

Анализ свойств вероятностных моделей в задачах обучения с экспертом

А. И. Базарова¹, А. В. Грабовой², В. В. Стрижов³

Аннотация: Данная работа посвящена построению интерпретируемых моделей в машинном обучении. Решается задача аппроксимации заданного набора фигур на контурном изображении. Вводятся предположения о том, что фигуры являются кривыми второго порядка. При аппроксимации фигур используется информация о типе, расположению и виде кривых, а также о множестве их возможных преобразований. Такая информация называется *экспертной*, а метод машинного обучения, основанный на экспертной информации, называется *обучением с экспертом*. Предполагается, что набор фигур аппроксимируется набором *локальных моделей*. Каждая локальная модель на основе экспертной информации аппроксимирует одну фигуру на контурном изображении. Для построения моделей предлагается отобразить кривые второго порядка в признаковое пространство, в котором каждая локальная модель является линейной моделью. Таким образом, кривые высших порядков распознаются при помощи композиции линейных моделей. В качестве прикладной задачи рассматривается задача аппроксимации радужки глаза на контурном изображении.

Ключевые слова: смесь экспертов, обучение с экспертом, линейные модели, интерпретируемые модели **DOI:** 00.00000/000000000000000

1 Введение

Построения интерпретируемых моделей в машинном обучении [1] является одной из ключевых проблем. Современные решения задачи классификации изображений на основе сетей глубокого обучения ResNet, VGG, Intercept [20] являются плохо интерпретируемыми моделями. В работах [21, 22, 23] показано, что сети глубокого обучения

¹Московский физико-технический институт, bazarova.ai@phystech.edu

²Московский физико-технический институт, grabovoy.av@phystech.edu

³Московский физико-технический институт, strijov@ccas.ru

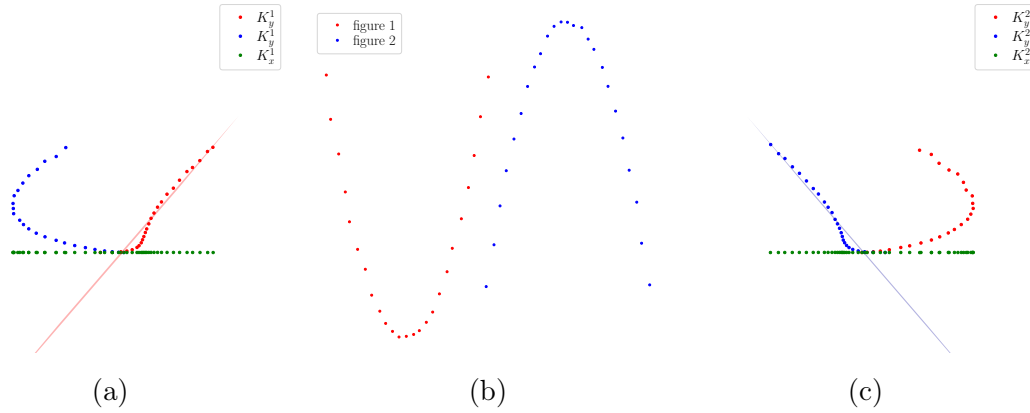


Рис. 1: Пример: а) представления данных первым экспертом; б) исходные данные; с) представления данных вторым экспертом.

чувствительны даже к малому шуму в данных, что связано с их неинтерпретируемостью.

В данной работе предлагается метод *обучения с экспертом*. Данный метод предполагает использование предметных знаний экспертов для повышения качества аппроксимации, а также для получения интерпретируемых моделей машинного обучения. Предметные знания экспертов о выборке назовем *экспертной информацией*. Предполагается, что использования экспертной информации позволяет аппроксимировать выборку простыми интерпретируемыми моделями, например линейными моделями. Методы машинного обучения, которые учитывают экспертные знания при построении моделей, назовем *обучением с экспертом*.

В работе решается задача аппроксимации кривых второго порядка на контурном изображении. Кривые второго порядка выбраны для анализа, так как они легко описываются линейными моделями. При этом данные фигуры требуется восстановить в таких прикладных задачах, как задача распознавания радужки глаза [14, 15, 16], задача описания трека частицы в адронном коллайдере [?]. Экспертная информация о кривой второго порядка позволяет отобразить точки на плоскости в новое признаковое описание, в котором каждая кривая аппроксимируется одной линейной моделью. Модель, которая аппроксимирует одну кривую называется *локальной моделью*. Для аппроксимации всего контурного изображения требуется аппроксимировать несколько кривых второго порядка при помощи нескольких локальных моделей. В данной работе вводятся следующие ограничения на изображения:

- 1) изображение состоит только из кривых второго порядка;
- 2) изображение аппроксимируется малым числом кривых второго порядка;
- 3) число и тип кривых на изображении известно.

При аппроксимации нескольких кривых на одном контурном изображении строится мультимодель. Примером мультимodelей является случайный лес [3], бустинг дере-

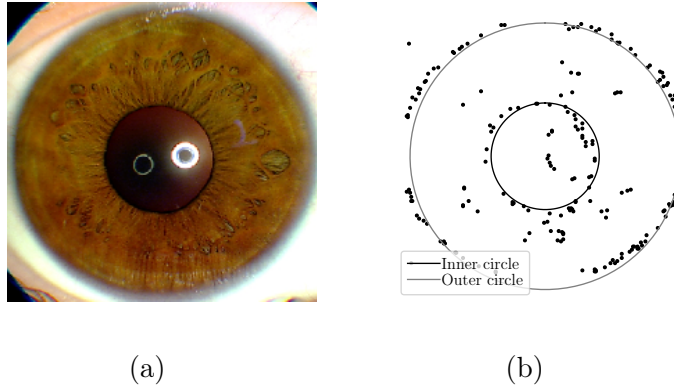


Рис. 2: Пример изображения радужки глаза и его контурного представления: а) изображение радужки глаза; б) контурное изображение радужки и аппроксимирующие данное изображение окружности.

