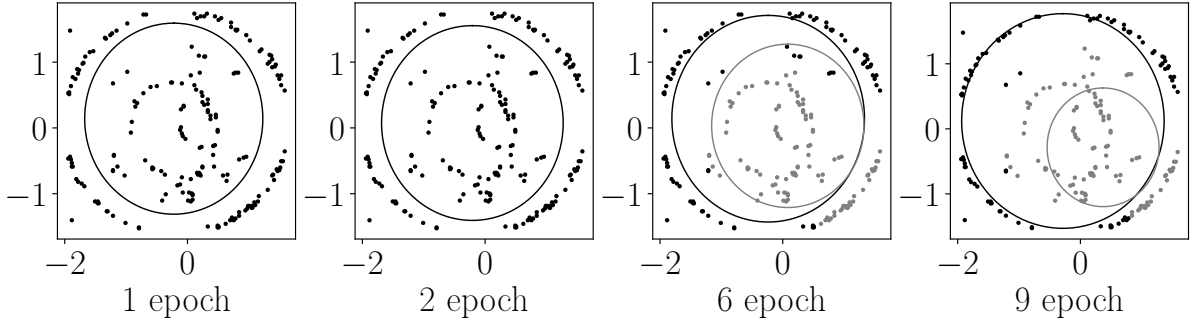


Рис. 7. Визуализация мультимодели в случае регуляризатора  $R_0$

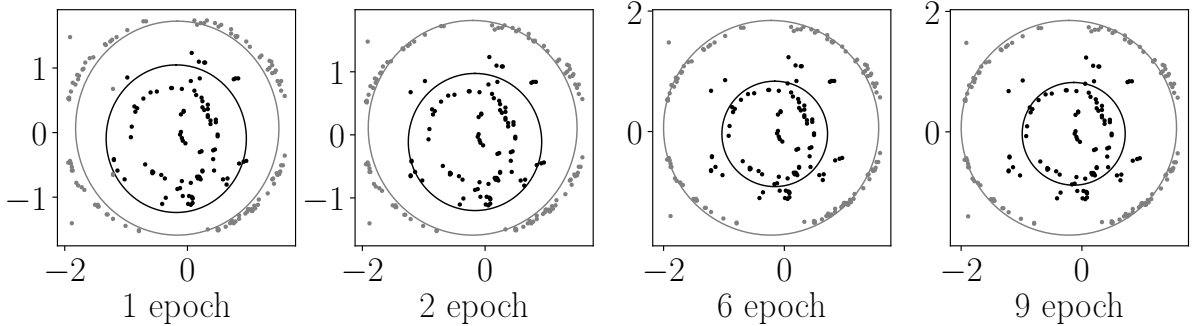


Рис. 8. Визуализация мультимодели в случае регуляризатора  $R_1$

задания разных регуляризаторов  $R_0, R_1, R_2$ . Регуляризатор  $R_0(\mathbf{V}, \mathbf{W}, E(\Omega)) = 0$ , что соответствует отсутствию регуляризатора. Регуляризатор

$$R_1(\mathbf{V}, \mathbf{W}, E(\Omega)) = - \sum_{k=1}^K \mathbf{w}_k^T \mathbf{w}_k$$

способствует околонулевым параметрам локальных моделей. Регуляризатор

$$R_2(\mathbf{V}, \mathbf{W}, E(\Omega)) = - \sum_{k=1}^K \mathbf{w}_k^T \mathbf{w}_k + \sum_{k=1}^K \sum_{k'=1}^K \sum_{j=1}^2 (w_k^j - w_{k'}^j)^2$$

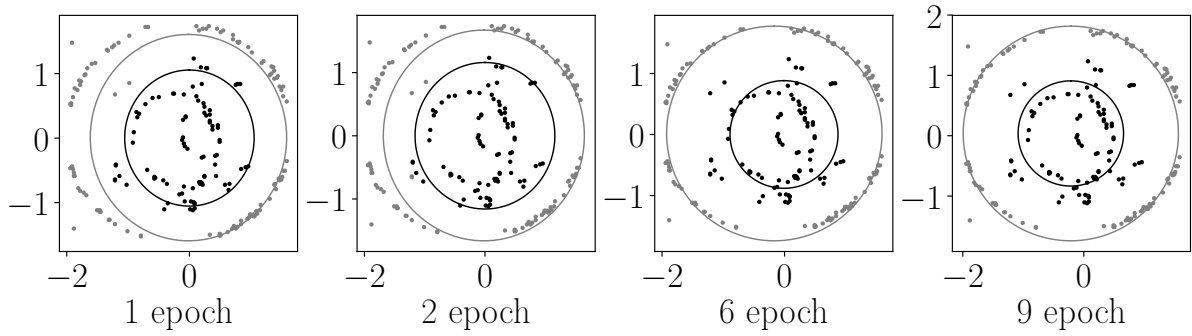


Рис. 9. Визуализация мультимодели в случае регуляризатора  $R_2$

способствует совпадению центров окружностей и близким к нулю параметрам локальных моделей.

Рис. 7 показывает результат аппроксимации радужной оболочки глаза после 10 итераций. Видно, что при отсутствии регуляризатора одна из окружностей находится некорректно. В случае задания регуляризатора  $R_1$ , модель аппроксимирует обе окружности, но окружности не концентричны. В случае задания регуляризатора  $R_2$  получаем концентрические окружности на изображении.