вьев [2], смесь экспертов [4]. В данной работе в качестве мультимодели рассматривается смесь экспертов. Смесь экспертов — это мультимодель, которая линейно взвешивает локальные модели, которые аппроксимируют часть выборки. Значения весовых коэффициентов зависят от того объекта, для которого производится предсказание. Для решения задачи смеси экспертов используется вариационный ЕМ-алгоритм [6, 19, 17]. Смесь экспертов имеет множество применений в ряде прикладных задач. В работе [11] решается задача классификации текстов. В работах [8, 9, 5, 12, 13, 18, 7] смесь экспертов используется для предсказания временных рядов в задачах распознавания речи, дневной активности человека и предсказания стоимости ценных бумаг. В работе [10] смесь экспертов рассматривался для решения задачи распознавания рукописных цифр на изображениях.

В качестве примера рассматривается задача аппроксимации изображения радужки глаза. На рис. 2а показан пример изображения, которое требуется аппроксимировать. В данной работе рассматривается обработанное изображение, которое приведено в контурный вид, пример такого изображения показан на рис. 2б. На рис. 2б показаны две локальные модели окружностей, которые аппроксимируют радужку глаза. Окружности являются простым примером кривой второго порядка.

Для задачи аппроксимации радужки глаза используется следующая экспертная информация: радужка глаза аппроксимируется двумя концентрическими окружностями. Экспертная информация используется при построении признаков описания точек плоскости, а также при построении функции оптимизации. Часть функции ошибки для оптимизации, которая использует экспертную информацию называется регуляризатором. Таким образом информация о том, что на изображении окружности задается признаковым описанием, а информация о том, что окружности концентрические задается при помощи специального регуляризатора.

В вычислительном эксперименте проводится анализ качества аппроксимации контурного изображения в зависимости от заданной экспертной информации и от уровня

шума в синтетически сгенерированных данных. Проводится анализ качества аппроксимации радужки глаза в зависимости от количества экспертной информации, которая использовалась при построении модели. Заметим, что каждое аппроксимируемое изображение это отдельный набор точек, которые требуется аппроксимировать.

2 Постановка задачи нахождения параметров кривых второго порядка на изображении

Задано бинарное изображение:

$$\mathbf{M} \in \{0, 1\}^{m_1 \times m_2},$$

где 1 отвечает черной точке изображения, а 0 — белой точке фона. По изображению \mathbf{M} строится выборка \mathbf{C} , элементами которой являются координаты (x_i, y_i) черных точек:

$$\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times 2}.$$

Эксперт предполагает, что изображение состоит из кривой второго порядка Ω . Пусть для набора точек $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times 2}$, образующих кривую Ω , задано экспертная информация о фигуре $E(\Omega)$. Множество $E(\Omega)$ состоит из ожидаемого экспертом вида фигуры Ω и множества ее допустимых преобразований. На основе экспертного описания введем отображения в новую задачу для аппроксимации:

$$K_x(E(\Omega)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad K_y(E(\Omega)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

где K_x отображение объекты в признаковое описание объектов, n — число признаков, а K_y отображение в целевую переменную для объекта. Применив отображения K_x, K_y для выборки \mathbf{C} поэлементно получаем:

$$K_x(E(\Omega), \mathbf{c}) = \mathbf{x}, \quad K_y(E(\Omega), \mathbf{c}) = y, \quad (2.2)$$

где $\mathbf{c} = (x_i, y_i)$ — точка из выборки \mathbf{C} .

Применяя отображения (2.2) к исходному набору точек \mathbf{C} , получим выборку

$$\mathfrak{D} = \{(\mathbf{x}, y) \mid \forall \mathbf{c} \in \mathbf{C} \mathbf{x} = K_x(\mathbf{c}), y = K_y(\mathbf{c})\}. \quad (2.3)$$

Получаем, что исходная задача аппроксимации кривой Ω сводится к аппроксимации выборки \mathfrak{D} . В данной работе предполагается, что выборка \mathfrak{D} аппроксимируется линейной моделью:

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \mathbf{x}^T \mathbf{w}, \quad (2.4)$$

где \mathbf{w} вектор, параметр, который требуется найти.

Для поиска оптимального вектора параметров $\hat{\mathbf{w}}$ требуется решить следующую оптимизационную задачу:

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n} \sum_{(\mathbf{x}, y) \in \mathfrak{D}} \|g(\mathbf{x}, \mathbf{w}) - y\|_2^2. \quad (2.5)$$

Таким образом, задача аппроксимации исходной кривой Ω сводится к решению задачи линейной регрессии, т. е. нахождения компонент вектора $\hat{\mathbf{w}}$, связывающего полученные \mathbf{x} и y .

В случае, когда на изображении K кривых второго порядка $\Omega_1, \dots, \Omega_K$, для каждой из которых имеется экспертная информация $E_k = E(\Omega_k)$, $k \in \{1, \dots, K\}$, ставится задача построения мультимодели, называемой смесью K экспертов.

Определение 2.1. Назовем мультимодель f смесью K экспертов

$$f = \sum_{k=1}^K \pi_k(\mathbf{x}, \mathbf{V}) g_k(\mathbf{w}_k), \quad \pi_k(\mathbf{x}, \mathbf{V}) : \mathbb{R}^{n \times |\mathbf{V}|} \rightarrow [0, 1], \quad \sum_{k=1}^K \pi_k(\mathbf{x}, \mathbf{V}) = 1, \quad (2.6)$$

где g_k — локальная модель, называемая экспертом, \mathbf{x} — признаковое описание объекта, π_k — шлюзовая функция, вектор \mathbf{w}_k — параметры локальной модели, вектор \mathbf{V} — параметры шлюзовой функции. В данной работе g_k — линейная модель.

Для каждой кривой второго порядка заданы отображения (2.1). Для удобства введем следующее обозначение: $K_x^k(\mathbf{c}) = K_x(\Omega_k, \mathbf{c})$ и $K_y^k(\mathbf{c}) = K_y(\Omega_k, \mathbf{c})$. Тогда, используя локальные линейные модели, построим универсальную мультимодель, описывающую кривые $\Omega_1, \dots, \Omega_K$ на изображении \mathbf{M} :

$$f = \sum_{\mathbf{c} \in \mathbf{C}} \sum_{k=1}^K \pi_k(\mathbf{c}, \mathbf{V}) g_k(K_x^k(\mathbf{c}), \mathbf{w}_k), \quad (2.7)$$

где π_k — шлюзовая функция. В данной работе рассматривается простой случай, когда $\mathbf{x} = K_x^1(\mathbf{c}) = \dots = K_x^K(\mathbf{c})$, тогда выражение (2.7) переписывается в следующем простом виде:

$$f = \sum_{\mathbf{c} \in \mathbf{C}} \sum_{k=1}^K \pi_k(\mathbf{x}, \mathbf{V}) g_k(\mathbf{x}, \mathbf{w}_k), \quad (2.8)$$

где шлюзовая функция π_k имеет следующий вид:

$$\pi_k(\mathbf{x}, \mathbf{V}) : \mathbb{R}^{n \times |\mathbf{V}|} \rightarrow [0, 1], \quad \sum_{k=1}^K \pi_k(\mathbf{x}, \mathbf{V}) = 1, \quad (2.9)$$

где \mathbf{V} — параметры шлюзовой функции, а g_k — локальная модель.

В данной работе

$$\pi(\mathbf{x}, \mathbf{V}) = \text{softmax}(\mathbf{V}_1^\top \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{V}_2^\top \mathbf{x})), \quad (2.10)$$

где $\mathbf{V} = \{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2\}$ — параметры шлюзовой функции, $\mathbf{V}_1 \in \mathbb{R}^{p \times k}$, $\mathbf{V}_2 \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

Для нахождения оптимальных параметров мультимодели необходимо решить следующую задачу оптимизации:

$$\mathcal{L} = \sum_{(\mathbf{x}, y) \in \mathcal{D}} \sum_{k=1}^K \pi_k(\mathbf{x}, \mathbf{V}) (y - \mathbf{w}_k^\top \mathbf{x})^2 + R(\mathbf{V}, \mathbf{W}, E(\Omega)) \rightarrow \min_{\mathbf{V}, \mathbf{W}}, \quad (2.11)$$

где $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_K]$ — параметры локальных моделей, $R(\mathbf{V}, \mathbf{W}, E(\Omega))$ — регуляризация параметров, основанная на экспертной информации.

3 Построение признакового описания фигур

Единое пространство для кривых второго порядка. Произвольная кривая второго порядка, главная ось которой не параллельна оси ординат, задается следующим выражением:

$$x^2 = B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F',$$

где на коэффициенты B', C' накладываются ограничения, которые зависят от вида кривой. Выражение (2.2) принимает следующий вид:

$$K_x(\mathbf{c}_i) = [x_i y_i, y_i^2, x_i, y_i, 1], \quad K_y(\mathbf{c}_i) = x_i^2,$$

откуда получаем задачу линейной регрессии для восстановления параметров B', C', D', E', F' по составленной выборке.

Окружность. Частным случаем кривой второго порядка, рассмотрим окружность. Пусть (x_0, y_0) — центр окружности, которую необходимо найти на бинарном изображении \mathbf{M} , а r — ее радиус. Элементы выборки $(x_i, y_i) \in \mathbf{C}$ являются геометрическим местом точек, которое аппроксимируется уравнением окружности:

$$(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 = r^2. \quad (3.1)$$

Раскрыв скобки, получим:

$$(2x_0) \cdot x_i + (2y_0) \cdot y_i + (r^2 - x_0^2 - y_0^2) \cdot 1 = x_i^2 + y_i^2. \quad (3.2)$$

Тогда отображения (2.2) примут вид:

$$K_x(\mathbf{c}_i) = [x_i, y_i, 1] = \mathbf{x}, \quad K_y(\mathbf{c}_i) = x_i^2 + y_i^2 = y. \quad (3.3)$$

Поставим задачу линейной регрессии (2.3). Компоненты вектора $\mathbf{w} = [w_0, w_1, w_2]^T$, связывающего \mathbf{x} и y , восстанавливают параметры окружности:

$$x_0 = \frac{w_0}{2}, \quad y_0 = \frac{w_1}{2}, \quad r = \sqrt{w_2 + x_0^2 + y_0^2}. \quad (3.4)$$

4 Композиция фигур

Для построения композиции фигур воспользуемся выражением (2.11), которое принимает следующий вид:

$$\mathcal{L} = \sum_{\mathbf{c} \in \mathbf{C}} \sum_{k=1}^K \pi_k(\mathbf{c}, \mathbf{V}) \left(K_y^k(\mathbf{c}) - \mathbf{w}_k^T K_x^k(\mathbf{c}) \right)^2 + R(\mathbf{V}, \mathbf{W}, E(\Omega)) \rightarrow \min_{\mathbf{V}, \mathbf{W}}, \quad (4.1)$$