На рис. 8–10 показан процесс сходимости мультимodelей в случае указания разных регуляризаторов  $R_0, R_1, R_2$ . Видно, что модели с регуляризатором типа  $R_1$  и  $R_2$  аппроксимируют обе окружности, а мультимodelь с регуляризатором  $R_0$  аппроксимирует только большую окружность.

## 6. Заключение

В статье предлагается метод построения интерпретируемых моделей машинного обучения на основе экспертной информации. В качестве задачи рассматривается задача аппроксимации кривых второго порядка: параболы, гиперболы, эллипса. Аппроксимация кривых второго порядка применяется в задаче об аппроксимации радужной оболочки.

Проведен эксперимент, в ходе которого анализируется качество аппроксимации кривых второго порядка в зависимости от начального уровня шума в данных, а также в зависимости от регуляризатора функции ошибки. В ходе эксперимента показано, что с увеличением уровня шума в исходных данных точность аппроксимации снижается: при большом шуме форма аппроксимируемой фигуры меняется с параболы на гиперболу. Проведен вычислительный эксперимент по аппроксимации радужной оболочки глаза двумя концентрическими окружностями. Эксперимент показывает, что регуляризация на основе экспертной информации улучшает качество аппроксимации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ribeiro M., Singh S., Guestrin C.* Why Should I Trust You?: Explaining the Predictions of Any Classifier // Proc. of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on

- Knowledge Discovery and Data Mining. 2016. P. 1135–1144.
2. *He K., Ren S., Sun J., Zhang X.* Deep Residual Learning for Image Recognition // Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. Las Vegas. 2016. P. 770–778.
  3. *Han X., Yao M., Debayan D., Hui L., Ji-Liang T., Anil J.* Adversarial Attacks and Defenses in Images, Graphs and Text: A Review // International Journal of Automation and Computing. 2020. V. 17. P. 151–178.
  4. *Akhtar N., Mian A.* Threat of Adversarial Attacks on Deep Learning in Computer Vision: A Survey // IEEE Access. 2018. Vol. 6. P. 14410–14430.
  5. *Grabovoy A., Strijov V.* Probabilistic Interpretation of the Distillation Problem // Automat. Remote Control. 2022. V. 83. P. 123–137.
  6. *Matveev I.* Detection of iris in image by interrelated maxima of brightness gradient projections // Appl. Comput. Math. 2010. Vol. 9. P. 252–257.
  7. *Matveev I., Simonenko I.* Detecting precise iris boundaries by circular shortest path method // Pattern Recognition and Image Analysis. 2014. Vol. 24. P. 304–309.
  8. *Bowyer K., Hollingsworth K., Flynn P.* A Survey of Iris Biometrics Research: 2008–2010 // Handbook of iris recognition. 2010. P. 15–54.
  9. *Salamani D., Gadatsch S., Golling T., Stewart G., Ghosh A., Rousseau D., Hasib A., Schaarschmidt J.* Deep Generative Models for Fast Shower Simulation in ATLAS // IEEE 14th International Conference on e-Science. 2018. P. 348–348.
  10. *Chen Xi., Ishwaran H.* Random Forests for Genomic Data Analysis // Genomics. 2012. Vol. 6. P. 323–329.
  11. *Chen T., Guestrin C.* XGBoost: A Scalable Tree Boosting System // Proc. of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. 2016. P. 785–794.
  12. *Yuksel S., Wilson J., Gader P.* Twenty Years of Mixture of Experts // IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. 2012. Vol. 8. P. 1177–1193.
  13. *Dempster A., Laird N., Rubin D.* Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). 1977. Vol. 39. P. 1–38.
  14. *Ebrahimpour R., Moradian R., Esmkhani A., Jafarlou F.* Recognition of Persian handwritten digits using characterization loci and mixture of experts // J. Digital Content Technol. Appl. 2009. P. 42–46.
  15. *Peng F., Jacobs R., Tanner M.* Bayesian inference in mixtures-of-experts and hierarchical mixtures-of-experts models with an application to speech recognition // J. Amer. Stat. Assoc. 1996. Vol. 91. P. 953–960.

16. *Estabrooks A., Japkowicz N.* A mixture-of-experts framework for text classification // Proc. Workshop Comput. Natural Lang. Learn., Assoc. Comput. Linguist. 2001. P. 1–8.
17. *Cheung Y., Leung W., Xu L.* Application of mixture of experts model to financial time series forecasting // Proc. Int. Conf. Neural Netw. Signal Process. 1995. P. 1–4.
18. *Weigend A., Shi S.* Predicting daily probability distributions of S&P500 returns // J. Forecast. 2000. Vol. 19. P. 375–392.
19. *Cao L.* Support vector machines experts for time series forecasting // Neurocomputing. 2003. Vol. 51. P. 321–339.
20. *Mossavat S., Amft O., Vries B., Petkov P., Kleijn W.* A Bayesian hierarchical mixture of experts approach to estimate speech quality // Proc. 2nd Int. Workshop Qual. Multimedia Exper. 2010. P. 200–205.
21. *Sminchisescu C., Kanaujia A., Metaxas D.* Discriminative density propagation for visual tracking // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 2007. Vol. 29. P. 2030–2044.
22. *Tuerk A.* The state based mixture of experts HMM with applications to the recognition of spontaneous speech // Ph.D. thesis, University of Cambridge. 2001.
23. *Yumlu M., Gurgen F., Okay N.* Financial time series prediction using mixture of experts // Proc. 18th Int. Symp. Comput. Inf. Sci. 2003. P. 553–560.
24. *Grabovoy A., Strijov V.* Prior Distribution Selection for a Mixture of Experts // Comput. Math. and Math. Phys. 2021. P. 1140–1152.