где K_x^k, K_y^k экспертное представление k -го эксперта. Предполагая, что все кривые на изображении описываются одним признаковым описанием $\mathbf{x} = K_x^1(\mathbf{c}) = \dots = K_x^K(\mathbf{c})$, $x = K_y^1(\mathbf{c}) = \dots = K_y^K(\mathbf{c})$, получаем следующую оптимизационную задачу:

$$\mathcal{L} = \sum_{(\mathbf{x}, y) \in \mathcal{D}} \sum_{k=1}^K \pi_k(\mathbf{x}, \mathbf{V}) (y - \mathbf{w}_k^\top \mathbf{x})^2 + R(\mathbf{V}, \mathbf{W}, E(\Omega)) \rightarrow \min_{\mathbf{V}, \mathbf{W}}, \quad (4.2)$$

В качестве регуляризатора R рассматриваются дополнительные ограничения на вектора параметров моделей. Для решения оптимизационной задачи (4.2) предлагается использовать ЕМ-алгоритм.

5 Вычислительный эксперимент

Проведен вычислительный эксперимент для анализа качества моделей кривых второго порядка на изображении. Эксперимент разделен на несколько частей. В первой части проводится эксперимент с несколькими окружностями на изображении. В второй части проводится анализ сходимости метода в зависимости от уровня шума в данных и от заданной экспертной информации. В третьей части проводится эксперимент по аппроксимации радужки глаза.

5.1 Эксперимент с окружностями

В данной части эксперимента показан пример обучения мультимодели для аппроксимации нескольких фигур второго порядка одновременно. В качестве данных используется синтетическая выборка, которая получена при помощи генерации трех произвольных непересекающихся окружностей, а также добавления к данным окружностям шума. Шум добавлялся к радиусу окружности для каждой точки, также в выборку были добавлены случайные точки, которые не относятся к окружностям. В эксперименте сравниваются две модели: в первой модели регуляризатор $R(\mathbf{V}, \mathbf{W}, E(\Omega)) = 0$, то есть модель без задания регуляризатора, во второй модели регуляризатор:

$$R(\mathbf{V}, \mathbf{W}, E(\Omega)) = - \sum_{k=1}^K \gamma (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_k^0)^\top (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_k^0),$$

где \mathbf{w}_k^0 априорные предположения о векторе параметров.

На рис. 3 показан результат построения ансамбля локально аппроксимирующих моделей, которые аппроксимируют выборку. Каждая локальная модель аппроксимирует одну окружность, причем при добавлении разного шума, качество аппроксимации падает. На рис. 4 показан график зависимости радиуса окружностей r и их центров (x_0, y_0) от номера итерации. Видно, что модель с заданием априорного распределения сходится быстрее чем модель без задания априорного распределения.

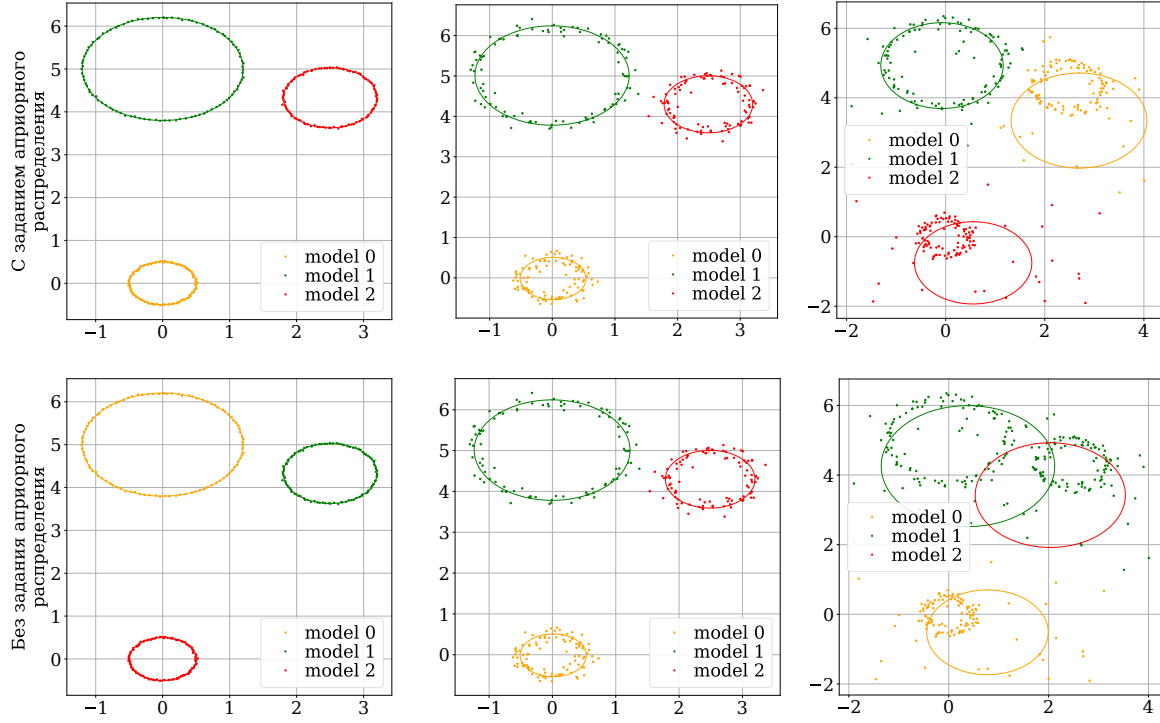


Рис. 3: Мультимодель в зависимости от разных априорных предположений и уровня шума. Сверху вниз: построение с заданием априорного распределения; без задания априорного распределения. Слева на право: окружности без шума; шум в радиусе окружности; шум в радиусе окружности а также произвольные точки по всему изображению.

5.2 Эксперимент с разным уровнем шума и дисперсии априорного распределения

В данной части эксперимента проводится анализ качества аппроксимации S от уровня шума β в данных и от параметра априорных распределений γ . Выборка получена следующим образом: сначала случайным образом выбирается два вектора параметров $\mathbf{w}_1^{\text{true}}$ и $\mathbf{w}_2^{\text{true}}$ — коэффициенты двух парабол. На основе векторов $\mathbf{w}_1^{\text{true}}$ и $\mathbf{w}_2^{\text{true}}$ выполняется генерация точек x_i и y_i с добавлением нормального шума $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \beta)$. При обучении мультимодели в качестве априорного распределения параметров рассматривается $\mathbf{w}_1 \sim \mathcal{N}(\mathbf{w}_1^{\text{true}}, \gamma \mathbf{I})$, $\mathbf{w}_2 \sim \mathcal{N}(\mathbf{w}_2^{\text{true}}, \gamma \mathbf{I})$.

Рассматривается следующий критерий качества:

$$S = \|\mathbf{w}_1^{\text{pred}} - \mathbf{w}_1^{\text{true}}\|_2^2 + \|\mathbf{w}_2^{\text{pred}} - \mathbf{w}_2^{\text{true}}\|_2^2,$$

где $\mathbf{w}_1^{\text{pred}}$ аппроксимация вектора параметров первой локальной модели, а $\mathbf{w}_2^{\text{pred}}$ аппроксимация вектора параметров второй локальной модели.

На рис. 6 показана зависимость критерия качества S от уровня шума β и параметра априорного распределения γ . Из графика видно, что при малом уровне шума β

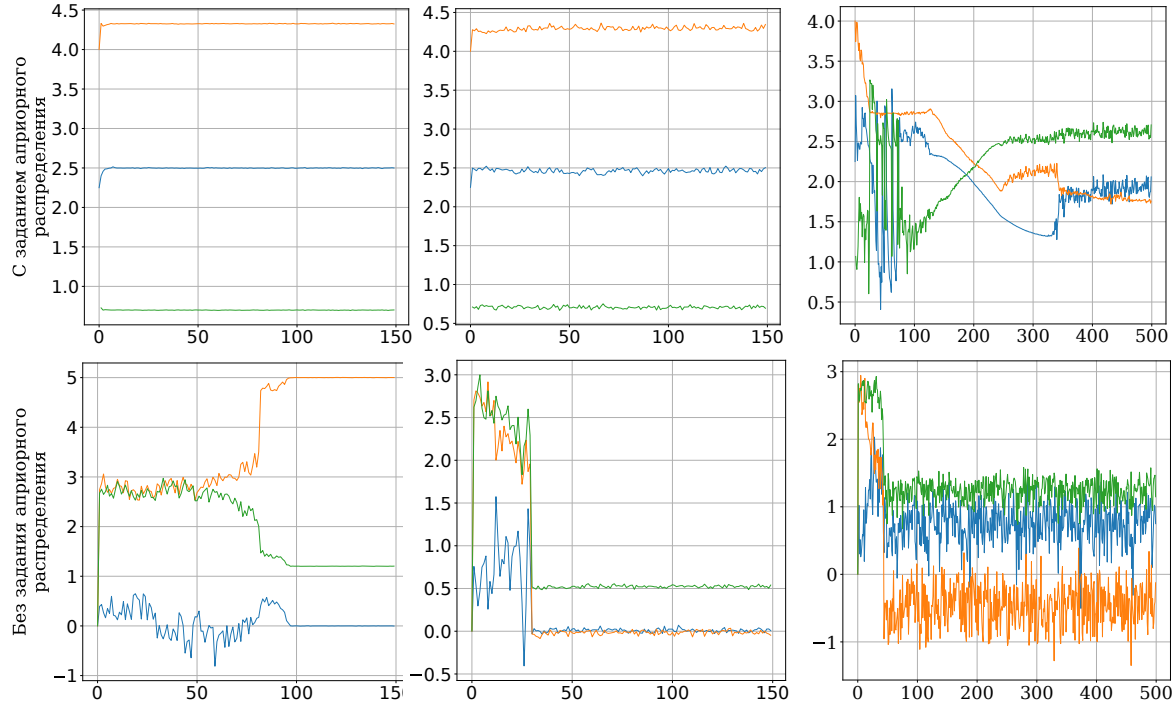


Рис. 4: Зависимость параметров r , x_0 и y_0 от номера итерации при разных априорных распределениях. Сверху вниз: построение с заданием априорного распределения; без задания априорного распределения. Слева на право: окружности без шума; шум в радиусе окружности; шум в радиусе окружности а также произвольные точки по всему изображению.

качество аппроксимации не зависит от параметра γ , а при увеличении шума β качество аппроксимации S падает.

На рис. 6 показан пример работы алгоритма при разных параметрах β и γ . Видно, что в случае отсутствия шума β обе локальные модели аппроксимируют выборку. При увеличении уровня шума качество аппроксимации падает: при $\beta = 0,2$ при увеличении γ первая локальная модель из параболы переходит в эллипс; при $\beta = 0,4$ при увеличении γ первая локальная модель из параболы переходит в эллипс, а вторая модель из параболы переходит в гиперболу.

5.3 Аппроксимации радужки глаза

Проводиться анализ качества аппроксимации для задачи аппроксимации радужки глаза на изображении. Радужка глаза состоит из двух концентрических окружностей, поэтому рассматривается мультимодель, которая состоит из двух экспертов: каждый эксперт аппроксимирует одну из окружностей. В вычислительном эксперименте сравнивается качество аппроксимации окружностей в случае задания разных регуляризаторов R_0, R_1, R_2 . Регуляризатор $R_0(\mathbf{V}, \mathbf{W}, E(\Omega)) = 0$, то есть регуляриза-

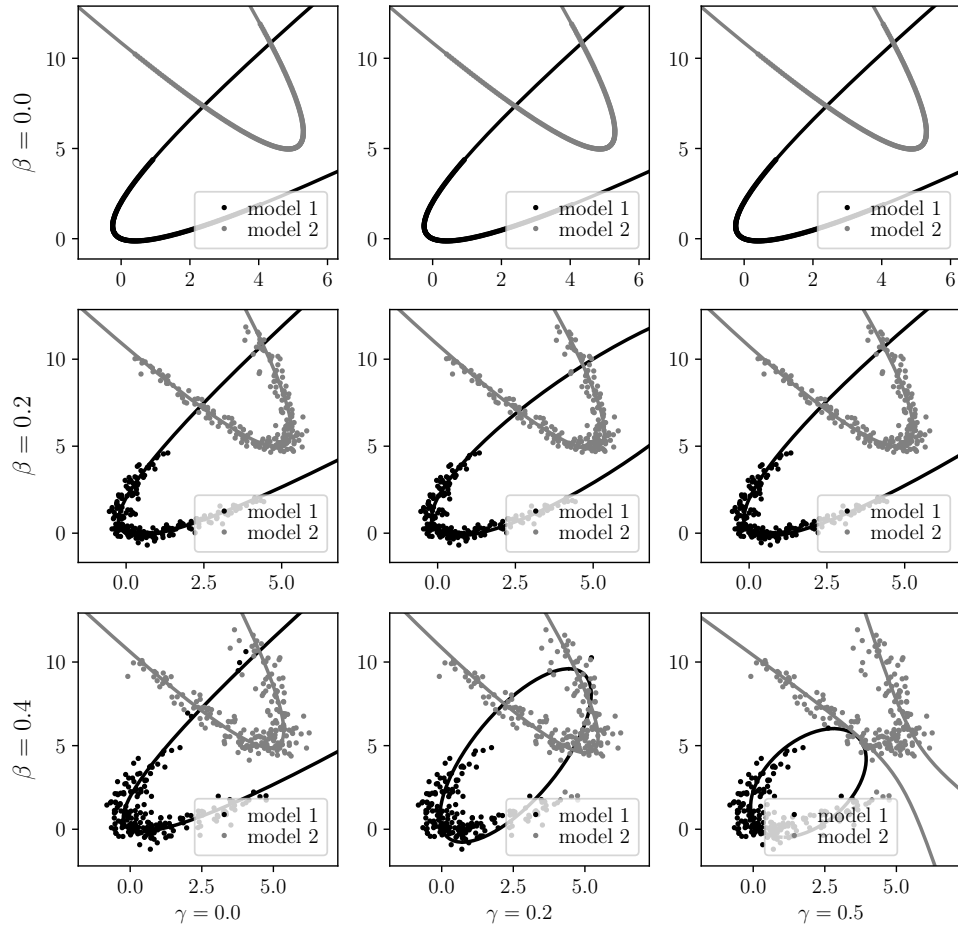


Рис. 5: Результат аппроксимации для данных с разным уровнем шума β и от дисперсии априорного распределения γ

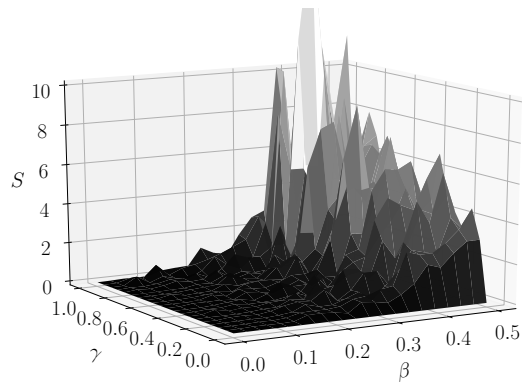


Рис. 6: Зависимость моделей от уровня шума β в данных, а также от дисперсии априорного распределения γ

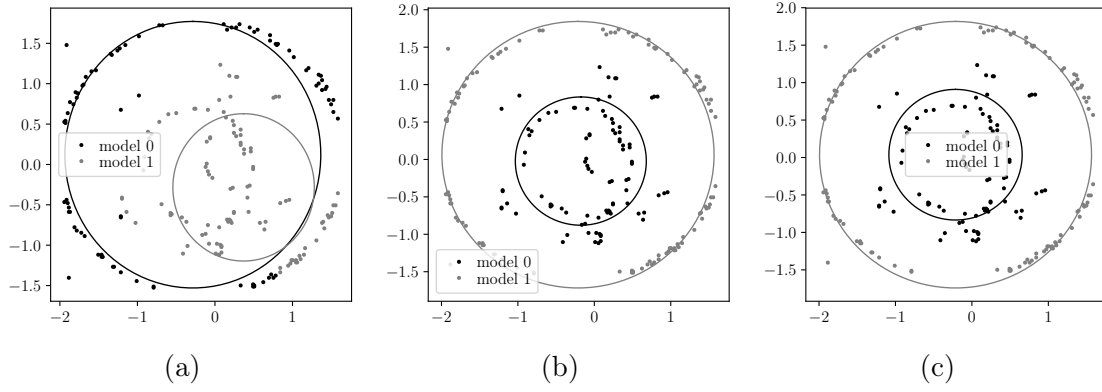


Рис. 7: Визуализация аппроксимации радужки глаза: а) в случае, если задан регуляризатор R_0 ; б) в случае, если задан регуляризатор R_1 ; в) в случае, если задан регуляризатор R_2 .

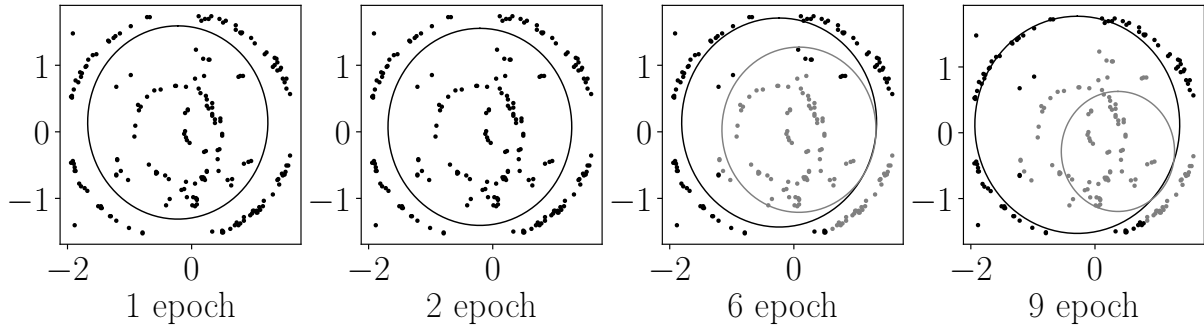


Рис. 8: Визуализация процесса сходимости мультимодели в случае регуляризатора R_0

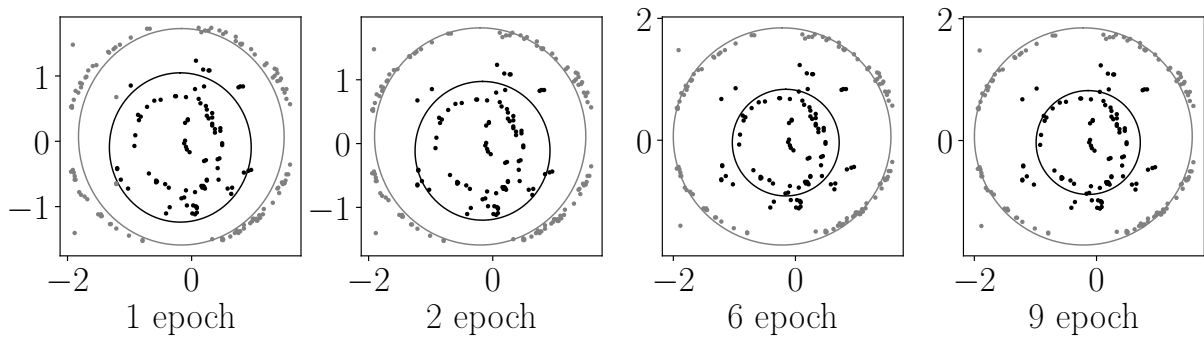


Рис. 9: Визуализация процесса сходимости мультимодели в случае регуляризатора R_1

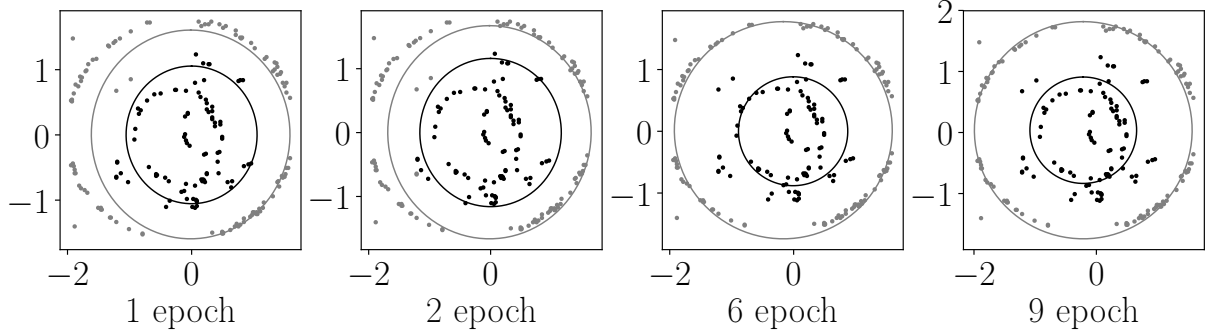


Рис. 10: Визуализация процесса сходимости мультимодели в случае регуляризатора R_2

тор отсутствует. Регуляризатор:

$$R_1(\mathbf{V}, \mathbf{W}, E(\Omega)) = - \sum_{k=1}^K \mathbf{w}_k^\top \mathbf{w}_k,$$

который поощряет близкие к нулю параметры локальных моделей. Регуляризатор

$$R_2(\mathbf{V}, \mathbf{W}, E(\Omega)) = - \sum_{k=1}^K \mathbf{w}_k^\top \mathbf{w}_k + \sum_{k=1}^K \sum_{k'=1}^K \sum_{j=1}^2 (w_k^j - w_{k'}^j)^2,$$

который поощряет совпадение центров окружностей и близкие к нулю параметры модели. На рис. 7 показан результат работы алгоритма аппроксимации радужки глаза после 10 итераций. Видно, что при отсутствии регуляризатора одна из окружностей находится не верно. В случае, если задан регуляризатор R_1 модель аппроксимирует обе окружности с хорошим качеством, но окружности не являются концентрическими. В случае задания регуляризатор R_2 получаем концентрические окружности на изображении.

На рис. 8-10 показан процесс сходимости мультимodelей в случае задания разных регуляризаторов R_0, R_1, R_2 . Видно, что модели с типом регуляризатора R_1 и R_2 аппроксимируют обе окружности, а мультимodelь с регуляризатором R_0 аппроксимирует только большую окружность.

6 Заключение

В данной работе предложен метод для построения интерпретируемых моделей машинного обучения на основе экспертной информации. В качестве задачи рассмотрена задача аппроксимации кривых второго порядка: парабола, гипербола, эллипс. Аппроксимации кривых второго порядка применена в задачи аппроксимации радужки глаза.

Проведен эксперимент, в котором анализируется качество аппроксимации кривых второго порядка в зависимости от начального уровня шума в данных, а также в зависимости от регуляризатора. В ходе эксперимента показано, что при увеличении уровня шума в начальных данных, точность аппроксимации падает: при большом шума вид аппроксимируемой фигуры изменяется с параболы на гиперболу.

Проведен вычислительный эксперимент по аппроксимации радужки глаза при помощи двух концентрических окружностей. В эксперименте показано, что регуляризация, которая основана на экспертной информации улучшает качество аппроксимации.

Список литературы

- [1] *Marco Tulio Ribeiro, Sameer Singh, Carlos Guestrin* "Why Should I Trust You?": Explaining the Predictions of Any Classifier // Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining PP. 1135–1144. 2016
- [2] *Chen Tianqi, Guestrin Carlos* XGBoost: A Scalable Tree Boosting System // KDD '16 Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. 2016.
- [3] *Chen Xi, Ishwaran Hemant* Random Forests for Genomic Data Analysis // Genomics. 2012. Issues. 99, No 6. pp. 323–329.
- [4] *Yuksel Seniha Esen, Wilson Joseph N., Gader Paul D* Twenty Years of Mixture of Experts // IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. 2012. Issues. 23, No 8. pp. 1177–1193.
- [5] *L. Cao* Support vector machines experts for time series forecasting // Neurocomputing, vol. 51, pp. 321–339, Apr. 2003.
- [6] *A. P. Dempster, N. M. Laird and D. B. Rubin* Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), Vol. 39, No. 1 pp. 1-38, 1977.
- [7] *M. S. Yumlu, F. S. Gurgen, N. Okay* Financial time series prediction using mixture of experts // in Proc. 18th Int. Symp. Comput. Inf. Sci., 2003, pp. 553–560.
- [8] *Y. M. Cheung, W. M. Leung, and L. Xu* Application of mixture of experts model to financial time series forecasting // in Proc. Int. Conf. Neural Netw. Signal Process., 1995, pp. 1–4.
- [9] *A. S. Weigend, S. Shi* Predicting daily probability distributions of S&P500 returns // J. Forecast., vol. 19, no. 4, pp. 375–392, 2000.

- [10] *R. Ebrahimpour, M. R. Moradian, A. Esmkhani, F. M. Jafarlou* Recognition of Persian handwritten digits using characterization loci and mixture of experts // J. Digital Content Technol. Appl., vol. 3, no. 3, pp. 42–46, 2009.
- [11] *A. Estabrooks, N. Japkowicz* A mixture-of-experts framework for text classification //in Proc. Workshop Comput. Natural Lang. Learn., Assoc. Comput. Linguist., 2001, pp. 1–8.
- [12] *S. Mossavat, O. Amft, B. de Vries, P. Petkov, W. Kleijn* A Bayesian hierarchical mixture of experts approach to estimate speech quality // in Proc. 2nd Int. Workshop Qual. Multimedia Exper., pp. 200–205., 2010
- [13] *C. Sminchisescu, A. Kanaujia, and D. Metaxas* B M3 E: Discriminative density propagation for visual tracking // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol. 29, no. 11, pp. 2030–2044, 2007.
- [14] *I. Matveev* Detection of iris in image by interrelated maxima of brightness gradient projections // Appl.Comput. Math. 9 (2), 252–257, 2010.
- [15] *I. Matveev, I. Simonenko*. Detecting precise iris boundaries by circular shortest path method // Pattern Recognition and Image Analysis. 24. 304-309. 2014.
- [16] *K. Bowyer, K. Hollingsworth, P. Flynn* A Survey of Iris Biometrics Research: 2008–2010.
- [17] *F. Peng, R. A. Jacobs, M. A. Tanner* Bayesian inference in mixtures-of-experts and hierarchical mixtures-of-experts models with an application to speech recognition // J. Amer. Stat. Assoc., vol. 91, no. 435, pp. 953–960, 1996.
- [18] *A. Tuerk* The state based mixture of experts HMM with applications to the recognition of spontaneous speech // Ph.D. thesis, Dept. Eng., Univ. Cambridge, Cambridge, U.K., 2001.
- [19] *Bishop C.* Pattern Recognition and Machine Learning. — Berlin: Springer, 2006. 758 p.
- [20] *Kaiming He* Deep Residual Learning for Image Recognition.
- [21] *Han Xu* Adversarial Attacks and Defenses in Images, Graphs and Text: A Review
- [22] *Xingjun Ma* Understanding Adversarial Attacks on Deep Learning Based Medical Image Analysis Systems
- [23] *Naveed Akhtar* Threat of Adversarial Attacks on Deep Learning in Computer Vision: A Survey
- [24] *Salamani Dalila* Deep generative models for fast shower simulation in ATLAS